# Cohomología de Galois

Patricio Pérez Piña

Seminario de Modularidad

1er semestre, 2020

# Objetivo:

Sea $v$ un lugar finito de $\mathbb{Q}$ y $A$ un $G_v$-módulo discreto y finito.

- **Teorema:** $H^i(G_v, A)$ es finito para todo $i \geq 0$.
- **Teorema:** Para $i = 0, 1, 2$, existe un pairing perfecto

$$H^i(G_v, A) \times H^{2-i}(G_v, A^*) \to H^2(G_v, \mu_n) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Si $A \otimes \mathbb{Z}_v = \{0\}$, entonces $H^1(G_v/I_v, A^{I_v})$ y $H^1(G_v/I_v, A^{*I_v})$ son ortogonales bajo el pairing

$$H^1(G_v, A) \times H^1(G_v, A^*) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

- **Teorema:** $H^i(G_v, A) = \{0\}$ para todo $i \geq 3$ y

$$\#H^1(G_v, A) = \#H^0(G_v, A)\#H^2(G_v, A)\#(A \otimes \mathbb{Z}_v).$$

- **Teorema:**

$$\frac{\#H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, A)}{\#H^1_{\mathcal{L}^*}(\mathbb{Q}, A^*)} = \frac{\#H^0(G_{\mathbb{Q}}, A)}{\#H^0(G_{\mathbb{Q}}, A^*)} \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(G_v, A)}.$$

# Hoy

1. Cohomologia de grupos finitos
2. Ejemplos de cohomologia de Galois
3. Cohomologia de grupos profinitos
4. Cohomologia en cuerpos locales
5. Resultados en DDT.

# Cohomologia de Grupos finitos

- Sea $G$ un grupo finito.
- **Definición:** Un $G$-módulo $A$ es un $\mathbb{Z}[G]$-módulo.
- Denotamos por $A^G$ a los elementos fijados por la acción de $G$.
- $\mathrm{Hom}_G(A,B) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B)$. Este último tiene estructura de $G$-módulo via $(g \cdot f)(x) = gf(g^{-1}x)$.
- Si dotamos a $\mathbb{Z}$ con una acción trivial de $G$, tenemos un isomorfismo $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},A) \cong A^G$ definido por $\varphi \mapsto \varphi(1)$.
- El functor $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z},\cdot)$ es covariante y exacto a la izquierda por lo que para toda secuencia exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$ de $G$-módulos tenemos la secuencia exacta de grupos $0 \to A^G \to B^G \to C^G$.
- Cómo podemos encontrar grupos que extiendan esta secuencia exacta?

# Functores derivados

- Sea $Mod_G$ la categoria de $G$-módulos.
- Sea $F\colon Mod_G \to Ab$ un fuctor covariante y exacto a la izquierda (por ejemplo $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, \cdot)$)
- **Teorema:** "Existen functores que extienden la secuencia $0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$".
- Un poco más preciso: Existe una colección $(R^i F)_{i \geq 0}$ tales que
  1. $R^i F : Mod_G \to Ab$ functor,
  2. $R^0 F = F$,
  3. $R^i F(I) = 0$ para todo $i > 0$ e $I$ inyectivo.
  4. Para toda secuencia exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$, existen morfismos $\delta_i : R^i F(C) \to R^{i+1} F(A)$ tales que la sucesión $... \to R^i F(A) \to R^i F(B) \to R^i F(C) \xrightarrow{\delta_i} R^{i+1} F(A) \to$ es exacta y la asignación es functorial.
- **Definición:** Para $i \geq 0$, el $i$-ésimo grupo de cohomologia de un $G$-módulo $A$ es $H^i(G, A) := R^i(\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, \cdot))$.

