Seminario de modularidad de representaciones de Galois (2020-1): Más sobre anillos de deformación: panorama de la demostración

Héctor Pastén

Pontificia Universidad Católica de Chile

2020/06/26

El plan

Se fija ℓ primo (pueden pensar $\ell = 3$). Sea E curva elíptica. Queremos que la rep del módulo de Tate de esta curva elíptica $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ sea modular: que exista una newform $f \in S_2(\Gamma)$ tal que $tr\rho(Frob_p) = a_p(f)$ para casi todo primo.

El plan

Se fija ℓ primo (pueden pensar $\ell = 3$). Sea E curva elíptica. Queremos que la rep del módulo de Tate de esta curva elíptica $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ sea modular: que exista una newform $f \in S_2(\Gamma)$ tal que $tr\rho(Frob_p) = a_p(f)$ para casi todo primo.
Equivalente: que la construcción de Shimura de alguna A_f al que la rep del módulo de Tate de A_f sea isomofa a ρ.

El plan

Se fija ℓ primo (pueden pensar $\ell = 3$). Sea E curva elíptica. Queremos que la rep del módulo de Tate de esta curva elíptica $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ sea modular: que exista una newform $f \in S_2(\Gamma)$ tal que $tr\rho(Frob_p) = a_p(f)$ para casi todo primo.
Equivalente: que la construcción de Shimura de alguna A_f al que la rep del módulo de Tate de A_f sea isomofa a ρ.

- $R_{\bar{\rho}}$ cierto anillo que clasifica todas las reps $\rho' : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ que cumplen $\rho' \equiv \bar{\rho} \bmod \ell$ (+ info técnica que facilita la construcción)

El plan

Se fija ℓ primo (pueden pensar $\ell = 3$). Sea E curva elíptica. Queremos que la rep del módulo de Tate de esta curva elíptica $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ sea modular: que exista una newform $f \in S_2(\Gamma)$ tal que $tr\rho(Frob_p) = a_p(f)$ para casi todo primo.
Equivalente: que la construcción de Shimura de alguna A_f al que la rep del módulo de Tate de A_f sea isomofa a ρ.

- $R_{\bar{\rho}}$ cierto anillo que clasifica todas las reps $\rho' : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ que cumplen $\rho' \equiv \bar{\rho} \bmod \ell$ (+ info técnica que facilita la construcción)
- $T_{\bar{\rho}}$ cierta álgebra de Hecke que clasifica todas las representaciones modulares (i.e. de la construcción de Shimura) congruentes a $\bar{\rho}$ módulo ℓ.

El plan

Se fija ℓ primo (pueden pensar $\ell = 3$). Sea E curva elíptica. Queremos que la rep del módulo de Tate de esta curva elíptica $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ sea modular: que exista una newform $f \in S_2(\Gamma)$ tal que $tr\rho(Frob_p) = a_p(f)$ para casi todo primo.
Equivalente: que la construcción de Shimura de alguna A_f al que la rep del módulo de Tate de A_f sea isomofa a ρ.

- $R_{\bar{\rho}}$ cierto anillo que clasifica todas las reps $\rho' : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ que cumplen $\rho' \equiv \bar{\rho} \bmod \ell$ (+ info técnica que facilita la construcción)
- $T_{\bar{\rho}}$ cierta álgebra de Hecke que clasifica todas las representaciones modulares (i.e. de la construcción de Shimura) congruentes a $\bar{\rho}$ módulo ℓ.
- Por moduli hay $R_{\bar{\rho}} \to T_{\bar{\rho}}$ sobreyectiva. ¡Si esto fuera un isomorfismo, entonces ρ sería modular!

El plan

Se fija ℓ primo (pueden pensar $\ell = 3$). Sea E curva elíptica. Queremos que la rep del módulo de Tate de esta curva elíptica $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ sea modular: que exista una newform $f \in S_2(\Gamma)$ tal que $tr\rho(Frob_p) = a_p(f)$ para casi todo primo.
Equivalente: que la construcción de Shimura de alguna A_f al que la rep del módulo de Tate de A_f sea isomofa a ρ.

- $R_{\bar{\rho}}$ cierto anillo que clasifica todas las reps $\rho' : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ que cumplen $\rho' \equiv \bar{\rho}$ mod ℓ (+ info técnica que facilita la construcción)
- $T_{\bar{\rho}}$ cierta álgebra de Hecke que clasifica todas las representaciones modulares (i.e. de la construcción de Shimura) congruentes a $\bar{\rho}$ módulo ℓ.
- Por moduli hay $R_{\bar{\rho}} \to T_{\bar{\rho}}$ sobreyectiva. ¡Si esto fuera un isomorfismo, entonces ρ sería modular!
- Criterio numérico para isomorfismo: (1) $T_{\bar{\rho}} \neq 0$; (2) $R_{\bar{\rho}}$ es chica.

