



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATOLICA DE CHILE**
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

**ACCIONES DE GRUPOS DE UNIDADES DE ÓRDENES DE EICHLER
SOBRE EL ÁRBOL DE BRUHAT-TITS, ASOCIADOS A DIVISORES
DE GRADO 1 Y 2.**

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado académico de Magíster en Matemáticas.

por

MARCO ALEJANDRO GODOY VALDEBENITO

COMITÉ:

Luis Arenas-Carmona (Tutor Guía)

Giancarlo Urzúa Elia

Natalia García Fritz

Enero 2019

Santiago, Chile

DEDICATORIA

*A mi familia:
a la biológica y la del alma.*

AGRADECIMIENTOS

Aprovecho esta instancia para agradecer a todos quienes de una u otra forma me acompañaron en este proceso de formación matemática. Entiendo este trabajo de Tesis como el fruto de un continuo de experiencias vividas. Primero quiero agradecer a todos mis profesores de enseñanza básica y media por entregarme las mejores herramientas de aprendizaje y mostrarme el camino del conocimiento. Hoy más que nunca me declaro un hijo orgulloso de la educación pública. Agradezco a la Universidad de Chile y a mis profesores quienes me mostraron lo hermoso que es esta disciplina, junto con sacar todo mi potencial y lograr que confíe en mí mismo y en mis capacidades. Agradezco a la Pontificia Universidad Católica de Chile por acogerme durante el postgrado, por todo lo que me entregaron y apoyaron, en especial a María Soledad Alcaíno ya que es una excelente profesional y muy comprometida con su trabajo. En lo personal, agradezco a mi familia, fuente permanente de apoyo e incondicional compañía. A todos mis amigos, los de la vida, a los de la universidad y a mis colegas de trabajo, especialmente a Claudio Bravo C. ya que fueron sus consejos y ayuda los que en más de una ocasión me ayudaron a enfrentar ciertos temas de mi área de estudio. En la parte formal del desarrollo de esta Tesis, agradezco a Luis Arenas-Carmona por confiar en mí y darme la oportunidad de realizar este arduo trabajo. Su vasto conocimiento matemático es una fuente de inspiración que me motiva a seguir trabajando y aprendiendo lo que más me gusta. Por último, quiero agradecer a Stephanie Garín R. por su compañía, apoyo y estar presente en los momentos más difíciles, como también en los de mayor satisfacción personal. Me alegra mucho poder compartir con ella cada uno de mis logros y metas pendientes.

ÍNDICE

| | |
|---|-----------|
| RESUMEN | vi |
| I INTRODUCCIÓN | 8 |
| 1.1 Ideas generales para entender esta Tesis | 8 |
| 1.2 Posibles aplicaciones de esta Tesis | 9 |
| II Preliminares | 11 |
| 2.1 Algebra de Matrices | 11 |
| 2.2 Acciones de Grupos | 13 |
| 2.3 Grafos y Arboles | 14 |
| 2.4 Cuerpos locales no arquimedianos | 18 |
| 2.4.1 Cuerpos arquimedianos. | 21 |
| 2.5 Reticulados y Ordenes | 21 |
| 2.6 S-Unidades en cuerpos globales | 23 |
| 2.7 Reticulados y Ordenes maximales desde un punto de vista functorial. Divisores. | 25 |
| 2.8 El árbol de Bruhat-Tits y su relación con el grupo de transformaciones de Moebius. | 30 |
| 2.8.1 Existencia del árbol de Bruhat-Tits de $\mathbb{M}_2(K)$ | 30 |
| 2.8.2 El árbol de bolas asociado a K | 33 |
| III Grafos cocientes asociados a un divisor. Resultados generales y polinomios lineales. | 43 |
| 3.1 El grafo cociente $\tau_\Gamma \backslash \mathfrak{X}(K)$, donde $K = \mathbb{F}_q((t^{-1}))$ y sus recubrimientos. | 43 |
| 3.1.1 Los grafos cocientes $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{X}(K)$ y $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{X}(K)$ | 45 |
| 3.2 S-grafos y C-grafos | 47 |
| 3.3 Cálculo del grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{X}(K)$ asociado a un polinomio lineal. | 48 |
| IV Grafos cocientes asociados a un polinomio cuadrático. | 57 |
| 4.1 El caso $N \in \mathbb{F}_2[t]$ cuadrático reducible con raíces distintas. | 57 |

| | | |
|-----|--|----|
| 4.2 | El caso $N \in \mathbb{F}_2[t]$ con una raíz repetida. | 75 |
| 4.3 | El caso $N \in \mathbb{F}_2[t]$ irreducible. | 97 |

