Criterios Numéricos de Isomorfismo

Patricio Pérez Piña

Seminario de Modularidad

1er semestre, 2020

Objetivo:

Recordar que los objetos de $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ son las $\mathcal{O}$-álgebras locales, completas, noetherianas y con cuerpo residual k.
Sean R y T dos elementos en $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ con T libre y finitamente generada como $\mathcal{O}$-álgebra.
Si $\phi\colon R \to T$ es un morfismo sobreyectivo de $\mathcal{O}$-álgebras. Pretendemos dar dos criterios para concluir que ϕ es un isomorfismo.

- El primero es un criterio numérico: desigualdad de ciertos cardinales.
- El segundo se da en caso que R y T admitan una estructura extra: J-estructura.

Tener en mente $R_\Sigma \twoheadrightarrow \mathbb{T}_\Sigma$.

Intersección completa

- **Definición:** Sea $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ finitamente generada y libre como $\mathcal{O}$-módulo. Decimos que A es una **intersección completa** si y solo si existe $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{O}[[X_1, \ldots, X_r]]$ tales que

$$A \cong \mathcal{O}[[X_1, \ldots, X_r]]/(f_1, \ldots, f_r).$$

- Para $R \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, denotamos $\overline{R} = R/\lambda R = R \otimes_{\mathcal{O}} k$.
- **Lema:** Supongamos que $R \to T$ es un morfismo en $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ y que T es finitamente generada y libre como $\mathcal{O}$-álgebra. Entonces $R \to T$ es un isomorfismo entre dos intersecciones completas si y solo si $\overline{R} \to \overline{T}$ lo es (en C_k).
- **Demostración:** Si $\phi\colon R \to T$ isomorfismo, entonces $\phi(\lambda R) = \lambda T$ y luego $\overline{\phi}\colon \overline{R} \to \overline{T}$ isomorfismo.

Intersección completa

- **Lema:** Supongamos que $R \to T$ es un morfismo en $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ y que T es finitamente generada y libre como $\mathcal{O}$-álgebra. Entonces $R \to T$ es un isomorfismo entre dos intersecciones completas si y solo si $\overline{R} \to \overline{T}$ lo es (en C_k).
- **Demostración (continuación):** Suponemos que $\overline{\phi}\colon \overline{R} \to \overline{T}$ es isomorfismo. Entonces $\phi(R) + \lambda T = T$ y se sigue por el Lema de Nakayama que $\phi(R) = T$. Consideremos la sucesión

$$0 \to \ker \phi \to R \to T \to 0,$$

como T es libre, en particular es plano y por lo tanto

$$0 \to \ker \phi \otimes_{\mathcal{O}} k \to \overline{R} \xrightarrow{\overline{\phi}} \overline{T} \to 0$$

es exacta. Luego $\ker \phi \otimes_{\mathcal{O}} k = 0$, es decir $\ker \phi = \lambda \ker \phi$. Pero R es noetheriano, luego $\ker \phi$ es f.g. y se sigue del Lema de Nakayama que $\ker \phi = 0$.

Intersección completa

- **Proposición:** Sea K'/K una extensión finita de cuerpos locales y $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ finitamente generado y libre como $\mathcal{O}$-módulo. Entonces A es intersección completa si y solo si $A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$ lo es (en $C_{\mathcal{O}'}$).
- **Demostración:** Suponemos que A es intersección completa. Como $\mathcal{O}'$ es libre como $\mathcal{O}$-módulo, entonces

$$0 \to (f_1, \dots, f_r) \to \mathcal{O}'[[X_1, \dots, X_r]] \to A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}' \to 0$$

  es exacta. Luego $A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$ es intersección completa.
- Gracias al lema anterior, para la condición suficiente podemos asumir que $A \in C_k$ y demostrar que si $A' := A \otimes_k k'$ es intersección completa en $C_{k'}$, entonces A lo es en C_k.
- Escribimos $A' = k'[[Y_1, \dots, Y_r]]/J$ con J un ideal que se puede generar por r elementos y de manera que $\mathfrak{m}_{A'} = \langle Y_1 + J, \dots, Y_r + J \rangle_{k'}$.