Repaso rápido: anillos de deformación

G grupo profinito t.f.g. (en la práctica será un cuociente de $G_{\mathbb{Q}}$)

Repaso rápido: anillos de deformación

G grupo profinito t.f.g. (en la práctica será un cuociente de $G_{\mathbb{Q}}$)
$\mathcal{O}$ = extensión integral finita de $\mathbb{Z}_\ell$.

Repaso rápido: anillos de deformación

G grupo profinito t.f.g. (en la práctica será un cuociente de $G_{\mathbb{Q}}$)
$\mathcal{O}$ = extensión integral finita de $\mathbb{Z}_\ell$.
$k = \mathcal{O}/\lambda$.

Repaso rápido: anillos de deformación

G grupo profinito t.f.g. (en la práctica será un cuociente de $G_{\mathbb{Q}}$)
$\mathcal{O} =$ extensión integral finita de $\mathbb{Z}_\ell$.
$k = \mathcal{O}/\lambda$.
$\bar{\rho} : G \to GL_2(k)$.

Repaso rápido: anillos de deformación

G grupo profinito t.f.g. (en la práctica será un cuociente de $G_{\mathbb{Q}}$)
$\mathcal{O} =$ extensión integral finita de $\mathbb{Z}_\ell$.
$k = \mathcal{O}/\lambda$.
$\bar{\rho} : G \to GL_2(k)$.
$\mathcal{D} =$ sub-categoría de $\mathcal{O}$-álgebras locales completas noetherianas con campo residual k. Ejemplo $\mathcal{O}[[T_1, ..., T_r]]$.

Repaso rápido: anillos de deformación

G grupo profinito t.f.g. (en la práctica será un cuociente de $G_{\mathbb{Q}}$)
$\mathcal{O} =$ extensión integral finita de $\mathbb{Z}_\ell$.
$k = \mathcal{O}/\lambda$.
$\bar{\rho} : G \to GL_2(k)$.
$\mathcal{D} =$ sub-categoría de $\mathcal{O}$-álgebras locales completas noetherianas con campo residual k. Ejemplo $\mathcal{O}[[T_1, ..., T_r]]$.
$D =$ Representaciones $G \to GL_2(R)$ para $R \in \mathcal{D}$ con determinante y reducción fijas. Al menos $\rho \in D$.

Repaso rápido: anillos de deformación

G grupo profinito t.f.g. (en la práctica será un cuociente de $G_{\mathbb{Q}}$)
$\mathcal{O}$ = extensión integral finita de $\mathbb{Z}_\ell$.
$k = \mathcal{O}/\lambda$.
$\bar{\rho} : G \to GL_2(k)$.
$\mathcal{D}$ = sub-categoría de $\mathcal{O}$-álgebras locales completas noetherianas con campo residual k. Ejemplo $\mathcal{O}[[T_1, ..., T_r]]$.
D = Representaciones $G \to GL_2(R)$ para $R \in \mathcal{D}$ con determinante y reducción fijas. Al menos $\rho \in D$.
Anillos de deformación. Existe R_D con $\rho_D^{univ} : G \to GL_2(R_D)$ universal. Esto es, toda $\rho' : G \to GL_2(R)$ en D viene de forma única de un $\phi : R_D \to R$:

$$\rho' = \phi \circ \rho_D^{univ}.$$

Repaso rápido: anillos de deformación

Hay isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_k(m_{R_D}/(\lambda, m_{R_D}^2), k) \simeq H_D^1(G, ad^0\bar{\rho})$$

relacionando deformaciones λ-ádicas con ϵ-deformaciones.

Repaso rápido: anillos de deformación

Hay isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_k(m_{R_D}/(\lambda, m_{R_D}^2), k) \simeq H^1_D(G, ad^0\bar{\rho})$$

relacionando deformaciones λ-ádicas con ϵ-deformaciones.
Entonces la "dimensión tangencial" de R_D se puede acotar con grupos de Selmer, los que se controlan bien con la fórmula de Wiles para grupos de Selmer.

