

Seminario de modularidad de representaciones de Galois (2020-1)

Héctor Pastén

Pontificia Universidad Católica de Chile

2020/04/17

Contenido de hoy:

Algunos ejemplos y cálculos con grupos de congruencia, curvas modulares, formas modulares y operadores de Hecke.

- Matrices y curvas modulares
- La cota de Sturm (sobre \mathbb{C})
- El espacio viejo y nuevo.
- Ejemplo: $S_2(\Gamma_0(34))$

IMPORTANTE (puede ser para después, pero sugiero hacerlo):

- Crearse una cuenta CoCalc en www.sagemath.org
- Entrar por www.cocalc.com
- Crear nuevo proyecto.
- Apretar “ \oplus New” y elegir “sage worksheet”.

Algo general de acciones

- G un grupo que actúa en un conjunto X por la izquierda con dominio fundamental \mathcal{F} . Así, tenemos una biyección $\mathcal{F} \rightarrow G \backslash X$.
- Sea $H \leq G$. Ahora H actúa en X .
- Sea $R \subseteq G$ representantes de clases de $H \backslash G = \{Hg : g \in G\}$. Definir

$$\mathcal{F}_H = \bigcup_{g \in R} g \cdot \mathcal{F}.$$

Ejercicio. \mathcal{F}_H es dominio fundamental para H actuando en X .

Ayuda. $H \cdot \mathcal{F}_H = \bigcup_{g \in R} Hg \cdot \mathcal{F} = G \cdot \mathcal{F} = X$. Con eso solo falta chequear que no hay repeticiones.

Clases laterales de $\Gamma_0(2)$

Necesitamos representantes de $\Gamma_0(2) \backslash SL_2(\mathbb{Z})$. Tomamos $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ cuya clase lateral es $\Gamma_0(2)\gamma_1 = \Gamma_0(2)$.

Veamos el caso $c \equiv 1 \pmod{2}$. Tomamos $\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (representa una clase lateral distinta a la de γ_1) y vemos cuánto alcanza a cubrir:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \gamma_2^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

por lo tanto sirve cuando $c \equiv 1 \pmod{2}$ y $d \equiv 0 \pmod{2}$.

Finalmente, falta el caso $c \equiv d \equiv 1 \pmod{2}$. Tomando $\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vemos que cubre este último caso:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \gamma_3^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a \\ c-d & c \end{pmatrix}$$

En SAGE

Dan otros representantes. Pero seguiré usando los nuestros. De todas formas, así se calcula con SAGE (la sintaxis de parece a python):

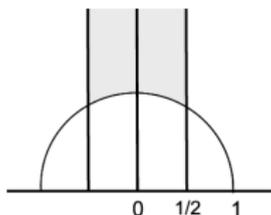
```
> G = SL2Z; G
Modular Group SL(2,Z)
> H = Gamma0(2); H; H.cusps()
Congruence Subgroup Gamma0(2)
[0, Infinity]
> R = H.coset_reps();
> for g in R :
>     print g
[1 0]
[0 1]
[ 0 -1]
[ 1  0]
[1 0]
[1 1]
```

Un dominio fundamental para $\Gamma_0(2)$

Sea \mathcal{F} el dominio fundamental estándar de $SL_2(\mathbb{Z})$. Entonces

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^3 \gamma_i \mathcal{F} = \mathcal{F} \cup \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{F} \cup \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{F}$$

Calcular esto es *fácil*: \mathcal{F} es un triángulo hiperbólico



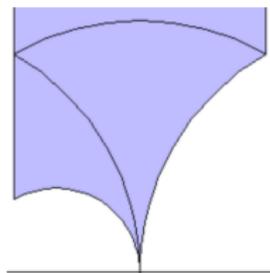
(sus lados son geodésicas) de vértices $i\infty$, ξ_3 , ξ_6 .

Las transformaciones fraccionales lineales preservan geodésicas (de hecho, con determinante 1 son isometrías hiperbólicas de \mathfrak{h}). Así que uno calcula la imagen de los vértices simplemente.

Un dominio fundamental para $\Gamma_0(2)$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

γ_1	$i\infty$	ξ_3	ξ_6
γ_2	0	ξ_6	ξ_3
γ_3	0	ξ_3	$\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$



Identificando los lados vemos que $Y_0(2) \simeq \mathbb{P}^1 - \{2 \text{ pts}\}$ y $X_0(2) \simeq \mathbb{P}^1$.
En particular $S_2(\Gamma_0(2)) = (0)$.

Género de curvas modulares, en general

- La inclusión $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ induce un morfismo $\pi : X_\Gamma \rightarrow X_0(1) \simeq \mathbb{P}^1$.
- Se calcula el grado y ramificación de este morfismo (se puede hacer de forma explícita con matrices, o con interpretación modular).
- Usar la fórmula de Riemann-Hurwitz y despejar $g(X_\Gamma)$.

