Seminario de modularidad de representaciones de Galois (2020-1)

Héctor Pastén

Pontificia Universidad Católica de Chile

2020/04/10

Contenido de hoy:

Curvas modulares y formas modulares sobre $\mathbb{C}$.

- Grupos de matrices Γ actuando discretamente en $\mathfrak{h}$.
- Curvas modulares $X_\Gamma = \Gamma \backslash \mathfrak{h}^*$
- Interpretación modular: $x \in X_\Gamma \leftrightarrow$ curva elíptica E_x con Γ-estructura.
- Formas modulares $\approx$ diferenciales Γ-invariantes en $\mathfrak{h}$
  $\approx$ diferenciales en X_Γ
- Herramientas: Expansión de Fourier, producto de Petersson.
- Operadores diamante: descomponer $S_2(\Gamma_1(N))$.

Clase anterior:

Curvas elípticas.

- Ec. de Weierstrass y operación cuerda-tangente.
- Sobre $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}/\Lambda \simeq \mathbb{C}^\times/\langle q\rangle$ isom. exponencial
- Sobre $\mathbb{Q}_p$: curva de Tate $\mathbb{Q}_p^\times/\langle q\rangle$ (red. multiplictiva)
- Sobre $\mathbb{Q}$: Mordell-Weil, Lutz-Nagell, Mazur
- Tipos de reducción, función $L(E,s)$.

Acciones discretas: Ejemplo 1

$\mathbb{Z}$ actua en $\mathbb{R}$ por traslación: $(n, x) \mapsto x + n$.

- Acción discreta $\Rightarrow$ el espacio cuociente $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ es analíticamente decente (variedad real). De hecho, $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R} \simeq S^1$.
- Funciones en $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R} \leftrightarrow$ Funciones $\mathbb{Z}$-invariantes
- Ej.: $f(x) = \sin(2\pi x)$ cumple $f(x+n) = f(x)$. Bien definida en $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$.
- Diferenciales en $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R} \leftrightarrow$ diferenciales $f(x)dx$ en $\mathbb{R}$ que son $\mathbb{Z}$-invariantes.
- Ej.: $f(x)dx = \sin(2\pi x)dx$ cumple $f(x+n)d(x+n) = f(x)dx$.

Acciones discretas: Ejemplo 2

$\mathbb{Z}$ actua en $\mathbb{R}_{>0}$ por $(n, x) \mapsto e^n x$.

- Acción discreta $\Rightarrow$ el espacio cuociente $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}_{>0}$ es decente. De hecho, $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}_{>0} \simeq S^1$.
- Funciones en $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}_{>0}$ $\leftrightarrow$ Funciones $\mathbb{Z}$-invariantes
- Ej.: $f(x) = \sin(2\pi \log(x))$ cumple

$$f(e^n x) = \sin(2\pi(n + \log(x))) = f(x).$$

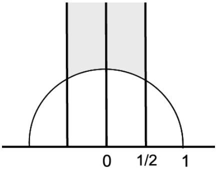
- Diferenciales en $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}_{>0}$ $\leftrightarrow$ diferenciales $f(x)dx$ en $\mathbb{R}_{>0}$ que son $\mathbb{Z}$-invariantes.
- Ej.: $h(x)dx = \frac{\sin(2\pi \log x)}{x} dx$ cumple $h(e^n x)d(e^n x) = h(x)dx$.
- Sin usar dx se ve más complicado: $h(e^n x) = e^{-n} h(x)$.

$SL_2(\mathbb{Z})$ actuando en $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$.

$SL_2(\mathbb{Z}) = \{\gamma \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}) : \det(\gamma) = 1\}$ actúa en $\mathfrak{h}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (\text{se mantiene } \Im > 0)$$

La acción es discreta. Dominio fundamental y su única cúspide:



Tiene ancho es 1 porque $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ actua por $z \mapsto z+1$.

La curva cuociente $Y_{SL_2(\mathbb{Z})} = SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}$ es una esfera pinchada.

$$\Gamma_0(N) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \bmod N\} \leq SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\Gamma_1(N) = \{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N\} \leq \Gamma_0(N)$$

Lema

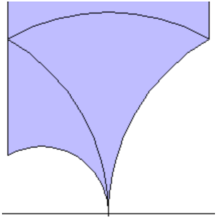
$\Gamma_1(N) \trianglelefteq \Gamma_0(N)$. *De hecho, $\gamma \mapsto d \bmod N$ define un morfismo de grupos $\Gamma_0(N) \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ sobreyectivo cuyo kernel es $\Gamma_1(N)$.*

Demostración (sobreyectividad queda de ejercicio).

