Seminario de modularidad de representaciones de Galois (2020-1): Representaciones de Galois asociadas a formas modulares

Héctor Pastén

Pontificia Universidad Católica de Chile

2020/06/30

Recuerdo: Construcción de Shimura

Sea $f \in S_2(\Gamma_1(N_f))$ newform de caracter ψ_f. Así

$$f \in S_2(N_f, \psi_f).$$

Sea $K_f = \mathbb{Q}(a_n(f) : n \geq 1)$ el campo de números de f.
Asociada a f tenemos $I_f = Ann_{\mathbb{T}}(f)$ y la variedad abeliana A_f:

- A_f es definida sobre $\mathbb{Q}$ y $\dim A_f = [K_f : \mathbb{Q}]$
- A_f es un cuociente $q_f : J_1(N_f) \to J_1(N_f)/I_f \cdot J_1(N_f) =: A_f$
- $K_f \simeq (\mathbb{T}/\mathbb{I}_f) \otimes \mathbb{Q}$ y K_f actúa en $A_f = J_1(N_f) \otimes_{\mathbb{T}} (\mathbb{T}/I_f)$, así que $A_f \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq J_1(N_f) \otimes K_f$.
- $\mathbb{T}$ actúa en A_f y el cuociente q_f es equivariante.
- $\mathcal{V}_\ell(A_f)$ es un módulo libre de rango 2 sobre $K_f \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ porque $\mathcal{V}_\ell(J)$ es libre de rango 2 sobre $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}_\ell}$.
- La acción de $K_f \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ conmuta con la acción de $G_{\mathbb{Q}}$ en $\mathcal{V}_\ell(A_f)$, porque la acción de $\mathbb{T}$ viene de correspondencias definidas sobre $\mathbb{Q}$.

Representacion ℓ-ádica de f

Por lo último tenemos una representación de Galois

$$G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(K_f \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell).$$

Notar que $K_f \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \simeq \prod_{v|\ell} K_{f,v}$ y cada $K_{f,v}$ es una extensión finita de $\mathbb{Q}_\ell$. Eligiendo un $v|\ell$ obtenemos una representación de Galois

$$\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(K_f').$$

donde $K_f' = K_{f,v}/\mathbb{Q}_\ell$ es finita y es generada por los $\sigma_v(a_n(f)) \in K_f'$, donde $\sigma_v : K_f \to K_{f,v} = K_f'$ es la inclusión determinada por v. Suponemos (salvo conjugar) que $\rho_f(G_{\mathbb{Q}}) \subseteq GL_2(\mathcal{O}_f')$ donde $\mathcal{O}_f'$ es el anillo de enteros de K_f'. Además el caracter ψ_f induce la representación

$$\psi_f' : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{N_f})/\mathbb{Q}) \to (K_f')^\times = GL_1(K_f').$$

Propiedades básicas de ρ_f

(a) Si $p \nmid \ell N_f$ entonces ρ_f es no-ramificada en p y el polinomio característico de $\rho_f(Frob_p)$ es

$$X^2 - a_p(f)X + p\psi(p).$$

Esto era una aplicación de la congruencia de Eichler-Shimura:

$$T_p \otimes \mathbb{F}_p = F_p + \langle p \rangle V_p$$

como correspondencias en la curva modular $X_1(N_f) \otimes \mathbb{F}_p$.

Propiedades básicas de ρ_f

(b) $\det(\rho_f) = \psi_f' \epsilon_\ell$. Además $\rho_f(c)$ es conjugada a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Lo primero es por (a) usando el teorema de Chebotarev.
Lo segundo es consecuencia de lo primero notando que

$$\psi_f'(c) = \psi(-1) = 1$$

porque $f \neq 0$ (usar $-\mathrm{Id}$ en la fórmula de modularidad de f).

Propiedades básicas de ρ_f

(c) ρ_f es absolutamente irreducible

Esto es un resultado de Ribet (sencillo —cotas de coeficientes de Fourier).

Propiedades básicas de ρ_f

(d) El conductor $N(\rho_f)$ es la parte prima a ℓ de N_f

Esto es un teorema de Carayol (difícil).

Propiedades básicas de ρ_f

(e) Suponer $\ell \neq p$ y $p || N_f$. Sea $\chi : G_p \to (K_f')^\times$ es caracter no-ramificado $\chi(Frob_p) = a_p(f)$. Si $p \nmid cond(\psi)$ entonces $\rho_f|_{G_p}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} \chi\epsilon & * \\ 0 & \chi \end{pmatrix}$$

pero si $p | cond(\psi)$ entonces $\rho_f|_{G_p}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} \chi^{-1}\epsilon\psi_f'|_{G_p} & * \\ 0 & \chi \end{pmatrix}$$

Mismo artículo de Carayol.

Propiedades básicas de ρ_f

(f) Si $\ell \nmid 2N_f$ entonces $\rho_f|_{G_\ell}$ es buena. Además, es ordinaria si y solo si $v(a_\ell(f)) = 0$.

(g) Si $\ell > 2$, $\ell || N_f$ y $\ell \nmid cond(\psi)$ entonces $\rho_f|_{G_\ell}$ es ordinaria y $\rho_{I_\ell}(Frob_\ell) = a_\ell(f)$.

Análisis de buena reducción / modelos integrales (al parecer $\ell \neq 2$ no es esencial).

Mod ℓ

Reduciendo módulo λ y semi-simplificando obtenemos

$$\overline{\rho_f} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(k_f).$$

Mismas propiedades salvo lo siguiente:

- Puede ser reducible.
- $N(\overline{\rho_f})$ divide la parte prima a ℓ de N_f

¿Otros pesos?

La teoría de operadores de Hecke se extiende a nivel cualquiera, no solo 2. Si $f \in S_k(\Gamma_1(N_f))$ es newform entonces tiene asociada una representación de Galois en GL_2:

- $k = 2$: Eichler-Shimura. ℓ-ádica
- $k \geq 2$: Deligne (variedades de Kuga-Sato) ℓ-adica
- $k = 1$: Deligne-Serre (congruencias + caso $k \geq 2$). Son representaciones de Artin (complejas)

$$\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{C})$$

de conductor N_f (exacto) y $\rho_f(Frob_p)$ tiene polinomio característico

$$X^2 - a_p(f)X + \psi_f(p).$$