# Cómo contruir los $R^iF$?

- Sea $0 \to A \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \ldots$ una resolución inyectiva de $A$ (existe).
- Aplicando $F$ a $0 \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \ldots$ obtenemos el complejo $0 \to F(I_0) \to F(I_1) \to F(I_2) \to \ldots$.
- Entonces
$$R^iF(A) = \frac{\ker\left(F(I_i) \to F(I_{i+1})\right)}{\mathrm{Im}\left(F(I_{i-1}) \to F(I_i)\right)}$$
y los $\delta_i$ se construyen con ayuda del lema de la serpiente.

## Cómo encontrar $H^i(G, A)$?

- Sea $\ldots \to P_2 \to P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} \mathbb{Z} \to 0$ una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$.
- Aplicando $\mathrm{Hom}_G(\cdot, A)$ (contravariante), obtenemos el complejo $0 \to \mathrm{Hom}_G(P_0, A) \to \mathrm{Hom}_G(P_1, A) \to \mathrm{Hom}_G(P_2, A) \ldots.$
- **Teorema:** Entonces

$$H^i(G, A) \cong \frac{\ker\left(\mathrm{Hom}(P_i, A) \to \mathrm{Hom}(P_{i+1}, A)\right)}{\mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}(P_{i-1}, A) \to \mathrm{Hom}(P_i, A)\right)}$$

- Por ejemplo

$$\begin{aligned}
H^0(G, A) &= \ker\left(\mathrm{Hom}_G(P_0, A) \to \mathrm{Hom}_G(P_1, A)\right) \\
&= \{f \in \mathrm{Hom}_G(P_0, A) \mid f \circ p_1 = 0\} \\
&= \{f \in \mathrm{Hom}_G(P_0, A) \mid \ker p_0 \subseteq \ker f\} \\
&\cong \mathrm{Hom}_G(P_0 / \ker p_0, A) \\
&\cong \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) \\
&\cong A^G.
\end{aligned}$$

# Una resolución concreta

- Para $i \geq 0$, sea $P_i = \mathbb{Z}[G^{i+1}]$. Sea $d_i \colon P_i \to P_{i-1}$ dado por $d_i(g_0, ..., d_i) = \sum(-1)^i (g_0, ..., \widehat{g_i}, ..., g_i)$ cuando $i > 0$ y $d_0 : P_0 \to \mathbb{Z}$ el mapa que envía $G$ en $1$.
- Entonces $... \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \to 0$ es una resolución proyectiva de $\mathbb{Z}$. (de hecho libre)
- Sin embargo $\mathrm{Hom}_G(P_i, A)$ está en correspondencia con $K^i := \{f \colon G^i \to A\}$. ($[g_1, \ldots, g_i] := (1, g_1, g_1 g_2, \ldots, g_1 \ldots g_i)$ base de $P_i$)
- Así, $H^i(G, A)$ se obtiene al tomar cohomología al complejo $0 \to K^0 \to K^1 \to K^2 \to ...$ con mapas $d^i : K^i \to K^{i+1}$ dados por

$$
\begin{aligned}
(d^i f)(g_1, ..., g_i + 1) &= g_1 f(g_2, ..., g_{i+1}) \\
&\quad + \sum(-1)^j f(g_1, ..., g_j g_{j+1}, \ldots g_{i+1}) + (-1)^{i+1} f(g_1, ..., g_i)
\end{aligned}
$$

# $H^1(G, A)$, restricción e inflación

- Con la resolución anterior

$$H^1(G, A) = \frac{\{\varphi\colon G \to A \mid \varphi(\sigma\tau) = \sigma\varphi(\tau) + \varphi(\sigma)\}}{\{\sigma \mapsto \sigma m - m\}}$$

- Ejemplo: Si $G$ actua trivial en $A$ obtenemos $H^1(G, A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, A)$. Si además $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ obtenemos $H^1(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A) = A[p]$.
- **Proposición:** Sea $A$ un $G$-módulo y $H \subseteq G$ un subgrupo. Entonces existe un morfismo $\mathrm{res}\colon H^i(G, A) \to H^i(H, A)$ que en términos de la resolución anterior es restringir los mapas $f\colon G^i \to A$ a $H^i$.
- **Proposición:** Si además $H \subseteq G$ es normal, entonces existe un morfismo $\inf\colon H^i(G/H, A^H) \to H^i(G, A)$ que en términos de la resolución anterior coincide con precomponer con la proyección $G^i \to (G/H)^i$ y componer con la inclusión $A^H \to A$. Además, $\inf\colon H^1(G/H, A^H) \to H^1(G, A)$ es injectiva.

