Curvas modulares y formas modulares sobre $\mathbb{Q}$

Matías Alvarado

Abril 2020

Contenido

- Modelos sobre $\mathbb{Q}$
- Modelos enteros
- Jacobianas
- Operadores de Hecke sobre $\mathbb{Q}$
- Operadores de Hecke sobre $\mathbb{F}_p$ y relación de Eichler-Shimura
- Formas modulares sobre $\mathbb{Q}$ y sobre $\mathbb{Z}$

- La interpretación modular de $Y_0(N)$ está dada por

$$\tau \mapsto [\mathbb{C}/\Lambda_\tau, \langle 1/N + \Lambda_\tau \rangle],$$

mientras que la de $Y_1(N)$ por

$$\tau \mapsto [\mathbb{C}/\Lambda_\tau, 1/N + \Lambda_\tau]$$

- Para la curva elíptica $\mathbb{C}/\Lambda$ tenemos una ecuacion de weierstrass que viene de una ecuación funcional para la función $\wp_\Lambda$

$$\wp'_\Lambda(z)^2 = 4\wp_\Lambda(z)^3 - g_{2,\Lambda}\wp_\Lambda(z) - g_{3,\Lambda}$$

Para estudiar los cuerpos de funciones introducimos la siguiente curva elíptica

$$E_j : y^2 = 4x^3 - \left(\frac{27j}{j-1278}\right)x - \left(\frac{27j}{j-1728}\right)$$

- E_j es una curva elíptica definida sobre $\mathbb{C}(j)$ con invariante j igual a j

  Esta curva aparece de forma natural cuando tomamos el morfismo

$$\left(\frac{g_2(\tau)}{g_3(\tau)}\wp_\tau, \left(\frac{g_2(\tau)}{g_3(\tau)}\right)^{3/2}\wp'_\tau\right) : \mathbb{C}/\Lambda_\tau \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

  La imagen esta dada por la ecuación

$$E_{j(\tau)} : y^2 = 4x^3 - \left(\frac{27j(\tau)}{j(\tau)-1278}\right)x - \left(\frac{27j(\tau)}{j(\tau)-1728}\right)$$

- $\left[E_{j(\tau)}, \left(\frac{g_2(\tau)}{g_3(\tau)}\wp_\tau(1/N), \left(\frac{g_2(\tau)}{g_3(\tau)}\right)^{3/2}\wp'_\tau(1/N)\right)\right] \in Y_1(N)$

Consideremos la coordenada x de este punto.

- Las funciones $j(\tau)$ y $\frac{g_2(\tau)}{g_3(\tau)}\wp_\tau(1/N)$ "contienen toda la información" de $X_1(N)$.
  Formalmente tenemos

Teorema (Cuerpo de funciones de $X_1(N)$)

$\mathbb{C}(X_1(N)) = \mathbb{C}(j, f_1)$, *con* $f_1 = \frac{g_2(\tau)}{g_3(\tau)}\wp_\tau(1/N)$

Teorema (Cuerpo de funciones de $X_0(N)$)

$\mathbb{C}(X_0(N)) = \mathbb{C}(j, f_0)$, *donde* $f_0 = \frac{g_2(\tau)}{g_3(\tau)}\sum_{i=1}^{N}\wp_\tau(i/N)$

Teorema

$\mathbb{C}(X_0(N)) = \mathbb{C}(j, j_N)$, *donde* $j_N(\tau) = j(N\tau)$

Pensemos nuevamente en la curva universal, pero ahora definida sobre $\mathbb{Q}(j)$

$$E_j : y^2 = 4x^3 - \left(\frac{27j}{j-1278}\right)x - \left(\frac{27j}{j-1728}\right)$$

- Las funciones j y f_1 satisfacen una relación algebraica.
- Las funciones j y j_N también satisfacen una relación algebraica.
- $\mathbb{Q}(j, f_1)/\mathbb{Q}$ es una extension f.g. de grado de trascendencia 1.
- $\mathbb{Q}(j, j_N)/\mathbb{Q}$ tambien es f.g y $tr.\deg$ 1.