Índice de figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Dos vértices conectados por una arista. | 16 |
| 2.2 | Distintos ejemplos de grafos. | 16 |
| 2.3 | Función localmente epiyectiva para un recubrimiento ramificado. | 18 |
| 2.4 | Cúspide en el grafo cociente $G \backslash \mathfrak{G}$ | 18 |
| 2.5 | El árbol de Bruhat-Tits $\mathfrak{T}(\mathbb{F}_2((t^{-1})))$ | 32 |
| 2.6 | Distintos tipos de rayos en el árbol de Bruhat-Tits $\mathfrak{T}(K)$ | 41 |
| 2.7 | Intersección de rayos y caminos maximales en $\mathfrak{T}(K)$ | 42 |
| 3.1 | Grafo cociente $\tau_\Gamma \backslash \mathfrak{T}(K)$ | 45 |
| 3.2 | Acción de la traslación $\tau_\gamma \in \tau_{\Gamma_N}$ sobre $\mathfrak{T}(K)$ | 50 |
| 3.3 | Acción de la transformación $\tau_\phi \in \tau_{\Gamma_N}$ sobre $\mathfrak{T}(K)$ | 51 |
| 3.4 | Acción de la transformación $\tau_\epsilon \in \tau_{\Gamma_N}$ sobre $\mathfrak{T}(K)$ | 51 |
| 3.5 | El árbol Ω | 54 |
| 3.6 | Grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{T}(K)$ | 56 |
| 4.1 | Grafos no isomorfos que posiblemente representan al grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$, asociado a $N = t(t + 1)$ | 62 |
| 4.2 | 12-ciclo del grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$, asociado a $N = t(t + 1)$ | 62 |
| 4.3 | Rotación del grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ para $N = t(t + 1)$ vía $[\tau_\sigma]$ | 63 |
| 4.4 | Grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ para $N = t(t + 1)$ | 63 |
| 4.5 | Acción de τ_σ en el árbol $\mathfrak{T}(K)$. Los elementos $z_1, z_2 \in K$ son sus puntos fijos. | 65 |
| 4.6 | Representantes de los vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$ y w_6 en árbol $\mathfrak{T}(K)$ | 68 |
| 4.7 | Representantes de los vértices w_7, w_8 y w_9 de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ | 70 |
| 4.8 | Acción de $[\tau_\zeta]$ sobre los vértices de tipo 0 de $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{T}(K)$ asociado a $N = t(t+1)$ | 72 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.9 | Acción de $[\tau_\rho]$ sobre los vértices de tipo 0 de $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \setminus \mathfrak{T}(K)$ asociado a $N = t(t+1)$. | 73 |
| 4.11 | Grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \setminus \mathfrak{T}(K)$ asociado a $N = t(t+1)$. | 75 |
| 4.10 | Ordenes de las Φ_N -órbitas de los vértices de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$, para $N = t(t+1)$. | 75 |
| 4.12 | Grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ con los vértices de tipo 0 y 1, para el caso $N = t^2$. | 79 |
| 4.13 | Rotación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ via $[\tau_\sigma]$, para el caso $N = t^2$. | 79 |
| 4.14 | Acción de $[\tau_\mu]$ sobre los vértices de tipo 0 de $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \setminus \mathfrak{T}(K)$ asociado a $N = t^2$. | 80 |
| 4.15 | Ubicación en el árbol $\mathfrak{T}(K)$ los representantes de v_5, v_6, v_7 y v_8 , para el caso $N = t^2$. | 84 |
| 4.16 | Ubicación en el árbol $\mathfrak{T}(K)$ los representantes de w_9, w_{10}, w_{11} y w_{12} , para el caso $N = t^2$. | 85 |
| 4.17 | Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ vía $[\tau_\varepsilon]$, con $N = t^2$. | 86 |
| 4.18 | Ubicación en el árbol $\mathfrak{T}(K)$ los representantes de los vértices w_5, w_6, w_7 y w_8 , para el caso $N = t^2$. | 89 |
| 4.19 | Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$, efectuada por $[\tau_\zeta]$, donde $N = t^2$. | 92 |
| 4.20 | Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$, efectuada por $[\tau_{\delta'}]$, donde $N = t^2$. | 93 |
| 4.21 | Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$, efectuada por $[\tau_{\delta''}]$, donde $N = t^2$. | 95 |
| 4.22 | Órbitas de los vértices de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ para $N = t^2$. | 96 |
| 4.23 | Grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \setminus \mathfrak{T}(K)$, asociado al polinomio $N = t^2$. | 97 |
| 4.24 | 10-ciclo del grafo $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$, con $N = t^2 + t + 1$. | 100 |
| 4.25 | Posibles grafos que representan al cociente $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ con $N = t^2 + t + 1$, no isomorfos entre sí. | 100 |
| 4.26 | Grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$, asociado a $N = t^2 + t + 1$. | 100 |
| 4.27 | Acción de $[\tau_\sigma]$ en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ con $N = t^2 + t + 1$. | 101 |
| 4.28 | Acción de $[\tau_\varepsilon]$ en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ con $N = t^2 + t + 1$. | 103 |
| 4.29 | Acción de $[\tau_\mu]$ en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ con $N = t^2 + t + 1$. | 103 |
| 4.30 | Ubicación del vértice $\tau_{\sigma^4 \mu \sigma} \cdot B_0^{[0]}$ en $\mathfrak{T}(K)$. | 105 |
| 4.31 | Ubicación del vértice $\tau_{\sigma^4 \mu \varepsilon} \cdot B_0^{[-1]}$ en $\mathfrak{T}(K)$. | 106 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.32 | Ubicación del vértice $\tau_{\sigma^4\mu} \cdot B_0^{[-1]}$ en $\mathfrak{T}(K)$ | 107 |
| 4.33 | Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ vía $[\tau_\zeta]$, con $N = t^2 + t + 1$ | 110 |
| 4.34 | Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ vía $[\tau_\rho]$, con $N = t^2 + t + 1$ | 111 |
| 4.35 | Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ vía $[\tau_{\delta'}]$, con $N = t^2 + t + 1$ | 113 |
| 4.36 | Orbitas de los vértices de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$, asociado a $N = t^2 + t + 1$ | 114 |
| 4.37 | Grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{T}(K)$, asociado a $N = t^2 + t + 1$ | 115 |

RESUMEN

En esta Tesis, el problema a resolver consiste en estudiar la acción del grupo de unidades $\tilde{\mathfrak{E}}^*$, asociado a un orden de Eichler \mathfrak{E} , sobre el árbol de Bruhat-Tits $\mathfrak{T}(K)$, definido sobre el cuerpo local $K = \mathbb{F}_q((t^{-1}))$, este último visto como la completación del cuerpo de funciones racionales $\mathbb{F}_q(t)$ en el lugar ∞ . Como resultado de dicho análisis, se obtienen el grafo cociente asociado a esta acción. Específicamente, en esta Tesis, el orden $\tilde{\mathfrak{E}}$ se define como

$$\tilde{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q[t] & \mathbb{F}_q[t] \\ N\mathbb{F}_q[t] & \mathbb{F}_q[t] \end{pmatrix},$$

donde $N \in \mathbb{F}_q[t]$ es un polinomio de grado 1 o 2. Este orden puede interpretarse como

$$\tilde{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}(V),$$

donde \mathfrak{E} es un haz de órdenes en el sentido del Capítulo 2.7 y V es el abierto de puntos finitos, es decir, el abierto $V = \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1 - \{\infty\}$ de la recta proyectiva $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1$.

