Deformaciones de representaciones de Galois

Jerson Caro

June 19, 2020

Clase anterior

Teorema

Existe un levantamiento $\rho_{\mathcal{D}}^{univ} : G \to GL_d(R_D)$ de ρ. Tal que si $\rho : G \to GL_d(R)$ es un levantamiento de ρ de tipo D, entonces existe un único morfimos de $\mathcal{O}$-álgebras $\phi : R_D \to R$ tal que ρ es conjugado a $\phi \circ \rho_D^{univ}$.

Lema

Sea K'/K una extensión finita con anillo de enteros $\mathcal{O}'$ y campo residual k'. Sea $\mathcal{D}'$ la subcategoria full de $\mathcal{O}'[G]$-módulos tal que sus objetos vistos como $\mathcal{O}[G]$-módulo pertenece a D. Sea $D' = (\mathcal{O}', \chi, \mathcal{D}')$. Entonces $R_{D'} = R_D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$ y $\rho_{D'}^{univ} = \rho_D^{univ} \otimes 1$.

Clase anterior

Lema

Existe un isomorfismo de k-espacios vectoriales

$$\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_{R_D}/(\lambda, \mathfrak{m}_{R_D}^2), k) \cong H_D^1(G, ad^0\overline{\rho}).$$

En particular, R_D generado topologicamente como $\mathcal{O}$-álgebra por $\dim_k H_D^1(G, ad^0\overline{\rho})$

Lema

Si $\theta : R_D \to \mathcal{O}$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}$-álgebras, y sea $\rho : G \to GL_d(\mathcal{O})$ donde $\rho = \theta \circ \rho_D^{univ}$ y si $\wp = \ker \theta$. Entonces $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\wp/\wp^2, K/\mathcal{O}) \cong H_D^1(G, ad^0\rho \otimes \mathcal{O}_n)$

Sea $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(k)$ una representación continua absolutamente irreducble. Suponga además que $\det \overline{\rho} = \epsilon$ y que $\overline{\rho}$ es semiestrable en el sentido que:

- $\rho \restriction_{G_\ell}$ es semiestable,
- y si $p \neq \ell$ entonces $\#\overline{\rho}(I_p) \mid \ell$.

Sea Σ un conjunto finito de primos. Si R es un objeto de $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ entonces decimos que un levantamiento continuo $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(R)$ de $\overline{\rho}$ es de tipo Σ si lo siguiente se cumple

- $\det \rho = \epsilon$,
- $\rho \restriction_{G_\ell}$ is semiestable.
- Si $\ell \notin \Sigma$ y $\overline{\rho} \restriction_{G_\ell}$ es buena.
- Si $p \notin \Sigma \cup \{\ell\}$ y $\overline{\rho}$ es no ramificada en p entonces ρ es no ramificada en p.
- Si $p \notin \Sigma \cup \{\ell\}$ entonces $\rho \restriction_{I_p} \sim \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Suponga que $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathcal{O}_n)$ es un levantamiento de $\overline{\rho}$ tipo Σ. Escribiremos $H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\rho)$ para $H^1_{L_\Sigma}(\mathbb{Q}, ad^0\rho)$, donde

- $L_{\Sigma,p} = H^1(G_p/I_p, (ad^0\rho)^{I_p})$ si $p \notin \Sigma \cup \{\ell\}$;
- $L_{\Sigma,p} = H^1(G_p, (ad^0\rho))$ si $p \in \Sigma$ y $p \neq \ell$;
- $L_{\Sigma,\ell} = H^1_f(G_\ell, (ad^0\rho))$ si $\ell \notin \Sigma$;
- $L_{\Sigma,\ell} = H^1_{ss}(G_\ell, (ad^0\rho))$ si $\ell \in \Sigma$.