Repaso rápido: anillos de deformación

Hay isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_k(m_{R_D}/(\lambda, m_{R_D}^2), k) \simeq H^1_D(G, ad^0\bar{\rho})$$

relacionando deformaciones λ-ádicas con ϵ-deformaciones.
Entonces la "dimensión tangencial" de R_D se puede acotar con grupos de Selmer, los que se controlan bien con la fórmula de Wiles para grupos de Selmer.
Y el número de generadores topológicos de R_D se puede acotar con la dimensión tangencial (Nakayama)

Repaso rápido: anillos de deformación

Hay isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_k(m_{R_D}/(\lambda, m_{R_D}^2), k) \simeq H^1_D(G, ad^0\bar{\rho})$$

relacionando deformaciones λ-ádicas con ϵ-deformaciones.
Entonces la “dimensión tangencial” de R_D se puede acotar con grupos de Selmer, los que se controlan bien con la fórmula de Wiles para grupos de Selmer.
Y el número de generadores topológicos de R_D se puede acotar con la dimensión tangencial (Nakayama)

Repaso rápido: anillos de deformación

Elección de $D = Q$: permitir ramificación en un conjunto finito de primos $q \in Q$ de "Taylor-Wiles". Esto permite cálculos en cohomología mucho más amenos.

Repaso rápido: anillos de deformación

Elección de $D = Q$: permitir ramificación en un conjunto finito de primos $q \in Q$ de "Taylor-Wiles". Esto permite cálculos en cohomología mucho más amenos.

Teorema: Asumiendo la condición técnica

Repaso rápido: anillos de deformación

Elección de $D = Q$: permitir ramificación en un conjunto finito de primos $q \in Q$ de "Taylor-Wiles". Esto permite cálculos en cohomología mucho más amenos.

Teorema: Asumiendo la condición técnica

$$H^1_\emptyset(G_\mathbb{Q}, ad^0\bar{\rho}(1)) \simeq \bigoplus_{q\in Q} H^1(G_q, ad^0\bar{\rho}(1))$$

se cumple que R_Q se puede generar topológicamente con $\leq \#Q$ elementos: es cuociente de $\mathcal{O}[[T_1, ..., T_r]]$ con $r \leq \#Q$.

Repaso rápido: anillos de deformación

Elección de $D = Q$: permitir ramificación en un conjunto finito de primos $q \in Q$ de "Taylor-Wiles". Esto permite cálculos en cohomología mucho más amenos.

Teorema: Asumiendo la condición técnica

$$H^1_\emptyset(G_\mathbb{Q}, ad^0\bar{\rho}(1)) \simeq \bigoplus_{q\in Q} H^1(G_q, ad^0\bar{\rho}(1))$$

se cumple que R_Q se puede generar topológicamente con $\leq \#Q$ elementos: es cuociente de $\mathcal{O}[[T_1, ..., T_r]]$ con $r \leq \#Q$.

Detalle importante: Dado que se trabaja mejor con los R_Q, habrá que usar álgebras de Hecke "$\mathbb{T}_Q$". Después se pega todo variando Q con el método de "patching".

Repaso rápido: anillos de deformación

Elección de $D = Q$: permitir ramificación en un conjunto finito de primos $q \in Q$ de "Taylor-Wiles". Esto permite cálculos en cohomología mucho más amenos.

Teorema: Asumiendo la condición técnica

$$H^1_\emptyset(G_\mathbb{Q}, ad^0\bar{\rho}(1)) \simeq \bigoplus_{q\in Q} H^1(G_q, ad^0\bar{\rho}(1))$$

se cumple que R_Q se puede generar topológicamente con $\leq \#Q$ elementos: es cuociente de $\mathcal{O}[[T_1, ..., T_r]]$ con $r \leq \#Q$.

Detalle importante: Dado que se trabaja mejor con los R_Q, habrá que usar álgebras de Hecke "$\mathbb{T}_Q$". Después se pega todo variando Q con el método de "patching".

Ok, eso cubre "R chico".. ¿Y que hay de $T \neq 0$?

Habrá que demostrar que hay *alguna* representación modular que se reduce a $\bar{\rho}$ módulo ℓ.

Ok, eso cubre "R chico".. ¿Y que hay de $T \neq 0$?

Habrá que demostrar que hay *alguna* representación modular que se reduce a $\bar{\rho}$ módulo ℓ.
Caso crítico: $\ell = 3$, y $\bar{\rho}$ viene de una curva elíptica, así que no es un caso cualquiera.

Ok, eso cubre "R chico".. ¿Y que hay de $T \neq 0$?

Habrá que demostrar que hay *alguna* representación modular que se reduce a $\bar{\rho}$ módulo ℓ.

Caso crítico: $\ell = 3$, y $\bar{\rho}$ viene de una curva elíptica, así que no es un caso cualquiera.

