El Álgebra de Hecke II

Natalia García

5 de mayo 2020

Recuerdo

Operadores de Hecke:
Dado $\Gamma_1(N) \subset \Gamma \subset \Gamma_0(N)$ y p primo, el operador de Hecke T_p en $S_2(\Gamma)$ es

$$T_p(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} f\left(\dfrac{\tau+i}{p}\right) + p\langle p\rangle f(p\tau) & (p \nmid N) \\ U_p(f) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} f\left(\dfrac{\tau+i}{p}\right) & (p|N). \end{cases}$$

Para p^m con $m > 1$ y $p \nmid N$ se define como

$$T_{p^{m+1}} = T_p T_{p^m} - \langle p\rangle p T_{p^{m-1}}.$$

Si $p|N$ definimos $T_{p^m} = T_p^m = U_p^m$. Finalmente, para n entero positivo

$$T_n = \prod_i T_{p_i^{e_i}} \quad \text{donde } n = \prod_i p_i^{e_i}.$$

Recuerdo

Anillos de Hecke:
El anillo de Hecke $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}}$ es el anillo generado sobre $\mathbb{Z}$ por los operadores de Hecke T_n y los diamante $\langle d \rangle$ (con d, N coprimos) actuando en $S_2(\Gamma, \mathbb{Z})$.

Dado un anillo A, el anillo de Hecke $\mathbb{T}_A$ es el A-álgebra $A \otimes \mathbb{T}_{\mathbb{Z}}$.

El anillo de Hecke $\mathbb{T}_A$ actúa en $S_2(\Gamma, A) = S_2(\Gamma, \mathbb{Z}) \otimes A$ de la manera obvia:

$$(a \otimes T_n)(f \otimes b) := T_n(f) \otimes ab.$$

Lema 1

El anillo $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}}$ es generado por los T_n.

Dem: Sea d coprimo con N. Por Dirichlet, hay infinitos $p \equiv d \bmod N$ con $p \nmid N$. Entonces $T_{p^2} = T_p^2 - p\langle p\rangle = T_p^2 - p\langle d\rangle$ y obtenemos

$$p\langle d\rangle = T_p^2 - T_{p^2} \in \mathbb{Z}[T_1, T_2, \ldots].$$

Como hay infinitos de estos primos, consideramos dos de ellos $p \neq q$.
Como p, q son coprimos, hay enteros A, B con $Ap + Bq = 1$.
Por lo tanto

$$\langle d\rangle = (Ap + Bq)\langle d\rangle = A(T_p^2 - T_{p^2}) + B(T_q^2 - T_{q^2}) \in \mathbb{Z}[T_1, T_2, \ldots].$$

Clase pasada

Queremos entender la estructura de $\mathbb{T}_A$ para varios anillos A.

Idea de fondo. Para entender el anillo $\mathbb{T}_A$, trataremos de entender algunos de sus módulos.
Si entendemos bien esos módulos podemos recuperar información sobre $\mathbb{T}_A$. Para eso necesitamos varios módulos donde los anillos de Hecke $\mathbb{T}_A$ actúan.

Clase pasada

Lema 2

Tenemos lo siguiente:

- *La homología entera de* X_Γ *es* $H_1(X_\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ *con* $g = g(X_\Gamma)$.
- $\mathbb{T}_\mathbb{Z}$ *actúa en* $H_1(X_\Gamma, \mathbb{Z})$.
- *El* $\mathbb{Q}$*-espacio vectorial* $H_1(X_\Gamma, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ *es un* $\mathbb{T}_\mathbb{Q}$*-módulo libre de rango dos.*

Es decir $H_1(X_\Gamma, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{T}_\mathbb{Q} \oplus \mathbb{T}_\mathbb{Q}$ como $\mathbb{T}_\mathbb{Q}$-módulo.

Anillos de Hecke sobre $\mathbb{Q}_\ell$

Nos interesa estudiar $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell} := \mathbb{T}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}_\ell$ porque Wiles estudiará representaciones que vienen de la acción del álgebra de Hecke $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_\ell}$ en el módulo de Tate ℓ-ádico del Jacobiano de una curva modular X_Γ

$$\mathcal{T}_\ell(J_\Gamma) := \varprojlim (J_\Gamma)[\ell^n]$$

y las relacionará con algunas representaciones de Galois que veremos próximamente.

Necesitaremos un par de cosas sobre módulos de Tate y sobre anillos Artinianos ($\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$ es un anillo de este tipo).

Módulo de Tate

Si J es una variedad abeliana sobre $\mathbb{Q}$ de dimensión g, su m-torsión (compleja) es

$$J[m] \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{2g}.$$

Tiene una acción de $G_{\mathbb{Q}} = Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Fijamos un primo ℓ. Tomando límite sobre $m = \ell^n$ obtenemos el *módulo de Tate*

$$\mathcal{T}_\ell(J) := \varprojlim J[\ell^n] \simeq \mathbb{Z}_\ell^{2g}, \qquad \text{isomorfismo de } \mathbb{Z}_\ell\text{-módulos.}$$

Definimos el módulo de Tate "racional": $\mathcal{V}_\ell(J) := \mathcal{T}_\ell(J) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \simeq \mathbb{Q}_\ell^{2g}$. Es un $\mathbb{Q}_\ell$-espacio vectorial.

Forma bilineal de Weil

Lema 3 (Pairing de Weil, versión finita)

Sea J una variedad abeliana sobre $\mathbb{Q}$ y sea $m \geq 1$ entero. Sea $J^\vee$ la variedad abeliana dual de J. Hay una forma bilineal desde la torsión hacia las raíces de la unidad (para las operaciones de grupo respectivas)

$$\langle -, - \rangle : J[m] \times J^\vee[m] \to \mu_m$$

que respeta la acción de Galois y que es no degenerada.

