Seminario de modularidad de representaciones de Galois (2020-1)

Seminario teoría de números

Fernando Herrera

21 de abril de 2020

Recuerdos

Sea $N \in \mathbb{N}$

Recuerdos

Sea $N \in \mathbb{N}$

- $\Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})/c \equiv 0(mod \ N)\} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}(mod \ N)$

Recuerdos

Sea $N \in \mathbb{N}$

- $\Gamma_0(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}) / c \equiv 0 (mod\ \ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)(mod\ \ N)$
- $\Gamma_1(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N) / a \equiv 1 (mod\ \ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(mod\ \ N)$

Recuerdos

Sea $N \in \mathbb{N}$

- $\Gamma_0(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})/c \equiv 0(mod\ \ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)(mod\ \ N)$
- $\Gamma_1(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)/a \equiv 1(mod\ \ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(mod\ \ N)$
- $S_2(\Gamma_1(N)) = \{f : H \to \mathbb{C}\}$ tales que:

Recuerdos

Sea $N \in \mathbb{N}$

- $\Gamma_0(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})/c \equiv 0(mod\ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)(mod\ N)$
- $\Gamma_1(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)/a \equiv 1(mod\ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(mod\ N)$
- $S_2(\Gamma_1(N)) = \{f : H \to \mathbb{C}\}$ tales que:
  - f holomorfa en H

Recuerdos

Sea $N \in \mathbb{N}$

- $\Gamma_0(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})/c \equiv 0(mod\ \ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)(mod\ \ N)$
- $\Gamma_1(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)/a \equiv 1(mod\ \ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(mod\ \ N)$
- $S_2(\Gamma_1(N)) = \{f : H \to \mathbb{C}\}$ tales que:
  - f holomorfa en H
  - $f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^2 f(\tau) \qquad \forall\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1(N)$

Recuerdos

Sea $N \in \mathbb{N}$

- $\Gamma_0(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}) / c \equiv 0 (mod \;\; N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)(mod \;\; N)$
- $\Gamma_1(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N) / a \equiv 1 (mod \;\; N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(mod \;\; N)$
- $S_2(\Gamma_1(N)) = \{f : H \to \mathbb{C}\}$ tales que:
  - f holomorfa en H
  - $f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^2 f(\tau) \qquad \forall \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1(N)$
  - f se anula en las cúspides (si $\tau \to r$ cúspide entonces $f(\tau) \to 0$)

Recuerdos

Sea $N \in \mathbb{N}$

- $\Gamma_0(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})/c \equiv 0(mod\ \ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)(mod\ \ N)$
- $\Gamma_1(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)/a \equiv 1(mod\ \ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(mod\ \ N)$
- $S_2(\Gamma_1(N)) = \{f : H \to \mathbb{C}\}$ tales que:
  - f holomorfa en H
  - $f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^2 f(\tau) \qquad \forall\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1(N)$
  - f se anula en las cúspides (si $\tau \to r$ cúspide entonces $f(\tau) \to 0$)
- Si χ es un caracter de Dirichlet módulo N, definimos $S_2(N, \chi)$ como $\{f \in S_2(\Gamma_1(N))/f(\gamma\tau) = \chi(d)(c\tau + d)^2 f(\tau)\ \ \forall\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)\}$

Recuerdos

Sea $N \in \mathbb{N}$

- $\Gamma_0(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})/c \equiv 0(mod\ \ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)(mod\ \ N)$
- $\Gamma_1(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)/a \equiv 1(mod\ \ N)\} \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(mod\ \ N)$
- $S_2(\Gamma_1(N)) = \{f : H \to \mathbb{C}\}$ tales que:
  - f holomorfa en H
  - $f(\gamma\tau) = (c\tau + d)^2 f(\tau) \qquad \forall\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1(N)$
  - f se anula en las cúspides (si $\tau \to r$ cúspide entonces $f(\tau) \to 0$)
- Si χ es un caracter de Dirichlet módulo N, definimos $S_2(N, \chi)$ como $\{f \in S_2(\Gamma_1(N))/f(\gamma\tau) = \chi(d)(c\tau + d)^2 f(\tau)\ \ \forall\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)\}$
- Si $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ entonces $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ con $q = e^{2\pi i\tau}$

Motivación

Considerando $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}$,

Motivación

Considerando $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau}$,toda $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ tiene una única sucesión de números complejos $\{a_n\}$

Motivación

Considerando $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau}$,toda $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ tiene una única sucesión de números complejos $\{a_n\}$ y estamos interesados en estudiar la función L asociada

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Orden de a_n

Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$

Theorem

Los coeficientes a_n satisfacen

$$| a_n | \leq C_f \, \sigma_0(n) \, \sqrt{n}$$

Orden de a_n

Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$

Theorem

Los coeficientes a_n satisfacen

$$| a_n | \leq C_f \ \sigma_0(n) \ \sqrt{n}$$

Theorem (2)

Sea G un subgrupo de índice finito de $SL_2(\mathbb{Z})$ y sea $f \in S_2(G)$. Entonces

$$a_n = O(n)$$

Puntos demostración teorema 2

Dem:
Escribimos $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_\gamma G\gamma$, $\tau = x + iy$.

