UdelaR

Representaciones de Galois

Santiago Radi

May 23, 2020

Introducción

Introducción

Fijemos $\overline{\mathbb{Q}}$ una clausura algebraica para $\mathbb{Q}$.

Notación: L cuerpo perfecto, $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$.

Introducción

Fijemos $\overline{\mathbb{Q}}$ una clausura algebraica para $\mathbb{Q}$.

Notación: L cuerpo perfecto, $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$.

Representación de Galois

Una **representación de Galois** es un morfismo continuo.

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$$

Introducción

Fijemos $\overline{\mathbb{Q}}$ una clausura algebraica para $\mathbb{Q}$.

Notación: L cuerpo perfecto, $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$.

Representación de Galois

Una **representación de Galois** es un morfismo continuo.

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$$

La topología del codominio dependerá del cuerpo K.

Introducción

Fijemos $\overline{\mathbb{Q}}$ una clausura algebraica para $\mathbb{Q}$.

Notación: L cuerpo perfecto, $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$.

Representación de Galois

Una **representación de Galois** es un morfismo continuo.

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$$

La topología del codominio dependerá del cuerpo K.

La topología de $G_{\mathbb{Q}}$ es la **topología de Krull**, en la cual, $G_{\mathbb{Q}}$ es un grupo topológico donde los G_F con $F/\mathbb{Q}$ una extensión Galois y finita son una base de entornos de la identidad.

Introducción

Representaciones conjugadas

Dos representaciones ρ_1 , ρ_2 son **conjugadas** si existe $\tau \in \mathrm{GL}_d(K)$ tal que

$$\rho_1(g) = \tau \rho_2(g) \tau^{-1}$$

para todo $g \in G_{\mathbb{Q}}$

Representaciones conjugadas

Dos representaciones ρ_1 , ρ_2 son **conjugadas** si existe $\tau \in \mathrm{GL}_d(K)$ tal que

$$\rho_1(g) = \tau\rho_2(g)\tau^{-1}$$

para todo $g \in G_{\mathbb{Q}}$

Nos interesarán tres tipos de representaciones:

Representaciones conjugadas

Dos representaciones ρ_1 , ρ_2 son **conjugadas** si existe $\tau \in \mathrm{GL}_d(K)$ tal que

$$\rho_1(g) = \tau \rho_2(g) \tau^{-1}$$

para todo $g \in G_{\mathbb{Q}}$

Nos interesarán tres tipos de representaciones:

- **Representaciones de Artin:** $K = \mathbb{C}$.

Representaciones conjugadas

Dos representaciones ρ_1 , ρ_2 son **conjugadas** si existe $\tau \in \mathrm{GL}_d(K)$ tal que

$$\rho_1(g) = \tau \rho_2(g) \tau^{-1}$$

para todo $g \in G_{\mathbb{Q}}$

Nos interesarán tres tipos de representaciones:

- **Representaciones de Artin:** $K = \mathbb{C}$.
- **Representaciones** $\mod \ell$**:** $K = k$ cuerpo finito de característica ℓ.

Representaciones conjugadas

Dos representaciones ρ_1 , ρ_2 son **conjugadas** si existe $\tau \in \mathrm{GL}_d(K)$ tal que

$$\rho_1(g) = \tau \rho_2(g) \tau^{-1}$$

para todo $g \in G_{\mathbb{Q}}$

Nos interesarán tres tipos de representaciones:

- **Representaciones de Artin:** $K = \mathbb{C}$.
- **Representaciones** $\bmod \ell$**:** $K = k$ cuerpo finito de característica ℓ.
- **Representaciones** ℓ**-ádicas:** K una extensión finita de $\mathbb{Q}_\ell$.

Sobre $G_{\mathbb{Q}}$...

Sobre $G_{\mathbb{Q}}$...

Sea p primo de $\mathbb{Q}$ y extendemos ν_p a $\overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$.

Sobre $G_{\mathbb{Q}}$...

Sea p primo de $\mathbb{Q}$ y extendemos ν_p a $\overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$.

La extensión de la valuación no es única pero $G_{\mathbb{Q}}$ actúa transitivamente sobre el conjunto de las valuaciones arriba de p.

Sobre $G_{\mathbb{Q}}$...

Sea p primo de $\mathbb{Q}$ y extendemos ν_p a $\overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$.

La extensión de la valuación no es única pero $G_{\mathbb{Q}}$ actúa transitivamente sobre el conjunto de las valuaciones arriba de p.

Fijemos ν una extensión de ν_p y sea G_p el estabilizador de ν.

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{\mathbb{Q}_p}(\nu) \arrow[dd, dash, "G_{\mathbb{Q}_p}"] \\
\overline{\mathbb{Q}}(\nu) \arrow[ur, dash] \arrow[dd, dash, "G_{\mathbb{Q}}"'] & \\
 & \mathbb{Q}_p(\nu |_{\mathbb{Q}_p}) \\
\mathbb{Q}(\nu_p) \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

Sobre $G_{\mathbb{Q}}$...

Sea p primo de $\mathbb{Q}$ y extendemos ν_p a $\overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$.

La extensión de la valuación no es única pero $G_{\mathbb{Q}}$ actúa transitivamente sobre el conjunto de las valuaciones arriba de p.

Fijemos ν una extensión de ν_p y sea G_p el estabilizador de ν.

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{\mathbb{Q}_p}(\nu) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash, "G_{\mathbb{Q}_p}"] \\
\overline{\mathbb{Q}}(\nu) \arrow[d, dash, "G_{\mathbb{Q}}"'] & \mathbb{Q}_p(\nu\mid_{\mathbb{Q}_p}) \arrow[dl, dash] \\
\mathbb{Q}(\nu_p) &
\end{tikzcd}$$

Propiedades

- G_p es isomorfo a $G_{\mathbb{Q}_p}$ para $\overline{\mathbb{Q}_p} = (\overline{\mathbb{Q}})_\nu$.
- $\mathrm{Im}(\nu\mid_{\mathbb{Q}_p}) = \mathrm{Im}(\nu_p) = \mathbb{Z}$

Sobre $G_{\mathbb{Q}_p}$...

Tenemos fijada $\nu : \overline{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}$.

Sobre $G_{\mathbb{Q}_p}$...

Tenemos fijada $\nu : \overline{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}$. Sean

$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : \nu(x) \geq 0\}$ y $\mathfrak{m}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : \nu(x) > 0\}$.

Sobre $G_{\mathbb{Q}_p}$...

Tenemos fijada $\nu : \overline{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}$. Sean

$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : \nu(x) \geq 0\}$ y $\mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : \nu(x) > 0\}$.

$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$.

Sobre $G_{\mathbb{Q}_p}$...

Tenemos fijada $\nu : \overline{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}$. Sean

$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : \nu(x) \geq 0\}$ y $\mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : \nu(x) > 0\}$.