En el Capítulo 2 se introducen algunos conceptos necesarios para el desarrollo de la Tesis, a saber:

- (i) Grupos y acciones de grupos sobre conjuntos.
- (ii) Grafos y árboles.
- (iii) Cuerpo locales y globales.
- (iv) El árbol de Bruhat-Tits de $\mathbb{M}_2(K)$.

Una propiedad importante del árbol de Bruhat-Tits de $\mathbb{M}_2(K)$, es que cada vértice tiene valencia $q + 1$, es decir, tiene $q + 1$ vértices vecinos. En la Subsección 2.8.2, se demuestra que dichos vértices están en correspondencia biunívoca con las bolas cerradas $B[a, |\pi^r|]$ de K , donde $\pi = t^{-1}$ es un parámetro uniformizante. El grupo $\mathrm{PGL}_2(K)$, es decir el grupo de transformaciones de Moebius, actúa sobre los vértices del árbol de Bruhat-Tits.

En el Capítulo 3 comienzan los primeros cálculos explícitos de la Tesis. Primero se entrega como un resultado de [14] el que el cociente de $\mathfrak{T}(K)$ por $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q[t])$ es isomorfo al camino infinito que tiene por vértices a las bolas $B[0, |t^n|]$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Este resultado permite clasificar los vértices del árbol según su imagen en este camino, a lo que se llama el tipo del vértice. En la Sección 3.3 se estudia la acción del grupo $\tilde{\mathfrak{C}}^*$ sobre $\mathfrak{T}(K)$ cuando N es de grado 1, cuyo grafo cociente asociado es un camino maximal de este mismo árbol. El método de análisis consiste en estudiar el cubrimiento intermedio $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$, donde $\Gamma_N \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[t])$ es el grupo de matrices invertibles congruentes módulo N a la matriz identidad. El mismo recurso, el del cubrimiento intermedio, es usado en el cálculo de los grafos restantes de la Tesis.

En el Capítulo 4, se cambia el polinomio de grado 1 por uno de grado 2, y se limita el cálculo a $q = 2$, lo que simplifica la estructura del grupo $\tilde{\mathfrak{C}}^*$. Los tres casos posibles para el polinomio N , son los siguientes:

- (i) N tiene dos raíces distintas en \mathbb{F}_2 (Sección 4.1).
- (ii) N tiene una raíz repetida en $\mathbb{F}_2[t]$ (Sección 4.2).
- (iii) N es irreducible en $\mathbb{F}_2[t]$ (Sección 4.3).

Palabras claves— Grupo, árbol de Bruhat-Tits, orden de Eichler, acción, transformación de Moebius, órbita, grafo cociente, cubrimiento ramificado, vértice tipo n .

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

1.1 Ideas generales para entender esta Tesis

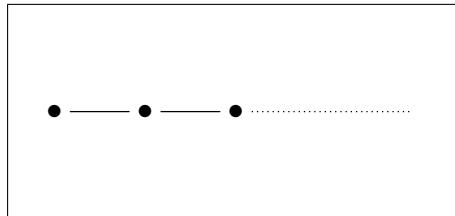
La idea de estudiar el cociente de un árbol \mathfrak{T} por un grupo G para entender la estructura de G se debe a J.P. Serre y H. Bass [14], y fue usada para determinar la estructura de subgrupos aritméticos de $\mathrm{PGL}_2(L)$, donde L es un cuerpo local con valuación discreta. Los matemáticos A.W. Mason, A. Schweitzer y M. Papikian, entre otros, profundizaron en el estudio de estos grafos cocientes en distintos contextos utilizando variados métodos. En los trabajos de L. Arenas-Carmona, a saber, [2, 3], se estudian familias de grafos cocientes que clasifican órdenes máximos en una F -álgebra de cuaterniones \mathfrak{A} descompuesta en un lugar \mathfrak{p} de una curva proyectiva, con especial énfasis en el caso de la recta proyectiva sobre un cuerpo finito. Ambos trabajos hablan de cómo ciertos grafos cocientes llamados C -grafo y S -grafo permiten estudiar las clases de conjugación de un género de órdenes máximos. Como aplicación, en [3], estos grafos se usan para estudiar órdenes de Eichler sobre un cuerpo de funciones racionales, lo cual permite entender la descomposición simultánea de fibrados 2-dimensionales sobre un cuerpo finito, en particular, entregando una generalización parcial al Teorema de Grothendieck-Birkhoff.