# Algunos resultados y ejemplos

- **Teorema:** Si $m$ es el cardinal de $G$ entonces $H^i(G, A)$ es de $m$-torsión para todo $i > 0$.
- **Corolario:** Si $A$ es finitamente generado entonces $H^i(G, A)$ es finito para todo $i > 0$.
- Ejemplo: Supongamos que $G$ actua trivial en $\mathbb{Q}$ y consideremos $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$.
- La sucesión en cohomologia es

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to H^1(G, \mathbb{Z}) \to H^1(G, \mathbb{Q}) \to H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \to H^2(G, \mathbb{Z}) \to H^2(G, \mathbb{Q}) \to ...$$

- Pero $H^i(G, \mathbb{Q}) = 0$ $(i > 0)$ porque es de torsión y multiplicación por cualquiera entero es un isomorfismo.
- Entonces $H^i(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^{i+1}(G, \mathbb{Z})$ $(i > 0)$y en particular $H^2(G, \mathbb{Z}) \cong H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.
- Por otra parte, $H^1(G, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

# Cohomologia de Galois

- **Teorema**: Sea $L/K$ extension de Galois finita y $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Entonces $H^1(G, L^*) = \{0\}$.
- Dem: Sea $\varphi : G \to L^*$ un homomorfismo cruzado: $\varphi(\sigma\tau) = \sigma\varphi(\tau)\varphi(\sigma)$.
- Por el Teorema de independencia de caractéres existe $a \in L^*$ tal que $b := \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma)\sigma a \neq 0$.
- Se puede verificar que $\tau(b) = \varphi(\tau)^{-1}b$ lo cual implica que $\varphi(\tau) = \frac{\tau(b^{-1})}{b^{-1}}$ de donde $\varphi$ es trivial en $H^1(G, L^*)$.
- **Lema de Shapiro**: Sea $H \subseteq G$ un subgrupo y $A$ un $H$-módulo. Entonces
$$H^i(G, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} A) \cong H^i(H, A).$$
- **Teorema:** $H^i(G, L) = \{0\}$ para todo $i > 0$.
- Dem: Por el Teorema de la base normal existe $\alpha$ en $L$ tal que $\{\sigma\alpha \mid \sigma \in G\}$ es una base de $L$. Entonces $L \cong \mathbb{Z}[G] \otimes K$ y por lo tanto $H^i(G, L) \cong H^i(G, \mathbb{Z}[G] \otimes K) \cong H^i(\{1\}, K) = \{0\}$.

- Sea $G$ un grupo profinito (limite proyectivo de grupos finito, grupo topológico compacto y totalmente disconexo).
- $G$ se realiza como el límite proyectivo de $G/U$ con $U$ recorriendo todos los subgrupos normales y abiertos de $G$.
- **Definición:** Un $G$-módulo $A$ es un módulo discreto si está dotado de la topología discreta y $\mathrm{Stab}_G(a)$ es abierto para todo $a$ en $A$ (equivalente a decir que la aplicación $G \times X \to X$ es continua).
- **Definición:** Sea $K^i_{cts} := \{f : G^i \to A \mid f \text{ es continua}\}$, $d^i : K^i \to K^{i+1}$ con la misma fórmula de antes. Definimos $H^i(G, A)$ como la cohomología del complejo $K_\bullet$.
- **Proposición:** $H^i(G, A) = \varinjlim_U H^i(G/U, A^U)$, donde $U$ recorre los subgrupos normales y abiertos de $G$ y las flechas de transición son los morfismos de inflación.

