Desde representaciones de Galois a formas modulares

Jerson Caro

July 3, 2020

Representaciones de Artin

En clases anteriores vimos esta conjetura:

Conjetura (Artin)

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{C})$ una representación continua irreducible con $\det(\rho(c)) = -1$. Entonces ρ es equivalente a ρ_g para alguna newform g de peso 1.

Aquí ρ_g es la representación de Artin asociada a g por la construcción de Deligne-Serre.

Esta conjetura es equivalente al hecho que las L-funciones de Artin respecto a ρ y a cada twist de esta por un carácter 1-dimensional son enteras.

Esta conjetura fue parcialmente probada por Langlands y extendida por Tunnell.

Teorema 1

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{C})$ una representación continua irreducible tal que $\rho(G_{\mathbb{Q}})$ es un grupo soluble y $\det(\rho(c)) = -1$. Entonces ρ es equivalente a ρ_g para alguna newform g de peso 1.

El Teorema 2.47 (a) dice que sólo esta excluido el caso donde la imagen proyectiva de ρ es isomorfa a A_5.
Si la imagen proyectiva de ρ es dihedral, entonces ρ es inducida desde un carácter de una extensión cuadratica de $\mathbb{Q}$.
Tenemos una extensión $L/\mathbb{Q}$ tal que $Gal(L/\mathbb{Q}) \cong \Im(\rho)$ por hipótesis existe $L \supset K \supset \mathbb{Q}$ tal que $Gal(K/\mathbb{Q}) \cong D_{2n} = \{r, s : r^n = s^2 = e, srs = r^{-1}\}$ y $Gal(L/K) \subset Z(Gal(L/\mathbb{Q}))$. Sea $F = K^{\langle r \rangle}$, luego $Gal(L/F)$ es abeliano; de aquí que $\rho \restriction_{Gal(L/F)}$ es suma de dos carácteres $\overline{\phi_1} \oplus \overline{\phi_2}$. Finalmente notamos que $\rho = Ind_{G_F}^{G_{\mathbb{Q}}} \phi_1$.

Representaciones modulo ℓ

Definición

Decimos que una representación $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(k)$ es modular (de nivel N) si para alguna newform f de peso 2 (y nivel N), $\overline{\rho}$ es equivalente sobre k_f a $\overline{\rho}_f$.

La proposición 1.32 nos dice que si f es una newform de nivel M con carácter χ, entonces f^σ es una newform de nivel M con carácter χ^σ, luego la definición anterior es independiente de la escogencia de los embeddings $K \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ y $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Además si K' es una extensión finita de K con campo residual k', entonces ρ es modular si y sólo si $\rho \otimes k'$ lo es.

Conjetura (Serre)

Sea $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(k)$ una representación continua absolutamente irreducible con $\det(\rho(c)) = -1$. Entonces $\overline{\rho}$ es modular.

Algunos casos de esta conjetura pueden ser deducidos del Teorema 1.

Teorema 2

Sea $\overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(k)$ una representación continua absolutamente irreducible con $\det(\overline{\rho}(c)) = -1$. Suponga que uno de los siguientes se cumple:

(a) $k = \mathbb{F}_3$;

(b) la imagen proyectiva de $\overline{\rho}$ es dihedral.

Entonces $\overline{\rho}$ es modular.

Prueba (a)

Tenemos la inclusión $\psi : GL_2(\mathbb{F}_3) \to GL_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sqrt{-2} & -1+\sqrt{-2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

preserva traza y determinante modulo $\lambda = 1 + \sqrt{-2}$. Tomar

$$\rho' = \psi \circ \overline{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{C}).$$

Prueba (b)

Como $\overline{\rho}$ es equivalente a una representación de la forma $Ind_{G_F}^{G_{\mathbb{Q}}}\overline{\chi}$ donde F es una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$ y $\overline{\chi} : G_F \to k^{\times}$ es un carácter. Aquí hacemos mas grande a K si es necesario. Sea n el orden del carácter $\overline{\chi}$, escogemos un embedding $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}) \hookrightarrow K$ y un levantamiento de $\overline{\chi}$ a un carácter $\chi : G_F \to \mathbb{Z}[e^{2\pi i/n}]^{\times}$. *Siempre podemos escoger* χ *de tal forma que* $\rho = Ind_{G_F}^{G_{\mathbb{Q}}}\chi$ *cumple que* $\det(\rho(c)) = -1$ *(En el caso* $\ell = 2$ *y* F *sea real, podemos multiplicar a* χ *por un carácter adecuado de* G_F*).*

La idea ahora es tener control sobre el nivel de la forma modular que realiza a $\overline{\rho}$;
para ello definimos el entero $\delta(\overline{\rho})$ como sigue:

- $\delta(\overline{\rho}) = 0$ si $\overline{\rho} \restriction_{G_\ell}$ es buena;
- $\delta(\overline{\rho}) = 1$ si $\overline{\rho} \restriction_{G_\ell}$ no es buena y $\overline{\rho} \restriction_{I_\ell} \otimes \overline{k}$ esta en la forma

$$\begin{pmatrix} \epsilon^a & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \epsilon & * \\ 0 & \epsilon^a \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad \begin{pmatrix} \psi^a & 0 \\ 0 & \psi^{\ell a} \end{pmatrix}$$

  para algún entero positivo $a < \ell$, donde ϵ es el carácter ciclotómico y ψ es definido por $\psi(\sigma) = \sigma(\overline{\omega})/\overline{\omega}$ mod $\overline{\omega}$, donde $\overline{\omega} = \sqrt[\ell^2-1]{\ell}$.
- $\delta(\overline{\rho}) = 2$ de otro modo.