1.2 Posibles aplicaciones de esta Tesis

Uno de los resultados más importantes de esta Tesis es que el árbol de Bruhat-Tits de $\mathfrak{T}(K)$ se puede entender de las siguientes tres maneras equivalentes:

- i. Como el árbol cuyos vértices son clases de equivalencia de $\mathbb{F}_q[[t^{-1}]$ -reticulados (la relación de equivalencia es la homotecia por un elemento de K^*). El grupo $\mathrm{PGL}_2(K)$ actúa sobre el conjunto de vértices de la siguiente manera: $[\sigma].[\Lambda] = [\Lambda']$ sí y sólo si $\sigma\Lambda = \Lambda'$. El elemento $[\sigma]$ es la imagen de σ en $\mathrm{PGL}_2(K)$ y Λ es un $\mathbb{F}_q[[t^{-1}]$ -reticulado con clase de equivalencia $[\Lambda]$.
- ii. Como el árbol cuyos vértices son órdenes maximales en $\mathbb{M}_2(K)$, es decir, subanillos de la forma $\mathfrak{D} = \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q[[t^{-1}]]}(\Lambda)$. $\mathrm{PGL}_2(K)$ actúa sobre el conjunto de vértices de la siguiente manera: $[\sigma].\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'$ sí y sólo si $\sigma\mathfrak{D}\sigma^{-1} = \mathfrak{D}'$.
- iii. Como el árbol cuyos vértices son bolas cerradas del tipo $B[a, |\pi|^r]$. En este caso el grupo que actúa es el conjunto de transformaciones de Moebius $\mathcal{M}(K)$. Los detalles de esta acción se encuentran en la Sección 2.8.

Esto nos permite usar grafos cocientes por ciertos grupos de transformaciones de Moebius para clasificar ciertos tipos de órdenes como órdenes de Eichler. Es posible entender la estructura de un subgrupo Γ de $\mathrm{PGL}_2(K)$, con respecto a sus generadores, mediante su acción sobre $\mathfrak{T}(K)$. A lo largo de la Tesis, $\Gamma \backslash \mathfrak{T}(K)$ denota al grafo cociente. Como ejemplo más básico, tenemos $\Gamma = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q[t])$. En la Sección 3.1, se explica que $\Gamma \backslash \mathfrak{T}(K)$ tiene la siguiente forma:



Ocupando herramientas de acción de grupos en árboles, en [14] se demuestra el siguiente

producto amalgamado:

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[t]) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) *_{B(\mathbb{F}_q)} B(\mathbb{F}_q[t]),$$

donde $B(\mathbb{F}_q[t]) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, c \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q[t] \right\}$. Entender la estructura del grafo co-

ciente en otros casos nos permite dar resultados similares para la estructura de los grupos involucrados. En general, la teoría de Bass-Serre permite describir un grupo en términos de generadores y relaciones a partir de la estructura del grafo cociente junto a la descripción de los estabilizadores de una preimagen de cada uno de sus vértices. Desde un punto de vista más general, en contexto de polinomios, los grafos cocientes son infinitos (ver [2] para los detalles), por lo que los grupos tienen infinitos generadores. Para el caso de grupos de unidades de $\mathbb{F}_q[t]$ -órdenes sobre álgebras de división doble $\mathbb{F}_q(t)$, estos son finitamente generados ya que los grafos cocientes son finitos [12]. Por otro lado, el estudio de la acción de un grupo sobre un árbol y sus cocientes está en íntima relación con el Programa de Langlands. En [13] se explica cómo el árbol de Bruhat-Tits está relacionado con las curvas modulares de Drinfeld, donde a la vez, los puntos de dichas curvas están en correspondencia con clases de isomorfía de módulos de Drinfeld, o sea, módulos asociados a reticulados de rango finito en la extensión $\mathbb{C}_\infty/\mathbb{F}_p((t^{-1}))$, siendo \mathbb{C}_∞ es la completación de la clausura algebraica de $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ (a diferencia de \mathbb{C}/\mathbb{R} , esta extensión es de grado infinito).

Capítulo II

Preliminares

2.1 Algebra de Matrices

En esta sección se entregan las notaciones adecuadas con respecto al álgebra de matrices, para simplificar los cálculos que se hacen en esta Tesis.

Para un cuerpo F , sea $\mathbb{M}_n(F)$ el conjunto de matrices de $n \times n$ con coeficientes en F . Sus elementos son de la forma (r_{ij}) , donde $r_{ij} \in F$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Las operaciones:

$$\begin{aligned}(r_{ij}) + (s_{ij}) &= (r_{ij} + s_{ij}), \\ \alpha(r_{ij}) &= (\alpha r_{ij}), \quad \text{con } \alpha \in F,\end{aligned}$$

y

$$(r_{ij})(s_{ij}) = (t_{ij}), \quad \text{donde } t_{ij} = \sum_{k=1}^n r_{ik}s_{kj},$$

convierten a $\mathbb{M}_n(F)$ en una F -álgebra con unidad $I_n = (\delta_{ij})$, donde $\delta_{ij} = 1$ cuando $i = j$, y $\delta_{ij} = 0$ en cualquier otro caso. Tenemos el grupo $\text{GL}_n(F)$ de matrices invertibles bajo el producto de matrices. En $\mathbb{M}_n(F)$ está definido el determinante $\det : \mathbb{M}_n(F) \rightarrow F$, para el cual $A \in \text{GL}_n(F)$ sí y sólo si $\det(A) \in F^*$. La matriz inversa A^{-1} es $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$, donde $\text{adj}(A)$ es la adjunta clásica de A , o sea, la traspuesta de la matriz de cofactores de A . En $\mathbb{M}_n(F)$, el subconjunto $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ corresponde a las unidades matriciales, donde $E_{ij} = (e_{kl})$, $e_{kl} = \delta_{ki}\delta_{lj}$. Para $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(F)$, tenemos $A = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}E_{ij}$. También se tiene el producto

$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. La multiplicación de las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, mediante el uso de las unidades matriciales, tiene la expresión $AB = \sum_{i,j,l=1}^n a_{ij}b_{jl}E_{il}$.

