El álgebra de Hecke

Jerson Caro

May 1, 2020

Recordemos que T_p sobre $S_2(N,\chi)$ en terminos de la expansión de Fourier $f=\sum a_nq^n$

$$T_p(f)=\sum_{p|n} a_nq^{n/p}+p\chi(p)\sum a_nq^{pn}$$

Notamos que $S_2(\Gamma_0(N),\mathbb{Z})$ es estable bajo la acción de T_n. Del mismo modo que el subespacio de $S_2(N,\chi)$, con coeficientes $\mathbb{Z}[\chi]$. Esto demuestra en particular que si $f\in S_2(\Gamma,\mathbb{Z})$ se tiene que $T_n(f)$ tiene coeficientes de Fourier enteros algebraicos. Gracias a lo visto la clase anterior (el principio de la q-expansión) si $f\in S_2(\Gamma)\cap\mathbb{Q}[[q]]$, $T_nf\in S_2(\Gamma)\cap\mathbb{Q}[[q]]$. En conclusión T_n estabiliza a $S_2(\Gamma,\mathbb{Z})$.

Definimos $\mathbb{T}_\mathbb{Z}$ como el anillo generado sobre $\mathbb{Z}$ por los T_n y $\langle d\rangle$ actuando sobre $S_2(\Gamma,\mathbb{Z})$. Y en general si A es cualquier anillo, definimos $\mathbb{T}_A$ como la A-álgebra $\mathbb{T}_\mathbb{Z}\otimes A$. Entonces este anillo de Hecke actúa sobre el espacio $S_2(\Gamma,A)$.

Estudiaremos estos anillos, para A específicos. El siguiente es un resultado general en esta teoría:

Lema 1

El espacio $S_2(\Gamma, A)^\vee = \mathrm{Hom}(S_2(\Gamma, A), A)$ es un $\mathbb{T}_A$-módulo libre de rango uno.

Demostración

El pairing $\mathbb{T}_\mathbb{Z} \times S_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ definido por $(T, f) \mapsto a_1(Tf)$ es perfecto (del hecho que $a_1(T_n f) = 0$, entonces f sería cero; como $S_2(\Gamma)$ tiene una base de formas modulares con coeficientes enteros $Tf = 0$ para todo f implica $T = 0$). Esto nos da una $\mathbb{T}_\mathbb{Z}$-equivarianza dual entre $\mathbb{T}_\mathbb{Z}$ y $S_2(\Gamma, \mathbb{Z})$. Y para el caso general tomamos $\_ \otimes A$ **(si tomamos un generador f de $S_2(\Gamma, \mathbb{Z})$ como $\mathbb{T}_\mathbb{Z}$-módulo, entonces $f \otimes 1$ es generador de $S_2(\Gamma, A)$ como $\mathbb{T}_A$-módulo)**.

Anillos de Hecke sobre $\mathbb{C}$

Tenemos la siguiente descomposición de este anillo

$$\mathbb{T}_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{f} \mathbb{T}_{\mathbb{C},f}$$

donde la suma corre sobre las newforms f de algún nivel $N_f \mid N$, y $\mathbb{T}_{\mathbb{C},f}$ es la restricción de cada $T \in \mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ se restringe a S_f, en particular, esta contenido en $End_{\mathbb{C}}(S_f)$.

Observación

Note que si f es una newform de nivel N, $\mathbb{T}_{\mathbb{C},f}$ es isomorfo a $\mathbb{C}$, y en otro caso, esta álgebra no es en general semisimple sobre $\mathbb{C}$.

Ejemplo

```
>S88 = CuspForms(Gamma0(88),2);
>S88.dimension();
9
>T = S88.hecke_operator(2);
>f=A.charpoly();
>f.factor();
x^7 * (x^2 + 2*x + 2)
>A.eigenvectors_right();
[(0, [
(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/2),
(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0),
(0, 0, 1, 0, 0, 0, -1/2, 0, 0),
(0, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 1/2, 0),
(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, -1/2)
], 7)]
```

El siguiente lema, junto con Lema 1 muestra que $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra de *Gorestein*, es decir, $\mathrm{Hom}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ es isomorfo a $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ como $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-módulos.