Note que el pairing $ad^0\rho \times ad^0\rho \to \mathcal{O}_n$ dada por $(a, b) \to \mathrm{tr}(ab)$ es perfecto y respeta la acción de $G_{\mathbb{Q}}$ pues

$$\mathrm{tr}((ad^0\rho)(g)a, (ad^0\rho)(g)b) = \mathrm{tr}(ab) \qquad \forall g \in G_{\mathbb{Q}},$$

de lo anterior tenemos el isomorfismo de $\mathcal{O}[G_{\mathbb{Q}}]$-módulos.

$$ad^0\rho(1) \cong Hom_O(ad^0\rho, \mathcal{O}_n)(1) \cong Hom(ad^0\rho, \mathbb{Q}_\ell\,/\,\mathbb{Z}_\ell)(1) = (ad^0\rho)^*.$$

Aquí el twist (1) significa $\otimes\, \mathcal{T}_\ell(\mathbb{G}_m)$. Denotaremos por $H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\rho(1))$ la imagen de $H^1_{L^*_\Sigma}(\mathbb{Q}, (ad^0\rho)^*)$ en $H^1(\mathbb{Q}, ad^0\rho(1))$ vía el anterior isomorfismo.

Para ver las condiciones locales de $H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\rho(1))$ usamos el pairing

$$H^1(G_v, ad^0\rho) \times H^1(G_v, ad^0\rho(1)) \to \mathbb{Q}_\ell \,/\, \mathbb{Z}_\ell$$

definido por el anterior isomorfismo. Así que las condiciones locales son $\{L^\perp_{\Sigma,v}\}$. Notamos que si $p \neq \ell$ tenemos que

- $L^\perp_{\Sigma,p} = H^1(G_p/I_p, (ad^0\rho)(1)^{I_p})$ si $p \notin \Sigma$ (Teorema 2.17(e));
- $L^\perp_{\Sigma,p} = (0)$ si $p \in \Sigma$.

Notación

Si $\rho : G_\mathbb{Q} \to GL_2(\mathcal{O})$ es un levantamiento de $\overline{\rho}$ de tipo Σ, escribiremos $H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\rho \otimes K/\,\mathcal{O})$ para $\varinjlim H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\rho \otimes \lambda^{-n}/O)$, y $H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\rho(1) \otimes K/\,\mathcal{O})$ para $\varinjlim H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\rho(1) \otimes \lambda^{-n}/\,\mathcal{O})$.

Teorema 1

Existe un levantamiento universal $\rho_\Sigma^{univ} : G_\mathbb{Q} \to GL_2(R_\Sigma)$ de $\overline{\rho}$ de tipo Σ, i.e. ρ_Σ^{univ} es un levantamiento de tipo Σ y si $\rho : G_\mathbb{Q} \to GL_2(R)$ es cualquier levantamiento de tipo Σ entonces existe un único homomorfismo de $\mathcal{O}$-álgebras $\phi : R_\Sigma \to R$ tal que $\rho \sim \phi \circ \rho_\Sigma^{univ}$. Más aun tenemos lo siguiente

(a) Si K'/K es una extensión finita y R'_Σ es la deformación correspondiente, entonces $R'_\Sigma = R_\Sigma \otimes_\mathcal{O} \mathcal{O}'$ y $(\rho_\Sigma^{univ})' = \rho_\Sigma^{univ} \otimes 1$.

(b) R_Σ puede ser topologicamente generado como un $\mathcal{O}$-álgebra por $\dim_k H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\overline{\rho})$ elementos.

(c) Si $\phi : R_\Sigma \to \mathcal{O}$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}$-álgebras, si $\rho = \phi \circ \rho_\Sigma$ y si $\wp = \ker \phi$ entonces $\mathrm{Hom}(\wp/\wp^2, K/\mathcal{O}) \cong H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\overline{\rho} \otimes K/\mathcal{O})$.

Prueba

Sea L_0 el campo fijo por $\overline{\rho}$. Sea L_n la máxima ℓ-extensión abeliana elemental de L_{n-1} no ramificada fuera de Σ, $\{\ell\}$ y los primos donde $\overline{\rho}$ ramifica. $L_\infty = \bigcup_n L_n$ y sea $G = \mathrm{Gal}(L_\infty/\mathbb{Q})$. Notamos que cualquier levantamiento ρ del tipo Σ factorizan a través de G (pues queremos que ρ sea no ramificado fuera de Σ, $\{\ell\}$ y los primos donde $\overline{\rho}$ ramifica). Notamos que $\mathrm{Gal}(L_\infty/L_0)$ es un pro-ℓ-grupo y su cociente abeliano maximal elemental $\mathrm{Gal}(L_1/L_0)$ (el cuál es finito por Hermite-Minkowski) y por el siguiente lema $\mathrm{Gal}(L_\infty/L_0)$ y G son finitamente generados.