Ejemplo 2.1.1. El centro de $\mathbb{M}_n(F)$ es el subconjunto de todas las matrices que conmutan con todas las matrices de $\mathbb{M}_n(F)$, y una notación recurrente es $Z(\mathbb{M}_n(F))$. Se demuestra que sus elementos son solamente las matrices diagonales del tipo λI_n , donde $\lambda \in F$. Es por esto que podemos identificar a $Z(\mathbb{M}_2(F))$ con F . En particular, definimos el grupo lineal proyectivo $\text{PGL}_2(F)$ como $\text{PGL}_2(F) = \text{GL}_2(F)/F^*$. La definición de grupo lineal proyectivo $\text{PGL}_2(R)$, cuando R es un anillo conmutativo con unidad, es análoga.

Observación 2.1.2. De ahora en adelante, a menos que se diga lo contrario, en esta Tesis se trabaja con el álgebra $\mathbb{M}_2(F)$. Es conveniente introducir la siguiente notación:

$$\mathbb{M}_2(F) = \begin{pmatrix} F & F \\ F & F \end{pmatrix},$$

así como notaciones derivadas de ella. Como ejemplo, el conjunto de matrices triangulares superiores es $\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$, el conjunto de las matrices diagonales es $\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$, y el conjunto de las matrices triangulares inferiores es $\begin{pmatrix} F & 0 \\ F & F \end{pmatrix}$.

Observación 2.1.3. Cuando no haya riesgo de confusión, escribimos I_n simplemente como I .

Para $A \in \mathbb{M}_2(F)$, tenemos que $p_A(t) = \det(tI - A)$ es el polinomio característico y $m_A(t)$ el polinomio minimal. Es obvio que $p_A(t), m_A(t) \in F[t]$. El teorema de Cayley-Hamilton afirma que $m_A(t)$ divide a $p_A(t)$.

Observación 2.1.4. Sea

$$\begin{aligned} \text{eval}_A : F[t] &\longrightarrow \mathbb{M}_2(F), \\ p(t) &\longmapsto p(A), \end{aligned}$$

el homomorfismo evaluación. Por definición, para $f(t) = a \in F$, $\text{eval}_A(a) = aI$, lo que define un F -homomorfismo de espacios vectoriales, que de hecho es un homomorfismo de álgebras.

Por el teorema de isomorfía, $\ker(\text{eval}_A) = (m_A(t))$. Si $m_A(t)$ no tiene raíces en F , entonces $F[A] \cong F[t]/(m_A(t))$ es una extensión cuadrática de F .

2.2 Acciones de Grupos

En esta sección se entregan los resultados necesarios de teoría de grupos y acciones de grupos para los cálculos explícitos de esta Tesis.

Sea $G = (G, *)$ un grupo con elemento neutro $e = e_G$. Para cualquier conjunto X , G actúa en X mediante la aplicación:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X, \\ (g, x) &\mapsto g.x, \end{aligned}$$

si cumple las identidades $g.(h.x) = (gh).x$ y $e.x = x$. Para un elemento $x \in X$, su estabilizador $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G : g.x = x\}$ es un subgrupo de G . Denotamos por $G.x = \{g.x : g \in G\}$ la G -órbita de x . Recordamos que G define sobre X la relación de equivalencia siguiente:

$$x \sim y \iff G.x = G.y,$$

donde la clase de x es su G -órbita $G.x$. El conjunto de G -órbitas es $G \backslash X$. Cuando G es finito, tenemos la siguiente igualdad:

Proposición 2.2.1 (Teorema órbita-estabilizador). Si G es un grupo finito, entonces

$$|G| = |G.x| |\text{Stab}_G(x)|.$$

Observación 2.2.2. Cuando no haya riesgo de confusión, diremos que $G.x$ es la órbita de x .

En esta Tesis se utiliza el siguiente resultado de teoría de grupos:

Lema 2.2.3. Sea G un grupo que actúa en el conjunto X . Si H es un subgrupo normal de G , entonces el grupo cociente G/H actúa sobre el conjunto de órbitas $H \backslash X$, y existe una biyección entre las órbitas de $(G/H) \backslash (H \backslash X)$ y las órbitas de $G \backslash X$.

Demostración. Para cualquier $g \in G$ y $x \in X$ definimos $(gH).(H.x) = H.(g.x)$. La operación anterior es una acción y para ver la biyectividad entre los conjuntos $(G/H) \backslash (H \backslash X)$ y $G \backslash X$, consideramos la función $\Psi : (G/H) \backslash (H \backslash X) \longrightarrow G \backslash X$, tal que

$$\Psi((G/H).(H.x)) = G.x.$$

Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $(G/H).(H.x_1) = (G/H).(H.x_2)$, entonces existe $g \in G$ que cumple $H.x_1 = (gH).(H.x_2) = H.(g.x_2)$. De lo anterior se deduce que x_1, x_2 están en la misma G -órbita, es decir, $G.x_1 = G.x_2$. Es fácil ver que Ψ es inyectiva, ya que si $G.x_1 = G.x_2$, se tiene que $g.x_1 = x_2$, para algún $g \in G$, de donde $H.(g.x_1) = H.x_2$, pero esto implica $(gH).(H.x_1) = H.x_2$, de lo cual se deduce que $H.x_1$ y $H.x_2$ están en la misma G/H -órbita, es decir, $(G/H).(H.x_1) = (G/H).(H.x_2)$. Para ver la sobreyectividad de Ψ , es suficiente notar que, si $G.x \in G \backslash X$, podemos considerar la G/H -órbita $z = (G/H).(H.x)$, la que cumple $\Psi(z) = G.x$, lo que concluye la demostración. \square

2.3 Grafos y Árboles

En esta sección se entregan las definiciones y convenciones concernientes a los conceptos de grafo y árbol necesarias para trabajar en el contexto que nos interesa.