Lema 2

El módulo $S_2(\Gamma)$ es un $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-módulo libre de rango uno.

Demostración

Sean $g_1, \ldots, g_t$ un sistema completo de newforms de niveles $N_1, \ldots, N_t$ dividiendo N. Note que la forma

$$g = g_1(N\tau/N_1) + \ldots g_t(N\tau/N_t)$$

genera $S_2(\Gamma)$ como $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-módulo **(Esto viene del hecho que si $p \mid N/N_i$ $U_p(g_i(N\tau/N_i)) = (g_i(N\tau/(N_i p))))$**. Entonces la función $\mathbb{T}_{\mathbb{C}} \longrightarrow S_2(\Gamma)$ definido por $T \mapsto Tg$ da un isomorfismo desde $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$ a $S_2(\Gamma)$, como $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$-módulos.

Anillos de Hecke sobre $\mathbb{Q}$

Para una newform normalizada f de algún nivel $N_f \mid N$, definimos $[f] := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})f$ y K_f la extensión de $\mathbb{Q}$ generada por los coeficientes de Fourier de f.
Notamos que $\dim\left(\bigoplus_{g\in[f]} S_g\right) = [K_f : \mathbb{Q}]\sigma_0(N/N_f)$, y este espacio es generado por por formas mdulares con coeficientes de Fourier racionales. Definimos entonces $S_{[f]} = \left(\bigoplus_{g\in[f]} S_g\right) \cap \mathbb{Q}[[q]]$. Este espacio es estable bajo la acción de $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$, y tenemos entonces la siguiente descomposición

$$\mathbb{T}_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{[f]} \mathbb{T}_{\mathbb{Q},[f]}$$

- Si $N_f = N$ se tiene $\mathbb{T}_{\mathbb{Q},[f]} \cong K_f$.
- Si $N_f < N$ se tiene que como en el caso complejo $\mathbb{T}_{\mathbb{Q},[f]}$ es una $\mathbb{Q}$-álgebra (no necesariamente semi-simple) de rango $\sigma_0(N/N_f)[K_f : \mathbb{Q}]$.

Operadores de Hecke sobre la Homología integral

Definimos

$$M(n,N) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv_N \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} :\ \det(A) = n,\ (a,N) = 1 \right\}$$

Uno además tiene que

$$M(n,N) = \bigcup_{i=1}^{K} \Gamma_0(N)\alpha_i.$$

Si $\tau \in \mathfrak{h}^*$, denotamos por $[\tau]$ su clase en $X_0(N)$. Definimos entonces

$$T_n(\tau) = \sum_{i=1}^{K} [\alpha_i \tau].$$

Del hecho que $M(n,N)\gamma \subset M(n,N)$, se tiene que $\alpha_i\gamma = \gamma_i\alpha_{j(i)}$, esto implica que T_n no depende del representante de $[\tau]$ (pues $i \mapsto j(i)$).

La anterior función define un morfismo $\mathbb{Z}$-lineal de $Div(X_0(N))$.
Ahora si pensamos en un 1-cíclo como suma de loops, bastaría con definir T_n sobre ellos.

$$T_n([\tau_0, \gamma\tau_0]) = \sum_{i=1}^{K} [\tau_0, \gamma_i\tau_0].$$

Se puede demostrar que Γ_{ep} el grupo generado por las matrices de traza ≤ 2. Entonces

$$H_1(X_0(N), \mathbb{Z}) \equiv \Gamma_0(N)^{ab}/\Gamma_{ep}^{ab}$$

Por tal razón podemos identificar los elementos de $H_1(X_0(N), \mathbb{Z})$ con elementos de $\Gamma_0(N)$, con las relaciones $[\gamma_1\gamma_2] = [\gamma_1] + [\gamma_2]$ y $[\gamma] = 0$ para γ elíptica o parabólica. Entonces si $f \in S_2(\Gamma_0, \mathbb{Z})$ y $[\gamma]$ esta asociado al cíclo c, tenemos