$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$. Además, $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}/\mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \simeq \overline{\mathbb{F}_p}$.

Sobre $G_{\mathbb{Q}_p}$...

Tenemos fijada $\nu : \overline{\mathbb{Q}_p} \to \mathbb{Q}$. Sean

$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : \nu(x) \geq 0\}$ y $\mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : \nu(x) > 0\}$.

$\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$. Además, $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}/\mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \simeq \overline{\mathbb{F}}_p$.

La valuación ν es compatible con la acción de $G_{\mathbb{Q}_p}$ así que $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ y $\mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ son estables bajo la acción de $G_{\mathbb{Q}_p}$, lo que da un mapa sobreyectivo

$$\varrho : G_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{F}_p}.$$

Representación ramificada en p

Representación ramificada en p

Grupo de inercia

Llamamos **grupo de inercia** a $I_p = \ker(\varrho)$

Representación ramificada en p

Grupo de inercia

Llamamos **grupo de inercia** a $I_p = \ker(\varrho)$

Grupo de inercia salvaje

Llamamos **grupo de inercia salvaje (wild)** P_p al pro-p-subgrupo maximal de I_p.

Representación ramificada en p

Grupo de inercia

Llamamos **grupo de inercia** a $I_p = \ker(\varrho)$

Grupo de inercia salvaje

Llamamos **grupo de inercia salvaje (wild)** P_p al pro-p-subgrupo maximal de I_p.

Representación no ramificada

Una representación $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ es **no ramificada en** p si $I_p \subseteq \ker(\rho)$.

Representación ramificada en p

Grupo de inercia

Llamamos **grupo de inercia** a $I_p = \ker(\varrho)$

Grupo de inercia salvaje

Llamamos **grupo de inercia salvaje (wild)** P_p al pro-p-subgrupo maximal de I_p.

Representación no ramificada

Una representación $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ es **no ramificada en** p si $I_p \subseteq \ker(\rho)$. Observar que esta definición no depende de ν.

Representación ramificada en p

Grupo de inercia

Llamamos **grupo de inercia** a $I_p = \ker(\varrho)$

Grupo de inercia salvaje

Llamamos **grupo de inercia salvaje (wild)** P_p al pro-p-subgrupo maximal de I_p.

Representación no ramificada

Una representación $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ es **no ramificada en** p si $I_p \subseteq \ker(\rho)$. Observar que esta definición no depende de ν.

Si ρ es no ramificada en p, la acción de Frob_p está bien definida.

Representaciones simples y semisimples

Representaciones simples y semisimples

Subrepresentaciones

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V)$ una representación. Sea W un subespacio vectorial de V estable bajo la acción de $G_{\mathbb{Q}}$ por ρ. Podemos entonces considerar la representación $\rho^W : G \to \mathrm{GL}(W)$. Diremos que ρ^W es una **subrepresentación** de ρ.

Subrepresentaciones

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V)$ una representación. Sea W un subespacio vectorial de V estable bajo la acción de $G_{\mathbb{Q}}$ por ρ. Podemos entonces considerar la representación $\rho^W : G \to \mathrm{GL}(W)$. Diremos que ρ^W es una **subrepresentación** de ρ.

Representación simple

Una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ se dice **irreducible** o **simple** si ρ no tiene subrepresentaciones propias.

Representaciones simples y semisimples

Subrepresentaciones

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V)$ una representación. Sea W un subespacio vectorial de V estable bajo la acción de $G_{\mathbb{Q}}$ por ρ. Podemos entonces considerar la representación $\rho^W : G \to \mathrm{GL}(W)$. Diremos que ρ^W es una **subrepresentación** de ρ.

Representación simple

Una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ se dice **irreducible** o **simple** si ρ no tiene subrepresentaciones propias.

Representación semisimple

Una representación es **semisimple** si es suma directa de representaciones simples.

Representaciones simples y semisimples

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

Representaciones simples y semisimples

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Esta representación no es semisimple.

Representaciones simples y semisimples

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Esta representación no es semisimple.

No es simple puesto que la primer columna de la matriz representa un subespacio invariante de dimensión 1.

Representaciones simples y semisimples

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Esta representación no es semisimple.

No es simple puesto que la primer columna de la matriz representa un subespacio invariante de dimensión 1.

No es semisimple porque si lo fuera tendría que haber una base para la cual $\rho(n)$ diagonalice simultáneamente para todo n. Sin embargo $\rho(1)$ es la forma de Jordan canónica.

Representaciones de Artin

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$. *Entonces:*

Representaciones de Artin

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$. *Entonces:*

1. *tiene imagen finita,*

Representaciones de Artin

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$*. Entonces:*

1. *tiene imagen finita,*
2. *es semisimple,*

Representaciones de Artin

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$. *Entonces:*

1. *tiene imagen finita,*
2. *es semisimple,*
3. *ramifica en finitos primos,*

Representaciones de Artin

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$*. Entonces:*

1. *tiene imagen finita,*
2. *es semisimple,*
3. *ramifica en finitos primos,*
4. *es determinada por los valores de* $\mathrm{tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_p)$ *sobre los primos* p *donde* ρ *no ramifica.*

Representaciones de Artin

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$*. Entonces:*

1. *tiene imagen finita,*

Demostración

1. La matriz id contiene un abierto V cuyo único subgrupo es $\{\mathrm{id}\}$, entonces $U = \rho^{-1}(V)$ es abierto en $G_{\mathbb{Q}}$ y por lo tanto contiene un abierto G_F con $F/\mathbb{Q}$ Galois y finita. Como G_F es un subgrupo de $G_{\mathbb{Q}}$, $\rho(G_F)$ es un subgrupo de V, luego $\rho(G_F) = \{\mathrm{id}\}$. Por correspondencia de Galois, ρ factoriza a $\rho : \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ y $|\rho(G_{\mathbb{Q}})| \leq |\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})|$.

Representaciones de Artin

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$. Entonces:

2. *es semisimple,*

Demostración

2. Por inducción en d. Si $d = 0$, es trivial. Luego, si es simple terminamos. Si no es simple, tiene un subespacio W invariante y una proyección $p : V \to W$. Si ponemos $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$,

$$p^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\, p\, \rho(g)^{-1}$$

es una proyección de V a W que conmuta con $\rho(s)$ para todo $s \in G$. Si $W^0 = \ker(p^0)$, W^0 es invariante y $V = W \oplus W^0$. Luego aplico hipótesis de inducción sobre W y W^0.

Representaciones de Artin

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$*. Entonces:*

3. *ramifica en finitos primos,*

Demostración

3. ρ solo puede ramificar en los primos donde $F/\mathbb{Q}$ ramifica, que son una cantidad finita.