Definición 2.3.1 (Definición utilizada por [3]). Un **grafo** $\mathfrak{G} = (V, E, s, t, r)$ consiste en un par de conjuntos $V = V(\mathfrak{G})$, $E = E(\mathfrak{G})$, llamados conjunto de vértices y conjunto de aristas, junto con tres funciones, $s, t : E \longrightarrow V$ y $r : E \longrightarrow E$, llamadas origen, término y reversa, respectivamente. Estas funciones cumplen:

$$r(a) \neq a, \quad r(r(a)) = a \quad \text{y} \quad s(r(a)) = t(a),$$

para cualquier arista $a \in E$. Los vértices $s(a)$ y $t(a)$ se llaman extremos de a . Dos vértices $v_1, v_2 \in V$ se dicen adyacentes o vecinos si son extremos de alguna arista en E .

Sea $\mathfrak{G} = (V', E', s', t', r')$. Un morfismo de grafos o función simplicial $\gamma : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}'$ es una tupla (γ_V, γ_E) tal que $\gamma_V : V \longrightarrow V'$ y $\gamma_E : E \longrightarrow E'$ son funciones que preservan las funciones de origen, término y reversa. Es decir, para todo $a \in E$, se tiene:

$$(i) \quad s'(\gamma_E(a)) = \gamma_V(s(a)),$$

$$(ii) \quad t'(\gamma_E(a)) = \gamma_V(t(a)),$$

$$(iii) \quad r'(\gamma_E(a)) = \gamma_V(r(a)).$$

Los grafos \mathfrak{G} y \mathfrak{G}' son isomorfos si la función simplicial $\gamma : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}'$ es biyectiva, es decir, γ_V y γ_E son biyectivas. Análogamente podemos definir una acción de un grupo G en un grafo \mathfrak{G} como una acción en E y V que preserva las funciones s, t, r . Dicho de otra manera, para cada $g \in G$ y cada $a \in E$, se tiene:

$$(i) \quad s(g.a) = g.(s(a)),$$

$$(ii) \quad t(g.a) = g.(t(a)),$$

$$(iii) \quad r(g.a) = g.(r(a)).$$

Definición 2.3.2. El *camino real* \mathfrak{R} se define como el grafo de vértices $\{v_j : j \in \mathbb{Z}\}$ y aristas $\{a_j, r(a_j) : j \in \mathbb{Z}\}$ que cumplen $s(a_j) = v_j$ y $t(a_j) = v_{j+1}$.

Un subgrafo \mathfrak{S} de \mathfrak{R} es conexo si, para cualquier par de vértices distintos $v_j, v_{j'} \in V(\mathfrak{S})$ con $j < j'$, los vértices v_i , donde $j \leq i \leq j'$, cumplen con $v_i \in V(\mathfrak{S})$ y las aristas $a_i, r(a_i)$, para todo $j \leq i \leq j' - 1$, cumplen con $a_i, r(a_i) \in E(\mathfrak{S})$. Un camino en \mathfrak{R} es un subgrafo conexo. Un camino finito \mathfrak{J} queda unívocamente determinado por sus vértices inicial y final, a saber, v_k y $v_{k'}$; en ese caso escribimos $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{k,k'}$. De la misma manera se pueden definir los caminos infinitos $\mathfrak{J}_{k,\infty}$, $\mathfrak{J}_{-\infty,k}$ y $\mathfrak{J}_{-\infty,\infty}$. El largo del subgrafo $\mathfrak{J}_{k,k'}$ es $k' - k$, mientras que en los otros casos su largo es ∞ . Cuando existe un morfismo inyectivo $\gamma : \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{G}$, donde \mathfrak{J} es un camino del tipo explicitado en los ejemplos anteriores, decimos que $\gamma(\mathfrak{J})$ es un camino en \mathfrak{G} . Un grafo \mathfrak{G} es conexo, cuando dados dos vértices $v, w \in V$ cualesquiera, existe un camino \mathfrak{J} que tiene a v y w como sus vértices extremos. En otras palabras, cualquier par de vértices de \mathfrak{G} quedan conectados por un camino. Al igual que la definición de camino real, se define un circuito de largo $n \geq 1$ como un grafo \mathfrak{C}_n donde sus vértices son los elementos del conjunto $\{v_j : j \in \{0, \dots, n-1\}\}$ y el conjunto de aristas es $\{a_j, r(a_j) : j \in \{0, \dots, n-1\}\}$. Además

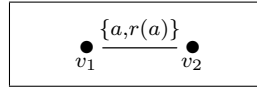


Figura 2.1: Dos vértices conectados por una arista.

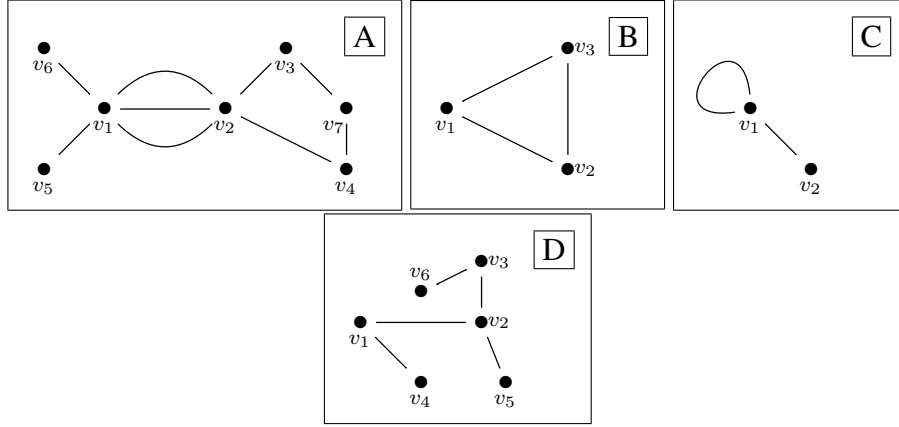


Figura 2.2: Distintos ejemplos de grafos.

deben cumplirse las condiciones siguientes: $s(a_j) = v_j$, $t(a_j) = v_{j+1}$ y $t(a_{n-1}) = s(a_0)$. Cuando existe un monomorfismo $\sigma : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{G}$, decimos que el grafo \mathcal{G} tiene un circuito. La siguiente definición es de crucial importancia, ya que sobre ella se realiza la mayor parte del estudio de esta Tesis:

Definición 2.3.3 (Ver [14]). Un *árbol* \mathfrak{T} es un grafo conexo y sin circuitos.

