Seminario de modularidad de representaciones de Galois (2020-1): Un teorema de levantamiento modular

Héctor Pastén

Pontificia Universidad Católica de Chile

2020/07/22

Recuerdo rápido de notación

- $\ell > 2$ primo, $K/\mathbb{Q}_\ell$ finita, $\mathcal{O}$ anillo de enteros, k campo residual.
- $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(k)$ representación continua, absolutamente irreducible, con determinate ciclotómico.
- Σ conjunto finito de primos.
- R_Σ es el $\mathcal{O}$-álgebra que clasifica deformaciones de $\bar{\rho}$ de tipo Σ: representaciones ρ' tales que $\overline{\rho'} = \bar{\rho}$ y además para cada $p \notin \Sigma$ se tiene que $\rho'|_{G_p}$ no ramifica peor que $\bar{\rho}|_{G_p}$.
- $\mathbb{T}_\Sigma$ es el $\mathcal{O}$-álgebra que clasifica deformaciones **modulares** de $\bar{\rho}$ de tipo Σ: Idem, pero ρ' viene de una newform f cuyo nivel para $p \notin \Sigma$ no es peor que el determinado por $\bar{\rho}$.
- R_Σ se construye gracias a las condiciones que pedimos a $\bar{\rho}$.
- $\mathbb{T}_\Sigma$ se construye más artesanal dentro de $\prod_{f \text{ tipo } \Sigma} O_{f,\lambda}$ y básicamente es un álgebra de Hecke.

Teorema de levantamiento modular

El teorema "$R = \mathbb{T}$":

- Empezamos con $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(k)$ representación módulo ℓ que es **modular** (+ algunas condiciones técnicas).
- $R_\emptyset \to \mathbb{T}_\emptyset$ es isomorfismo (**patching**: J-estructuras + primos de Taylor-Wiles). Pero no basta: necesitaremos peor ramificación.
- $R_\Sigma \to \mathbb{T}_\Sigma$ es isomorfismo (caso base $\Sigma = \emptyset$ junto con criterio numérico de η).

¿Cómo se usa? Levantamiento modular.

- Empezamos con $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(K)$ rep ℓ-ádica (+ condiciones).
- Suposición fuerte: **asumir que $\bar{\rho}$ es modular.**
- $\bar{\rho}$ podría ser menos ramificada que ρ. Elegir Σ para permitir ramificación de ρ. Entonces ρ corresponde a $h_\rho : R_\Sigma \to \mathcal{O}$.
- Dado que $R_\Sigma \simeq \mathbb{T}_\Sigma$, obtenemos $h'_\rho : \mathbb{T}_\Sigma \to \mathcal{O}$. Esto es una newform f asociada a ρ.

$R = \mathbb{T}$: Condiciones en $\bar{\rho}$

(a) $\bar{\rho}$ irreducible
(b) $\bar{\rho}$ **modular**.
(c) $\det \bar{\rho} = \epsilon$
(d) $\bar{\rho}|_{G_\ell}$ semiestable
(e) $\forall p \neq \ell$ se tiene que $\#\bar{\rho}(I_p)$ es 1 o ℓ.

Por trabajo ya cubierto (charlas pasadas), de estas hipótesis vienen dos consecuencias importantes:

- $\bar{\rho}|_{G_L}$ es absolutamente irreducible, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{(\ell-1)/2}\ell})$
- $\mathbb{T}_\emptyset$ es no-trivial y hay un morfismo de $\mathcal{O}$-álgebras $\pi : \mathbb{T}_\emptyset \to \mathcal{O}$. La f que hace que $\bar{\rho}$ sea modular da origen a una f' de tipo $\emptyset$: i.e. el nivel de f' es tal como se lee de $\bar{\rho}$ ("**level lowering**").

$R = \mathbb{T}$: Conjuntos de primos

Por simplicidad, el conjunto auxiliar de primos Σ donde se permitirá peor ramificación que $\bar{\rho}$, solo se tomará dentro de

$$\Sigma_{\bar{\rho}}$$

donde

- $\ell \in \Sigma_{\bar{\rho}}$ ssi $\bar{\rho}|_{G_\ell}$ buena ordinaria.
- para $p \neq \ell$ se tiene $p \in \Sigma_{\bar{\rho}}$ ssi $\bar{\rho}|_{I_p}$ es trivial.