Representaciones de Artin

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$*. Entonces:*

4. *es determinada por los valores de* $\operatorname{tr} \rho(\mathrm{Frob}_p)$ *sobre los primos p donde* ρ *no ramifica.*

Demostración

4. Por Chebotarev, que enuncia que si $F/\mathbb{Q}$ es una extensión Galois finita entonces $[\mathrm{Frob}_p]$ realiza todas las clases de conjugación de $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$, tenemos que nos alcanza conocer ρ en los Frobenius. Más aún, como ρ es semisimple en un cuerpo algebraicamente cerrado, $\operatorname{tr} \rho$ determina ρ a menos de conjugación.

Representaciones $\mod \ell$

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(k)$ *con* k *cuerpo finito de característica* $\ell > 0$.
Entonces:

Representaciones $\mod \ell$

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(k)$ *con* k *cuerpo finito de característica* $\ell > 0$. *Entonces:*

1. *tiene imagen finita,*

Representaciones $\mod \ell$

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(k)$ *con* k *cuerpo finito de característica* $\ell > 0$. *Entonces:*

1. *tiene imagen finita,*
2. *ramifica en finitos primos,*

Representaciones mod ℓ

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(k)$ *con* k *cuerpo finito de característica* $\ell > 0$*. Entonces:*

1. *tiene imagen finita,*
2. *ramifica en finitos primos,*
3. *si es semisimple y* $\ell \leq d$*, entonces la representación es determinada por los coeficientes del polinomio característico de* $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ *en los primos* p *donde* ρ *no ramifica. Si* $\ell > d$*, es determinada por los valores de* $\mathrm{tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_p)$ *en los primos* p *donde* ρ *no ramifica.*

Representaciones mod ℓ

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(k)$ *con* k *cuerpo finito de característica* $\ell > 0$. *Entonces:*

1. *tiene imagen finita,*
2. *ramifica en finitos primos,*
3. *si es semisimple y* $\ell \leq d$, *entonces la representación es determinada por los coeficientes del polinomio característico de* $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ *en los primos* p *donde* ρ *no ramifica. Si* $\ell > d$, *es determinada por los valores de* $\operatorname{tr} \rho(\mathrm{Frob}_p)$ *en los primos* p *donde* ρ *no ramifica.*

Proof.

1. k^d es finito, así que ρ factoriza por una extensión finita.

Representaciones $\mod \ell$

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(k)$ *con* k *cuerpo finito de característica* $\ell > 0$*. Entonces:*

1. *tiene imagen finita,*
2. *ramifica en finitos primos,*
3. *si es semisimple y* $\ell \leq d$*, entonces la representación es determinada por los coeficientes del polinomio característico de* $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ *en los primos* p *donde* ρ *no ramifica. Si* $\ell > d$*, es determinada por los valores de* $\operatorname{tr} \rho(\mathrm{Frob}_p)$ *en los primos* p *donde* ρ *no ramifica.*

Proof.

1. k^d es finito, así que ρ factoriza por una extensión finita.
2. Consecuencia de 1.

Representaciones mod ℓ

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(k)$ *con* k *cuerpo finito de característica* $\ell > 0$*. Entonces:*

1. *tiene imagen finita,*
2. *ramifica en finitos primos,*
3. *si es semisimple y* $\ell \leq d$*, entonces la representación es determinada por los coeficientes del polinomio característico de* $\rho(\mathrm{Frob}_p)$ *en los primos* p *donde* ρ *no ramifica. Si* $\ell > d$*, es determinada por los valores de* $\operatorname{tr} \rho(\mathrm{Frob}_p)$ *en los primos* p *donde* ρ *no ramifica.*

Proof.

1. k^d es finito, así que ρ factoriza por una extensión finita.
2. Consecuencia de 1.
3. Ver el Teorema de Brauer-Nesbitt □

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ con K extensión finita de $\mathbb{Q}_\ell$ semisimple y ramificada en finitos primos. Entonces

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ *con* K *extensión finita de* $\mathbb{Q}_\ell$ *semisimple y ramificada en finitos primos. Entonces*

1. ρ *es determinada por los valores de* $\operatorname{tr} \rho(\mathrm{Frob}_p)$ *en los primos* p *donde* ρ *no ramifica.*

Representaciones ℓ-ádicas

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathsf{GL}_d(K)$ *con* K *extensión finita de* $\mathbb{Q}_\ell$ *semisimple y ramificada en finitos primos. Entonces*

1. ρ *es determinada por los valores de* $\operatorname{tr} \rho(\mathsf{Frob}_p)$ *en los primos* p *donde* ρ *no ramifica.*
2. $\rho(P_p)$ *es finito cuando* $p \neq \ell$

Representaciones ℓ-ádicas

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ con K extensión finita de $\mathbb{Q}_\ell$ semisimple y ramificada en finitos primos. Entonces

1. *ρ es determinada por los valores de $\operatorname{tr} \rho(\mathrm{Frob}_p)$ en los primos p donde ρ no ramifica.*
2. *$\rho(P_p)$ es finito cuando $p \neq \ell$*

Proof.

1. Ver el Teorema de Brauer-Nesbitt.

Representaciones ℓ-ádicas

Teorema

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ con K extensión finita de $\mathbb{Q}_\ell$ semisimple y ramificada en finitos primos. Entonces

1. *ρ es determinada por los valores de $\mathrm{tr}\,\rho(\mathrm{Frob}_p)$ en los primos p donde ρ no ramifica.*
2. *$\rho(P_p)$ es finito cuando $p \neq \ell$*

Proof.

1. Ver el Teorema de Brauer-Nesbitt.
2. Demostración más adelante. □

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en extensiones finitas

Sea $L/\mathbb{Q}_p$ extensión separable finita, $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$, π_L uniformizador, ν_L valuación normalizada en L y $w \in [-1, +\infty)$. Defino

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en extensiones finitas

Sea $L/\mathbb{Q}_p$ extensión separable finita, $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$, π_L uniformizador, ν_L valuación normalizada en L y $w \in [-1, +\infty)$. Defino

$$G_w = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p) : \nu_L(\sigma(\pi_L) - \pi_L) \geq w + 1\}$$

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en extensiones finitas

Sea $L/\mathbb{Q}_p$ extensión separable finita, $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$, π_L uniformizador, ν_L valuación normalizada en L y $w \in [-1, +\infty)$. Defino

$$G_w = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p) : \nu_L(\sigma(\pi_L) - \pi_L) \geq w + 1\}$$

Propiedades

1. Si $w \leq w'$ entonces $G_w \supseteq G_{w'}$

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en extensiones finitas

Sea $L/\mathbb{Q}_p$ extensión separable finita, $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$, π_L uniformizador, ν_L valuación normalizada en L y $w \in [-1, +\infty)$. Defino

$$G_w = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p) : \nu_L(\sigma(\pi_L) - \pi_L) \geq w + 1\}$$

