Algebras de Hecke como anillo de deformación

Matías Alvarado

Julio 2020

$\overline{\rho}\colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(k)$ es una representación con las siguientes propiedades

(a) $\overline{\rho}$ es absolutamente irreducible

(b) $\overline{\rho}$ es modular

(c) $\det \overline{\rho} = \epsilon$

(d) $\overline{\rho}|_{G_\ell}$ semi-estable

(e) $\#\overline{\rho}(I_p)|\ell$ cuando $p \neq \ell$

La representación $\overline{\rho}|_{G_L}$ es absolutamente irreducible, donde $L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{(-1)^{(\ell-1)/2}\ell}\right)$

En caso contrario, se puede ver que $\ell \nmid \#\overline{\rho}(G_{\mathbb{Q}})$, pero $\#\overline{\rho}(I_p)|\ell$, luego $\#\overline{\rho}(I_p) = 1$. $\overline{\rho}$ es no ramificada para $p \neq \ell$, y para ℓ se tiene $\overline{\rho}|_{I_\ell} \sim \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Para $\ell = 3$ factorizamos la rep. por un grupo $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt{-3}))$, la cual queda no ramificada.
- Para $\ell = 5$ vemos que $\overline{\rho}$ viene de una forma cuspidal de peso 2 y nivel 1 o 5.

Consideraremos conjuntos finitos de primos Σ contenidos en el conjunto $\Sigma_{\overline{\rho}}$.

- $\ell \in \Sigma_{\overline{\rho}}$ ssi $\overline{\rho}_{G_\ell}$ es buena y ordinaria.
- Para $p \neq \ell$, $p \in \Sigma_{\overline{\rho}}$ si $\overline{\rho}$ no ramifica en p.

Definición

$\mathcal{N}_\Sigma$ el conjunto de newforms f tal que $\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathcal{O}'_f)$ es equivalente a un levantamiento de $\overline{\rho} \otimes k_f$ de tipo Σ y $\ell^2 \nmid N_f$

Las newforms f que pertenecen a $\mathcal{N}_\Sigma$ cumplen con

- $\overline{\rho}_f \simeq \overline{\rho} \otimes_k k_f$,
- ψ_f es trivial
- N_f divide a $\ell^\delta N(\overline{\rho}) \prod_{p \in \Sigma \setminus \{\ell\}} p^{\dim \overline{\rho}^{I_p}}$, donde $\delta = 0$ si $\overline{\rho}$ es buena y $\ell \notin \Sigma$ y $\delta = 1$ en otro caso.

Para un conjunto Σ, definimos

- el algebra $\widetilde{\mathbb{T}}_\Sigma$ como
$$\widetilde{\mathbb{T}}_\Sigma = \prod_{f \in \mathcal{N}_\Sigma} \mathcal{O}'_f$$
- para $p \notin \Sigma$ y $p \nmid \ell N(\overline{\rho})$, se define el elemento
$$T_p = (a_p(f))_f \in \widetilde{\mathbb{T}}_\Sigma$$
- El álgebra $\mathbb{T}_\Sigma$ como la $\mathcal{O}$-subalgebra de $\widetilde{\mathbb{T}}_\Sigma$ generado por los elementos T_p

Teorema

Existe una representación

$$\rho_\Sigma^{mod} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\mathbb{T}_\Sigma)$$

tal que para primos $p \notin \Sigma$ *y* $p \nmid \ell N(\overline{\rho})$ *esta es no ramificada y se cumple que* $tr\rho_\Sigma^{mod}(Frob_p) = T_p$.