En un árbol \mathfrak{T} , tiene sentido la notación de intervalos para los caminos finitos, es decir, $\mathfrak{J} = [v, w]$ es el camino de \mathfrak{T} que tiene vértices extremos a v y w , el cual está unívocamente determinado. Un grafo \mathcal{G} se puede representar gráficamente como un conjunto de puntos unidos por líneas. En este caso, la línea representa a las aristas $\{a, r(a)\}$ (Figura 2.1). Existe la posibilidad de que de que dos vértices estén unidos por más de una línea (Figura 2.2.A), o que de un vértice sea extremo de un ciclo de largo 1, lo que es equivalente a que $s(a) = t(a)$ (Figura 2.2.C). Un ejemplo de circuito se ve en la Figura 2.2.B y un ejemplo de árbol está dado por la Figura 2.2.D.

Definición 2.3.4. (ver [14, §4.1]) Sea G un grupo actuando sobre un grafo \mathcal{G} . Un *dominio fundamental* de \mathcal{G} bajo la acción de G , es un subgrafo \mathfrak{T} de \mathcal{G} tal que $\mathfrak{T} \rightarrow G \backslash \mathcal{G}$ es un isomorfismo.

Teorema 2.3.5. [14, §I.4] Sea G un grupo que actúa en un árbol \mathfrak{T} . Un dominio fundamental

de \mathfrak{T} bajo la acción G existe sí y sólo si $G \setminus \mathfrak{T}$ es un árbol.

Definición 2.3.6. La *valencia* de un vértice $v \in V(\mathfrak{G})$ es el número de pares de aristas (siendo una el reverso de la otra) que tienen como vértice común a v .

El grafo \mathfrak{G} tiene un espacio topológico $\tilde{\mathfrak{G}}$ subyacente definido de la siguiente manera: $\tilde{\mathfrak{G}}$ es la unión disjunta de los conjuntos V y $E \times [0, 1]$, donde E y V están equipados con la topología discreta, bajo las identificaciones $(a, t) \sim (r(a), 1 - t)$, $s(a) \sim (a, 0)$ y $t(a) \sim (a, 1)$ para todo $a \in E$ [14, §2.1]. Recordemos que para un espacio topológico Z , un espacio de recubrimiento es el par (Z', p) , donde Z' es un espacio topológico y $p : Z' \rightarrow Z$ es una función continua epiyectiva y que cumplen la condición de que para cada $x \in Z$, existe un abierto $U \subseteq Z$ tal que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos de Z' , cada uno de los cuales es homeomorfo a U por p . Los abiertos disjuntos que recubren a $p^{-1}(U)$ se llaman las hojas de Z' sobre U . El número de hojas sobre U es igual a la cardinalidad de $p^{-1}(x)$, para $x \in U$. En el caso de que Z sea conexo, el número de hojas sobre cada abierto de $U \subseteq Z$ es constante.

Ejemplo 2.3.7. El par (\mathbb{R}, p) , donde $p(r) = e^{2\pi ir}$ es un espacio de recubrimiento del círculo $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Un resultado interesante de la teoría de espacios de recubrimientos, es que cualquier espacio de recubrimiento de un grafo \mathfrak{G} , es un grafo \mathfrak{G}' [9, §1.A, Lema 1A.3], con $V(\mathfrak{G}') = p^{-1}(V(\mathfrak{G}))$ y $E(\mathfrak{G}') = p^{-1}(E(\mathfrak{G}))$ como conjuntos de vértices y aristas, respectivamente. Es inmediato el hecho de que un árbol, al ser un espacio simplemente conexo, no posee recubrimientos conexos no triviales.

Definición 2.3.8. El par (\mathfrak{G}', p) es un *recubrimiento ramificado* de \mathfrak{G} si el morfismo de grafos $p : \mathfrak{G}' \rightarrow \mathfrak{G}$ es epiyectivo sobre los vértices y aristas, además es localmente epiyectivo sobre los vértices de \mathfrak{G} , es decir, la función p_E envía epiyectivamente las aristas que tienen vértice común v' , con $v' \in V(\mathfrak{G}')$, hacia las aristas que tienen vértice común $v = p_V(v')$.

En la Figura 2.3 se muestra un recubrimiento ramificado. La aplicación p_V está simbolizada por la flecha de color rojo. Sea $p : \mathfrak{G}' \rightarrow \mathfrak{G}$ un recubrimiento ramificado de grafos y $v' \in p_V^{-1}(v)$ un vértice, la valencia v' es mayor o igual a la valencia de v .

Definición 2.3.9. El vértice v' es *ramificado* sobre \mathfrak{G} si la valencia de v' es estrictamente mayor que la valencia de v y $p_E(v') = v$.

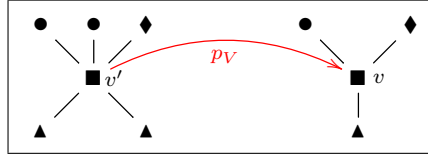


Figura 2.3: Función localmente epiyectiva para un recubrimiento ramificado.

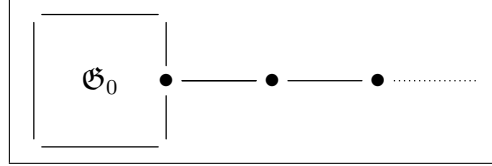


Figura 2.4: Cuspide en el grafo cociente $G \setminus \mathcal{G}$.