- Paso 1: pasar $\bar{\rho}$ a una representación compleja (!)

Ok, eso cubre "R chico".. ¿Y que hay de $T \neq 0$?

Habrá que demostrar que hay *alguna* representación modular que se reduce a $\bar{\rho}$ módulo ℓ.
Caso crítico: $\ell = 3$, y $\bar{\rho}$ viene de una curva elíptica, así que no es un caso cualquiera.

- Paso 1: pasar $\bar{\rho}$ a una representación compleja (!)
- Paso 2: avances en la conjetura de Artin (Langlands-Tunnell) dan que esa rep compleja es modular, pero de peso 1.

Ok, eso cubre "R chico".. ¿Y que hay de $T \neq 0$?

Habrá que demostrar que hay *alguna* representación modular que se reduce a $\bar{\rho}$ módulo ℓ.
Caso crítico: $\ell = 3$, y $\bar{\rho}$ viene de una curva elíptica, así que no es un caso cualquiera.

- Paso 1: pasar $\bar{\rho}$ a una representación compleja (!)
- Paso 2: avances en la conjetura de Artin (Langlands-Tunnell) dan que esa rep compleja es modular, pero de peso 1.
- Paso 3: Pasar de peso 1 a peso 2.

Ok, eso cubre "R chico".. ¿Y que hay de $T \neq 0$?

Habrá que demostrar que hay *alguna* representación modular que se reduce a $\bar{\rho}$ módulo ℓ.

Caso crítico: $\ell = 3$, y $\bar{\rho}$ viene de una curva elíptica, así que no es un caso cualquiera.

- Paso 1: pasar $\bar{\rho}$ a una representación compleja (!)
- Paso 2: avances en la conjetura de Artin (Langlands-Tunnell) dan que esa rep compleja es modular, pero de peso 1.
- Paso 3: Pasar de peso 1 a peso 2.

Pasar de $\mathbb{F}_3$ a $\mathbb{C}$

Inclusión $\psi : GL_2(\mathbb{F}_3) \to GL_2(\mathbb{C})$:

Pasar de $\mathbb{F}_3$ a $\mathbb{C}$

Inclusión $\psi : GL_2(\mathbb{F}_3) \to GL_2(\mathbb{C})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sqrt{-2} & -1+\sqrt{-2} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Pasar de $\mathbb{F}_3$ a $\mathbb{C}$

Inclusión $\psi : GL_2(\mathbb{F}_3) \to GL_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sqrt{-2} & -1+\sqrt{-2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

preserva traza y determinante módulo $\lambda = 1 + \sqrt{-2}$. Tomar

$$\rho' = \psi \circ \bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{C}).$$

Langlands-Tunnell

Conjetura de Artin. $\sigma : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{C})$ (+ condiones técnicas) es modular.

Langlands-Tunnell

Conjetura de Artin. $\sigma : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{C})$ (+ condiones técnicas) es modular.
Langlands-Tunnell. Correcto en algunos casos. Suficientes para lo nuestro. Pero la forma modular eigenform f está en $S_1(\Gamma)$.

Langlands-Tunnell

Conjetura de Artin. $\sigma : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{C})$ (+ condiones técnicas) es modular.

Langlands-Tunnell. Correcto en algunos casos. Suficientes para lo nuestro. Pero la forma modular eigenform f está en $S_1(\Gamma)$.

- Tomar fE con $E = 1 + 6\sum_n (\sum_{d|n} \chi(d))q^n \equiv 1 \bmod 3$

Langlands-Tunnell

Conjetura de Artin. $\sigma : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{C})$ (+ condiones técnicas) es modular.

Langlands-Tunnell. Correcto en algunos casos. Suficientes para lo nuestro. Pero la forma modular eigenform f está en $S_1(\Gamma)$.

- Tomar fE con $E = 1 + 6\sum_n(\sum_{d|n}\chi(d))q^n \equiv 1 \bmod 3$
- Así que $fE \in S_2(\Gamma')$ y cumple $fE \equiv f \bmod 3$
- Lema de Deligne-Serre.

Langlands-Tunnell

Conjetura de Artin. $\sigma : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{C})$ ($+$ condiones técnicas) es modular.
Langlands-Tunnell. Correcto en algunos casos. Suficientes para lo nuestro. Pero la forma modular eigenform f está en $S_1(\Gamma)$.

- Tomar fE con $E = 1 + 6\sum_n (\sum_{d|n} \chi(d))q^n \equiv 1 \bmod 3$
- Así que $fE \in S_2(\Gamma')$ y cumple $fE \equiv f \bmod 3$
- Lema de Deligne-Serre.