Salen fórmulas largas, pero conocidas. Por ejemplo escribiendo en SAGE

```
for n in range(20): # comentario: n=0,1,...,19
    S0 = CuspForms(Gamma0(n+1),2) # aprovechamos g = dim S
    S1 = CuspForms(Gamma1(n+1),2)
    print([n+1, S0.dimension(), S1.dimension()])
```

se obtiene

N	1	...	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$g(X_0(N))$	0	...	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
$g(X_1(N))$	0	...	0	1	0	2	1	1	2	5	2	7	3

Género de curvas modulares $X_0(N)$

Otra cosa que se puede hacer con la fórmula explícita del género es acotar.

Teorema (El caso de $\Gamma_0(N)$)

Se tiene

$$g(X_0(N)) = \frac{N}{12} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) + 1 - \frac{v_\infty(N)}{2} - \frac{v_2(N)}{4} - \frac{v_3(N)}{3}$$

donde los $v_*(N)$ son términos ≥ 0 debidos a ramificación. En particular, para $N > 1$ se tiene

$$\dim S_2(\Gamma_0(N)) = g(X_0(N)) < \frac{N}{12} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) + 1.$$

Un truco de magia

Para calcular formas modulares uno trabaja con su q -expansión. Pero esa expansión es infinita. ¿Cómo saber cuándo parar un cálculo?

Teorema (Cota de Sturm sobre \mathbb{C} en peso $k = 2$)

Sea $f = a_1q + a_2q^2 + a_3q^3 + \dots \in S_2(\Gamma_0(N))$. Si $a_n = 0$ para todo

$$n \leq \left\lceil \frac{N}{6} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \right\rceil + 1$$

entonces $f = 0$. De hecho, si el género se sabe, entonces basta chequear $a_n = 0$ para $n \leq 2g(X_0(N))$.

Para X_Γ con $\Gamma_1(N) \leq \Gamma \leq \Gamma_0(N)$ vale el mismo teorema, pero hay que chequear $a_n = 0$ hasta $n \leq 2g(X_\Gamma)$ porque la cota para el género no es tan limpia.

Un truco de magia

Digamos que $f \neq 0$ (así, $N > 1$). Recordamos que a f le corresponde el diferencial regular $\omega_f \in H^0(X_0(N), \Omega^1)$ dado por

$$\omega_f = 2\pi i \cdot f \cdot \frac{dq}{q}$$

expresando en q , que es un parámetro local $X_0(N)$ en $i\infty$. Así que

$$\text{ord}_{i\infty}(\omega_f) = \text{ord}_q(f) - 1.$$

Como $\deg_{X_0(N)}(\Omega^1) = 2g - 2$ y ω_f no tiene polos, obtenemos

$$\text{ord}_q(f) = \text{ord}_{i\infty}(\omega_f) + 1 \leq 2g - 1 < \frac{N}{6} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right) + 1.$$



Ejemplo: Calcular T_2 en $S_2(\Gamma_0(23))$

Por defecto SAGE muestra q -expansiones hasta q^5 :

```
> S23 = CuspForms(Gamma0(23),2); S23.basis()  
[  
q - q^3 - q^4 + O(q^6),  
q^2 - 2*q^3 - q^4 + 2*q^5 + O(q^6)  
]
```

Notar que $g = \dim S_2(\Gamma_0(23)) = 2$ y la cota de Sturm es $2g = 4$ en este caso. Pero los operadores de Hecke necesitan algunos coeficientes más:

```
> S23 = CuspForms(Gamma0(23),2);  
> S23.basis()[0].q_expansion(9);  
> S23.basis()[1].q_expansion(9);  
q - q^3 - q^4 - 2*q^6 + 2*q^7 - q^8 + O(q^9)  
q^2 - 2*q^3 - q^4 + 2*q^5 + q^6 + 2*q^7 - 2*q^8 + O(q^9)
```

Ejemplo: Calcular T_2 en $S_2(\Gamma_0(23))$

Entonces $S_2(\Gamma_0(23))$ tiene la base

$$f_1 = q + 0q^2 - q^3 - q^4 + 0q^5 - 2q^6 + 2q^7 - q^8 + \dots$$

$$f_2 = 0q + q^2 - 2q^3 - q^4 + 2q^5 + q^6 + 2q^7 - 2q^8 + \dots$$

Calcularemos T_2 en esta base (notar que $2 \nmid N = 23$).