Puntos demostración teorema 2

Dem:
Escribimos $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_\gamma G\gamma$, $\tau = x + iy$.
Consideramos

$$h(\tau) = y^2 \sum_\gamma | f(\gamma\tau) |^2$$

Puntos demostración teorema 2

Dem:
Escribimos $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_\gamma G\gamma$, $\tau = x + iy$.
Consideramos
$$h(\tau) = y^2 \sum_\gamma \mid f(\gamma\tau) \mid^2$$

- h es invariante bajo $SL_2(\mathbb{Z})$

Puntos demostración teorema 2

Dem:
Escribimos $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_\gamma G\gamma$, $\tau = x + iy$.
Consideramos

$$h(\tau) = y^2 \sum_\gamma | f(\gamma\tau) |^2$$

- h es invariante bajo $SL_2(\mathbb{Z})$
- h es acotado en el dominio fundamental

Puntos demostración teorema 2

Dem:
Escribimos $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_\gamma G\gamma$, $\tau = x + iy$.
Consideramos

$$h(\tau) = y^2 \sum_\gamma \mid f(\gamma\tau) \mid^2$$

- h es invariante bajo $SL_2(\mathbb{Z})$
- h es acotado en el dominio fundamental
- $f(\tau) = O(y^{-1})$

Puntos demostración teorema 2

Dem:
Escribimos $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_\gamma G\gamma$, $\tau = x + iy$.
Consideramos
$$h(\tau) = y^2 \sum_\gamma \mid f(\gamma\tau) \mid^2$$

- h es invariante bajo $SL_2(\mathbb{Z})$
- h es acotado en el dominio fundamental
- $f(\tau) = O(y^{-1})$
- $a_n = O(n)$

Definición función L

Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$.

Definition

La función L asociada a f es

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Definición función L

Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$.

Definition

La función L asociada a f es

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Lemma

L_f converge absolutamente y define una función holomorfa para $\Re(s) > 3/2$.

Dem: $\sigma_0(n) = o(n^{\epsilon})$ más teorema1.

Transformada de Mellin de una forma cuspidal

Sea $f(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$ y $L_f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$

Transformada de Mellin de una forma cuspidal

Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$ y $L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$
¿L_f posee continuación analítica a $\mathbb{C}$?

Transformada de Mellin de una forma cuspidal

Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$ y $L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$

¿L_f posee continuación analítica a $\mathbb{C}$?

¿L_f posee ecuación funcional ?

Transformada de Mellin de una forma cuspidal

Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$ y $L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$
¿L_f posee continuación analítica a $\mathbb{C}$?
¿L_f posee ecuación funcional ?

Lemma

$$\int_0^{\infty} f(iy) y^s \frac{dy}{y} = (2\pi)^{-s}\Gamma(s) L_f(s)$$

si $\Re(s) > 3/2$.

Transformada de Mellin de una forma cuspidal

Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$ y $L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$
¿L_f posee continuación analítica a $\mathbb{C}$?
¿L_f posee ecuación funcional ?

Lemma

$$\int_0^{\infty} f(iy) y^s \frac{dy}{y} = (2\pi)^{-s}\Gamma(s) L_f(s)$$

si $\Re(s) > 3/2$.

Dem: Consideramos $\int_0^{i\infty} f(\tau)\tau^s \frac{d\tau}{\tau}$ y mostramos que converge si $\Re(s) > 3/2$.

Transformada de Mellin de una forma cuspidal

Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$ y $L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$
¿L_f posee continuación analítica a $\mathbb{C}$?
¿L_f posee ecuación funcional ?

Lemma

$$\int_0^{\infty} f(iy) y^s \frac{dy}{y} = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L_f(s)$$

si $\Re(s) > 3/2$.

Dem: Consideramos $\int_0^{i\infty} f(\tau)\tau^s \frac{d\tau}{\tau}$ y mostramos que converge si $\Re(s) > 3/2$.

$$\int_0^{i\infty} f(\tau)\tau^s \frac{d\tau}{\tau}$$

Transformada de Mellin de una forma cuspidal

Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$ y $L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$
¿L_f posee continuación analítica a $\mathbb{C}$?
¿L_f posee ecuación funcional ?