Para $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ tenemos $1 = ad - bc \equiv ad \bmod N$ así que $d \bmod N \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$. Además $\gamma \mapsto d \bmod N$ es morfismo:
$\gamma\gamma' \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & d' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & dd' \end{pmatrix} \bmod N$. Lo del kernel:
$d \equiv 1 \bmod N \Rightarrow a \equiv ad \equiv 1 + bc \equiv 1 \bmod N$. □

$\Gamma_1(N) \leq \Gamma \leq \Gamma_0(N)$ subgrupo de congruencia de nivel N

- Γ actúa discretamente en $\mathfrak{h}$. Obtenemos la curva compleja $Y_\Gamma = \Gamma \backslash \mathfrak{h}$. Ejemplo: $\Gamma_0(2)$ y sus 2 cúspides. Tiene $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(2)] = 3$.



- Tenemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ así que toda función holomorfa $f \in Y_\Gamma$ cumple $f(z+1) = f(z)$ en $\mathfrak{h}$. Lo mismo para diferenciales: $f(z+1)dz = f(z+1)d(z+1) = f(z)dz$. Expansión de Fourier:

$$f(z) = \sum_n a_n q^n, \quad q = e^{2\pi i z} \quad (\textit{detalle}\text{: ¡polos en cúspides!}).$$

Interpretación modular de $Y_{SL_2(\mathbb{Z})} = SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{h}$

Los siguientes datos son equivalentes:

- Una curva elíptica $E/\mathbb{C}$, salvo isomorfismo.
- Un retículo $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ salvo multiplicar por $\alpha \in \mathbb{C}^\times$.
- Una tripleta (Λ, u, v) con $u, v \in \Lambda$ base positiva, salvo cambio de base positivo y salvo multiplicar por escalares.
- Un $\tau \in \mathfrak{h}$ salvo la acción de $SL_2(\mathbb{Z})$ (el retículo correspondiente es $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau$ con base positiva $1, \tau \in \Lambda_\tau$).

Así que $Y_{SL_2(Z)}$ es un espacio de moduli para curvas elípticas sobre $\mathbb{C}$.

- Para subgrupos de congruencia Γ, las curvas modulares afines Y_Γ tiene interpretaciones modulares (= como espacio de moduli de curvas elípticas) similares. Veremos $\Gamma_0(N)$ y $\Gamma_1(N)$.

Interpretación modular de $Y_{\Gamma_0(N)} = \Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h}$

Los siguientes datos son equivalentes:

- Una tripleta (E, E', ϕ) donde E, E' son curvas elípticas complejas y $\phi : E \to E'$ con $\ker(\phi)$ cíclico de orden N, salvo isomorfismo de tripletas.
- Un par (E, C) donde E es curva elíptica compleja y $C \leq E$ es subgrupo cíclico de orden N, salvo isomorfismo de pares. (Relación con lo anterior: $C = \ker(\phi)$)
- Un par (Λ, Λ') donde $\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \mathbb{C}$ son retículos y Λ'/Λ es cíclico de orden N, salvo multiplicar el par por $\alpha \in \mathbb{C}^\times$. (Relación con item anterior: $(\mathbb{C}/\Lambda, \Lambda'/\Lambda)$)
- $\tau \in \mathfrak{h}$ salvo la acción de $\Gamma_0(N)$ en τ (los retículos correspondientes son $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau$ y $\Lambda'_\tau = \frac{1}{N}\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau$)
- un $x \in Y_{\Gamma_0(N)}$.

Interpretación modular de $Y_{\Gamma_1(N)}$

Los siguientes datos son equivalentes:

- Un par (E, P) donde E es curva elípticas compleja y $P \in E$ tiene orden exactamente N.
- $\tau \in \mathfrak{h}$ salvo la acción de $\Gamma_1(N)$ en τ.
  ($E = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ y P es la imagen de $1/N$ en $E = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$)
- un $x \in Y_{\Gamma_1(N)}$.