Propiedades

1. Si $w \leq w'$ entonces $G_w \supseteq G_{w'}$
2. $G_w = G_{\lceil w \rceil}$

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en extensiones finitas

Sea $L/\mathbb{Q}_p$ extensión separable finita, $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$, π_L uniformizador, ν_L valuación normalizada en L y $w \in [-1, +\infty)$. Defino

$$G_w = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p) : \nu_L(\sigma(\pi_L) - \pi_L) \geq w + 1\}$$

Propiedades

1. Si $w \leq w'$ entonces $G_w \supseteq G_{w'}$
2. $G_w = G_{\lceil w \rceil}$
3. $G_{-1} = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en extensiones finitas

Sea $L/\mathbb{Q}_p$ extensión separable finita, $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$, π_L uniformizador, ν_L valuación normalizada en L y $w \in [-1, +\infty)$. Defino

$$G_w = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p) : \nu_L(\sigma(\pi_L) - \pi_L) \geq w + 1\}$$

Propiedades

1. Si $w \leq w'$ entonces $G_w \supseteq G_{w'}$
2. $G_w = G_{\lceil w \rceil}$
3. $G_{-1} = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$
4. $G_w \lhd G$ para todo w

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en extensiones finitas

Sea $L/\mathbb{Q}_p$ extensión separable finita, $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$, π_L uniformizador, ν_L valuación normalizada en L y $w \in [-1, +\infty)$. Defino

$$G_w = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p) : \nu_L(\sigma(\pi_L) - \pi_L) \geq w + 1\}$$

Propiedades

1. Si $w \leq w'$ entonces $G_w \supseteq G_{w'}$
2. $G_w = G_{\lceil w \rceil}$
3. $G_{-1} = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$
4. $G_w \lhd G$ para todo w

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación

Función de Herbrand

Sea $\varphi : [-1, +\infty) \to [-1, +\infty)$ definida como

$$\varphi(w) = \int_0^w \frac{dt}{[G_0 : G_t]}$$

con la convención de que $[G_0 : G_t] = [G_{-1} : G_0]^{-1}$ cuando $t \in [-1, 0]$.

Grupos de ramificación

Función de Herbrand

Sea $\varphi : [-1, +\infty) \to [-1, +\infty)$ definida como

$$\varphi(w) = \int_0^w \frac{dt}{[G_0 : G_t]}$$

con la convención de que $[G_0 : G_t] = [G_{-1} : G_0]^{-1}$ cuando $t \in [-1, 0]$.

Teorema

φ es un homeomorfismo lineal a trozos, creciente y biyectivo

Función de Herbrand

Sea $\varphi : [-1, +\infty) \to [-1, +\infty)$ definida como

$$\varphi(w) = \int_0^w \frac{dt}{[G_0 : G_t]}$$

con la convención de que $[G_0 : G_t] = [G_{-1} : G_0]^{-1}$ cuando $t \in [-1, 0]$.

Teorema

φ es un homeomorfismo lineal a trozos, creciente y biyectivo

Renumeración de los grupos de ramificación

$$G^u = G_{\varphi^{-1}(u)}$$

Grupos de ramificación

Función de Herbrand

Sea $\varphi : [-1, +\infty) \to [-1, +\infty)$ definida como

$$\varphi(w) = \int_0^w \frac{dt}{[G_0 : G_t]}$$

con la convención de que $[G_0 : G_t] = [G_{-1} : G_0]^{-1}$ cuando $t \in [-1, 0]$.

Teorema

φ es un homeomorfismo lineal a trozos, creciente y biyectivo

Renumeración de los grupos de ramificación

$$G^u = G_{\varphi^{-1}(u)}$$

Propiedad: Si $H \lhd G$ entonces $(G/H)^u = G^u/(H \cap G^u)$

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en $G_{\mathbb{Q}_p}$

El teorema anterior permite definir

$$I_p^u = \varprojlim \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)^u$$

Grupos de ramificación en $G_{\mathbb{Q}_p}$

El teorema anterior permite definir

$$I_p^u = \varprojlim \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)^u$$

Propiedades

1. Si $u \leq v$ entonces $I_p^u \supseteq I_p^v$

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en $G_{\mathbb{Q}_p}$

El teorema anterior permite definir

$$I_p^u = \varprojlim \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)^u$$

Propiedades

1. Si $u \leq v$ entonces $I_p^u \supseteq I_p^v$
2. $I_p^{-1} = G_{\mathbb{Q}_p}$

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en $G_{\mathbb{Q}_p}$

El teorema anterior permite definir

$$I_p^u = \varprojlim \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)^u$$

Propiedades

1. Si $u \leq v$ entonces $I_p^u \supseteq I_p^v$
2. $I_p^{-1} = G_{\mathbb{Q}_p}$
3. $I_p^u = I_p$ si $u \in (-1, 0]$

Grupos de ramificación en $G_{\mathbb{Q}_p}$

El teorema anterior permite definir

$$I_p^u = \varprojlim \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)^u$$

Propiedades

1. Si $u \leq v$ entonces $I_p^u \supseteq I_p^v$
2. $I_p^{-1} = G_{\mathbb{Q}_p}$
3. $I_p^u = I_p$ si $u \in (-1, 0]$
4. $P_p = \bigcup_{u>0} I_p^u$

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en $G_{\mathbb{Q}_p}$

El teorema anterior permite definir

$$I_p^u = \varprojlim \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)^u$$

Propiedades

1. Si $u \leq v$ entonces $I_p^u \supseteq I_p^v$
2. $I_p^{-1} = G_{\mathbb{Q}_p}$
3. $I_p^u = I_p$ si $u \in (-1, 0]$
4. $P_p = \bigcup_{u>0} I_p^u$
5. $\bigcap_u I_p^u = \{\mathrm{id}\}$

Grupos de ramificación

Grupos de ramificación en $G_{\mathbb{Q}_p}$

El teorema anterior permite definir

$$I_p^u = \varprojlim \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)^u$$

Propiedades

1. Si $u \leq v$ entonces $I_p^u \supseteq I_p^v$
2. $I_p^{-1} = G_{\mathbb{Q}_p}$
3. $I_p^u = I_p$ si $u \in (-1, 0]$
4. $P_p = \bigcup_{u>0} I_p^u$
5. $\bigcap_u I_p^u = \{\mathrm{id}\}$
6. $I_p^u \lhd G_{\mathbb{Q}_p}$ para todo u

Conductor de una representación

Conductor de una representación

Subespacio invariante de un subgrupo normal

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$. Viendo $I_p^u \lhd G_p \subseteq G_{\mathbb{Q}}$, defino

Conductor de una representación

Subespacio invariante de un subgrupo normal

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$. Viendo $I_p^u \lhd G_p \subseteq G_{\mathbb{Q}}$, defino

$$\rho^{I_p^u} = \left\{ v \in K^d : \rho(\sigma)v = v, \ \forall \sigma \in I_p^u \right\}$$

que es un subespacio vectorial de K^d.