Lemma

$$\int_0^{\infty} f(iy) y^s \frac{dy}{y} = (2\pi)^{-s}\Gamma(s) L_f(s)$$

si $\Re(s) > 3/2$.

Dem: Consideramos $\int_0^{i\infty} f(\tau)\tau^s \frac{d\tau}{\tau}$ y mostramos que converge si $\Re(s) > 3/2$.

$$\int_0^{i\infty} f(\tau)\tau^s \frac{d\tau}{\tau} \quad = \int_0^{i\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \right) \tau^s \frac{d\tau}{\tau}$$

Transformada de Mellin de una forma cuspidal

Sea $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \in S_2(\Gamma_1(N))$ y $L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$
¿L_f posee continuación analítica a $\mathbb{C}$?
¿L_f posee ecuación funcional ?

Lemma

$$\int_0^{\infty} f(iy)y^s \frac{dy}{y} = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_f(s)$$

si $\Re(s) > 3/2$.

Dem: Consideramos $\int_0^{i\infty} f(\tau)\tau^s \frac{d\tau}{\tau}$ y mostramos que converge si $\Re(s) > 3/2$.

$$\begin{aligned}\int_0^{i\infty} f(\tau)\tau^s \frac{d\tau}{\tau} &= \int_0^{i\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau}\right) \tau^s \frac{d\tau}{\tau} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{i\infty} e^{2\pi i n\tau} \tau^s \frac{d\tau}{\tau}\end{aligned}$$

haciendo la sustitución $t = -2\pi i n \tau$, tenemos $\frac{dt}{t} = \frac{d\tau}{\tau}$ y

haciendo la sustitución $t = -2\pi i n\tau$, tenemos $\frac{dt}{t} = \frac{d\tau}{\tau}$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{i\infty} e^{2\pi i n\tau} \tau^s \frac{d\tau}{\tau} \quad =$$

haciendo la sustitución $t = -2\pi i n\tau$, tenemos $\frac{dt}{t} = \frac{d\tau}{\tau}$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{i\infty} e^{2\pi i n\tau} \tau^s \frac{d\tau}{\tau} \quad = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{i\infty} e^{-t} \left(-\frac{t}{2\pi i n}\right)^s \frac{dt}{t}$$

haciendo la sustitución $t = -2\pi i n\tau$, tenemos $\frac{dt}{t} = \frac{d\tau}{\tau}$ y

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{i\infty} e^{2\pi i n\tau} \tau^s \frac{d\tau}{\tau} \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{i\infty} e^{-t} \left(-\frac{t}{2\pi i n}\right)^s \frac{dt}{t} \\ &= (-2\pi i)^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \int_0^{\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

haciendo la sustitución $t = -2\pi i n\tau$, tenemos $\frac{dt}{t} = \frac{d\tau}{\tau}$ y

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{i\infty} e^{2\pi i n\tau} \tau^s \frac{d\tau}{\tau} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{i\infty} e^{-t} \left(-\frac{t}{2\pi i n}\right)^s \frac{dt}{t} \\
&= (-2\pi i)^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \int_0^{\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t} \\
&= (-2\pi i)^s \Gamma(s) L_f(s).
\end{aligned}$$

Completación de la función L_f

Definition

$$\Lambda_f(s) = N^{\frac{s}{2}}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_f(s)$$

para $\Re(s) > 3/2$.

Completación de la función L_f

Definition

$$\Lambda_f(s) = N^{\frac{s}{2}}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_f(s)$$

para $\Re(s) > 3/2$.

Hemos mostrado

Lemma

$$\Lambda_f(s) = N^{\frac{s}{2}} \int_0^\infty f(iy)y^s \frac{dy}{y}$$

si $\Re(s) > 3/2$.

Continuación analítica y ecuación funcional de L_f

Theorem

- *L_f es entera*

Continuación analítica y ecuación funcional de L_f

Theorem

- *L_f es entera*
- $\Lambda_f(s) = -\Lambda_{\omega_N(f)}(2-s)$

donde $\omega_N(f)(\tau) = \frac{1}{N\tau^2} f(\frac{-1}{N\tau})$ *es la involución de Atkin-Lehner.*

Continuación analítica y ecuación funcional de L_f

Theorem

- *L_f es entera*
- $\Lambda_f(s) = -\Lambda_{\omega_{N(f)}}(2-s)$

donde $\omega_N(f)(\tau) = \frac{1}{N\tau^2} f\left(\frac{-1}{N\tau}\right)$ *es la involución de Atkin-Lehner.*

