La teoría de Fontaine y Laffaille

Jerson Caro

June 12, 2020

Clases anteriores

Teorema

En el caso ordinario definir

$$L_\ell = \ker\left(H^1(G_\ell, ad^0(\rho)) \to H^1(I_\ell, ad^0(\rho)/W)\right)$$

Entonces $H^1_{ss}(G_\ell, ad^0(\rho)) = L_\ell$ y el factor en $v = \ell$ en la fórmula de Wiles para grupos de Selmer de $ad^0(\rho)$ cumple

$$\frac{\# L_\ell}{\# H^0(G_\ell, ad^0(\rho))} \leq \# \mathcal{O}_n \cdot \# \left(\mathcal{O}_n / (\frac{\psi_1}{\psi_2}(Frob_\ell) - 1)\, \mathcal{O}_n\right).$$

Con cálculos similares se puede demostrar una mejor fórmula si ρ es ordinaria pero no-buena. Los cálculos están en la p.116 del capítulo de Washington en [Modular forms and Fermat's Last Theorem] (editado por Cornell-Silverman-Stevens)

Teorema

En el caso ordinario no-bueno definir

$$L'_\ell = \ker\left(H^1(G_\ell, ad^0(\rho)) \to H^1(I_\ell, ad^0(\rho)/W)\right)$$

Entonces $H^1_{ss}(G_\ell, ad^0(\rho)) = H^1_f(G_\ell, ad^0(\rho)) = L'_\ell$ y el factor en $v = \ell$ en la fórmula de Wiles para grupos de Selmer de $ad^0(\rho)$ cumple

$$\frac{\# L'_\ell}{\# H^0(G_\ell, ad^0(\rho))} = \#\,\mathcal{O}_n\,.$$

Objetivo de esta charla

Si $\rho : G_\ell \longrightarrow GL_2(\mathcal{O}_n)$ es una representación buena no ordinaria. Entonces tomando $L_\ell = H^1_f(G, ad^0(\rho))$ se tiene que

$$\frac{\# L_\ell}{\# H^0(G_\ell, ad^0(\rho)))} \leq \# \mathcal{O}_n \,.$$

Definición

La categoria $\mathcal{MF}_{\mathcal{O}}$ es la categoria cuyos objetos son $\mathcal{O}$-módulos D de cardinalidad finita junto con un submódulo distinguido D^0 y homomorfismos $\mathcal{O}$-lineales $\phi_{-1} : D \to D$ y $\phi_0 : D^0 \to D$ que safisfacen:

- $\phi_{-1} \restriction_{D^0} = \ell\phi_0$,
- $\Im\phi_{-1} + \Im\phi_0 = D$.

Para $D \in Obj(\mathcal{MF}_{\mathcal{O}})$ entonces tenemos el siguiente homomorfismo sobreyectivo:

$$\phi_{-1} \oplus \phi_0 : D/D^0 \oplus D^0/\ell D^0 \longrightarrow D/\ell\phi_0(D^0)$$

Sin embargo el espacio de salida tiene orden $[D : \ell D^0]$ mientras que el de llegada tiene orden $[D : \phi_0(\ell D^0)] \geq [D : \ell D^0]$. De aquí que este es un isomorfismo. tensorizando por $\mathcal{O}_1$ obtenemos el siguiente isomorfismo

$$D/(D^0 + \lambda D) \oplus D^0/\lambda D^0 \longrightarrow D/\lambda D$$

De aquí que $D^0/\lambda D^0 \to D/\lambda D$ es inyectivo, como ambos son espacios vectoriales sobre k, $D^0/\lambda D^0$ es un sumando directo de $D/\lambda D$, y por el lema de Nakayama D^0 es un sumando directo de D (no canónicamente). Entonces si $D = D^0 \oplus D'$ como $\mathcal{O}$-módulos, entonces también $D = \phi_0(D^0) \oplus \phi_{-1}(D')$ de nuevo como $\mathcal{O}$-módulos.

