Seminario de modularidad de representaciones de Galois (2020-1)

Héctor Pastén

Pontificia Universidad Católica de Chile

2020/05/15

Contenido de hoy:

Material. Algunos resultados y preguntas sobre parametrizaciones modulares $\phi : X_0(N) \to E$.

- Relación de $\deg \phi$ con congruencias de formas modulares (Ribet)
- La conjetura de Watkins.

Preámbulo: curvas y sus jacobianos

Sea X/k una curva proyectiva suave con un punto k-racional $x_0 \in X(k)$ y sea J el jacobiano de X sobre k.

- x_0 determina una inclusión $j : X \to J$ definida sobre k:
$$j(x) = [x - x_0] \quad \text{clase de equivalencia lineal de divisores en } X.$$
- Tenemos el isomorfismo $j^* : H^0(J, \Omega^1_{J/k}) \simeq H^0(X, \Omega^1_{X/k})$.

Preámbulo: curvas y sus jacobianos

- Sea $\phi : X \to E$ un morfismo no-constante de grado δ hacia una curva elíptica que cumple $\phi(x_0) = 0_E$. Tenemos dos morfismos asociados

$$\phi_* : J \to E, \quad \phi_* \left(\sum_i^{Div(X)} n_i [x_i] \right) = \sum_i^{E} n_i \phi(x_i) \in E$$

$$\phi^* : E \to J, \quad \phi^*(y) = \phi^*[y] - \delta \cdot [x_0] \in J$$

  Nota: ϕ^* y ϕ_* son duales en el sentido de dualidad de variedades abelianas J, E.

- En particular $\phi_* \phi^* : E \to E$ es simplemente $[\delta] : E \to E$:

$$\phi_* \phi^*(y) = \phi_* \left(\sum_{x \in \phi^{-1}(y)} e_\phi(x/y)[x] - \delta[x_0] \right)$$

$$= \left(\sum_{x \in \phi^{-1}(y)} e_\phi(x/y) \right) [y] - \delta \cdot 0_E = \delta \cdot y \in E.$$

Notación de hoy (todo depende de f)

- N entero positivo
- $X = X_0(N)$, $J = J_0(N)$.
- $f \in S_2(\Gamma_0(N))$ newform de nivel N con $K_f = \mathbb{Q}$
- $E = A_f$ la curva elíptica que viene de la construcción de Shimura. Así, E es una curva elíptica modular fuerte.
- $q : J \to J/\mathcal{I}_f J = E$ el cuociente de la construcción de Shimura.
- $j : X \to J$ es la inclusión determinada por el punto cuspidal $[i\infty] \in X(\mathbb{Q})$. Es decir, $j(x) = [x - i\infty]$.
- $\phi = q \circ j : X \to E$ la parametrización modular de E. Notar que
$$\phi([i\infty]) = q(0_J) = 0_E \quad \text{y} \quad q = \phi_* : J \to E.$$
- El *grado modular* es $\delta = \deg \phi$.

Usando el hecho que $\phi_* = q : J \to E$ se obtiene $[\delta] = q\phi^* \in \mathrm{End}(E)$:

$$
\begin{tikzcd}
& & E \arrow[dl, "\phi^*"] \arrow[dd, "{[\delta]}"] \\
& J \arrow[dr, "q"] & \\
X \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, "\phi"] & & E
\end{tikzcd}
$$

Lema. [Minimalidad de δ] Sea $E' \sim E$ isógena sobre $\mathbb{Q}$. Todo $\psi : X \to E'$ sobre $\mathbb{Q}$ no-constante cumple que $\delta | \deg \psi$.

Dem. Sea $K = \ker(\psi_* : J \to E')$. E como factor isógeno de J es único así que K y $\mathcal{I}_f J = \ker(q)$ se intersectan en un subgrupo de indice finito en ambos. Pero $\mathcal{I}_f J$ es conexo, así que $K \supseteq \mathcal{I}_f J$ y vemos que ψ_* se factoriza por q. Por ende, $\psi = \psi_* \circ j : X \to E'$ se factoriza por $\phi : X \to E$. $\square$

Lema. $\phi^* : E \to J$ es inyectiva.