Conductor de una representación

Subespacio invariante de un subgrupo normal

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$. Viendo $I_p^u \lhd G_p \subseteq G_{\mathbb{Q}}$, defino

$$\rho^{I_p^u} = \left\{ v \in K^d : \rho(\sigma)v = v, \ \forall \sigma \in I_p^u \right\}$$

que es un subespacio vectorial de K^d.

Conductor local de una representación

$$m_p(\rho) = \int_{-1}^{\infty} \operatorname{codim} \rho^{I_p^u} du = \operatorname{codim} \rho^{I_p} + \int_{0}^{\infty} \operatorname{codim} \rho^{I_p^u} du$$

en $p \neq \ell$ si ρ no es una representación Artin.

Conductor de una representación

Subespacio invariante de un subgrupo normal

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$. Viendo $I_p^u \triangleleft G_p \subseteq G_{\mathbb{Q}}$, defino

$$\rho^{I_p^u} = \left\{ v \in K^d : \rho(\sigma)v = v,\ \forall \sigma \in I_p^u \right\}$$

que es un subespacio vectorial de K^d.

Conductor local de una representación

$$m_p(\rho) = \int_{-1}^{\infty} \operatorname{codim} \rho^{I_p^u} du = \operatorname{codim} \rho^{I_p} + \int_0^{\infty} \operatorname{codim} \rho^{I_p^u} du$$

en $p \neq \ell$ si ρ no es una representación Artin.

Propiedades

Conductor de una representación

Subespacio invariante de un subgrupo normal

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$. Viendo $I_p^u \lhd G_p \subseteq G_{\mathbb{Q}}$, defino

$$\rho^{I_p^u} = \left\{ v \in K^d : \rho(\sigma)v = v, \ \forall \sigma \in I_p^u \right\}$$

que es un subespacio vectorial de K^d.

Conductor local de una representación

$$m_p(\rho) = \int_{-1}^{\infty} \operatorname{codim} \rho^{I_p^u} du = \operatorname{codim} \rho^{I_p} + \int_0^{\infty} \operatorname{codim} \rho^{I_p^u} du$$

en $p \neq \ell$ si ρ no es una representación Artin.

Propiedades

1. $m_p(\rho)$ es finito y es un entero positivo

Conductor de una representación

Subespacio invariante de un subgrupo normal

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$. Viendo $I_p^u \lhd G_p \subseteq G_{\mathbb{Q}}$, defino

$$\rho^{I_p^u} = \left\{ v \in K^d : \rho(\sigma)v = v, \ \forall \sigma \in I_p^u \right\}$$

que es un subespacio vectorial de K^d.

Conductor local de una representación

$$m_p(\rho) = \int_{-1}^{\infty} \mathrm{codim}\, \rho^{I_p^u} du = \mathrm{codim}\, \rho^{I_p} + \int_{0}^{\infty} \mathrm{codim}\, \rho^{I_p^u} du$$

en $p \neq \ell$ si ρ no es una representación Artin.

Propiedades

1. $m_p(\rho)$ es finito y es un entero positivo
2. $m_p(\rho) = 0$ si y solo si ρ es no ramificado en p

Conductor de una representación

Conductor de una representación

Conductor global de una representación

$$N(\rho) = \prod_{p} p^{m_p(\rho)}$$

donde el producto de los primos no contiene a l si ρ no es una representación de Artin.

Conductor de una representación

Conductor global de una representación

$$N(\rho) = \prod_p p^{m_p(\rho)}$$

donde el producto de los primos no contiene a l si ρ no es una representación de Artin.

Observación

$N(\rho)$ es un entero positivo.

Esto es porque los $m_p(\rho)$ son enteros positivos y los tres tipos de representaciones ramifican en una cantidad finita de primos.

Representación residual

Representación residual

Sea $K/\mathbb{Q}_\ell$ extensión finita, $\mathcal{O}$ anillo de enteros, λ ideal maximal de $\mathcal{O}$ y $k = \mathcal{O}/\lambda$ cuerpo residual (de característica ℓ).

Representación residual

Sea $K/\mathbb{Q}_\ell$ extensión finita, $\mathcal{O}$ anillo de enteros, λ ideal maximal de $\mathcal{O}$ y $k = \mathcal{O}/\lambda$ cuerpo residual (de característica ℓ).

Teorema

Si $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ es una representación ℓ-ádica, entonces existe $\rho' : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O})$ tal que $\rho \sim \rho'$

Representación residual

Sea $K/\mathbb{Q}_\ell$ extensión finita, $\mathcal{O}$ anillo de enteros, λ ideal maximal de $\mathcal{O}$ y $k = \mathcal{O}/\lambda$ cuerpo residual (de característica ℓ).

Teorema

Si $\rho : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_d(K)$ es una representación ℓ-ádica, entonces existe $\rho' : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O})$ tal que $\rho \sim \rho'$

Demostración

$V = K^d$, $\Lambda = \mathcal{O}^d$, entonces Λ es un retículo de V, así que Λ es un $\mathbb{Z}_\ell$-módulo finitamente generado y por ende compacto porque $\mathbb{Z}_\ell$ lo es.

$G_\mathbb{Q}$ y Λ compactos y ρ continua, así que $\rho(G_\mathbb{Q} \times \Lambda) = \Lambda'$ compacto.

Representación residual

Sea $K/\mathbb{Q}_\ell$ extensión finita, $\mathcal{O}$ anillo de enteros, λ ideal maximal de $\mathcal{O}$ y $k = \mathcal{O}/\lambda$ cuerpo residual (de característica ℓ).

Teorema

Si $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ es una representación ℓ-ádica, entonces existe $\rho' : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O})$ tal que $\rho \sim \rho'$

Demostración

Como Λ' es compacto, es acotado, y entonces $\nu(w) \geq -r$ para todo $w \in \Lambda'$ donde $\nu(w) = \min\{\nu(w_i) : i = 1, ..., d\}$ con $w = (w_1, ..., w_d)$ y $r \geq 0$. Como Λ es el retículo de los vectores con valuación no negativa, $\Lambda' \subseteq \pi^{-r}\Lambda$ con π el uniformizador de $\mathcal{O}$.

Representación residual

Sea $K/\mathbb{Q}_\ell$ extensión finita, $\mathcal{O}$ anillo de enteros, λ ideal maximal de $\mathcal{O}$ y $k = \mathcal{O}/\lambda$ cuerpo residual (de característica ℓ).