Demostración:

- Tenemos $\widetilde{\rho}_\Sigma^{mod} = \prod \rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\widetilde{\mathbb{T}}_\Sigma)$
- Conjugamos tal que $\widetilde{\rho}_\Sigma^{mod}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $tr\widetilde{\rho}_\Sigma^{mod}$ están en $\mathbb{T}_\Sigma$ por Chebotarev.
- Dado $g \in G_{\mathbb{Q}}$, $tr\widetilde{\rho}_\Sigma^{mod}(g)$ y $tr\widetilde{\rho}_\Sigma^{mod}(cg)$ están en $\mathbb{T}_\Sigma$, por lo tanto las entradas de la diagonal toman valores en $\mathbb{T}_\Sigma$
- tomando σ tal que $\widetilde{\rho}_\Sigma^{mod}(\sigma) = \begin{pmatrix} * & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$
- para $g \in G$ las entradas de la diagonal de $\widetilde{\rho}_\Sigma^{mod}(\sigma g)$ están en $\mathbb{T}_\Sigma$, por lo tanto la 3ª entrada de $\widetilde{\rho}_\Sigma^{mod}(g)$ está en $\mathbb{T}_\Sigma$

Demostración:

- Tenemos $\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod} = \prod \rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(\widetilde{\mathbb{T}}_{\Sigma})$
- Conjugamos tal que $\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $tr\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}$ están en $\mathbb{T}_{\Sigma}$ por Chebotarev.
- Dado $g \in G_{\mathbb{Q}}$, $tr\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}(g)$ y $tr\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}(cg)$ están en $\mathbb{T}_{\Sigma}$, por lo tanto las entradas de la diagonal toman valores en $\mathbb{T}_{\Sigma}$
- tomando σ tal que $\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}(\sigma) = \begin{pmatrix} * & 1 \\ * & * \end{pmatrix}$
- para $g \in G$ las entradas de la diagonal de $\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}(\sigma g)$ están en $\mathbb{T}_{\Sigma}$, por lo tanto la 3ª entrada de $\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}(g)$ está en $\mathbb{T}_{\Sigma}$
- Tomamos $\tau \in G_{\mathbb{Q}}$ tal que $\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}(\tau) = \begin{pmatrix} * & * \\ e & * \end{pmatrix}$ con $e \in \mathbb{T}_{\Sigma}^{\times}$
- para $g \in G_{\mathbb{Q}}$ las entradas de la diagonal de $\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}(\tau g)$ están en $\mathbb{T}_{\Sigma}$,por lo tanto la segunda entrada de $\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}(g)$ está en $\mathbb{T}_{\Sigma}$
- $\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}$ toma valores en $\mathbb{T}_{\Sigma}$

Propiedades de $\widetilde{\rho}_{\Sigma}^{mod}$

La representación ρ_{Σ}^{mod} tiene las siguientes propiedades

(a) ρ_{Σ}^{mod} es un levantamiento de ρ de tipo Σ, y existe un único morfimos $\phi_{\Sigma}\colon R_{\Sigma} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_{\Sigma}$ tal que $\rho_{\Sigma}^{mod} \simeq \phi_{\Sigma} \circ \rho_{\Sigma}^{univ}$

(b) Si $\Sigma \subset \Sigma'$, entonces existe un único mapa sobreyectivo $g\colon \mathbb{T}_{\Sigma'} \twoheadrightarrow \mathbb{T}_{\Sigma}$ tal que $\rho_{\Sigma}^{mod} = g \circ \rho_{\Sigma'}^{mod}$ y tal que T_p se mapea a T_p para primos $p \nmid \ell N(\overline{\rho})$ y $p \notin \Sigma'$.

(c) Si K'/K es una extensión finita, entonces $\mathbb{T}'_{\Sigma} \simeq \mathbb{T}_{\Sigma} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{K'}$.

- Sea Q un conjunto de primos de Taylor-Wiles.
- R_Q es un $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-módulo
- $\phi_Q\colon R_Q \twoheadrightarrow \mathbb{T}_Q$
- $\mathbb{T}_Q$ tiene estructura de $\mathcal{O}[\Delta_Q]$-módulo.