Intersección completa

- Sea $\phi\colon k[[X_1,\dots,X_r]] \to A$ morfismo tal que $\langle \phi(X_1),\dots,\phi(X_r)\rangle_k = \mathfrak{m}_A$ y sea $\phi'\colon k'[[X_1,\dots,X_r]] \to A'$ la extensión de escalares a k'.
- Sea $I = \ker\phi$ y $I' = \ker\phi' = I \otimes_k k'$.
- Como $\mathfrak{m}_{A'} = \mathfrak{m}_A \otimes_k k'$, existe un isomorfismo $\psi\colon k'X_1 \oplus \cdots \oplus k'X_r \to k'Y_1 \oplus \cdots \oplus k'Y_r$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} k'X_1 \oplus \cdots \oplus k'X_r & \xrightarrow{\psi} & k'Y_1 \oplus \cdots \oplus k'Y_r \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{m}_{A'} & = & \mathfrak{m}_{A'} \end{array}$$

- Si extendemos esto a un isomorfismo $\Psi\colon k'[[X_1,\dots,X_r]] \to k'[[Y_1,\dots,Y_r]]$, tenemos que $I' = \Psi^{-1}(J)$, de donde I' se puede generar por r elementos.

Intersección completa

- Se sigue que

$$\dim_k(I/\mathfrak{m}_A I) = \dim_k((I/\mathfrak{m}_A I) \otimes_k k') \leq \dim_k(I'/\mathfrak{m}_{A'} I') \leq r.$$

- Por el lema de Nakayama I puede ser generador por r elementos y entonces $A \cong k[[X_1, \ldots, X_r]]/I$ es intersección completa.
  Hemos demostrado:
- **Proposición:** Sea K'/K una extensión finita de cuerpos locales y $A \in \mathcal{C}_\mathcal{O}$ finitamente generado y libre como $\mathcal{O}$-módulo. Entonces A es intersección completa si y solo si $A \otimes_\mathcal{O} \mathcal{O}'$ lo es (en $C_{\mathcal{O}'}$).

El primer criterio

- Recordar la situación: $R, T \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}$, $\phi\colon R \twoheadrightarrow T$ y T f.g. y libre como $\mathcal{O}$-módulo.
- **Teorema:** Supongamos que $\pi\colon T \twoheadrightarrow \mathcal{O}$. Sea $\wp = \ker(\pi \circ \phi) \subseteq R$ y sea $\eta = \pi(\mathrm{Ann}_T(\ker \pi)) \subseteq \mathcal{O}$. Además supongamos que $\eta \neq (0)$. Entonces son equivalentes
  1. Se satisface la desigualdad $\#(\wp/\wp^2) \leq \#(\mathcal{O}/\eta)$.
  2. Se satisface la igualdad $\#(\wp/\wp^2) = \#(\mathcal{O}/\eta)$.
  3. El mapa $\phi\colon R \to T$ es un isomorfismos de intersecciones completas.
- Los elementos A en $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}$ que además están dotados de un morfismo sobreyectivo $\pi_A\colon A \twoheadrightarrow \mathcal{O}$ forman una categoría $\mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\bullet}$. Sus elementos se denominan **anillos aumentados** y el morfismo π_A se llama **morfismo de aumentación**.

Sobre (1) $\implies$ (2)

- Introduciendo el "Fitting ideal" de un $\mathcal{O}$-módulo M, denotado por $\mathrm{Fitt}_{\mathcal{O}}(M)$ se demuestra puede mostrar que (1) $\implies$ (2).
- Este ideal satisface
  1. $\mathrm{Fitt}_{\mathcal{O}}(M) \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}}(M)$
  2. $\#M = \#(\mathcal{O}/\mathrm{Fitt}_{\mathcal{O}}(M))$ cuando M es finito.
  3. Si $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\bullet}$ y N es un A-módulo, entonces $\pi_A(\mathrm{Fitt}_A(N)) = \mathrm{Fitt}_{\mathcal{O}}(N \otimes_A \mathcal{O})$.
- Tenemos que $\ker \pi_A \otimes_A \mathcal{O} = \ker \pi_A / \ker \pi_A^2$. Luego

$$\begin{aligned}\mathrm{Fitt}_{\mathcal{O}}(\ker \pi_A / \ker \pi_A^2) = \mathrm{Fitt}_{\mathcal{O}}(\ker \pi_A \otimes_A \mathcal{O}) &= \pi_A(\mathrm{Fitt}_A(\ker \pi_A)) \\ &\subseteq \pi_A(\mathrm{Ann}_A(\ker \pi_A)) =: \eta_A.\end{aligned}$$