Lema

Sean H un pro-ℓ-group y $\overline{H}$ its maximal abelian quotient elemental. Suponga $h_1, \ldots, h_r \in H$ son un conjunto generador de $\overline{H}$ (vía el cociente), entonces $h_1, \ldots, h_r$ generan a H topologicamente.

Denotemos por $\mathcal{D}$ la categoria de $\mathcal{O}[G]$-módulos profinitos M para los cuáles

- M es semiestable como un $\mathcal{O}[G_\ell]$-módulo,
- si $\ell \notin \Sigma$ y si $\overline{\rho}$ es buena entonces M es buena como $\mathcal{O}[G_\ell]$-módulo,
- si $p \in \Sigma \cup \{\ell\}$ y si $\overline{\rho}$ es ramificada en p entonces existe una sucesión exacta de $\mathcal{O}[I_p]$-módulos

$$(0) \longrightarrow M^{(-1)} \longrightarrow M \longrightarrow M^{(0)} \longrightarrow (0),$$

  tal que I_p actúa trivialmente sobre $M^{(-1)}$ y $M^{(0)}$.

Entonces vemos que un levantamiento $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(R)$ de $\overline{\rho}$ es del tipo Σ si y sólo si

- ρ factoriza a través de G,
- $\det \rho = \epsilon$,
- M_ρ es un objeto de $\mathcal{D}$.

La existencia del levantamiento universal viene del Teorema 2.41 y la parte (a) viene de Teorema 2.36.
Si $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathcal{O}_n)$ es un levantamiento de tipo Σ y si $p \notin \Sigma \cup \{\ell\}$ es un primo donde $\overline{\rho}$ ramifica entonces

$$\ker(H^1(G_p, ad^0\rho) \to H^1(I_p, ad^0\rho/(ad^0\rho)^{I_p})) = H^1(G_p/I_p, (ad^0\rho)^{I_p}).$$

Lo anterior sigue del hecho que el morfismo natural $H^1(I_p, ad^0\rho) \to H^1(I_p, ad^0\rho/(ad^0\rho)^{I_p})$ es inyectivo (de hecho un isomorfismo). Esto no es mas que el morfismo $(ad^0\rho)_{I_p} \to (ad^0\rho/(ad^0\rho)^{I_p})_{I_p}$.

Corolario

Suponga que $\ell = 3$ entonces $\overline{\rho} \restriction_{G_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}}$ es absolutamente irreducible. Entonces R_Σ puede ser topologicamente generado como $\mathcal{O}$-álgebra por

$$\dim_k H^1_\Sigma(\mathbb{Q}_\ell, ad^0\overline{\rho}(1)) + d_\ell + \sum_{p\in\Sigma-\{\ell\}} \dim_k H^0(\mathbb{Q}_\ell, ad^0\overline{\rho}(1))$$

elementos, donde $d_\ell := \dim_k H^1_{ss}(\mathbb{Q}_\ell, ad^0\overline{\rho}) - \dim_k H^1_f(\mathbb{Q}_\ell, ad^0\overline{\rho})$ si $\ell \in \Sigma$, mientras $d_\ell = 0$ si $\ell \notin \Sigma$.

Prueba

Gracias a Teorema 1.b, necesitamos una cota superior para $\dim_k H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\overline{\rho})$, para ello usaremos que

$$\frac{\#H^1_L(\mathbb{Q}, M)}{\#H^1_{L^*}(\mathbb{Q}, M^*)} = \frac{\#H^0(G_\mathbb{Q}, M)}{\#H^0(G_\mathbb{Q}, M^*)} \prod_v \frac{\#L_v}{\#H^0(G_v, M)}.$$