Definición

Las curvas $X_0(N)/\mathbb{Q}$ y $X_1(N)/\mathbb{Q}$, se definen como las curvas asociadas a los cuerpos $\mathbb{Q}(j, j_N)$ y $\mathbb{Q}(j, f_1)$ respectivamente.

Polinomio modular

$\mathbb{Q}(X_0(N)) = \mathbb{Q}(j, j_N) = \mathbb{Q}(j)[x]/(p(x))$ con $p(j_N) = 0$ Entonces limpiando denominadores, encontramos un polinomio en dos variables con coeficientes enteros que relaciona a j con j_N.

- El polinomio que relaciona a j y j_N se llama polinomio modular y se denota $\Phi_N(X, Y)$
- La curva plana definida por Φ_N nos da un modelo sobre $\mathbb{Z}$ de $X_0(N)$

Ejemplo (N=11)

$X_0(11)$ *es una curva eliptica y viene dada por la ecuación*

$$X_0(11)\colon y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20$$

Modelos sobre $\mathbb{Z}$

- $\mathcal{Y}_1(N)$, $\mathcal{X}_1(N)$ definidos sobre $\mathbb{Z}[1/N]$
- $\mathcal{Y}_1^{\mu}(N)$, $\mathcal{X}_1^{\mu}(N)$ sobre $\mathbb{Z}$

Jacobianas

Jacobianas sobre $\mathbb{C}$

Dado una superficie de Riemann X de genero g, existe un variedad abeliana $JacX$ de dimensión g tal que

- Existe un morfismo $A\colon X \to JacX$
- Para cada variedad abeliana Y y cada morfismo $f\colon X \to Y$, podemos encontrar un homomorfismo de variedades abelianas $g\colon JacX \to Y$ tal que $g \circ A = f$.

  Sobre $\mathbb{C}$ podemos construir la variedad jacobiana de la siguiente manera.

$$JacX = \frac{H^0(X, \Omega^1)^*}{i(H_1(X;\mathbb{Z}))}, \text{ donde}$$

$$\begin{aligned} i : H_1(X;\mathbb{Z}) &\to H^0(X,\Omega^1)^* \\ \gamma &\mapsto \left(\omega \mapsto \int_\gamma \omega\right) \end{aligned}$$

Mapeo de Abel-Jacobi

Eligiendo un punto $p_0 \in X$, consideramos el siguiente mapa

$$\begin{aligned}\Phi_{AJ} \colon X &\longrightarrow JacX \\ p &\mapsto \left(\omega \mapsto \int_{p_0}^{p} \omega\right)\end{aligned}$$

Este mapa puede extenderse por linealidad al grupo de divisores de X

$$A \colon Div(X) \to JacX$$

y a su vez A se puede restringir a los divisores de grado cero

$$A_0 \colon Div^0(X) \to JacX$$

Teorema

El mapa A_0 induce un isomorfismo entre $Pic^0(X)$ y $JacX$

Operadores de Hecke en Jacobiana

La acción de los operadores de Hecke en $Jac(X_1(N))$ viene dada por

$$T_p([E, P]) = \sum [E/C, P + C]$$

donde C recorre todos los subgrupos de orden p de E.
Equivalentemente

$$T_p([E, P]) = \sum_i [E_i, P_i]$$

donde las curvas E_i son todas las curvas que son imagen de E via una isogenia de orden p y P_i la imagen de P via isogenia.

Sea k un cuerpo cualquiera y X/k un curva de genero g.

- Existe una variedad abeliana $JacX$ de genero g def. sobre k
- $JacX$ tiene la propiedad universal
- $JacX$ parametriza haces invertibles

$JacX = Pic^0_{X/k}$

Operadores de Hecke sobre $\mathbb{Q}$

Ejemplos importantes

- $J_0(N) = Jac(X_0(N))$
- $J_1(N) = Jac(X_1(N))$
- $J_\Gamma = Jac(X(\Gamma))$

$$\begin{aligned} J_1(N)(\overline{\mathbb{Q}}) &= Pic^0(X_1(N)_{\overline{\mathbb{Q}}}) \\ &= \left\{ \sum n_i[E_i, P_i] \middle| \sum n_i = 0 \right\} \end{aligned}$$

Teorema

Existen morfismos $T_n \colon J_1(N) \to J_1(N)$ que tiene la misma interpretación modular que los operadores de Hecke.