Existe un functor contravariante $\cdot^*$ desde $\mathcal{MF}_{\mathcal{O}}$ en si mismo definido por:

- $D^* = \mathrm{Hom}(D, \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell)$;
- $(D^*)^0 = \mathrm{Hom}(D/D^0, \mathbb{Q}_\ell / \mathbb{Z}_\ell)$;
- $\phi^*_{-1}(f)(z) = f(\ell x + y)$, donde $z = \phi_{-1}(x) + \phi_0(y)$;
- $\phi^*_0(f)(z) = f(x \pmod{D^0})$, donde $z \equiv \phi_{-1}(x) \pmod{\phi_0 D^0}$.

Mas aún el isomorfismo canónico $D \cong (D^*)^*$ de $\mathcal{O}$-módulos define un isomorfismo natural en $\mathcal{MF}_{\mathcal{O}}$.

Teorema

Existe un functor covariante $\mathbb{D} : \mathcal{FF}_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{MF}_{\mathcal{O}}$ la cuál define una equivalencia $\mathcal{O}$-aditiva de categorias. Mas aún si M es un objeto de $\mathcal{FF}_{\mathcal{O}}$, entonces tenemos

(a) M y $\mathbb{D}(M)$ tienen la misma cardinalidad;

(b) $\mathbb{D}(M) = \mathbb{D}(M)^0$ si y solo si M es no ramificado.

Observaciones

(a) Tensorizando por $\mathcal{O}_i$ obtenemos que $M/\lambda^i M$ y $\mathbb{D}(M/\lambda^i M)$ tienen la misma cardinalidad para cada i, por lo que M y $\mathbb{D}(M)$ son isomorfos como $\mathcal{O}$-módulos.

(b) En el artículo [FL] ellos construyen un functor contravariante $\mathbb{D}' : \mathcal{FF}_{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{MF}_{\mathcal{O}}$, para obtener el anterior resultado es necesario componer con el functor $\cdot^*$ (junto con un shift en 1 en la filtación).

(c) $H^0(I_\ell, M_\rho) \cong C$ donde $C \subset D^0$ tal que $\phi_0 C = C$. Usando (b) consideramos $C \in \mathcal{MF}_{\mathcal{O}}$, luego $\mathbb{D}^{-1} C$ es no ramificado y notamos que $\mathbb{D}(H^0(I_\ell, M_\rho)) = \mathbb{D}(H^0(I_\ell, M_\rho))^0$.

Suponga que $\rho : G_\ell \to GL_2(\mathcal{O}_n)$ es una representación buena. Sea $D_\rho = \mathbb{D}(M_\rho)$ el objeto correspondiente de $\mathcal{MF}_{\mathcal{O}}$. Entonces $D_\rho \cong (\mathcal{O}_n)^2$ como $\mathcal{O}$-módulo mientras $D^0_\rho \cong \mathcal{O}_n$ (pues es un sumando directo).

Lema

Los siguientes son isomorfos:

(a) Los grupos de extensión de M_ρ por si mismo en la categoria de $\mathcal{O}_n[G_\ell]$-módulos finitos buenos.

(b) El grupo de extensión de D_ρ por si mismo en toda la categoria de $\mathcal{MF}_{\mathcal{O}}$ consistiendo de objetos los cuales son $\mathcal{O}_n$-módulos.

(c) Pares (α_{-1}, α_0) donde $\alpha_{-1} \in \mathrm{Hom}(D_\rho, D_\rho)$, $\alpha_0 \in \mathrm{Hom}(D^0_\rho, D_\rho)$ y $\ell\alpha_0 = \alpha_{-1} \restriction_{D^0_\rho}$, módulo pares de la forma $(a\phi_{\rho,-1} - \phi_{\rho,-1}a, a\phi_{\rho,0} - \phi_{\rho,0}a \restriction_{D^0})$ donde $a \in \mathrm{Hom}(D_\rho, D_\rho)$ y $aD^0_\rho = D^0_\rho$.

Prueba

Los primeros dos grupos de extensiones son isomorfos debido al teorema de Fontaine-Laffaille.