Solamente usaremos J un Jacobiano. En este caso $J^\vee = J$.

Forma bilineal de Weil

Lema 4 (Pairing de Weil, versión límite)

Sea J el Jacobiano de una curva sobre $\mathbb{Q}$. Tomando límite sobre $m = \ell^n$, obtenemos un pairing $\mathbb{Z}_\ell$-bilineal no degenerado

$$\langle -, - \rangle : \mathcal{T}_\ell(J) \times \mathcal{T}_\ell(J) \longrightarrow \varprojlim \mu_{\ell^n} \simeq \mathbb{Z}_\ell.$$

En particular, tensorizando con $\mathbb{Q}_\ell$ obtenemos un producto interior en módulo de Tate sobre $\mathbb{Q}_\ell$:

$$\langle -, - \rangle : \mathcal{V}_\ell(J) \times \mathcal{V}_\ell(J) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell.$$

Acción de Hecke en J_Γ y módulos de Tate

- $\mathbb{T}_\mathbb{Z}$ actúa en el grupo de homología $\Lambda := H_1(X_\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$.
- La función $(-,-) : \Lambda \times H^0(X_\Gamma, \Omega^1) \to \mathbb{C}$ dada por $(\gamma, \omega) := \int_\gamma \omega$ permite ver $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ como un retículo en $H^0(X_\Gamma, \Omega^1)^\vee \simeq \mathbb{C}^g$.
- El toro complejo cuociente $J_\Gamma = H^0(X_\Gamma, \Omega^1)^\vee / \Lambda$ es el Jacobiano de X_Γ (versión sobre $\mathbb{C}$).
- $\mathbb{T}_\mathbb{Z}$ actúa en $H^0(X_\Gamma, \Omega^1)^\vee$ y en Λ de forma compatible así que esa acción pasa al cuociente.

Por lo tanto $\mathbb{T}_\mathbb{Z}$ actúa en J_Γ y también en su módulo de Tate ℓ-ádico.

Sea w la involución de Atkin-Lehner en X_Γ. Esta actúa en J_Γ y en su módulo de Tate ℓ-ádico.

Lema 5

El pairing de Weil modificado $\langle P, Q\rangle' := \langle P, wQ\rangle$ también es no-degenerado en $\mathcal{T}_\ell(J_\Gamma)$ y en $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\ell(J_\Gamma)$. Además, todos los T_n son autoadjuntos para $\langle P, Q\rangle'$. Así que tenemos los isomorfismos

$$\mathcal{T}_\ell(J_\Gamma) \simeq \mathcal{T}_\ell(J_\Gamma)^\vee = Hom_{\mathbb{Z}_\ell}(\mathcal{T}_\ell(J_\Gamma), \mathbb{Z}_\ell), \quad \text{de } \mathbb{T}_{\mathbb{Z}_\ell}\text{-módulos}$$
$$\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}^\vee = Hom_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathcal{V}, \mathbb{Q}_\ell), \quad \text{de } \mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}\text{-módulos.}$$

Dem: Chequear no-degenerado es una modificación del pairing de Weil clásico. Usamos que el adjunto de T_n es wT_nw:

$$\langle P, T_nQ\rangle' = \langle P, wT_nQ\rangle = \langle P, (wT_nw)wQ\rangle = \langle T_nP, wQ\rangle = \langle T_nP, Q\rangle'.$$

Por lo tanto T_n es autoadjunto para el pairing de Weil modificado. El resto es álgebra lineal.

Lema 6

El módulo $\mathcal{V}$ es libre de rango 2 sobre $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$. En particular, $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$ es una $\mathbb{Q}_\ell$-álgebra de dimensión g.

Idea: Recordar que $\Lambda = H_1(X_\Gamma, \mathbb{Z})$. La clase anterior vimos que $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ es $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}}$-módulo libre de rango 2.

El resultado se obtiene siguiendo la construcción del módulo de Tate y viendo el Jacobiano como el toro complejo

$$J_\Gamma = H^0(X_\Gamma, \Omega^1)^\vee / \Lambda$$

porque ahora la torsión viene de múltiplos adecuados del retículo Λ. Lo último es porque ahora $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell} \oplus \mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \mathcal{V} \simeq \mathbb{Q}_\ell^{2g}$.

Corolario 1

El anillo $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$ es una $\mathbb{Q}_\ell$-álgebra Gorenstein. Es decir

$$\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_\ell}(\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}, \mathbb{Q}_\ell).$$

Dem: Recordando que $\mathcal{V} \cong \mathcal{V}^\vee$ para el pairing de Weil modificado, y por el lema anterior, eligiendo base de $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$ obtenemos un isomorfismo

$$\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell} \oplus \mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell} \cong \mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}^\vee \oplus \mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}^\vee.$$

$\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$ es una $\mathbb{Q}_\ell$-álgebra de dimensión finita así que es Artiniano (es decir, Noetheriano de dimensión de Krull 0; anillos artinianos en [AM] Ch. 8).

Descomponemos $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell} = \prod_i R_i$ en $\mathbb{Q}_\ell$-álgebras locales de dimensión finita. Esta descomposición es única salvo isomorfismo por el teorema de descomposición de anillos artinianos. Obtenemos

$$R_i \oplus R_i \cong R_i^\vee \oplus R_i^\vee.$$

Obtenemos $R_i^\vee \simeq R_i$ por la unicidad de la descomposición.