# Algunos resultados y ejemplos

- **Corolario:** $H^i(G, A)$ es de torsión para todo $i > 0$.
- **Corolario:** Sea $\overline{K}$ una clausura separable de $K$ y $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Entonces $H^i(G_K, \overline{K}) = \{0\}$.
- Dem:

$$\begin{aligned} H^i(G_K, \overline{K}) &= \varinjlim_L H^i\left(G_K/\mathrm{Gal}(\overline{K}/L), \overline{K}^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)}\right) \\ &= \varinjlim_L H^i(\mathrm{Gal}(L/K), L) \\ &= \{0\}, \end{aligned}$$

donde $L$ recorre las extensiones de Galois finitas de $K$.

- **Corolario:** $H^1(G_K, \overline{K}^*) = \{1\}$

# Teoría de Kummer

- Asumamos que $K^*$ contiene $\mu_n$ y sea $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.
- Consideremos $1 \to \mu_n \to \overline{K}^* \xrightarrow{(\cdot)^n} \overline{K}^* \to 1$.
- Tomando la sucesión en cohomologia

$$1 \to \mu_n \to K^* \xrightarrow{(\cdot)^n} K^* \to H^1(G, \mu_n) \to H^1(G, \overline{K}^*)$$
$$\to H^1(G, \overline{K}^*) \to H^2(G, \mu_n) \to \dots$$

- Como $H^1(G, \overline{K}^*)$ es trivial, $K^*/K^{*n} \cong H^1(G, \mu_n) = \mathrm{Hom}(G, \mu_n)$. El morfismo envía la clase de un elemento $a \in \overline{K}^*$ al morfismo $\chi$ definido por $\chi(\sigma) = \sigma(\alpha)\alpha^{-1}$ donde $\alpha^n = a$.
- **Corolario:** Sea $L/K$ extensión de cíclica de grado $n$. Entonces $L = K(\alpha)$ con $\alpha^n \in K$.
- Dem: Tenemos un morfismo $\chi : G_K \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \cong \mu_n$ con $\ker \chi = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$. Por la teoría de Kummer, $\chi(\sigma) = \sigma(\alpha)\alpha^{-1}$ para algún $\alpha \in \overline{K}$ con $\alpha^n = a$. Luego $\ker \chi = \{\sigma \in G \mid \sigma(\alpha) = \alpha\} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K(\alpha))$ de donde $L = K(\alpha)$.

# Una observación y el caso de cuerpos locales

- Si miramos más allá en la sucesión en cohomologia vemos que $0 \to H^2(G, \mu_n) \to H^2(G, \overline{K}^*) \xrightarrow{(\cdot)^n} H^2(G, \overline{K}^*) \to$ ... por lo que $H^2(G, \mu_n) = H^2(G, \overline{K}^*)[n]$.
- **Lema:** Sea $L/k$ una extensión no ramificada de cuerpos locales, entonces $\#\left(k/N_{L/k}L\right) = [L : k]$.
- **Teorema:** Sea $L/k$ una extensión de Galois finita y no ramificada de cuerpos locales. Si $U_L$ denota el grupo de unidades de $L$, entonces $U_L$ es un $\mathrm{Gal}(L/k)$-modulo cohomologicamente trivial.
- Dem. caso $i = 2$ y $G = \mathrm{Gal}(L/k)$: Como $G$ es cíclico se puede mostrar que $H^2(G, U_L) = U_L^G/N_{L/k}U_L$. La valuación normalizada $v$ de $k$ induce un morfismo sobreyectivo $v \colon k/N_{L/k}L \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n = [L : k]$) que por el lema anterior es un isomorfismo. Si $u \in U_K$ entonces $v(u) = 0$ por lo que $u = N_{L/k}(a)$ para algún $a \in L$. Pero $0 = v(u) = v(N_{L/k}(a)) = nv(a)$ por lo que $a \in U_L$.