$$T_p(f) = \sum_n a_{pn}(f)q^n + p \sum_n a_n(f)q^{pn}$$

$$\begin{aligned} T_2(f_1) &= (0q - q^2 - 2q^3 - q^4 + \dots) + 2(q^2 + 0q^4 + \dots) \\ &= q^2 - 2q^3 - q^4 + \dots = f_2 \quad \text{por Sturm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(f_2) &= (q - q^2 + q^3 - 2q^4 + \dots) + 2(0q^2 + q^4 + \dots) \\ &= q - q^2 + q^3 + 0q^4 + \dots = f_1 - f_2 \quad \text{por Sturm} \end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular T_2 en $S_2(\Gamma_0(23))$

En resumen, $T_2(f_1) = f_2$ y $T_2(f_2) = f_1 - f_2$. Por lo tanto en esta base, T_2 es dada por

$$T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tiene polinomio característico $P(x) = x^2 + x - 1$. Los valores propios son $\lambda_1 = (-1 - \sqrt{5})/2$ y $\lambda_2 = (-1 + \sqrt{5})/2$.

Son distintos, así que T_2 es diagonalizable y tiene exactamente dos “vectores propios” con $a_1 = 1$ (eigenforms). Ellos se pueden expresar como combinación de f_1 y f_2 . No lo haré aquí, pero eso es álgebra lineal.

La teoría nos dice que las formas propias de T_2 de hecho diagonalizan *todos* los T_p con $p \neq 23$.

Ejercicio. Calcular similarmente una matriz para T_3 en la base f_1, f_2 .
Chequear directamente que $T_2 T_3 = T_3 T_2$.

Trucos baratos para obtener formas modulares en nivel más alto (el caso $\Gamma_0(N)$)

Lema

Si $f(z) \in S_2(\Gamma_0(m))$ y $m|N$, entonces $f(z) \in S_2(\Gamma_0(N))$.

Proof.

Porque $\Gamma_0(m) \supseteq \Gamma_0(N)$. □

Lema

Si $f(z) \in S_2(\Gamma_0(m))$ y r es un entero positivo, entonces $f(rz) \in S_2(\Gamma_0(rm))$.

Este último es un cálculo que voy a omitir.

Formas viejas y nuevas

Combinando esos trucos baratos y tomando combinaciones lineales, obtenemos las *formas viejas*:

$S_2(N)^{old}$ es el subespacio de $S_2(N)$ generado por las imágenes de las siguientes funciones lineales:

- Para $m|N$ con $m < N$, tomar r divisor de N/m . Entonces tenemos un morfismo inyectivo $S_2(m) \rightarrow S_2(N)$ dado por $f(z) \mapsto f(rz)$.

Finalmente, $S_2(N)^{new}$ es el complemento ortogonal de $S_2(N)^{old}$ en $S_2(N)$.

En la práctica nadie calcula esos productos de Petersson. La teoría de Atkin-Lehner nos dice que $S_2(N)^{new}$ es generado por eigeforms de los T_p con $p \nmid N$ que NO vienen de nivel $m|N$ más chico. Así que mejor uno busca formas propias para algunos T_p (hay un método para esto, usando “símbolos modulares” [Mazur, Manin, Cremona, Stein]).

$S_2(\Gamma_0(34))$

Veamos una base para el espacio $S_2(\Gamma_0(34))$:

```
> S34 = CuspForms(Gamma0(34),2); S34.basis()  
[  
q - 2*q^4 - 2*q^5 + O(q^6),  
q^2 - q^4 + O(q^6),  
q^3 - 2*q^4 - q^5 + O(q^6)  
]
```

$S_2(\Gamma_0(34))$

Para saber la parte vieja recordamos que $S_2(\Gamma_0(2)) = (0)$. Entonces solo vienen de $S_2(\Gamma_0(17))$.

```
> S17 = CuspForms(Gamma0(17),2); S17.basis()  
[  
q - q^2 - q^4 - 2*q^5 + O(q^6)  
]
```

Sea $f = q - 2q^2 - q^4 - 2q^5 + \dots \in S_2(17)$ esta forma.

Entonces $f(z)$ y $f(2z) = q^2 - 2q^4 - q^8 - 2q^{10} + \dots$ generan $S_2(34)^{old}$.

$S_2(\Gamma_0(34))$

En particular, $\dim S_2(34)^{new} = 1$. Esta única eigenform tiene coeficientes de Fourier en \mathbb{Z} : si fuera en una extensión algebraica, sus conjugados de Galois también estarían en $S_2(34)^{new}$ pero la dimensión es 1.

SAGE nos da la lista de las newforms (eigenforms nuevas con $a_1 = 1$):

```
> S34 = CuspForms(Gamma0(34), 2); S34.newforms()  
[q + q^2 - 2*q^3 + q^4 + O(q^6)]
```

en este caso una sola. Ella genera $S_2(\Gamma_0(34))^{new}$.