  Así, $\#(\ker \pi_A / \ker \pi_A^2) = \#(\mathcal{O}/\mathrm{Fitt}_{\mathcal{O}}(\ker \pi_A / \ker \pi_A^2)) \geq \#(\mathcal{O}/\eta_A)$.
- Dado $(A, \pi_A) \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\bullet}$, lo anterior motiva el estudio de $\Phi_A := \ker \pi_A / \ker \pi_A^2$ y $\eta_A := \pi_A(\mathrm{Ann}_A(\ker \pi_A))$.

Un ejemplo

- **Lema:** Sea $(A, \pi_A) \in \mathcal{C}_{\mathcal{O}}^{\bullet}$. Entonces existe $\varphi\colon \mathcal{O}[[X_1, \ldots, X_r]] \twoheadrightarrow A$ con $(\pi_A \circ \varphi)(f) = f(0)$. Si $\ker \varphi = (f_1, \ldots, f_r)$ entonces

$$\Phi_A \cong (\mathcal{O}X_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}X_r)/(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_r).$$

- **Ejemplo:** Sea $A = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_3^2 \mid a \equiv b \mod 3\} (\cong \mathbb{T}_{\emptyset})$.
- Sea $\varphi\colon \mathbb{Z}_3[[X]] \to A$ dada por $\varphi(X) = (0, 3)$ y $\varphi(1) = (1, 1)$. Entonces $\varphi(X(X-3)) = \varphi(X^2 - 3X) = (0, 3^2) - 3(0, 3) = 0$. Luego $X(X-3) \subseteq \ker \varphi$.
- Sea $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots \in \ker \varphi$. Reescribamos

$$f = a_0 + a_1 X + 3a_2 X + 3a_3 X^2 + \cdots + (X^2 - 3X)(a_2 + a_3 X + a_4 X^2 + \ldots)$$

  Entonces $\varphi(f) = (a_0, a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + a_3 3^3 + \ldots) = (0, 0)$. Luego $\ker \varphi = 3 \ker \varphi + (X(X-3))$ y por el Lema de Nakayama concluimos que $\ker \varphi = (X(X-3))$.
- Luego $\Phi_A \cong \mathbb{Z}_p / 3\mathbb{Z}_p$ y $\eta_A = 3\mathbb{Z}_p$.

J-estructura

- **Definición:** Sea $J \subseteq \mathcal{O}[[S_1, \ldots, S_r]]$ un ideal contenido en $(S_1, \ldots, S_r)$. Entonces una J-estructura es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}[[S_1, \ldots, S_r]] & & \\ & & \downarrow & & \\ \mathcal{O}[[X_1, \ldots, X_r]] & \twoheadrightarrow & R' & \twoheadrightarrow & T' \\ & & \downarrow & & \\ & & R & \twoheadrightarrow & T, \end{array}$$

  tal que
  1. $T'/(S_1, \ldots, S_r)T' \cong T$ y $R'/(S_1, \ldots, S_r) \twoheadrightarrow R$.
  2. Para todo ideal $I \supseteq J$, $I = \ker(\mathcal{O}[[S_1, \ldots, S_r]] \to T'/IT')$.
- **Teorema:** Supongamos que existe una cadena descendente $J_n \subseteq \mathcal{O}[[S_1, \ldots, S_r]]$ de ideales tales que $J_0 = (S_1, \ldots, S_n)$, $\bigcap_n J_n = (0)$ y para cada n existe una J_n-estructura. Entonces el mapa $R \to T$ es un isomorfismo de intersecciones completas.