# Deformaciones de representaciones

Matías Alvarado

Junio 2020

# Deformaciones

- $G$ un grupo profinito finitamente generado como grupo topológico
- Sea $R$ una $\mathcal{O}$-álgebra completa noetheriana local con campo residual $k$ (llamaremos $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ a la categoria de $\mathcal{O}$-álgebras con estas propiedades)
- Sea $\overline{\rho}\colon G \to \mathrm{GL}_d(k)$ una representación (continua) del grupo $G$

**Definición**

*Una deformación de* $\overline{\rho}$ *es una representación* $\rho\colon G \to GL_d(R)$ *tal que* $\rho$ *mod* $\mathfrak{m}_R = \overline{\rho}$

# Ejemplo

Dada una representación $\rho \colon G \to GL_d(k)$, hemos estudiado las deformaciones infinitesimales, es decir los levantamientos de $\rho$ a $k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$.

- $H^1(G, ad\rho)$

# Objetivo

- Nos gustaría poder entender todas las deformaciones de una representación $\overline{\rho}$.
- Queremos encontrar un objeto que parametrice todas las deformaciones.
- Encontraremos un anillo $R_D$ y una deformación

$$\rho^{univ}\colon G \to GL_d(R_D)$$

Con la siguiente propiedad

  - Para cada deformación de $\overline{\rho}$, $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_d(R)$, existe un único morfismo de $\mathcal{O}$-álgebra $\phi\colon R_D \to R$ tal que $\phi \circ \rho^{univ}$

$$Hom_{\mathcal{O}}(R_D, R) \longleftrightarrow D_{\bar{\rho}}(R) = \{\text{Deformaciones } \rho\colon G \to \mathrm{GL}_d(R)\}/\sim$$

Definimos

- $\mathcal{D}_0$ la categoria de $\mathcal{O}[G]$-módulos.
- $\mathcal{D}$ una subcategoria completa de $\mathcal{D}_0$ que contiene a $M_{\overline{\rho}}$, que es cerrada bajo subobjetos, cuocientes y productos directos.

Sea $\chi\colon G \to \mathcal{O}^{\times}$ un caracter (continuo) tal que $det\overline{\rho} = \chi$ mod $\lambda$

## Definición

*Un levantamiento de $\overline{\rho}$ de tipo $D = (\mathcal{O}, \chi, \mathcal{D})$ es una representación $\rho\colon G \to GL_d(R)$ tal que*

- $\rho$ *mod* $\mathfrak{m}_R = \overline{\rho}$
- $det\rho = \chi$
- $M_\rho$ *es un objeto de* $\mathcal{D}$

### Teorema

*Existe un levantamiento* $\rho_D^{univ}\colon G \to GL_d(R_D)$ *de* $\overline{\rho}$*. Tal que si* $\rho\colon G \to GL_d(R)$ *es un levantamiento de* $\overline{\rho}$ *de tipo* $D$*, entonces existe un único morfimos de* $\mathcal{O}$*-álgebras* $\phi\colon R_D \to R$ *tal que* $\rho$ *es conjugado a* $\phi \circ \rho_D^{univ}$

**Demostración:**

- Tomamos generadores del grupo topologico $g_1, \dots, g_r$ y levantamientos $A_1, \dots, A_r$ de $\overline{\rho}(g_1), \dots, \overline{\rho}(g_r)$ en $M_d(\mathcal{O})$.
- $\iota\colon M_d(\mathcal{O}) \to M_d(\mathcal{O})^r$, $B \mapsto (BA_1 - A_1B, \dots, BA_r - A_rB)$
- $M_d(\mathcal{O})^r \simeq \iota(M_d(\mathcal{O})) \oplus V$,
- Si $\rho\colon G \to GL_d(R)$ es un levantamiento de $\overline{\rho}$ de tipo $D$
  - $\upsilon_\rho = (\rho(g_1) - A_1, \dots, \rho(g_r) - A_r)$
- Supongamos $\rho$ es un levantamiento tal que $\upsilon_\rho \in V \otimes R$.
- Tomamos una base $\{e_1, \dots, e_s\}$ para $V$ como $\mathcal{O}$-módulo.
- $\upsilon_\rho = \sum \alpha_i e_i$; con $\alpha_i \in \mathfrak{m}_R$
- Definamos un morfismo $\theta_\rho\colon \mathcal{O}[[T_1, \dots, T_s]] \to R$, $T_i \to \alpha_i$
- Definimos el ideal $I$ como $I := \bigcap_J J$, donde $J$ corre sobre todos los ideales de $\mathcal{O}[[T_1, \dots, T_s]]$ tal que exista una deformación de tipo $D$ $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}[[T_1, \dots, T_s]]/J)$
- $\rho^{univ}\colon G \to \mathrm{GL}_d(R)$, $g_i \mapsto A_i + \sum T_j e_{ji}$

## Lema

*Sea $K'/K$ una extensión finita con anillo de enteros $\mathcal{O}'$ y campo residual $k'$. Sea $\mathcal{D}'$ la subcategoria completa de $\mathcal{O}'[G]$-módulos tal que sus objetos vistos como $\mathcal{O}[G]$-módulo pertenece a $\mathcal{D}$. Sea $D' = (\mathcal{O}', \chi, \mathcal{D}')$. Entonces $R_{D'} = R_D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$ y $\rho_{D'}^{univ} = \rho_D^{univ} \otimes 1$*