Vamos a construir el isomorfismo entre (b) y (c). Sea $E \in (b)$ y escribamos $D := D_\rho$. Tenemos entonces

$$(0) \longrightarrow D \longrightarrow E \longrightarrow D \longrightarrow (0)$$

entonces tenemos un isomorfismo de $\mathcal{O}$-módulos $E \cong D^2$ tal que $E^0 \cong (D^0)^2$, pues el anulador de un $\mathcal{O}_n$-módulo (como $\mathcal{O}$-módulo) contiene $\lambda^n \mathcal{O}$. Notemos que

$$\phi_{E,-1} = \begin{pmatrix} \phi_{-1} & \alpha_{E,-1} \\ 0 & \phi_{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \phi_{E,0} = \begin{pmatrix} \phi_0 & \alpha_{E,0} \\ 0 & \phi_0 \end{pmatrix},$$

por lo que E es determinado por elementos $\alpha_{E,-1} \in \mathrm{Hom}(D, D)$ y $\alpha_{E,0} \in \mathrm{Hom}(D^0, D)$ con $\ell\alpha_{E,0} = \alpha_{E,-1} \restriction_{D^0}$.

Dos extensiones E y E' son isomorfas si es que existe un elemento $a \in End(D)$ tal que $aD^0 \subset D^0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{-1} & \alpha_{E,-1} \\ 0 & \phi_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{-1} & \alpha_{E',-1} \\ 0 & \phi_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 & \alpha_{E,0} \\ 0 & \phi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_0 & \alpha_{E',0} \\ 0 & \phi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \restriction_{D_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

o equivalentemente $aD^0 \subset D^0$, $\alpha_{E,-1} - \alpha_{E',-1} = \phi_{-1}a - a\phi_{-1}$ y $\alpha_{E,0} - \alpha_{E',0} = \phi_0 a \restriction_{D_0} - a\phi_0$.

Corolario

El grupo $H^1_{\mathfrak{f}}(G_\ell, \operatorname{ad}\rho)$, de extensiones de M_ρ en la categoria de $\mathcal{O}_n[G_\ell]$-módulos es (no canonicamente) isomorfo a $(\mathcal{O}_n)^2 \oplus H^0(I_\ell, M_\rho)$.

Prueba

Escogemos generados e_0, e_1 de D, tal que e_0 es un generador de D_0.
Entonces ϕ_0 y ϕ_1 toman la forma $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \ell x & y \\ \ell z & w \end{pmatrix}$ respectivamente.
Como $aD^0 \subset D^0$ esta toma la forma $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix}$ entonces $(a\phi_{\rho,-1} - \phi_{\rho,-1}a, a\phi_{\rho,0} - \phi_{\rho,0}a \restriction_{D^0})$ toma la forma

$$\left(\begin{pmatrix} \ell a_2 z & (a_1 - a_3)y + a_2(w - \ell x) \\ (a_3 - a_1)\ell z & -\ell z a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 z \\ (a_3 - a_1)z \end{pmatrix} \right)$$

Entonces el grupo que estamos buscando en el cociente de los pares de matrices (como arriba) (α_{-1}, α_0) por el submódulo generado por las matrices matrices de la forma

$$\left(\begin{pmatrix} \ell z & w - \ell x \\ 0 & -\ell z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & -y \\ \ell z & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}\right)$$

Como $\Im\phi_{-1} + \Im\phi_0 = D$, se tiene que z o w es unidad en $\mathcal{O}/\lambda$ por lo que el grupo Ext que queremos es isomorfo a $(\mathcal{O}_n)^2 \oplus \mathcal{O}/(z, \lambda^n)$. Tomando como representantes

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{o} \quad \left(\begin{pmatrix} \ell a & 0 \\ \ell c^* & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c^* \end{pmatrix}\right)$$

en el caso que z o w sean unidades, resp. Por otra parte $H^0(I_\ell, M_\rho)$ es el submódulo $C \subset D^0$ tal que $\phi_0 C = C$ (Observación 1(c)), esto es $\{d \in D^0 : zd = 0\} \cong \mathcal{O}/(z, \lambda^n)$.

Objetivo

Mostramos primero que en el caso que tengamos una representación ρ buena no ordiraria $H^0(I_\ell, M_\rho)$ es trivial. Probaremos esto por contradicción. Por observación (c) $H^0(I_\ell, M_\rho)$ esta contenido en un submódulo de rango 1, por lo que la acción de I_ℓ toma la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ \mu\lambda^m & \epsilon(\sigma) - (\mu\lambda^m)a \end{pmatrix}$$

y reduciendo módulo λ tendremos

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & \epsilon(\sigma) \end{pmatrix}$$

como ρ es buena por Lema 2.25(a) $\overline{\rho}$ es ordinaria (lo cuál no es posible pues la original sería ordinaria por lema 2.25(b)) o $\overline{\rho} \restriction_{I_\ell} \otimes \overline{k} = \psi \oplus \psi^\ell$, lo que no puede ser porque los valores propios son 1 y $\epsilon(\sigma)$.