Teorema

Si $\rho : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_d(K)$ es una representación ℓ-ádica, entonces existe $\rho' : G_\mathbb{Q} \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O})$ tal que $\rho \sim \rho'$

Demostración

A su vez, $\Lambda' = \bigcup_{g \in G_\mathbb{Q}} \rho(g)\Lambda$ así que $\Lambda \subseteq \Lambda'$ y entonces Λ' tiene rango al menos d. Por ser $\mathcal{O}$ un DIP, Λ' tiene rango d y es entonces un retículo en V estable bajo $G_\mathbb{Q}$.

Al ser Λ' es un retículo estable bajo $G_\mathbb{Q}$, la acción de $G_\mathbb{Q}$ genera matrices en $GL_d(\mathcal{O})$ y como Λ' es retículo, su base es base de V, así que para cada g, en la base de Λ', $\rho'(g) \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O})$.

Representación residual

Representación residual

Representación residual

Dada $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ y $\rho' : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O})$ una representación equivalente considero

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(k)$$

componiendo ρ' con el mapa $\mathcal{O} \to k$.

Representación residual

Representación residual

Dada $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ y $\rho' : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O})$ una representación equivalente considero

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(k)$$

componiendo ρ' con el mapa $\mathcal{O} \to k$.

Teorema

1. El núcleo del mapa $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{GL}_d(k)$ es un pro-ℓ-grupo

Representación residual

Representación residual

Dada $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ y $\rho' : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O})$ una representación equivalente considero

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(k)$$

componiendo ρ' con el mapa $\mathcal{O} \to k$.

Teorema

1. El núcleo del mapa $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{GL}_d(k)$ es un pro-ℓ-grupo
2. Si $p \neq \ell$ entonces $\rho(P_p) \simeq \overline{\rho}(P_p)$

Representación residual

Representación residual

Dada $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$ y $\rho' : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O})$ una representación equivalente considero

$$\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(k)$$

componiendo ρ' con el mapa $\mathcal{O} \to k$.

Teorema

1. El núcleo del mapa $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{GL}_d(k)$ es un pro-ℓ-grupo
2. Si $p \neq \ell$ entonces $\rho(P_p) \simeq \overline{\rho}(P_p)$
3. $N(\rho) = N(\overline{\rho}) \prod_{p \neq \ell} p^{\dim(\overline{\rho}^{I_p}) - \dim(\rho^{I_p})}$

Representación residual

Teorema

1. El núcleo del mapa $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) \overset{\alpha}{\to} \mathrm{GL}_d(k)$ es un pro-ℓ-grupo
2. Si $p \neq \ell$ entonces $\rho(P_p) \simeq \overline{\rho}(P_p)$
3. $N(\rho) = N(\overline{\rho}) \prod_{p \neq \ell} p^{\dim(\overline{\rho}^{I_p}) - \dim(\rho^{I_p})}$

Demostración

1. Sea $U_r = \{A \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) : A \equiv \mathrm{id}\ mod \lambda^r\}$.

Representación residual

Teorema

1. El núcleo del mapa $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{GL}_d(k)$ es un pro-ℓ-grupo
2. Si $p \neq \ell$ entonces $\rho(P_p) \simeq \overline{\rho}(P_p)$
3. $N(\rho) = N(\overline{\rho}) \prod_{p \neq \ell} p^{\dim(\overline{\rho}^{I_p}) - \dim(\rho^{I_p})}$

Demostración

1. Sea $U_r = \{A \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) : A \equiv \mathrm{id}\ mod \lambda^r\}$. Los U_r son una filtración en la cual $\ker(\alpha) = U_1$ y $U_1 = \varprojlim U_1/U_r$.

Representación residual

Teorema

1. El núcleo del mapa $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{GL}_d(k)$ es un pro-ℓ-grupo
2. Si $p \neq \ell$ entonces $\rho(P_p) \simeq \overline{\rho}(P_p)$
3. $N(\rho) = N(\overline{\rho}) \prod_{p \neq \ell} p^{\dim(\overline{\rho}^{I_p}) - \dim(\rho^{I_p})}$

Demostración

1. Sea $U_r = \{A \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) : A \equiv \mathrm{id}\ mod \lambda^r\}$. Los U_r son una filtración en la cual $\ker(\alpha) = U_1$ y $U_1 = \overset{\lim}{\leftarrow} U_1/U_r$. Además, el mapa

$$\begin{array}{ccc} (U_r, \times) & \xrightarrow{\psi_r} & (M_d(k), +) \\ A & \longmapsto & \frac{A-\mathrm{id}}{\pi^{r+1}} \mod \lambda \end{array}$$

es un morfismo de grupos sobreyectivo con $\ker(\psi_r) = U_{r+1}$, lo que implica que cada cociente U_r/U_{r+1} es un ℓ-grupo.

Representación residual

Teorema

1. El núcleo del mapa $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) \overset{\alpha}{\to} \mathrm{GL}_d(k)$ es un pro-ℓ-grupo
2. Si $p \neq \ell$ entonces $\rho(P_p) \simeq \overline{\rho}(P_p)$
3. $N(\rho) = N(\overline{\rho}) \prod_{p \neq \ell} p^{\dim(\overline{\rho}^{I_p}) - \dim(\rho^{I_p})}$

Demostración

1. Sea $U_r = \{A \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) : A \equiv \mathrm{id}\ mod \lambda^r\}$. Los U_r son una filtración en la cual $\ker(\alpha) = U_1$ y $U_1 = \overset{\lim}{\leftarrow} U_1/U_r$. Además, el mapa

$$\begin{array}{ccc} (U_r, \times) & \xrightarrow{\psi_r} & (M_d(k), +) \\ A & \longmapsto & \frac{A - \mathrm{id}}{\pi^{r+1}} \mod \lambda \end{array}$$

es un morfismo de grupos sobreyectivo con $\ker(\psi_r) = U_{r+1}$, lo que implica que cada cociente U_r/U_{r+1} es un ℓ-grupo. Por lo tanto cada U_1/U_r es un ℓ-grupo y U_1 es pro-ℓ-grupo.