Dem. Sea $G = \ker(\phi^*) \leq E$ y $E' = E/G$. ϕ^* induce $u : E' \to J$ tal que

$$\begin{tikzcd} & E' = E/G \arrow[dr, "u"] & \\ E \arrow[ur, "\varpi"] \arrow[rr, "\phi^*"] & & J \end{tikzcd}$$

Su dual es $u^\vee : J \to E'$ que cumple $u^\vee u = [n] \in \mathrm{End}(E')$ donde $n = \deg(u^\vee j : X \to E')$. Así, $\delta | n$ (cf. lema anterior).
Por otro lado $q = \phi_* = (\phi^*)^\vee = (u\varpi)^\vee = \varpi^\vee u^\vee$ y se obtiene

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[dl] \arrow[d, "{[n]}"] & E \arrow[l, "\varpi"'] \arrow[d, "{[\delta]}"] \\ J \arrow[r, "u^\vee"] & E' \arrow[r, "\varpi^\vee"] & E \end{tikzcd}$$

así que $n|\delta$. Por lo tanto $n = \delta$ y se obtiene que $\#G = \deg(\varpi) = 1$. $\square$

Resumen

Usando el hecho que $\phi_* = q : J \to E$ se obtiene $[\delta] = q\phi^* \in \mathrm{End}(E)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & E \arrow[dl, "\phi^*"'] \arrow[dd, "{[\delta]}"] \\
 & J \arrow[dr, "q"] & \\
X \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, "\phi"] & & E
\end{tikzcd}$$

Lema. [Minimalidad de δ] Sea $E' \sim E$ isógena sobre $\mathbb{Q}$. Todo $\psi : X \to E'$ sobre $\mathbb{Q}$ no-constante cumple que $\delta | \deg \psi$.

Lema. $\phi^* : E \to J$ es inyectiva.

Los endomorfismos de J y el proyector sobre f

Sea $\mathbb{E} = \mathrm{End}(J/\mathbb{Q})$. Así, $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{E}$ viendo la acción en J.

- $\mathbb{E}$ actúa por pull-back en $H^0(J^{an}, \Omega) = H^0(X^{an}, \Omega) \simeq S := S_2(\Gamma_0(N))$. Esta acción es compatible con la acción de $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}}$.
- Así, $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}} S$. Los dos primeros son $\mathbb{Z}$-modulos libres de rango finito, y $\mathrm{End}_{\mathbb{C}} S$ es un $\mathbb{C}$-e.v.
- Como f es newform, $S_f = \mathbb{C} \cdot f$. Sea $\pi : S \to S_f$ la proyección ortogonal según el producto de Petersson. Entonces $\pi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S)$.

Pregunta clave de hoy: ¿Qué relación tiene el proyector π con $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}}$ y $\mathbb{E}$?

El proyector π relativo a $\mathbb{E}$

Teorema 1. $\pi \in \mathbb{Q} \cdot \mathbb{E}$ y su denominador es δ. Es decir, $\delta\pi \in \mathbb{E}$ y además δ divide a todo entero con esta propiedad.

Dem. Sea $B = q^\vee(E) = \phi^*(E) \subseteq J$ y recordar que $\phi^* : E \to J$ es inyectivo por lo que $B \simeq E$.
Definimos $e = q^\vee q \in \mathrm{End}(J)$. Notar que $e(J) = q^\vee(E) = B$ y $e|_B = [\delta]$ porque

$$e|_B q^\vee = q^\vee q q^\vee = q^\vee[\delta]_E = [\delta]_B q^\vee$$

Viendo la acción en diferenciales, esto significa que $e(S) = S_f$ y $e|_{S_f} = \delta$. Así que $\delta\pi = e \in \mathbb{E}$.

Minimalidad. Sea m con $m\pi \in \mathbb{E}$ y escribimos $e' = m\pi \in \mathbb{E}$. Entonces $e'(J) = B$ y $e'|_B = [m]$ (ver espacio tagente: es determinado por f). Restringiendo la imagen de e' obtenemos $e' : J \to B \simeq E$ que cumple $e'|_B = [m]$. Como ya hemos hecho antes, la composición $e'j : X \to J \to E$ tiene grado m. Por el lema de minimalidad de δ, obtenemos $\delta | m$. $\square$

El proyector π relativo a $\mathbb{T}_\mathbb{Z}$

Sea n_f el mayor entero positivo con la siguiente propiedad:
Existe $g \in S_\mathbb{Z} := S_2(\Gamma_0(N), \mathbb{Z})$ tal que $(g, f) = 0$ y $g \equiv f \bmod n_f$.

Como $S_\mathbb{Z}$ es libre de rango finito, es fácil ver que n_f existe y es finito.
n_f se llama el *número de congruencia* de f.