$$\int_{\tau_0}^{\gamma\tau_0} f(\tau)d\tau = \int_c \omega_f.$$

Si definimos $T_n[\gamma] = \sum_{i=1}^{K} [\gamma_i]$, tenemos que

$$\int_{T_n(c)} \omega = \int_c T_n(\omega).$$

Podemos extender por linealidad $\int_c \omega =: \langle c, \omega \rangle$ para $c \in H_1(\mathbb{R})$ y se puede notar que si $\langle c, \omega \rangle = 0$ para algún $c \in H_1(\mathbb{R})$ y todo ω entonces $c = 0$.

Quisieramos que los c's y los ω's fueran duales pero $H_1(\mathbb{C})$ es $2g$ dimensional y $H_0(X_0(N), \Omega^1)$ es de dimensión g sobre $\mathbb{C}$. Por tal razón debemos dividir a $H_1(\mathbb{C})$ en dos espacios de dimensión g.

La función $()^* : \tau \mapsto -\overline{\tau}$ sobre $\mathfrak{h}$ es una involución, define una involución en $X_0(N)$, pues si $\tau_2 = \gamma\tau_1$ con $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $\Gamma_0(N)$, entonces $\gamma^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ esta en $\Gamma_0(N)$ se tiene $\tau_2^* = \gamma^* \tau_1^*$.

La descomposición en el eigenespacio bajo $()^*$

$$H_1(\mathbb{R}) = H_1^+(\mathbb{R}) \oplus H_1^-(\mathbb{R})$$
$$H_1(\mathbb{C}) = H_1^+(\mathbb{C}) \oplus H_1^-(\mathbb{C})$$

Proposición (Elliptic Curves: Knapp 1992)

Los espacios H_1^+ y H_1^- tienen dimensión g, y el pairing $\langle c, \omega \rangle$ exhibe el espacio $H_1^+(\mathbb{C})$ y $H^0(X_0(N), \Omega^1)$ como dual uno del otro. Además la extensión de T_n a $H_1(\mathbb{C})$ mapea $H_1^+(\mathbb{C})$ en si mismo.

Lema 3

El módulo $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ es libre de rango dos sobre $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$. (donde $\Lambda = H_1(X_\Gamma, \mathbb{Z})$)

Demostración

Los módulos $\Lambda^+ \otimes \mathbb{C}$ y $\Lambda^- \otimes \mathbb{C}$ son libres de rango uno sobre $\mathbb{T}_{\mathbb{C}}$, por Lema 1. Esto implica que $\Lambda^+ \otimes \mathbb{Q}$ y $\Lambda^- \otimes \mathbb{Q}$ son libres de rango uno sobre $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$.

Anillos de Hecke sobre $\mathbb{Z}$

El anillo $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}}$ es un orden (no necesariamente maximal) en $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$. Se tiene la inyección

$$\mathbb{T}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \bigoplus_{[f]} \mathbb{T}_{\mathbb{Z},[f]},$$

donde $\mathbb{T}_{\mathbb{Z},[f]}$ es el anillo generado sobre $\mathbb{Z}$ por los operadores de Hecke actuando sobre $S_{[f]}$. Aunque el anillo $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}}$ actúa sobre Λ, pero en general no se tiene Λ es libre de rango dos sobre $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}}$

A continuación un ejemplo donde esta inclusión es propia.

Ejemplo

```
>S37 = CuspForms(Gamma0(37),2);
>S37.dimension();
2
>S37.sturm_bound();
8
>S37.newforms()[0].q_expansion(9);
q - 2*q^2 - 3*q^3 + 2*q^4 - 2*q^5 + 6*q^6 - q^7 + O(q^8)
>S37.newforms()[1].q_expansion(9);
q + q^3 - 2*q^4 - q^7 + O(q^8)
```

La siguiente tabla muestra los valores propios $a_n(f)$ y $a_n(g)$ de los carácteres $a_n(f)$.