**Demostración:** Sea $R_{D'}$ el anillo universal de tipo $D'$, y $\widetilde{R}_{D'} \subset R_{D'}$ el subanillo tal que la reducción de sus elementos mod $\mathfrak{m}_{R_{D'}}$ pertenecen a $k$. Por otro lado, $\widetilde{R}_D \subset R_D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$, el subanillo tal que la reducción de sus elementos mod $\mathfrak{m}_{R_D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'}$ pertenecen a $k$. De esta forma $\rho_{D'}^{univ}$ toma valores en $GL_d(\widetilde{R}_{D'})$ y $\rho_D^{univ} \otimes 1$ toma valores en $GL_d(\widetilde{R}_D)$. Existen morfismos $\alpha \colon R_D \to \widetilde{R}_{D'}$ y $\beta \colon R_{D'} \to R_D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$, de este modo construimos morfismos $R_{D'} \to R_D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$, y $(\alpha \otimes 1) \colon R_D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}' \to R_{D'}$

$\mathcal{D}^{(n)}$ : la subcategoria de $\mathcal{D}$ cuyos objetos son anulados por $\lambda^n$

**Recuerdo:** Si tomamos una rep. $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}/\lambda^n)$, entonces tenemos el modulo subyacente $M_\rho$ el cual es un $\mathcal{O}/\lambda^n$-módulo. Además teniamos que $Ext^1_{(\mathcal{O}/\lambda^n)[G]}(M_\rho, M_\rho) \simeq H^1(G, ad\rho)$

Ahora reinterpretando esto con el nuevo lenguaje tenemos que $Ext^1_{\mathcal{D}_0^{(n)}}(M_\rho, M_\rho) = Ext^1_{(\mathcal{O}/\lambda^n)[G]}(M_\rho, M_\rho) \simeq H^1(G, ad\rho)$

Como $\mathcal{D}^{(n)}$ es una subcategoria de $\mathcal{D}_0^{(n)}$, tenemos que

$$Ext^1_{\mathcal{D}^{(n)}}(M_\rho, M_\rho) \subset Ext^1_{\mathcal{D}_0^{(n)}}(M_\rho, M_\rho)$$

### Definición

*$H^1_{\mathcal{D}^{(n)}}(G, ad\rho)$ se define como la imagen de $Ext^1_{\mathcal{D}^{(n)}}(M_\rho, M_\rho)$ en $H^1(G, ad\rho)$ vía el isomorfismo*

$$Ext^1_{\mathcal{D}_0^{(n)}}(M_\rho, M_\rho) \simeq H^1(G, ad\rho)$$

Podemos definir también $H^1_{\mathcal{D}(n)}(G, ad^0\rho)$ como

$$H^1_{\mathcal{D}(n)}(G, ad^0\rho) = H^1(G, ad^0\rho) \cap H^1_{\mathcal{D}(n)}(G, ad\rho)$$

## Lema

*Existe un isomorfismo de k-espacios vectoriales*

$$Hom_k(\mathfrak{m}_{R_D}/(\lambda, \mathfrak{m}_{R_D}^2), k) \simeq H^1_{\mathcal{D}}(G, ad^0\overline{\rho})$$

**Demostración:**

- $Hom_{\mathcal{O}}(R_D, k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \leftrightarrow Hom_k(\mathfrak{m}_{R_D}/(\lambda, \mathfrak{m}_{R_D}^2), k)$ $(\phi \mapsto \phi|_{\mathfrak{m}_{R_D}})$
- $Hom_{\mathcal{O}}(R_D, k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \leftrightarrow \{\text{Def. de tipo D } \rho \colon G \to \mathrm{GL}_d(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2))\}$
- Una def. de tipo $D$ $\rho \colon G \to GL_d(k[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ tiene una condición en el determinante, que es $det\rho = det\overline{\rho}$
- Por lo tanto la deformación está en $H^1_{\mathcal{D}}(G, ad^0\rho)$

Sea $\theta\colon R_D \to \mathcal{O}$ un morfismo de $\mathcal{O}$-álgebras y $\wp = \ker(\theta)$ y sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_d(\mathcal{O})$ donde $\rho = \theta \circ \rho_D^{univ}$
Definimos $H^1_{\mathcal{D}}(G, ad^0\rho \otimes K/\mathcal{O}) = \varinjlim H^1_{\mathcal{D}}(G, ad^0\rho \otimes \lambda^{-n}/\mathcal{O})$

**Lema**

$Hom_{\mathcal{O}}(\wp/\wp^2, K/\mathcal{O}) \simeq H^1_{\mathcal{D}}(G, ad^0\rho, K/\mathcal{O})$

**Demostración:** Se verifica la existencia de isomorfismos $Hom(\wp/\wp^2, \mathcal{O}/\lambda^n) \simeq H^1_{\mathcal{D}}(G, ad^0\rho \otimes \mathcal{O}/\lambda^n)$, por ende
Dado un cociclo en $H^1_{\mathcal{D}}(G, ad^0\rho \otimes \mathcal{O}/\lambda^n)$, tenemos una deformación $\rho\colon G \to GL_d((\mathcal{O}/\lambda^n)[\varepsilon])$, por ende un morfismo $\phi\colon R_D \to (\mathcal{O}/\lambda^n)[\varepsilon]$.
Restringiendo, obtenemos $\phi|_{\wp}\colon \wp \to \varepsilon\mathcal{O}/\lambda^n$, lo cual induce un morfismo $\wp/\wp^2 \to \mathcal{O}/\lambda^n$.