Teorema

Suponga que ℓ es primo y $\overline{\rho}$ es absolutamente irreducible y modular. Si $\ell = 3$ suponga que $\overline{\rho} \restriction_{G_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}}$ es absolutamente irreducible. Entonces existe una newform f de peso 2 tal que

- $\overline{\rho}$ es equivalente sobre k_f a $\overline{\rho}_f$;
- $N_f = N(\overline{\rho})\ell^{\delta(\overline{\rho})}$;
- el orden de ψ_f no es divisible por ℓ.

Este es un trabajo de Fred Diamond "On deformation rings and Hecke rings" donde construye la forma modular con $N_f \mid N(\overline{\rho})\ell^{\delta(\overline{\rho})}$. Sin embargo por el Lema 2.7 nos dice que $N(\overline{\rho}) \mid N_f$, y el trabajo de Edixhoven "The weight in Serre's conjectures on modular forms" muestra que $\ell^{\delta(\overline{\rho})} \mid N_f$.

Representaciones ℓ-ádicas

Definición

Decimos que una representación $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(K)$ una representación ℓ-ádica es modular si para alguna newform f de peso 2, ρ es equivalente sobre K'_f a ρ_f.

Conjetura (Fontaine-Mazur)

Si $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(K)$ es una representación ℓ-ádica absolutamente irreducible y $\rho \restriction_{G_\ell}$ es semiestable. Entonces ρ es modular.

Para nuestros intereses la representaciones ℓ-ádicas serán consideradas a ramificar en finitos primos. También tenemos que $\rho \restriction_{G_\ell}$ es semiestable, en particular, $\det \rho \restriction_{I_\ell}$ es el carácter ciclotómico ϵ.

Conjetura (Shimura-Taniyama)

Todas las curvas elípticas definidas sobre $\mathbb{Q}$ son modulares.

La siguinete proposición relaciona que una curva elíptica sobre $\mathbb{Q}$ sea modular con las representaciónes ℓ-ádica $\rho_{E,\ell} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$.

Proposición 1

Las siguientes son equivalentes:

(a) E es modular.

(b) $\rho_{E,\ell}$ es modular para todos los primos ℓ.

(c) $\rho_{E,\ell}$ es modular para algún primo ℓ.

Prueba

Como E es modular, E es isogena a A_f para alguna newform f con $K_f = \mathbb{Q}$. Se sigue que para cada ℓ, $\rho_{E,\ell}$ es equivalente a la representación ℓ-ádica ρ_f. luego tenemos $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$.

$[(c) \Rightarrow (b)]$. Supongamos que $\rho_{E,\ell}$ es equivalente a ρ_f para algunos ℓ y f. Tenemos que para casi todos los primos tenemos

$$\mathrm{tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_p)) = \mathrm{tr}(\rho_{E,\ell}(\mathrm{Frob}_p))$$

Por Teorema 3.1(a) tenemos que $\mathrm{tr}(\rho_f(\mathrm{Frob}_p)) = a_f(p)$ (para casi todos los primos), mientras que la Proposición 2.11 dice que $\mathrm{tr}(\rho_{E,\ell}(\mathrm{Frob}_p)) = p + 1 - \#\overline{E}_p(\mathbb{F}_p)$. Finalmente, luego para cada ℓ las trazas de ρ_f y $\rho_{E,\ell}$ en los Frobenius de casi todo primo p son iguales y por Proposición 2.6 $\rho_f \sim \rho_{E,\ell}$.
$[(b) \Rightarrow (a)]$ Notemos que la igualdad $a_f(p) = p + 1 - \#\overline{E}_p(\mathbb{F}_p)$ se tiene para todo $p \nmid N_f$, que por el Teorema 3.1 (d) es el conductor de E. Del hecho que $\det(\rho_f) = \det(\rho_{E,\ell}) = \epsilon$ se tiene que ψ_f es trivial. Teorema 1.27 dice que si $p \parallel N_f$ $a_p^2 = 1$ y si $p^2 \mid N_f$ se tiene que $a_p = 0$, por tal razón $K_f = \mathbb{Q}$ y A_f es una curva elíptica con $L_v(E,s) = L_v(A_f,s)$ para casi todos los lugares v. Por el Teorema de isogenia de Faltings A_f y E son isogenas.

Proposición

Si la conjetura de Fontaine-Mazur se cumple para algún primo, entonces la conjetura de Shimura-Taniyama se cumple. Si la conjetura de Serre se cumple para infinitos primos ℓ, la conjetura de Shimura-Taniyama se cumple.

C. Fontaine-Mazur (algún primo) entonces C. Shimura-Taniyama, viene de la Proposición 1. Mientras que C. Serre (infinitos primos) entonces C. Shimura-Taniyama es un resultado de Serre "Sur les représentations modulaires de degré 2 de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$".

Gracias.