Note que $H^0(\mathbb{Q}, ad^0\overline{\rho}(1)) = 0$ a menos que $\ell = 3$ y $\overline{\rho} \restriction_{G_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}}$ no es absolutamente irreducible. Para ver esto notenemos

$$M_{ad^0(\rho)(1)} = M_{2\times 2}(k)^{tr=0} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{T}_\ell(\mathbb{G}_m) \cong M_{2\times 2}(k)^{tr=0} \otimes_{\mathcal{O}} \mu_\ell$$

con acción por izquierda conjugar por $\overline{\rho}(\sigma)$ y la acción en la derecha es la natural de $G_{\mathbb{Q}}$ en μ_ℓ (ciclotómico en exponente). Veamos que todos los tensores en $M_{2\times 2}(k)^{tr=0} \otimes_{\mathcal{O}} \mu_\ell$ son puros, pues tomando $\zeta \in \mu_\ell$ raíz primitiva, todo se escribe $\gamma \otimes \zeta$. Así sea $\gamma \otimes \zeta$ un elemento invariantes, es decir en $H^0(G_{\mathbb{Q}}, M_{2\times 2}(k)^{tr=0} \otimes \mu_\ell) \cong H^0(G_{\mathbb{Q}}, ad^0(\overline{\rho})(1)) =: H$. Así que para todo $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ tenemos $\gamma \otimes \zeta = \overline{\rho}(\sigma)\gamma\overline{\rho}(\sigma)^{-1} \otimes \zeta^\sigma$. En nuestro caso tenemos:

$$\gamma \otimes \zeta = \overline{\rho}(\sigma)\gamma\overline{\rho}(\sigma)^{-1} \otimes \zeta$$

Entonces γ conmuta con todo elemento de $\overline{\rho}(G_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})})$. Como $\overline{\rho} \restriction_{G_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3}}}$ es abs. irr. esto implica que $\gamma = \alpha \cdot Id$ para cierto α. Pero $tr = 0$ así que $\alpha = 0$.

Entonces tenemos que $\dim_k H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, M)$ es:

$$\dim_k H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\overline{\rho}(1)) + \sum_p \dim_k L_{\Sigma,p} - \dim_k H^0(G_p, M). \tag{1}$$

Consideramos lo siguiente hechos:

(a) Si $p \notin \Sigma \cup \{\ell, \infty\}$ se tiene que $\dim_k L_{\Sigma,p} - \dim_k H^0(G_p, ad^0\overline{\rho}) = 0$;

(b) $H^1(\mathbb{R}, ad^0\overline{\rho}) = 0$ esto se debe a que $H^1(G, T) = 0$ siempre que $\#G = 2$ y $\#T$ es impar (The proof of Fermat's last theorem pág.94);

(c) $\dim_k H^1_f(\mathbb{Q}_\ell, ad^0\overline{\rho}) - \dim_k H^0(\mathbb{Q}_\ell, ad^0\overline{\rho}) - \dim_k H^0(\mathbb{R}, ad^0\overline{\rho}) \leq 0$ (*) por proposición 2.27.

(d) De (b) y (c) tenemos $d_\ell \geq \sum_{p\in\{\ell,\infty\}} \dim_k L_{\Sigma,p} - \dim_k H^0(G_p, ad^0\overline{\rho})$.

(e) Por la fórmula de la característica de Euler local (teorema 2.17), para cada $p \in \Sigma - \{\ell\}$,

$$\dim_k H^1(\mathbb{Q}_p, ad^0\overline{\rho}) - \dim_k H^0(\mathbb{Q}_p, ad^0\overline{\rho}) = \dim_k H^0(\mathbb{Q}_p, ad^0\overline{\rho}(1)),$$

Poniendo todo junto obtenemos que

$$\begin{aligned}(1) =& H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\overline{\rho}(1)) + \sum_{p\in\Sigma\cup\{\ell,\infty\}} \dim_k L_{\Sigma,p} - \dim_k H^0(G_p, M)\\ \leq& H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\overline{\rho}(1)) + d_\ell + \sum_{p\in\Sigma-\{\ell\}} \dim_k L_{\Sigma,p} - \dim_k H^0(G_p, M)\\ \leq& H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\overline{\rho}(1)) + d_\ell + \sum_{p\in\Sigma-\{\ell\}} \dim_k H^0(\mathbb{Q}_p, ad^0\overline{\rho}(1)).\end{aligned}$$

Gracias.