Gracias al Corolario anterior tenemos que $H^1_f(G_\ell, ad\rho) \cong \mathcal{O}_n^2$. Desde la definición de $H^1_f(G_\ell, ad^0(\rho))$ es un sumando directo de $H^1_f(G_\ell, ad\rho)$. Luego $H^1_f(G_\ell, ad^0(\rho)) \cong \mathcal{O}_n$. Esto pasa pues

$$H^1(G_\ell, ad(\rho)) \cong H^1(G_\ell, ad^0(\rho)) \oplus \mathrm{Hom}(G_\ell, \mathcal{O}_n).$$

De aquí que

$$\frac{\# L_\ell}{\# H^0(G_\ell, ad^0(\rho)))} \leq \# \, \mathcal{O}_n \, .$$

La igualdad se cumple pues $\# H^0(G_\ell, ad^0(\rho))) = 0$ en este caso.

Corolario

Suponga que $\rho : G_\ell \longrightarrow GL_2(\mathcal{O}_n)$ es una representación continua buena. Entonces $H^1_{\mathfrak{f}}(G_\ell, \operatorname{ad}\rho)$ es isomorfo a $(\mathcal{O}_n)^2 \oplus H^0(G_\ell, \operatorname{ad}^0\rho)$.

Prueba

Si ρ no es ordinaria entonces $H^0(G_\ell, ad^0\rho)$ y $H^0(I_\ell, M_\rho)$ son triviales. Podemos entonces suponer que ρ es ordinaria. Sea ρ' la representación ordinaria definida por

$$M_{\rho'} = \operatorname{Hom}(M_\rho^{(0)}, M_\rho) \subset ad^0(\rho)$$

y sea $M_{\rho'}^{(-1)} = ad^0(\rho)^{(-1)}$.

Entonces

$$H^0(G_\ell, ad^0\rho) = H^0(G_\ell, M_{\rho'}) \subset H^0(I_\ell, M_{\rho'}) \cong H^0(I_\ell, M_\rho).$$

La primera igualdad viene de ???, mientras que el isomorfismo viene como sigue: $M_\rho^0 = \mathcal{O}_n\, e$, entonces si $f \in H^0(I_\ell, M_{\rho'})$ se tiene que $f(e) = \sigma(f(\sigma^{-1}e)) = \sigma(f(e))$ para todo $\sigma \in I_\ell$, luego $f(e) \in H^0(I_\ell, M_\rho)$ Del hecho que $H^0(I_\ell, M_{\rho'}^{(-1)})$ es trivial (es de rango 1 e I_ρ actua como ϵ_ℓ), el homomorfismo restricción

$$H^1(G_\ell, M_{\rho'}^{(-1)}) \longrightarrow H^1(I_\ell, M_{\rho'}^{(-1)})$$

es inyectivo. Aquí usamos la sucesión exacta larga de restricción inflación

$$0 \longrightarrow H^1(G/N, A^N) \longrightarrow H^1(G, A) \longrightarrow H^1(N, A)^{G/N}.$$

Usando la siguiente sucesión exacta

$$(0) \longrightarrow M_{\rho'}^{(-1)} \longrightarrow M_{\rho'} \longrightarrow \mathcal{O}_n \longrightarrow 0$$

obtenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(G_\ell, M_{\rho'}) \arrow[r] \arrow[d, "res"] & H^0(G_\ell, \mathcal{O}_n) \arrow[r] \arrow[d, "res"] & H^1(G_\ell, M_{\rho'}^{(-1)}) \arrow[d, "res"] \\
0 \arrow[r] & H^0(I_\ell, M_{\rho'}) \arrow[r] & H^0(I_\ell, \mathcal{O}_n) \arrow[r] & H^1(I_\ell, M_{\rho'}^{(-1)})
\end{tikzcd}$$

de aquí que $H^0(G_\ell, M_{\rho'}) = H^0(I_\ell, M_{\rho'})$.

Gracias.