	2	3	5	7
f	-2	-3	-2	-1
g	0	1	0	-1

Así que $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}(1,1) \oplus \mathbb{Z}(2,0)$. Mientras que $S_{[f]} \oplus S_{[g]} \cong \mathbb{Z}^2$.

Anillos de Hecke sobre $\mathbb{Q}_\ell$

El estudio de las álgebras $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_\ell}$ y $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$ viene de la acción sobre el módulo de Tate $\mathcal{T}_\ell(J_\Gamma)$

$$\mathcal{T}_\ell(J_\Gamma) := \varprojlim (J_\Gamma)[\ell^n].$$

donde el límite inverso es tomado por multiplicación por ℓ. También podemos trabajar con el anillo $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$ con suacción sobre

$$\mathcal{V} = \mathcal{T}_\ell(J_\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

Los pairings de Weil sobre los grupos $J_\Gamma[\ell^n]$ para $n \geq 1$ induce un pairing perfecto

$$\langle\, ,\, \rangle\colon\ \mathcal{T}_\ell(J_\Gamma) \times \mathcal{T}_\ell(J_\Gamma) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell\,.$$

Como cada operador de Hecke T es adjunto wTw (donde $w(\tau) = -1/N\tau$ es la involución de Atkin-Lehner) tenemos el siguiente lema:

Lema 4

La función $x \mapsto \phi_x$ donde $\phi_X(y) = \langle x, wy \rangle$ define un isomorfismo de $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_\ell}$-módulos

$$\mathcal{T}_\ell(J_\Gamma) \cong \mathcal{T}_\ell(J_\Gamma)^\vee = \mathrm{Hom}(\mathcal{T}_\ell(J_\Gamma), \mathbb{Z}^\ell),$$

Y de aquí un isomorfismo de $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$-módulos

$$\mathcal{V} \cong \mathcal{V}^\vee = \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathbb{Q}_\ell).$$

El siguiente lema permite considerar $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$ como un anillo de coeficientes para una representación de Galios 2-dimensional

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}}(\mathcal{V}) \cong GL_2(\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell})$$

Lema 5

El módulo $\mathcal{V}$ es libre de rango dos sobre $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$.

Demostración

Es consecuencia directa del Lema 3, pues $\mathcal{V} = \Lambda \otimes \mathbb{Q}_\ell$.

Corolario 1

El anillo $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$ es una $\mathbb{Q}_\ell$-álgebra de Gorestein; es decir

$$\mathbb{T}^\vee_{\mathbb{Q}_\ell} = \mathrm{Hom}(\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}, \mathbb{Q}_\ell)$$

es libre de rango uno sobre $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$.

Demostración

Escogemos una base de $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$, obtenemos el isomorfismo

$$\mathbb{T}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{T}_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{T}_{\mathbb{Q}}^{\vee} \oplus \mathbb{T}_{\mathbb{Q}}^{\vee}.$$

Como $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$ es un anillo artiniano, lo podemos descomponer como $\prod_i R_i$ donde los R_i son $\mathbb{Q}_\ell$-álgebras locales finito-dimensionales. Obtenemos para cada i, un isomorfismo

$$R_i \oplus R_i \cong R_i^{\vee} \oplus R_i^{\vee}.$$

Al menos uno de los 4 homomorfismos $R_i^{\vee} \longrightarrow R_i$ debe ser sobreyectivo, como son espacios de dimensión finita obtenemos el resultado.

Frame Title

Teorema 1

Para p que no divide a $N\ell$, el polinomio característico de F sobre el $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$-módulo $\mathcal{V}$ es $X^2 - T_pX + \langle p \rangle$.