Representación residual

Teorema

1. El núcleo del mapa $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) \stackrel{\alpha}{\to} \mathrm{GL}_d(k)$ es un pro-ℓ-grupo
2. Si $p \neq \ell$ entonces $\rho(P_p) \simeq \overline{\rho}(P_p)$
3. $N(\rho) = N(\overline{\rho}) \prod_{p \neq \ell} p^{\dim(\overline{\rho}^{I_p}) - \dim(\rho^{I_p})}$

Demostración

2. Como P_p es un p grupo, también lo es $\rho(P_p)$, así que $\rho(P_p) \cap \ker(\alpha) = \{\mathrm{id}\}$.

Representación residual

Teorema

1. El núcleo del mapa $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}) \overset{\alpha}{\to} \mathrm{GL}_d(k)$ es un pro-ℓ-grupo
2. Si $p \neq \ell$ entonces $\rho(P_p) \simeq \overline{\rho}(P_p)$
3. $N(\rho) = N(\overline{\rho}) \prod_{p \neq \ell} p^{\dim(\overline{\rho}^{I_p}) - \dim(\rho^{I_p})}$

Demostración

2. Como P_p es un p grupo, también lo es $\rho(P_p)$, así que $\rho(P_p) \cap \ker(\alpha) = \{\mathrm{id}\}$.

3. Como $\rho(P_p) \simeq \overline{\rho}(P_p)$, también $\rho(I_p^u) \simeq \overline{\rho}(I_p^u)$ para cada $u > 0$. Luego $\int_0^\infty \operatorname{codim} \rho^{I_p^u} du = \int_0^\infty \operatorname{codim} \overline{\rho}^{I_p^u} du$

Semisimplificación

Semisimplificación

Semisimplificación

Dada $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$, sea $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq ... \subseteq V_l = K^d$ una filtración, donde cada V_j son subrepresentaciones de ρ y V_j / V_{j-1} es simple. La **semisimplificación** de $V = K^d$ es

Semisimplificación

Semisimplificación

Dada $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$, sea $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq ... \subseteq V_l = K^d$ una filtración, donde cada V_j son subrepresentaciones de ρ y V_j/V_{j-1} es simple. La **semisimplificación** de $V = K^d$ es

$$V^{ss} = \bigoplus_{j=1}^{l} V_j/V_{j-1}.$$

Semisimplificación

Dada $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$, sea $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq ... \subseteq V_l = K^d$ una filtración, donde cada V_j son subrepresentaciones de ρ y V_j/V_{j-1} es simple. La **semisimplificación** de $V = K^d$ es

$$V^{ss} = \bigoplus_{j=1}^{l} V_j/V_{j-1}.$$

Defino una representación

$$\rho^{ss} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V^{ss})$$

Semisimplificación

Dada $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_d(K)$, sea $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq ... \subseteq V_l = K^d$ una filtración, donde cada V_j son subrepresentaciones de ρ y V_j/V_{j-1} es simple. La **semisimplificación** de $V = K^d$ es

$$V^{ss} = \bigoplus_{j=1}^{l} V_j/V_{j-1}.$$

Defino una representación

$$\rho^{ss} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}(V^{ss})$$

El teorema de Jordan-Holder asegura que la semisimplificación no depende de la filtración elegida.

Semisimplificación

Semisimplificación

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Semisimplificación

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Tomo la filtración $\{0\} \subseteq W \subseteq \mathbb{C}^2$ con W el subespacio vectorial de dimensión 1 estable por ρ.

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Tomo la filtración $\{0\} \subseteq W \subseteq \mathbb{C}^2$ con W el subespacio vectorial de dimensión 1 estable por ρ. La acción de ρ sobre $\mathbb{C}^2/W$ es simple porque es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 1.

Semisimplificación

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Tomo la filtración $\{0\} \subseteq W \subseteq \mathbb{C}^2$ con W el subespacio vectorial de dimensión 1 estable por ρ. La acción de ρ sobre $\mathbb{C}^2/W$ es simple porque es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 1.

Si $B = \{w, v\}$ base de Jordan con $W = \langle w \rangle$, entonces $\{v + W\}$ es base de $\mathbb{C}^2/W$ y por lo tanto $\{w, v + W\}$ es base de V^{ss}.

Semisimplificación

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Tomo la filtración $\{0\} \subseteq W \subseteq \mathbb{C}^2$ con W el subespacio vectorial de dimensión 1 estable por ρ. La acción de ρ sobre $\mathbb{C}^2/W$ es simple porque es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 1.

Si $B = \{w, v\}$ base de Jordan con $W = \langle w \rangle$, entonces $\{v + W\}$ es base de $\mathbb{C}^2/W$ y por lo tanto $\{w, v + W\}$ es base de V^{ss}.

Además, $\rho_n(v + W) = \lambda^n v + W$ lo que implica que

Semisimplificación

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Tomo la filtración $\{0\} \subseteq W \subseteq \mathbb{C}^2$ con W el subespacio vectorial de dimensión 1 estable por ρ. La acción de ρ sobre $\mathbb{C}^2/W$ es simple porque es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 1.

Si $B = \{w, v\}$ base de Jordan con $W = \langle w \rangle$, entonces $\{v + W\}$ es base de $\mathbb{C}^2/W$ y por lo tanto $\{w, v + W\}$ es base de V^{ss}.

Además, $\rho_n(v + W) = \lambda^n v + W$ lo que implica que

$$\rho_n^{ss} = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Semisimplificación

Ejemplo

Sea $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ y $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$\rho(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$$\rho_n^{ss} = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Observaciones

1. La semisimplificación es un proceso que transforma una representación cualquiera en una representación semisimple.
2. La semisimplificación de la representación residual $\overline{\rho}^{ss}$ no depende de ρ'

Representaciones sobre endomorfismos

Representaciones sobre endomorfismos

Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(R)$ una representación con R un anillo. Sea M_ρ el R-módulo donde G actúa a través de ρ ($M_\rho \simeq R^d$) y sea $\mathrm{ad}\,\rho = \mathrm{End}(M_\rho)$ los endomorfismos R-lineales de M_ρ.

Representaciones sobre endomorfismos

Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(R)$ una representación con R un anillo. Sea M_ρ el R-módulo donde G actúa a través de ρ ($M_\rho \simeq R^d$) y sea $\mathrm{ad}\,\rho = \mathrm{End}(M_\rho)$ los endomorfismos R-lineales de M_ρ.

G actúa por ρ sobre $\phi \in \mathrm{ad}\,\rho$ como

$$g.\phi(m) = \rho(g)\phi\rho(g)^{-1}(m)$$

Representaciones sobre endomorfismos

Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(R)$ una representación con R un anillo. Sea M_ρ el R-módulo donde G actúa a través de ρ ($M_\rho \simeq R^d$) y sea $\mathrm{ad}\,\rho = \mathrm{End}(M_\rho)$ los endomorfismos R-lineales de M_ρ.

G actúa por ρ sobre $\phi \in \mathrm{ad}\,\rho$ como

$$g.\phi(m) = \rho(g)\phi\rho(g)^{-1}(m)$$

Sea $\mathrm{ad}^0\,\rho \subseteq \mathrm{ad}\,\rho$ los endomorfismos con traza cero.

Representaciones sobre endomorfismos

Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(R)$ una representación con R un anillo. Sea M_ρ el R-módulo donde G actúa a través de ρ ($M_\rho \simeq R^d$) y sea $\mathrm{ad}\,\rho = \mathrm{End}(M_\rho)$ los endomorfismos R-lineales de M_ρ.

G actúa por ρ sobre $\phi \in \mathrm{ad}\,\rho$ como

$$g.\phi(m) = \rho(g)\phi\rho(g)^{-1}(m)$$

Sea $\mathrm{ad}^0\,\rho \subseteq \mathrm{ad}\,\rho$ los endomorfismos con traza cero.