Estas condiciones facilitaron el trabajo con $\mathbb{T}_\Sigma$. Son condiciones muy razonables y bastan para trabajar con curvas elípticas semi-estables.

Cuidado. No confundir con la condición de primos de Taylor-Wiles; esa es distinta y mucho más restrictiva.

$R = \mathbb{T}$: el caso $\Sigma = \emptyset$ por medio de "patching"

Por representabilidad, tenemos $\phi_\emptyset : R_\emptyset \twoheadrightarrow \mathbb{T}_\emptyset$.

Primos de Taylor-Wiles (Thm 2.49 [DDT]): dado que $\bar{\rho}|_{G_L}$ es absolutamente irreducible, existe $r \geq 0$ tal que ocurre lo siguiente: $\forall n \geq 1$ existe un conjunto finito de primos Q_n que cumple

(i) $\#Q_n = r$

(ii) para cara $q \in Q_n$ tenemos $q \equiv 1 \bmod \ell^n$

(iii) para cara $q \in Q_n$ tenemos que $\bar{\rho}$ es no-ramificada en q y $\bar{\rho}(Frob_q)$ tiene valores propios distintos

(iv) R_{Q_n} se puede generar topológicamente por r elementos como $\mathcal{O}$-álgebra. Así, tenemos $\mathcal{O}[[X_1, ..., X_r]] \twoheadrightarrow R_{Q_n}$.

Recuerdo. (iv) es fundamental. Usaba la fórmula de Wiles para grupos de Selmer, cálculos con H^1, y Lemma 2.39 [DDT]:

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_{R_\Sigma}/(\lambda, \mathfrak{m}_{R_\Sigma}^2), k) = H^1_\Sigma(\mathbb{Q}, ad^0\bar{\rho}).$$

$R = \mathbb{T}$: el caso $\Sigma = \emptyset$ por medio de "patching"

Con $Q_n = \{q_{n,1}, ..., q_{n,r}\}$ teníamos:

- Cierto grupo abeliano finito $\Delta_{Q_n} = \prod_{q \in Q_n} \Delta_q$ y su álgebra de grupo $\mathcal{O}[\Delta_{Q_n}]$ con ideal de aumentación $\mathfrak{a}_n$
- Un isomorfismo $\mathcal{O}[[S_1, ..., S_r]]/J_n \simeq \mathcal{O}[\Delta_n]$ donde $(\bar{S}_1, ..., \bar{S}_r)$ corresponde a $\mathfrak{a}_n$. Aquí, $J_n = ((S_j + 1)^{\#\Delta_{q_{n,j}}} - 1 : j = 1, ..., r)$.
- Una acción de Δ_{Q_n} en R_{Q_n}. Así, R_{Q_n} es un $\mathcal{O}[\Delta_{Q_n}]$-álgebra y cumple $R_{Q_n}/\mathfrak{a}_n R_{Q_n} \simeq R_\emptyset$.
- Así, $\mathcal{O}[[S_1, ..., S_r]] \to R_{Q_n}$ cumple $R_{Q_n}/(S_1, ..., S_r)R_{Q_n} \simeq R_\emptyset$.
- Resultado de álgebras de Hecke (Thm 3.31 [DDT], ver Ch 4 [DDT]): $\mathbb{T}_{Q_n}$ un $\mathcal{O}[\Delta_{Q_n}]$-módulo **libre** con la acción $\mathcal{O}[\Delta_{Q_n}] \to R_{Q_n} \to \mathbb{T}_{Q_n}$. Se deduce $\mathbb{T}_{Q_n}/\mathfrak{a}_n \mathbb{T}_{Q_n} \simeq \mathbb{T}_\emptyset$.

$R = \mathbb{T}$: el caso $\Sigma = \emptyset$ por medio de "patching"

Se obtienen morfismos

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}[[S_1, \ldots, S_r]] & & \\ & & \downarrow & & \\ \mathcal{O}[[X_1, \ldots, X_r]] & \twoheadrightarrow & R_{Q_n} & \twoheadrightarrow & \mathbb{T}_{Q_n} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & R_\emptyset & \twoheadrightarrow & \mathbb{T}_\emptyset, \end{array}$$

que precisamente dan una J-estructura.