Teorema

$\mathbb{T}_Q$ *es un* $\mathcal{O}[\Delta_Q]$*-módulo libre.*

Corolario

$\mathbb{T}_\emptyset \simeq \mathbb{T}_Q/\mathfrak{a}_Q$

Demostración: Existe un morfismo

$$\frac{\mathbb{T}_Q}{\mathfrak{a}_Q} \otimes_{\mathcal{O}} K \twoheadrightarrow T_\emptyset \otimes_{\mathcal{O}} K$$

Además tenemos que $\dim \mathbb{T}_Q/\mathfrak{a}_Q \otimes_{\mathcal{O}} K \leq \dim \mathbb{T}_\emptyset \otimes K$. $\mathbb{T}_Q/\mathfrak{a}_Q$ y $\mathbb{T}_\emptyset$ son libres y tienen el mismo rango sobre $\mathcal{O}$.

$\Sigma \subset \Sigma_{\overline{\rho}}$, y $f \in \mathcal{N}_\Sigma$ cuyos coeficientes de Fourier están en $\mathcal{O}$, de este modo $\mathcal{O}'_f = \mathcal{O}$.

$$\pi := \pi_f : \mathbb{T}_\Sigma \to \mathcal{O}$$

Componiendo $\pi \circ \rho_\Sigma^{mod}$, obtenemos una representación

$$\rho_f : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$$

Sea Σ' tal que

$$\Sigma \subset \Sigma' \subset \Sigma_{\overline{\rho}}$$

y sea $\pi_{\Sigma'}$ la composición $\mathbb{T}_{\Sigma'} \to \mathbb{T}_\Sigma \to \mathcal{O}$.

Estamos interesados en enteder ciertos cuocientes entre grupos de cohomologia

$$\# \frac{H^1_{\Sigma'}(\mathbb{Q}, ad^0 \rho_f \otimes_O K/\mathcal{O})}{H^1_{\Sigma}(\mathbb{Q}, ad^0 \rho_f \otimes_O K/\mathcal{O})}$$

Vamos a tomar ciertos elementos en $\mathbb{T}_\Sigma$ que nos ayudarán a comprender estos cuocientes. para $p \in \Sigma_{\overline{\rho}} - \Sigma$ se define

$$c_p = (p-1)(T_p^2 - (p+1)^2)$$

Definimos "factores locales" de la siguiente manera para primos en Σ_ρ

- $H_p = \dfrac{H^1(G_p, ad^0 \rho_f \otimes_O K/\mathcal{O})}{H^1(G_p/I_p, ad^0 \rho_f \otimes_O K/\mathcal{O})}$

- $H_p = \dfrac{H^1(G_p, ad^0\rho_f \otimes_O K/\mathcal{O})}{H^1(G_p/I_p, ad^0\rho_f \otimes_O K/\mathcal{O})}$

Lema

- $\#H_p = \#\mathcal{O}/\pi(c_p)$

Demostración:

- $\#H_p = \#H^0(G_p, ad^0\rho_f \otimes K/\mathcal{O}(1))$
- $ad^0(\rho_f) \simeq sym^2 \otimes det^{-1}$.
- Si α_p y β_p son los valores propios de $\rho_f(\mathrm{Frob}_p)$, entonces $\alpha_p^2, \alpha_p\beta_p, \beta_p^2$ son los valores propios de Frob_p en Sym^2
- El número de puntos fijos por la acción está dado por $\#\mathcal{O}/(det(1 - \mathrm{Frob}_p))$
- $det(1 - \mathrm{Frob}_p) = (1 - \alpha_p^2)(1 - \alpha_p\beta_p)(1 - \beta_p^2)$
- $v(1 - \alpha_p^2)(1 - \alpha_p\beta_p)(1 - \beta_p^2)) = v(\pi(c_p))$

Para el primo ℓ estamos interesados en estudiar el cuociente

$$H_\ell = \frac{H^1_{ss}(G_\ell, ad^0\rho_f \otimes_{\mathcal{O}} K/\mathcal{O})}{H^1_f(G_\ell, ad^0\rho_f \otimes_{\mathcal{O}} K/\mathcal{O})}$$