Geometría de las interpretaciones modulares

Las interpretaciones modulares se pueden usar para definir objetos geométricos. Un ejemplo:

- Dado un par (E, P) con $P \in E$ de orden N, podemos asociarle el subgrupo $C = \langle P \rangle \leq E$, cíclico de orden N.
- Esto da una función $Y_{\Gamma_1(N)} \to Y_{\Gamma_0(N)}$.
- Desenvolviendo definiciones, uno chequea que esta función es simplemente la inducida por la inclusión $\Gamma_1(N) \subseteq \Gamma_0(N)$.

Geometría de las interpretaciones modulares

O todavía mas detalle:

- Dado un par (E, P) con $P \in E$ de orden N, podemos asociarle el subgrupo $C = \langle P \rangle \leq E$, cíclico de orden N. Cualquier otro generador $Q \in C$ daría el mismo resultado, y se cambia entre ellos multiplicando por $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$.
- Esto da una función $Y_{\Gamma_1(N)} \to Y_{\Gamma_0(N)}$ cuyas fibras vienen con una acción transitiva de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$.
- La función es inducida por la inclusión $\Gamma_1(N) \subseteq \Gamma_0(N)$.
- Esa inclusión es normal (lema anterior) así que el morfismo $Y_{\Gamma_1(N)} \to Y_{\Gamma_0(N)}$ es Galois con grupo de Galois $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$.

Las curvas modulares X_Γ

La curva modular Y_Γ se puede compactificar agregando finitas cúspides (se pega un pequeño disco en el sentido de superficies de Riemann). Esto da

$$\begin{aligned} X_\Gamma &= \Gamma \backslash (\mathfrak{h} \cup (\{i\infty\} \cup \mathbb{Q})) = \Gamma \backslash \mathfrak{h}^* \\ &= (\Gamma \backslash \mathfrak{h}) \cup (\text{fin. pts}) = Y_\Gamma \cup (\text{fin. pts}). \end{aligned}$$

- **Pros:** Ahora X_Γ es una superficie de Riemann compacta, por ende una curva algebraica *proyectiva* compleja.
- **Cons:** Esos finitos puntos nuevos no tienen interpretación modular en términos de curvas elípticas. (Pero hay remedio.)
- Las funciones holomorfas de X_Γ son aburridas, son todas constantes. En realidad no es problema; si no queremos polos, mejor miramos a los diferenicales holomorfos $H^0(X_\Gamma, \Omega^1)$.

Diferenciales holomorfos de Y_Γ

Sea $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ holomorfa, así $f(z)dz$ es un diferencial holomorfo en $\mathfrak{h}$.
¿Cuándo define un diferencial holomorfo en Y_Γ?

- Eso es lo mismo que pedir $f(\gamma \cdot z)d(\gamma \cdot z) = f(z)dz$, $\forall \gamma \in \Gamma$.
- Eso **NO** es lo mismo que pedir $f(\gamma \cdot z) = f(z)$, porque dz se transforma de manera no-trivial:

$$d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z\right) = d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}dz = (cz+d)^{-2}dz.$$

- La condición correcta en f es

$$\boxed{f(\gamma \cdot z) = (cz+d)^2 f(z)}$$

Diferenciales holomorfos de X_Γ

Sea $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ holomorfa, así $f(z)dz$ es un diferencial holomorfo en $\mathfrak{h}$. ¿Cuándo define un diferencial holomorfo en X_Γ?

Respuesta corta: Lo mismo que en Y_Γ pero hay que tener cuidado en las cúspides, no queremos polos para el diferencial en X_Γ.

Respuesta larga: f debe ser una **forma modular holomorfa, cúspidal, de peso** 2 **y nivel** Γ.

- (HOL) $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ es holomorfa
- (MOD) $f(\gamma \cdot z) = (cz + d)^2 f(z)$ para todo $\gamma \in \Gamma$ (en realidad, esto es modularidad en peso 2).
- (CUSP) $f(z) : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ se anula en las cúspides: cuando $z \to r$ una cúspide de $\mathfrak{h}$, se tiene $f(z) \to 0$.

El espacio de estas f se anota $S_2(\Gamma)$. Es un espacio vectorial complejo con

$$\dim S_2(\Gamma) = \dim H^0(X_\Gamma, \Omega^1) = \text{género}(X_\Gamma) < \infty.$$

La condición (CUSP)

Para que $f(z)dz$ se extienda a un diferencial holomorfo en las cúspides de X_Γ pedimos:

- (CUSP) $f(z)$ se anula en las cúspides: cuando $z \to r$ una cúspide de $\mathfrak{h}$, se tiene $f(z) \to 0$.

