Seminario de modularidad de representaciones de Galois (2020-1): Representaciones de $G_{\mathbb{Q}_\ell}$ sobre $\mathbb{Z}_\ell$-módulos, I

Héctor Pastén

Pontificia Universidad Católica de Chile

2020/06/05

Clase pasada:

- Cohomología de grupos $H^j(G, M)$.
- El caso profinito, cohomología de Galois
- Teoría de Kummer: $H^1(G, \mu)$
- Grupos de Selmer: Cortar un subespacio pequeño dentro de $H^1(G_{\mathbb{Q}}, M)$ usando condiciones locales $L_p \subseteq H^1(G_p, M)$, $\mathcal{L} = \{L_p\}_p$, donde casi siempre $L_p = H^1(G_p/I_p, M^{I_p})$. El Selmer (para $\mathcal{L}$) es

$$H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, M) = \ker\left(H^1(G_{\mathbb{Q}}, M) \to \prod_p H^1(G_p, M)/L_p\right).$$

- Teorema de Wiles: Si M es finito, los Selmer son finitos y

$$\frac{\#H^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{Q}, M)}{\#H^1_{\mathcal{L}^*}(\mathbb{Q}, M^*)} = \frac{\#H^0(G_{\mathbb{Q}}, M)}{\#H^0(G_{\mathbb{Q}}, M^*)} \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(G_v, M)}$$

Obs.: $\#H^0(G_p, M) = \#H^1(G_p/I_p, M^{I_p})$. Así que el producto es finito.

Contenido de hoy:

Esta clase y la siguiente son para entender condiciones locales adecuadas para representaciones ℓ-ádicas (mod ℓ^n) en el caso más difícil: $p = \ell$.
Pedimos $\boxed{\ell > 2}$.
Esto se usará en el cálculo (e interpretación) de grupos de Selmer sobre $\mathbb{Q}$.

- Representaciones semi-estables: caso bueno, caso ordinario (¡no excluyentes!)
- "baby-lifting": caso ordinario. Algunos complementos técnicos para el caso bueno.
- La representación $ad(\rho)$ y sus dos roles: clasificar deformaciones infinitesimales, y clasificar extensiones.
- Construir las condiciones locales (a futuro, se usarán en Sel's) $H^1_f(G_\ell, ad(\rho)) \subseteq H^1_{ss}(G_\ell, ad(\rho)) \subseteq H^1(G_\ell, ad(\rho))$.

Contenido para la próxima clase: Proposición 2.27 sobre posición relativa de estos H^1_f y H^1_{ss} dentro de H^1.

Notación

- $\ell > 2$ un primo. $G_\ell = G_{\mathbb{Q}_\ell}$, ϵ_ℓ carácter ciclotómico ℓ-ádico.
- $K/\mathbb{Q}_\ell$ extensión finita. $\mathcal{O}$ anillo de enteros de K, $k = \mathcal{O}/m$ campo residual, $\lambda \in m$ uniformizador, $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}/\lambda^n$.
- Ejemplo: $K = \mathbb{Q}_\ell$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_\ell$, $\mathcal{O}_n = \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, $k = \mathbb{F}_\ell$.
- Donde haya topología, todo es continuo.
- M "discreto": un $\mathcal{O}[G]$-módulo de cardinalidad finita (así que es $\mathcal{O}_n[G]$-módulo para algún n).
- M "profinito": límite proyectivo del caso discreto.
- R una $\mathcal{O}$-álgebra local noetheriana completa con campo residual k (ejemplo: con $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_\ell$, puede ser $R = \mathbb{Z}_\ell[[T_1, ..., T_n]]$)

$\mathcal{O}[G_\ell]$-módulos semiestables

Sea M un $\mathcal{O}[G_\ell]$-módulo profinito.

- M es *bueno* si todo cuoeciente discreto M' de M tiene un esquema de grupo finito plano $\mathcal{F}/\mathbb{Z}_\ell$ tal que $M' \simeq \mathcal{F}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ como $\mathbb{Z}_\ell[G]$-módulo.
- M es *ordinario* si hay una secuencia exacta

$$(0) \to M^{(-1)} \to M \to M^{(0)} \to (0)$$

de $\mathcal{O}[G_\ell]$-módulos profinitos tal que I_ℓ actúa trivial en $M^{(0)}$ y actúa como multiplicación por ϵ_ℓ en $M^{(-1)}$. (Ojo: ¡la inercia!)

Cualquiera de los dos casos se dice *semiestable*.

Representaciones semiestables

Sea R una $\mathcal{O}$-álgebra local noetheriana completa con campo residual k. Una representación $\rho : G_\ell \to GL_2(R)$ es buena/ordinaria/semiestable si el módulo subyacente M_ρ ($\simeq R^2$) lo es, y además

$$\det(\rho|_{I_\ell}) = \epsilon_\ell.$$

Notación: $\overline{\rho} = \rho \bmod \mathfrak{m}_R$, a valores en $GL_2(k)$.

Lema ("baby lifting")

Si M_ρ y $\overline{\rho}$ son ordinarias, entonces ambos $M_\rho^{(-1)}$ y $M_\rho^{(0)}$ son R-libres de rango 1 y además ρ es ordinaria.