$\overline{\rho}|_{G_\ell} \sim \begin{pmatrix} \chi_1\epsilon & * \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$ por ser buena y ordinaria. entonces

$$\frac{H^1_{ss}(G_\ell, ad^0\rho_f \otimes_{\mathcal{O}} K/\mathcal{O})}{H^1_f(G_\ell, ad^0\rho_f \otimes_{\mathcal{O}} K/\mathcal{O})} = \#(\mathcal{O}/\gamma_\ell),$$

donde $\gamma_\ell = (\chi_1/\chi_2)(\mathrm{Frob}_\ell) - 1$. Si α_ℓ, β_ℓ son los valores propios de Frob_ℓ, con α_ℓ unidad. Digamos $\alpha_\ell = \chi_2(\mathrm{Frob}_\ell)$. Asi γ_ℓ puede ser tomado como $\alpha_\ell^2 - 1$. De hecho puede tomarse como $(\ell - 1)(a_\ell^2 - (\ell+1)^2)$
Se define $T_\ell = (a_\ell(f))_f \in \mathbb{T}_\Sigma$ y $c_\ell = (\ell - 1)(T_\ell^2 - (\ell+1)^2)$

$$\#H_\ell = \#(\mathcal{O}/\pi(c_\ell))$$

Proposición

Si $\Sigma \subset \Sigma' \subset \Sigma_{\overline{\rho}}$, *entonces*

$$\# \frac{H^1_{\Sigma'}(\mathbb{Q}, ad^0\rho_f \otimes_{\mathcal{O}} K/\mathcal{O})}{H^1_{\Sigma}(\mathbb{Q}, ad^0\rho_f \otimes_{O} K/\mathcal{O})} \leq \# \left(\mathcal{O}/\pi \left(\prod_{p \in \Sigma' \setminus \Sigma} c_p \right) \right)$$

Demostración:

$$(0) \to H^1_{\Sigma}(\mathbb{Q}, ad^0\rho_f \otimes_{\mathcal{O}} K/\mathcal{O}) \to H^1_{\Sigma'}(\mathbb{Q}, ad^0\rho_f \otimes_{\mathcal{O}} K/\mathcal{O}) \to \bigoplus_{p \in \Sigma' \setminus \Sigma} H_p$$

Definición (Ideal de congruencia)

$\eta_{\Sigma'} = \pi_{\Sigma'}(Ann_{\mathbb{T}_{\Sigma'}}(\ker \pi_{\Sigma'}))$

Teorema

Si $\Sigma \subset \Sigma' \subset \Sigma_{\overline{\rho}}$ y si $f \in \mathcal{N}_\Sigma$ con coefientes en $\mathcal{O}$, entonces tenemos que

$$\eta_{\Sigma'} \subset \pi\left(\prod_{p\in\Sigma'\setminus\Sigma} c_p\right)\eta_\Sigma$$

Corolario

$$\#\frac{H^1_{\Sigma'}(\mathbb{Q}, ad^0\rho_f \otimes_{\mathcal{O}} K/\mathcal{O})}{H^1_{\Sigma}(\mathbb{Q}, ad^0\rho_f \otimes_{\mathcal{O}} K/\mathcal{O})} \leq \#(\eta_\Sigma/\eta_{\Sigma'})$$

Ejemplo

Sea $K = \mathbb{Q}_3, \mathcal{O} = \mathbb{Z}_3, k = \mathbb{F}_3$ y $\Sigma = \emptyset$. Consideremos la rep. $\overline{\rho} = \overline{\rho}_{f,3}$ donde $f = f_{57B}$ según LMFDB

	2	3	5	7	11	13	17
f_{19A}	0	-2	3	-1	3	-4	-3
f_{57A}	-2	-1	-3	-5	1	2	-1
f_{57B}	1	1	-2	0	0	6	-6
f_{57C}	-2	1	1	3	-3	-6	3

- La representación $\rho_{f_{57C},3}$ es un levantamiento de $\overline{\rho}$
- $\mathbb{T}_\emptyset = \mathbb{Z}_3[..., (a_p(f_B), a_p(f_C))...] \simeq \{(x,y) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 | x \equiv y \pmod 3\}$
- $\eta_\emptyset = 3\mathbb{Z}_3$