Teorema 2. $n_f \pi \in \mathbb{T}_\mathbb{Z}$.
(*Nota.* Se puede demostrar minimalidad, pero no lo necesitaremos.)

Dem. Sea $h \in S_\mathbb{Z}$. Escribir $h = g + \frac{a}{b} f$ con $g \in S_\mathbb{Q}^{\perp f}$ y $(a, b) = 1$.
Entonces $bh = bg + af$ y vemos que $bg \in S_\mathbb{Z}^{\perp f}$. Concluimos que $b | n_f$.
Por lo tanto, $\pi : S_\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} f$ tiene imagen $n_f^{-1} \mathbb{Z} f$. Es decir, $n_f \pi : S_\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} f$.
Usando el coeficiente frente a f obtenemos $\theta \in Hom(S_\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{T}_\mathbb{Z}$ como $\mathbb{T}_\mathbb{Z}$-módulo. Sea $t \in \mathbb{T}_\mathbb{Z}$ el operador correspondiente a θ, entonces

- $t(h) = \theta(h) f = 0$ si $h \perp f$, y
- $t(f) = \theta(f) f = n_f f$.

Es decir, $n_f \pi = t \in \mathbb{T}_\mathbb{Z}$. $\square$

Un teorema de Ribet

Teorema. $\delta | n_f$.

Observación. Es un resultado de Ribet, pero pasó mucho tiempo sin publicar la demostración. Entonces Zagier dio una demostración cuando N es primo (y enunció el caso general incorrectamente). Finalmente, una demostración completa fue dada por Kani y Cojocaru. Cuando yo era estudiante no la entendí, así que aquí va otra:

Dem. $n_f \pi \in \mathbb{T}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{E}$. Pero δ divide a todo entero con esa propiedad. □

Corolario. Si $X_0(N)$ tiene género > 1 (lo cual ocurre siempre salvo finitos casos) entonces $n_f > 1$. Así, f satisface una congruencia no-trivial con otra forma modular que es ortogonal a ella.

Dem. $\phi : X_0(N) \to E$ no es isomorfismo así que $\delta > 1$. □

Ejemplo

El primer N con $g(X_0(N)) > 1$ y alguna newform f con $K_f = \mathbb{Q}$ es $N = 26$, que cumple $g(X) = 2$. El espacio viejo es trivial. Las newform son

$$f = q - q^2 + q^3 + q^4 - 3q^5 - q^6 - q^7 + \dots$$
$$h = q + q^2 - 3q^3 + q^4 - q^5 - 3q^6 + q^7 + \dots$$

Por dimensión $K_f = K_h = \mathbb{Q}$. Son ortogonales por teoría de Atkin-Lehner, así que podemos calcular n_f directamente comparando f y h:

- $n_f | 2$ de los coeficientes de Fourier a la vista. Por el corolario anterior $n_f > 1$, así que $n_f = 2$.
- Además, $\delta_f | n_f$ y obtenemos $\delta_f = 2$.

La conjetura de Watkins

Ya explicamos que δ guarda información sobre la forma modular f: como $\delta | n_f$, vemos que δ tiene información sobre congruencias de f. También se espera que δ guarde información sobre la curva elíptica E:

Conjetura. (Watkins). $2^{\mathrm{rk}\, E(\mathbb{Q})} | \delta$. Es decir, $\mathrm{rk}\, E(\mathbb{Q}) \leq v_2(\delta)$.

¿Qué sabemos?

- Buena parte de la conjetura de Watkins está demostrada en el caso que n_f es impar (Calegari-Emerton 2009, Yazdani 2011, Kazalicki-Kohen 2018).
- ¡Pero no se sabe si existen infinitas curvas elípticas con δ impar!
- Junto con José Esparza-Lozano (alumno de intercambio del MIT que nos visitó el semestre pasado), demostramos varios casos.

La conjetura de Watkins

Teorema.(EL-P '20) Suponga que E tiene un punto racional de 2-torsión. Hay una cota calculable (y pequeña) $\kappa(E)$ tal que para todo entero libre de cuadrados d con al menos $\kappa(E)$ factores primos, la conjetura de Watkins es cierta para el twist cuadrático $E^{(d)}$.

Pregunta/ejercicio. La demostración no es complicada. ¿Se puede optimizar de modo que para alguna E bien elegida, *todos* sus twists cuadráticos cumplan la conjetura de Watkins?