# Más resultados para cuerpos locales

- **Corolario:** Sea $U_{nr}$ el grupo de unidades de $k_{nr}$, la máxima extensión no ramificada de $k$, y $G_{nr} = G_{k_{nr}}$. Entonces $H^2(G_k/G_{nr}, U_{nr})$ es trivial.
- **Corolario** $H^2(G_k/G_{nr}, k_{nr}^*) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
- Dem: Consideremos $1 \to U_{nr} \to k_{nr}^* \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \to 0$. Por el corolario anterior, en cohomologia obtenemos un isomorfismo $H^2(G_k/G_{nr}, k_{nr}^*) \to H^2(G_{nr}, \mathbb{Z})$. Consideremos la composición de los isomorfismos

$$H^2(G_k/G_{nr}, k_{nr}^*) \to H^2(G_k/G_{nr}, \mathbb{Z}) \to H^1(G_k/G_{nr}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

  donde el último morfismo es enviar todo caracter $\chi$ en $\chi(F)$.
- **Teorema:** El morfismo de inflación $H^2(G_k/G_{nr}, k_{nr}^*) \to H^2(G_k, \overline{k}^*)$ es de hecho un isomorfismo.
- **Teorema:** $H^i(G_k, A)$ es nulo para todo $i \geq 3$ y $A$ un $G_k$-módulo discreto.

# Más resultados para cuerpos locales

- **Corolario:** Sea $A$ un $G_k$-módulo discreto finito. Entonces $H^i(G_k, A)$ es finito para todo $i \geq 0$.
- Dem. caso $A = \mu_n$: $H^0(G_k, \mu_n)$ es ciertamente finito.
  $H^1(G_k, \mu_n) \cong k^*/k^{*n}$ finito ($k^* = \pi^{\mathbb{Z}} \times \mu_{q-1} \times U_k^{(1)}$).
  $H^2(G_k, \mu_n) = H^2(G_k, \overline{k}^*)[n] \cong H^2(G_k/G_{nr}, k_{nr}^*)[n] \cong \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ finito.
- Dem caso general: Sea $n = \#A$ y $H \subset \bigcap_{a \in A} \mathrm{Stab}_G(a) \cap G_{k(\mu_n)}$ subgrupo normal y abierto. Entonces $L := \overline{k}^H$ es una extensión finita de $k$ y $G_L$ actúa de manera trivial en $A$ y en $\mu_n$. Luego $A$ es un $G_L$-modulo isomorfo a una suma directa de ciertos $\mu_{n_i}$. Entonces los grupos $H^i(\mathrm{Gal}(L/k), H^j(G_L, A))$ son finitos.
- La **sucesión espectral de Hochschild-Serre** nos permite concluir ya que esta dice que $H^{i+j}(G_k, A)$ posee una filtración finita donde cada cociente consecutivo es isomorfo a un cociente de $H^i(\mathrm{Gal}(L/k), H^j(G_L, A))$.

# Resultados de Cohomologia de Galois en DDT

Sea $v$ un lugar finito de $\mathbb{Q}$ y $A$ un $G_v$-módulo discreto y finito.

- **Teorema:** $H^i(G_v, A)$ es finito para todo $i \geq 0$.
- Denotamos $A^* = \mathrm{Hom}_G(A, \mu_n(\overline{\mathbb{Q}}))$ con $n$ un entero tal que $nA = \{0\}$.
- **Teorema:** Para $i = 0, 1, 2$, existe un pairing perfecto

  $$H^i(G_v, A) \times H^{2-i}(G_v, A^*) \to H^2(G_v, \mu_n) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

  Si $A \otimes \mathbb{Z}_v = \{0\}$, entonces $H^1(G_v/I_v, A^{I_v})$ y $H^1(G_v/I_v, A^{*I_v})$ son ortogonales bajo el pairing

  $$H^1(G_v, A) \times H^1(G_v, A^*) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