Lemma

Sean $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{C}$ *con* $a_n, b_n = O(n^\sigma)$ *algún* $\sigma > 0$,

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \qquad g(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi i n\tau}$$

$$\Phi(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_f(s) \quad \Psi(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_g(s)$$

y sean $C \neq 0$, $A > 0$, $k > 0$. *Son equivalentes*

- $\Phi(s) + A^{-s/2}\left(\frac{a_0}{s} + \frac{Cb_0}{k-s}\right)$ *es EAFV* $\wedge$ $\Phi(s) = CA^{\frac{k}{2}-s}\Psi(k-s)$
- $f(\tau) = CA^{k/2}\left(\frac{A\tau}{i}\right)^{-k} g\left(\frac{-1}{A\tau}\right)$.

Continuación analítica y ecuación funcional de L_f

Theorem

- L_f *es entera*
- $\Lambda_f(s) = -\Lambda_{\omega_N(f)}(2-s)$

donde $\omega_N(f)(\tau) = \frac{1}{N\tau^2} f(\frac{-1}{N\tau})$ *es la involución de Atkin-Lehner.*

Lemma

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$ *con* $a_n, b_n = O(n^\sigma)$ *algún* $\sigma > 0$,

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau} \qquad g(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi i n\tau}$$

$$\Phi(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_f(s) \quad \Psi(s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_g(s)$$

y sean $C \neq 0$, $A > 0$, $k > 0$. *Son equivalentes*

- $\Phi(s) + A^{-s/2}(\frac{a_0}{s} + \frac{Cb_0}{k-s})$ *es EAFV* $\wedge$ $\Phi(s) = CA^{\frac{k}{2}-s}\Psi(k-s)$
- $f(\tau) = CA^{k/2}(\frac{A\tau}{i})^{-k} g(\frac{-1}{A\tau})$.

Dem del teo: Considerar $k = 2, C = -1, A = N$ y $g = \omega_N(f)$.

Producto de Euler

Ya que $S_2(N,\chi) \leq S_2(\Gamma_1(N))$, toda L_f que provenga de una $f \in S_2(N,\chi)$ es entera y posee ecuación funcional. Además tales L_f se pueden representar por un producto de Euler.

Producto de Euler

Ya que $S_2(N,\chi) \leq S_2(\Gamma_1(N))$, toda L_f que provenga de una $f \in S_2(N,\chi)$ es entera y posee ecuación funcional. Además tales L_f se pueden representar por un producto de Euler.

Theorem

Si $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ es una eigenform normalizada en $S_2(N,\chi)$ para todos los operadores de Hecke, entonces

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{p \nmid N} (1 - a_p p^{-s} + \chi(p) p^{1-2s})^{-1} \prod_{p \mid N} (1 - a_p p^{-s})^{-1}$$

Producto de Euler

Ya que $S_2(N,\chi) \leq S_2(\Gamma_1(N))$, toda L_f que provenga de una $f \in S_2(N,\chi)$ es entera y posee ecuación funcional. Además tales L_f se pueden representar por un producto de Euler.

Theorem

Si $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ es una eigenform normalizada en $S_2(N,\chi)$ para todos los operadores de Hecke, entonces

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_{p \nmid N} (1 - a_p p^{-s} + \chi(p) p^{1-2s})^{-1} \prod_{p \mid N} (1 - a_p p^{-s})^{-1}$$

Dem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{n^s} = \prod_{p \nmid N} (1 - T_p p^{-s} + <p> p^{1-2s})^{-1} \prod_{p \mid N} (1 - U_p p^{-s})^{-1}.$$

Ecuación funcional

Si $f \in S_2(\Gamma_1(N)$ es una forma nueva, entonces es una eigenform de ω_N, luego la ecuación funcional de su función L es

$$\Lambda_f(s) = \pm\Lambda_f(2-s).$$

Entonces la ec. funcional puede ser vista como una relación entre $L_f(s)$ y $L_f(2-s)$.

Coeficientes de Fourier de formas nuevas

Theorem

Sea f una forma nueva de nivel N_f y para χ un caracter de Dirichlet, sean N_χ su conductor y χ_0 su caracter primitivo. Entonces

- *Si $p \nmid N_f$ entonces $| a_p | \leq 2\sqrt{p}$.*
- *Si $p \mid\mid N_f$ pero $p \nmid N_\chi$ entonces $a_p^2 = \chi_0(p)$.*
- *Si $p \mid N_f$ pero $p \nmid N_f / N_\chi$ entonces $| a_p | = \sqrt{p}$.*
- *Si $p^2 \mid N_f$ y $p \mid N_f / N_\chi$ entonces $a_p = 0$.*