$R = \mathbb{T}$: el caso $\Sigma = \emptyset$ por medio de "patching"

El criterio de isomorfismo con J-estructuras de la clase pasada da

Teorema (Thm 3.42 DDT con $\Sigma = \emptyset$)

Sea $\bar{\rho}$ cumpliendo (a)-(e). El morfismo $\phi_\emptyset : R_\emptyset \to \mathbb{T}_\emptyset$ es isomorfismo y estos anillos con intersecciones completas.

$R = \mathbb{T}$: el caso general $\Sigma \subseteq \Sigma_{\bar{\rho}}$ con criterio numérico

Ahora tomamos $\Sigma \subset \Sigma_{\bar{\rho}}$ finito cualquiera.
Recordar: $\pi : \mathbb{T}_\emptyset \to \mathcal{O}$ con una $f \in S_2(\Gamma_{\bar{\rho}})$ asociada porque $\bar{\rho}$ es modular (+ level lowering). Esto da $\pi_\Sigma : \mathbb{T}_\Sigma \to \mathbb{T}_\emptyset \to \mathcal{O}$.

- $\wp_\emptyset := \ker(\pi \circ \phi_\emptyset) \subseteq R_\emptyset$
- En general, $\wp_\Sigma := \ker(\pi_\Sigma \circ \phi_\Sigma) \subseteq R_\Sigma$
- Thm 2.41 [DDT]: $\wp_\Sigma / \wp_\Sigma^2 \simeq H^1_\Sigma(G_\mathbb{Q}, ad^0(\rho_f) \otimes K/\mathcal{O})$
- Criterio numérico Thm 3.40 [DDT] + $R_\emptyset \simeq \mathbb{T}_\emptyset$:

$$\#\mathcal{O}/\eta_\emptyset = \#\wp_\emptyset/\wp_\emptyset^2 = \#H^1_\emptyset$$

- Coro 3.37 [DDT]: $\#H^1_\Sigma / H^1_\emptyset \leq \#\eta_\emptyset/\eta_\Sigma$.
- Así, H^1_Σ es finito y $\#\wp_\Sigma/\wp_\Sigma^2 = \#H^1_\Sigma \leq \#\mathcal{O}/\eta_\Sigma$.
- Criterio numérico: $\phi_\Sigma : R_\Sigma \to \mathbb{T}_\Sigma$ es **isomorfismo**, y ambos son intersección completa.

$R = \mathbb{T}$: el caso general $\Sigma \subseteq \Sigma_{\bar{\rho}}$ con criterio numérico

Teorema (Thm 3.42 DDT con $\Sigma \subseteq \Sigma_{\bar{\rho}}$ cualquiera)

Sea $\bar{\rho}$ cumpliendo (a)-(e) y sea $\Sigma \subseteq \Sigma_{\bar{\rho}}$ finito. El morfismo $\phi_\Sigma : R_\Sigma \to \mathbb{T}_\Sigma$ es isomorfismo y estos anillos con intersecciones completas.

Teorema de levantamiento modular

Teorema (Coro 3.46 DDT)

Sea $\rho : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(K)$ *representación continua (ram. fin.) y sea* $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \to GL_2(k)$ *su representación residual. Suponer que:*

- $\bar{\rho}$ *es irreducible y* **modular**
- $\rho|_{I_p} \sim \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ *para todo* $p \neq \ell$
- $\rho|_{G_\ell}$ *es semiestable*
- $\det \rho = \epsilon$

Entonces ρ *es modular.*

Tomar $\Sigma = \{p \in \Sigma_{\bar{\rho}} : \rho$ ramifica en $p\}$. Así ρ es una deformación de $\bar{\rho}$ de tipo Σ. Así que existe $h : R_\Sigma \to \mathcal{O}$ tal que

$$\rho = h \circ \rho_\Sigma^{univ} : G_\mathbb{Q} \to GL_2(R_\Sigma) \to GL_2(\mathcal{O}).$$

Como $\phi_\Sigma : R_\Sigma \to \mathbb{T}_\Sigma$ es isomorfismo, tomar su inversa $\psi : \mathbb{T}_\Sigma \to R_\Sigma$. Obtenemos $h' := h \circ \psi : \mathbb{T}_\Sigma \to \mathcal{O}$ que cumple

$$tr\rho(Frob_p) = h(Frob_p) = h'(T_p) = tr\rho_f(Frob_p)$$

para cierta newform f. Así que $\rho \sim \rho_f$. $\square$