- **Teorema:** $H^i(G_v, A) = \{0\}$ para todo $i \geq 3$ y

  $$\#H^1(G_v, A) = \#H^0(G_v, A)\#H^2(G_v, A)\#(A \otimes \mathbb{Z}_v).$$

# El grupo de Selmer

- **Definición:** Sea $A$ un $G_{\mathbb{Q}}$-módulo. Una colección de **condiciones locales** para $A$ es una colección $\mathcal{L} = \{L_v\}$ de subgrupos $L_v \subseteq H^1(G_v, A)$ con $v$ corriendo por todos los lugares de $\mathbb{Q}$ y tal que $L_v = H^1(G_v/I_v, A^{I_v})$ salvo finitas excepciones.
- **Definición:** El **grupo de Selmer** asociado a $\mathcal{L}$ es denotado por $H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, A)$ y consiste en los elementos $x \in H^1(G_{\mathbb{Q}}, A)$ tales que $\mathrm{res}_v x \in L_v$ para todo lugar $v$.
- **Lema:** La colección $\mathcal{L}^* = \{L_v^{\perp}\}$ es una colección de condiciones locales para $A^*$. $((\cdot)^{\vee} := \mathrm{Hom}(\cdot, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$
- Dem: En efecto $L_v^{\perp} \subset H^1(G_v, A)^{\vee} = H^1(G_v, A^*)$ y $L_v^{\perp} = H^1(G_v/I_v, A^{I_v})^{\perp} = H^1(G_v/I_v, {A^*}^{I_v})$ salvo en finitos lugares $v$.
- **Lema:** Un $G_{\mathbb{Q}}$-módulo discreto $A$ ramifica en finitos lugares.
- Dem: Como $A$ es finito y la acción es continua, existe un subgrupo $H \subseteq G$ tal que $H$ actúa trivial en $A$ luego la acción se factoriza por una extensión finita de $\mathbb{Q}$ en donde hay finita ramificación.

# Más resultados de Cohomologia de Galois en DDT

- **Teorema:** Sea $S$ un conjunto finito de lugares de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}_S$ la máxima extensión de $\mathbb{Q}$ no ramificada fuera de $S$. Si $G_S = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q})$, entonces $H^1(G_S, A)$ es finito para todo $G_S$-módulo $A$.
- **Corolario:** $H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, A)$ es finito.
- Dem: Sea $S$ un conjunto finito de lugares de $\mathbb{Q}$ conteniendo a $\infty$, los lugares que dividen a $\#A$, los lugares donde $A$ ramifica y todos aquellos lugares donde $L_v \neq H^1(G_v, A)$. Entonces $A$ es un $G_S$-módulo y se tiene la sucesión exacta

$$0 \to H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, A) \to H^1(G_S, A) \to \bigoplus_{v \in S} H^1(G_v, A)/L_v$$

Escribiendo la secuencia exacta anterior para $A^*$ respecto a $\mathcal{L}^*$ y dualizando obtenemos

$$\bigoplus_{v \in S} L_v \to H^1(G_S, A^*)^\vee \to H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, A^*)^\vee \to 0$$

# Más resultados de Cohomologia de Galois en DDT

- La secuencia anterior se puede extender hacia la izquierda con ayuda de la **secuencia de nueve términos de Poitou-Tate** para obtener
- **Teorema:**

$$\frac{\#H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, A)}{\#H^1_{\mathcal{L}^*}(\mathbb{Q}, A^*)} = \frac{\#H^0(G_{\mathbb{Q}}, A)}{\#H^0(G_{\mathbb{Q}}, A^*)} \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(G_v, A)}.$$

- **Lema:** El producto anterior es finito pues $\#H^1(G_v/I_v, A^{I_v}) = \#H^0(G_v, A)$.
- Dem: Tenemos la sucesión exacta

$$0 \to H^0(G_v, A) \to A^{I_v} \xrightarrow{\mathrm{Frob}_v - 1} A^{I_v} \to H^1(G_v/I_v, A^{I_v}) \to 0.$$