¿Está bien eso? ¿no debería simplemente pedir "límite finito" para evitar polos?

La condición (CUSP)

Usemos la expansión de Fourier para calcular el caso $r = i\infty$:

$$f(z) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots, \quad q = e^{2\pi i z}.$$

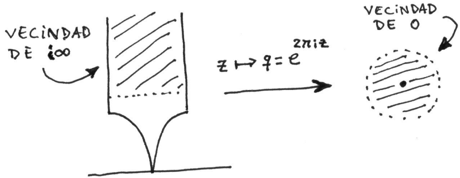
queremos ver $f(z)dz$ localmente en la cuspide $[i\infty] \in X_\Gamma$ y chequear que no hay polo. Un parámetro local (analítico) en $[i\infty]$ es $q = e^{2\pi i z}$.

La condición (CUSP)

Usemos la expansión de Fourier para calcular el caso $r = i\infty$:

$$f(z) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots, \quad q = e^{2\pi i z}.$$

queremos ver $f(z)dz$ localmente en la cuspide $[i\infty] \in X_\Gamma$ y chequear que no hay polo. Un parámetro local (analítico) en $[i\infty]$ es $q = e^{2\pi i z}$.



$$dq = 2\pi i q dz \Rightarrow f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\left(a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots\right)\frac{dq}{q}$$

Finalmente, la condición correcta es $a_0 = \lim_{z\to i\infty} f(z)$.

Formas modulares cuspidales

Una **forma modular holomorfa, cúspidal, de peso** k **y nivel** Γ es una f que cumple:

- (HOL) $f : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ es holomorfa
- (MOD) $f(\gamma \cdot z) = (cz+d)^k f(z)$ para todo $\gamma \in \Gamma$.
- (CUSP) $f(z)$ se anula en las cúspides: cuando $z \to r$ una cúspide de $\mathfrak{h}$, se tiene $f(z) \to 0$.

El espacio de estas f se anota $S_k(\Gamma)$. Es un espacio vectorial complejo con

$$\dim S_k(\Gamma) = \dim H^0(X_\Gamma, \text{cierto sheaf}) < \infty.$$

Nosotros estaremos interesados en $k = 2$, donde tenemos el isomorfismo

$$S_2(\Gamma) \simeq H^0(X_\Gamma, \Omega^1_{X_\Gamma/\mathbb{C}}), \quad f(z) \mapsto \omega_f := 2\pi i f(z) dz$$

Operadores diamante

Escribimos $X_1(N) = X_{\Gamma_1(N)}$ y $X_0(N) = X_{\Gamma_0(N)}$.

$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ actúa en el morfismo Galois $X_1(N) \to X_0(N)$. En particular actúa en $X_1(N)$ y en $S_2(\Gamma_1(N))$.

Para $d \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ elegimos cualquier $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ y el operador es

$$\langle d \rangle : X_1(N) \to X_1(N), \quad [z] \mapsto [\gamma \cdot z]$$

$$\langle d \rangle : S_2(\Gamma_1(N)) \to S_2(\Gamma_1(N)), \quad f(z) \mapsto (cz+d)^{-2} f(\gamma z).$$

Estos son los *operadores diamante*. Dan una representación compleja del grupo abeliano finito $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ y por ende una descomposición en caracteres de Dirichlet $\bmod N$ cuando $(cz+d)^{-2} f(\gamma z) = \chi(d) f(z)$:

$$S_2(\Gamma_1(N)) = \bigoplus_{\chi \bmod N} S_2(N, \chi), \quad \chi \text{ se llama nebentypus.}$$

Producto de Petersson

En $H^0(X_\Gamma, \Omega^1)$ teemos el producto L^2

$$(\omega, \omega') = \frac{i}{8\pi^2} \int_{X_\Gamma} \omega \wedge \overline{\omega'}.$$

Nota:
$dz \wedge \overline{dz} = d(x+iy) \wedge d(x-iy) = dx \wedge (-idy) + idy \wedge dx = -2idx \wedge dy$.
Esto determina un producto en $S_2(\Gamma)$:

$$(f,g) = \int_{\Gamma\backslash\mathfrak{h}} f(z)\overline{g(z)} dx \wedge dy.$$

El producto de Petersson. Ahora $S_2(\Gamma)$ es un espacio de Hilbert de dimensión finita.