Demostración

Del hecho que $FF' = p$ y que $T_p = F + \langle p \rangle F'$ tenemos que

$$F^2 - T_pF + \langle p \rangle p = 0.$$

Para ver que este es su polinomio característico falta ver que su traza es T_p. Para esto usamos el ismorfismo entre $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}^\vee$ definido por el pairing modificado $\langle \cdot, w \cdot \rangle$. En este pairing la adjunta de F es $wF'w = \langle p \rangle F'$, así que la traza de F sobre $\mathcal{V}$ es lo mismo que la traza de $\phi \mapsto \phi \circ (\langle p \rangle F')$ sobre $\mathcal{V}'$, pero esta última es igual a la traza de $\langle p \rangle F'$ tomando bases para $\mathcal{V}$ y $\mathbb{T}^\vee_{\mathbb{Q}_\ell}$

$$2\,\mathrm{tr}(F) = \mathrm{tr}(F) + \mathrm{tr}(\langle p \rangle F') = \mathrm{tr}(T_p) = 2T_p.$$

Anillos de Hecke sobre $\mathbb{Z}_\ell$

El anillo $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_\ell}$ es libre de rango finito soble $\mathbb{Z}_\ell$. Por la teoría de anillos semilocales **(ver Eisenbud, Corollary 7.6)**

$$\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_\ell} = \prod \mathbb{T}_{\mathfrak{m}},$$

donde el prodducto corre sobre los ideales maximales $\mathfrak{m}$ de $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_\ell}$, y $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$ es la localización de $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_\ell}$ en $\mathfrak{m}$. Para cada $\mathfrak{m}$, $\mathbb{T}_{\mathfrak{m}}$ es una $\mathbb{Z}_\ell$-álgebra completa, local y libre de rango finito como $\mathbb{Z}_\ell$-módulo.

Ejemplo

Vemos que $X_0(19)$ tiene género 1, y $X_0(57)$ tiene género 5.

```
>S19 = CuspForms(Gamma0(19),2);
>S19.dimension();
>S19.basis()
1
[
q - 2*q^3 - 2*q^4 + 3*q^5 + O(q^6)
]
>S57 = CuspForms(Gamma0(57),2);
>S57.dimension();
>S57.newforms()
5
[q - 2*q^2 - q^3 + 2*q^4 - 3*q^5 + O(q^6),
q - 2*q^2 + q^3 + 2*q^4 + q^5 + O(q^6),
q + q^2 + q^3 - q^4 - 2*q^5 + O(q^6)]
```

	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
19A	0	-2	3	-1	3	-4	-3	1	0	6	-4
57A	-2	-1	-3	-5	1	2	-1	-1	-4	-2	-6
57B	1	1	-2	0	0	6	-6	-1	4	2	8
57C	-2	1	1	3	-3	-6	3	-1	4	-10	2

Haciendo $f = 19A$, la siguiente es una base simultanea de eigenformas en $S_2(57)$ para los operadores de Hecke T_p con $p \neq 3, 19$ y U_3, U_{19} es:

$$f(\tau) + (1 + \sqrt{-2})f(3\tau), \quad f(\tau) + (1 - \sqrt{-2})f(3\tau), \quad 57A, \quad 57B, \quad 57C$$

Notamos que los coeficientes de Fourier de 57B y 57C son congruentes módulo 3.

El anillo sde Hecke $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_3}$ es isomorfo a la subálgebra de $\mathbb{Z}_3^5$:

$$\{(x, y, z, t, w) : t \equiv w (\mathrm{mod}\ 3)\}.$$

El isomorfismo envía T_p (para $p \neq 3, 19$) a los elementos

$$(a_p(19A), a_p(19A), a_p(57A), a_p(57B), a_p(57C)),$$

envía U_3 a $(-1+\sqrt{-2}, -1-\sqrt{-2}, -1, 1, 1)$ y envía U_{19} a $(1, 1, -1, -1, -1)$. Así hay 4 ideales maximales en $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_3}$. Las localizaciones en estos maximales son 3 veces $\mathbb{Z}_3$, y

$$\mathbb{T}_{\mathfrak{m}} = \{(t, w) : t \equiv w (\mathrm{mod}\ 3)\},$$

donde $\mathfrak{m}$ es el ideal generado por 3 y por $T_n - a_n(57B)$ para todo n.

Gracias.