Propiedades

1. Si d es invertible en R, $\mathrm{ad}\,\rho \simeq \mathrm{ad}^0\,\rho \oplus R$ y actúa trivial en R.

Representaciones sobre endomorfismos

Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}_d(R)$ una representación con R un anillo. Sea M_ρ el R-módulo donde G actúa a través de ρ ($M_\rho \simeq R^d$) y sea $\mathrm{ad}\,\rho = \mathrm{End}(M_\rho)$ los endomorfismos R-lineales de M_ρ.

G actúa por ρ sobre $\phi \in \mathrm{ad}\,\rho$ como

$$g.\phi(m) = \rho(g)\phi\rho(g)^{-1}(m)$$

Sea $\mathrm{ad}^0\,\rho \subseteq \mathrm{ad}\,\rho$ los endomorfismos con traza cero.

Propiedades

1. Si d es invertible en R, $\mathrm{ad}\,\rho \simeq \mathrm{ad}^0\,\rho \oplus R$ y actúa trivial en R.
2. Como representación $\mathrm{ad}^0\,\rho$ tiene el mismo núcleo que el mapa $G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_d(R) \longrightarrow \mathrm{PGL}_d(R)$

Representaciones sobre endomorfismos

Propiedades

1. Si d es invertible en R, $\operatorname{ad}\rho \simeq \operatorname{ad}^0\rho \oplus R$ y actúa trivial en R.
2. Como representación $\operatorname{ad}^0\rho$ tiene el mismo núcleo que el mapa $G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_d(R) \longrightarrow \mathrm{PGL}_d(R)$

Demostración

1. Para cualquier matriz A, $\operatorname{tr}(dA - \operatorname{tr}(A)\operatorname{id}) = 0$

Representaciones sobre endomorfismos

Propiedades

1. Si d es invertible en R, $\operatorname{ad}\rho \simeq \operatorname{ad}^0\rho \oplus R$ y actúa trivial en R.
2. Como representación $\operatorname{ad}^0\rho$ tiene el mismo núcleo que el mapa $G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_d(R) \longrightarrow \mathrm{PGL}_d(R)$

Demostración

1. Para cualquier matriz A, $\operatorname{tr}(dA - \operatorname{tr}(A)\operatorname{id}) = 0$

2. $g \in \ker(\operatorname{ad}^0\rho) \Leftrightarrow \rho(g)\phi\rho(g)^{-1} = \phi$ para toda $\phi \Leftrightarrow \rho(g)$ conmuta con todos los endomorfismos de traza cero, sí y solo sí $\rho(g) = \lambda\operatorname{id}$

Representaciones sobre endomorfismos

Representaciones sobre endomorfismos

$\mathrm{ad}^0\,\rho$ según ρ

Si R es un cuerpo algebraicamente cerrado con $\mathrm{char}(R) \neq 2$ y $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(R)$ es irreducible tenemos que:

$\mathrm{ad}^0\,\rho$ según ρ

Si R es un cuerpo algebraicamente cerrado con $\mathrm{char}(R) \neq 2$ y $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(R)$ es irreducible tenemos que:

1. $\mathrm{ad}^0\,\rho$ es irreducible ó

$\mathrm{ad}^0\,\rho$ según ρ

Si R es un cuerpo algebraicamente cerrado con $\mathrm{char}(R) \neq 2$ y $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(R)$ es irreducible tenemos que:

1. $\mathrm{ad}^0\,\rho$ es irreducible ó
2. hay un subgrupo $H \subseteq G$ de índice 2 y $\chi : H \to R^\times$ tal que $\rho \simeq \mathrm{Ind}_H^G\chi$. En este caso, $\mathrm{ad}^0\,\rho \simeq \delta \oplus \mathrm{Ind}_H^G(\chi/\chi')$ con δ carácter de G/H y χ' el compuesto de χ y una conjugación por un elemento de $G \setminus H$.

Representaciones sobre endomorfismos

$\mathrm{ad}^0 \rho$ según ρ

Si R es un cuerpo algebraicamente cerrado con $\mathrm{char}(R) \neq 2$ y $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(R)$ es irreducible tenemos que:

1. $\mathrm{ad}^0 \rho$ es irreducible ó
2. hay un subgrupo $H \subseteq G$ de índice 2 y $\chi : H \to R^\times$ tal que $\rho \simeq \mathrm{Ind}_H^G \chi$. En este caso, $\mathrm{ad}^0 \rho \simeq \delta \oplus \mathrm{Ind}_H^G(\chi/\chi')$ con δ carácter de G/H y χ' el compuesto de χ y una conjugación por un elemento de $G \setminus H$.

Del último caso tenemos que

$\mathrm{ad}^0\rho$ según ρ

Si R es un cuerpo algebraicamente cerrado con $\mathrm{char}(R) \neq 2$ y $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(R)$ es irreducible tenemos que:

1. $\mathrm{ad}^0\rho$ es irreducible ó
2. hay un subgrupo $H \subseteq G$ de índice 2 y $\chi : H \to R^\times$ tal que $\rho \simeq \mathrm{Ind}_H^G \chi$. En este caso, $\mathrm{ad}^0\rho \simeq \delta \oplus \mathrm{Ind}_H^G(\chi/\chi')$ con δ carácter de G/H y χ' el compuesto de χ y una conjugación por un elemento de $G \setminus H$.

Del último caso tenemos que

1. o bien $\mathrm{Ind}_H^G(\chi/\chi')$ es irreducible o

Representaciones sobre endomorfismos

$\mathrm{ad}^0\,\rho$ según ρ

Si R es un cuerpo algebraicamente cerrado con $\mathrm{char}(R) \neq 2$ y $\rho : G \to \mathrm{GL}_2(R)$ es irreducible tenemos que:

1. $\mathrm{ad}^0\,\rho$ es irreducible ó
2. hay un subgrupo $H \subseteq G$ de índice 2 y $\chi : H \to R^\times$ tal que $\rho \simeq \mathrm{Ind}_H^G \chi$. En este caso, $\mathrm{ad}^0\,\rho \simeq \delta \oplus \mathrm{Ind}_H^G(\chi/\chi')$ con δ carácter de G/H y χ' el compuesto de χ y una conjugación por un elemento de $G \setminus H$.

Del último caso tenemos que

1. o bien $\mathrm{Ind}_H^G(\chi/\chi')$ es irreducible o
2. $\mathrm{ad}^0\,\rho \simeq \delta_1 \oplus \delta_2 \oplus \delta_3$ donde los δ_i son caracteres de G de orden 2. En este caso ρ es inducido de un caracter de cada subgrupo $H_i = \ker \delta_i$ de índice 2 de G.

GRACIAS!!!