Levantamiento

Lema (“baby lifting”)

Si M_ρ y $\overline{\rho}$ son ordinarias, entonces ambos $M_\rho^{(-1)}$ y $M_\rho^{(0)}$ son R-libres de rango 1 y además ρ es ordinaria.

Idea. Tenemos

$$(0) \to M_\rho^{(-1)} \to M_\rho \to M_\rho^{(0)} \to (0)$$
$$(0) \to M_{\overline{\rho}}^{(-1)} \to M_{\overline{\rho}} \to M_{\overline{\rho}}^{(0)} \to (0)$$

usando la acción de inercia y Nakayama, ver que la segunda es reducción de la primera, y eso da la afirmación sobre rangos. Luego tomar determinante de la primera secuencia y actuar con I_ℓ. $\square$

Obs: Lemma 2.25 tiene algunos levantamientos parciales en el caso bueno.

Compatibilidades

DDT Lemma 2.22 da varias propiedades de compatibilidad. No las vamos a enunciar todas, pero para dar un ejemplo de como se usan:

(d) Si M y M' son $\mathcal{O}[G_\ell]$-módulos profinitos con $M' \simeq M$ como $\mathbb{Z}_\ell[I_\ell]$-módulos, entonces M es bueno/ordinario si y solo si M' también lo es.

Como consecuencia: $E/\mathbb{Q}$ curva elíptica, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_\ell$.

(i) Si E tiene reducción buena/semiestable en ℓ, entonces $\rho_{E,\ell}$ y $\overline{\rho_{E,\ell}}$ son buenas/semiestables.

(ii) Si E tiene reducción semiestable en ℓ, entonces $\rho_{E,\ell}$ es ordinaria si y solo si $\overline{\rho_{E,\ell}}$ es ordinaria, si y solo si E tiene reducción multiplicativa o buena ordinaria en ℓ.

Así, si E es semiestable en ℓ, el caso bueno no-ordinario corresponde a reducción buena supersingular y hay que estudiarlo con esquemas de grupo finitos planos (caso más técnico siempre).

Copatibilidades

Veamos el item (ii):
Reducción multiplicativa correpsonde a

$$\rho_{E,\ell}|_{G_\ell} \sim \begin{pmatrix} \epsilon_\ell & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \delta$$

donde δ es no-ramificado, es decir, la inercia no lo ve. Lo que la inercia ve es justamente la condición ordinaria:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_\ell & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$ad(\rho)$ clasificando deformaciones infinitesimales

$\rho : G_\ell \to GL_2(\mathcal{O}_n)$. $ad(\rho) : G_\ell \to GL(End(\mathcal{O}_n^2))$ acción $\sigma \cdot f = \rho(\sigma) f \rho(\sigma)^{-1}$. Subespacio de traza 0: $ad^0(\rho)$.
Dado $\xi : G_\ell \to M_{ad(\rho)}$ cociclo tenemos una representación deformada infinitesimalmente:

$$\rho_\xi : G_\ell \to GL_2(R_n), \quad \sigma \mapsto (Id + \epsilon\xi(\sigma))\rho(\sigma)$$

donde $R_n = \mathcal{O}_n[\epsilon]/(\epsilon^2)$. Notar: $\rho_\xi \bmod \epsilon = \rho$.
Sea $D_\rho(R_n)$ el conjunto de ϵ-deformaciones de ρ módulo equivalencia por conjugación de $Id + \epsilon M_{2\times 2}(R_n)$.

Lema

La construcción anterior da una biyección $H^1(G_\ell, ad(\rho)) \approx D_\rho(R_n)$.

Nota: $H^1(G_\ell, ad(\rho)) := H^1(G_\ell, M_{ad(\rho)})$ y $M_{ad(\rho)} \simeq \mathcal{O}_n^4$.

$ad(\rho)$ clasificando extensiones

ξ cociclo $\mapsto E_\xi$ el $R_n[G_\ell]$-módulo subyacente a ρ_ξ.
Obs: $E_\xi/\epsilon E_\xi \simeq M_\rho$ y además $\epsilon E_\xi \simeq M_\rho$. Así que tenemos una secuencia exacta

$$0 \to M_\rho \to E_\xi \to M_\rho \to 0.$$

Esta es una clase en $Ext^1_{\mathcal{O}_n[G_\ell]}(M_\rho, M_\rho)$ en la categoría de $\mathcal{O}_n[G_\ell]$-módulos profinitos.

Lema

La construcción anterior da $H^1(G_\ell, ad(\rho)) \simeq Ext^1_{\mathcal{O}_n[G_\ell]}(M_\rho, M_\rho)$.

$ad(\rho)$ clasificando extensiones

Ojo: estamos calculando cohomologías de O_n-módulos, no simplemente grupos abelianos. Así que los H^1 son O_n-módulos.

Lema

La construcción anterior da $H^1(G_\ell, ad(\rho)) \simeq Ext^1_{\mathcal{O}_n[G_\ell]}(M_\rho, M_\rho)$.

Con esto por fin: $H^1_{ss}(G, ad(\rho)) \subseteq H^1(G_\ell, ad(\rho))$ de define como la imagen de aquellas extensiones en la categoría de $\mathcal{O}_n[G_\ell]$-módulos profinitos semiestables.
$H^1_f(G, ad(\rho)) \subseteq H^1_{ss}(G, ad(\rho))$ es lo mismo, salvo que ρ sea buena, en cuyo caso se usa la sub-categoría de extensiones buenas.