Curvas modulares sobre $\mathbb{F}_p$

- Tomar un modelo entero para $X_1(N)$ y reducir modulo p.

Teorema (Igusa)

Si $p \nmid N$, entonces $X_1(N)$ tiene buena reducción modulo p. Además la curva parametriza curvas elípticas con estructura $\Gamma_1(N)$. Denotaremos $X_1(N)_{\mathbb{F}_p}$ a la reducción.

Debemos ver ahora los operadores de Hecke. Denotaremos por $J_0(N)_{\mathbb{F}_p}$ y $J_1(N)_{\mathbb{F}_p}$ a las jacobianas de $X_0(N)_{\mathbb{F}_p}$ y $X_1(N)_{\mathbb{F}_p}$

Teorema

Existen morfismos $T_n \colon J_1(N)_{\mathbb{F}_p} \to J_1(N)_{\mathbb{F}_p}$ que tienen la misma interpretación modular que los operadores de Hecke.

Relación de Eichler Shimura

- $[E, P] \in J_1(N)(\overline{\mathbb{F}_p})$
- $F\colon E \to E^{\sigma_p}$ (morfismo de Frobenius) y manda $P \mapsto P^{\sigma_p}$
- Existen p curvas elipticas E_i que son mapeadas a E via el morfismo de Frobenius $\phi_i\colon E_i \to E$ y $P_i \mapsto P$
- $F'([E,P]) = \displaystyle\sum_{\substack{E_i \to E \\ \text{isogenias de grado } p}} [E_i, P_i]$
- entonces $\psi_i\colon E \to E_i$ la isogenia dual. Esta manda $P \mapsto pP_i$
- $T_p([E,P]) = [E^{\sigma_P}, P^{\sigma_p}] + [E_1, pP_1] + \cdots + [E_p, pP_p]$
- $T_p([E,P]) = F([E,P]) + \langle p \rangle_* F'([E,P])$

Teorema (Relación de Eichler Shimura)

Si $p \nmid N$, entonces se cumplen las relaciones

- $T_p = F + \langle p \rangle_* F'$ *en* $J_1(N)_{\mathbb{F}_p}$
- $T_p = F + F'$ *en* $J_0(N)_{\mathbb{F}_p}$

formas modulares sobre $\mathbb{Q}$

Teorema

Sea $f \in S_2(\Gamma_1(N))$ una newform (forma propia, en el espacio nuevo y normalizada) con $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$. Entonces

- ⋆ *Los valores propios $a_n(f)$ son enteros algebraicos*
- ⋆ *El cuerpo $K_f = \mathbb{Q}(\{a_n\})$ generado por los coeficientes de Fourier es un cuerpos de números*

K_f es llamado el cuerpo de números de f.

Teorema

Sea $f \in S_2(N, \chi)$ una newform (forma propia, en el espacio nuevo y normalizada), K_f su cuerpo de números. Para cualquier incrustación $\sigma\colon K_f \to \mathbb{C}$, entonces f^σ es una forma nueva en $S_2(N, \chi^\sigma)$, donde $\chi^\sigma(n) = \chi(n)^\sigma$.

Corolario

Si $\dim S_2(\Gamma_0(N))^{New} = 1$ *y f la forma nueva, entonces $K_f = \mathbb{Q}$*

formas modulares sobre $\mathbb{Z}$

Teorema

El espacio $S_2(\Gamma_1(N))$ tiene una base de formas con coeficientes en $\mathbb{Z}$

- $\phi\colon S_2(\Gamma_1(N)) \to \mathbb{C}[[q]]$
- $\mathbb{Z}[[q]] \subset \mathbb{C}[[q]]$
- ¿$\phi^{-1}(\mathbb{Z}[[q]])$?
- Teorema $\Rightarrow \left\langle \phi^{-1}(\mathbb{Z}[[q]]) \right\rangle_{\mathbb{C}} = S_2(\Gamma_1(N))$