Definición 2.3.10. (ver [14, §II.2.3]) Una *cúspide* en el grafo cociente $G \setminus \mathcal{G}$ es un subgrafo de $G \setminus \mathcal{G}$ isomorfo al camino infinito $\mathcal{I}_{k,\infty}$, donde el único vértice en común entre la imagen de $\mathcal{I}_{k,\infty}$ y el resto del grafo $G \setminus \mathcal{G}$ es el vértice correspondiente a v_k .

En la Figura 2.4, se muestra un grafo cociente $G \setminus \mathcal{G}$ con una cúspide, donde \mathcal{G}_0 indica el resto del grafo.

2.4 Cuerpos locales no arquimedianos

Como el desarrollo de esta Tesis se realiza a partir de cuerpos locales no arquimedianos, dejamos esta sección para sus definiciones y propiedades más importantes.

Sea K un cuerpo completo con respecto a un valor absoluto $|\cdot|_K$. Recordemos que $|\cdot|_K$ cumple, por definición, las propiedades siguientes:

- (i) $|x|_K \geq 0$, $|x|_K = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (ii) $|xy|_K = |x|_K |y|_K$,
- (iii) $|x + y|_K \leq |x|_K + |y|_K$.

Definición 2.4.1. El valor absoluto $|\cdot|_K$ es *no arquimediano* si cumple la desigualdad triangular fuerte $|x + y|_K \leq \max\{|x|_K, |y|_K\}$.

Por definición, $|\cdot|_K$ es un valor absoluto discreto cuando $|K^*|_K \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto discreto de $\mathbb{R}_{>0}$ en la topología usual de \mathbb{R} . En el caso de que la imagen de K^* sea discreta y

no trivial, $|K^*|_K$ es isomorfo a \mathbb{Z} . Como además $\mathbb{R}_{>0} \cong \mathbb{R}$, podemos asumir que $|K^*|_K = c^{\mathbb{Z}}$, con $0 < c \neq 1$. Sin pérdida de generalidad, $0 < c < 1$.

Definición 2.4.2. Un *cuerpo local no-arquimediano* K , es un cuerpo completo con respecto a un valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_K$. Decimos que K es *discreto* si $|\cdot|_K$ es discreto.

Definición 2.4.3. En un cuerpo local no arquimediano K con valor absoluto discreto $|\cdot|_K$, el elemento $\pi \in K$ es un *parámetro uniformizante* si $|\pi|_K = c$.

A lo largo de la Tesis nos enfocamos siempre en valores absolutos no arquimedianos discretos, los que poseen un parámetro uniformizante. En ese caso, denotamos por K al cuerpo completo con estas característica. Propiedades interesantes de K surgen a partir de la definición de los subconjuntos \mathcal{O}_K y \mathfrak{m}_K .

Definición 2.4.4. El *anillo de enteros* de K es el conjunto $\mathcal{O}_K := \{x \in K : |x|_K \leq 1\}$.

Como bien lo indica su nombre, el conjunto \mathcal{O}_K es un anillo. Es más, es un anillo local [10], donde su único ideal maximal es el conjunto:

$$\mathfrak{m}_K := \{x \in K : |x|_K < 1\}.$$

Al ser K discreto, el cociente $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ es un cuerpo finito.

Definición 2.4.5. El cuerpo $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ se llama *cuerpo residual de K* .

Ejemplo 2.4.6. El valor absoluto trivial es aquel en que $|K|_K = \{0, 1\}$. De ahora en adelante sólo interesa estudiar los valores absolutos $|\cdot|_K$ no triviales, lo que se asume en todo lo que sigue.

Ejemplo 2.4.7. Para el caso de \mathbb{Q} se define el valor absoluto p -ádico como $\left|\frac{z}{w}\right|_p = p^{-(n-m)}$, donde p^n es la máxima p -potencia que divide a z y p^m es la máxima p -potencia que divide a w . Para el caso $p = 2$, la serie

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

converge a -1 . De manera análoga se define el valor absoluto $p(t)$ -ádico para el cuerpo $\mathbb{F}_q(t)$, donde q es una potencia de un número primo y $p(t) \in \mathbb{F}_q[t]$ es irreducible. Otro valor absoluto en $\mathbb{F}_q(t)$ es $|\cdot|_\infty$, donde $\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right|_\infty = q^{\deg(f)-\deg(g)}$.

Recuerde que existe un único homomorfismo $\mathbb{Z} \rightarrow K$. Un cuerpo K es no arquimediano sí y sólo si la imagen de \mathbb{Z} es acotada [10]. Como caso particular, los valores absolutos p -ádicos del Ejemplo 2.4.7 son no arquimedianos.

Ejemplo 2.4.8. Si K es de característica positiva, entonces es no arquimediano. En particular, todos los valores absolutos de $\mathbb{F}_q(t)$ son no arquimedianos.

En el conjunto de todos los valores absolutos de K existe una relación de equivalencia definida como sigue: dos valores absolutos ρ, ρ' son equivalentes si definen la misma topología. Lo anterior es equivalente a cualquiera de las afirmaciones siguientes:

1. $|z|_\rho < 1$ sí y sólo si $|z|_{\rho'} < 1$.
2. ρ y ρ' poseen las mismas sucesiones convergentes.
3. Existe una constante positiva λ tal que para todo $z \in K$ se tiene $\rho'(z) = \rho(z)^\lambda$.

Definición 2.4.9. El conjunto $\Pi(K)$ es el *conjunto de lugares de K* y sus elementos son clases de equivalencia de valores absolutos definido en K .

En el cuerpo local K , el anillo de enteros \mathcal{O}_K es un dominio de ideales principales. En particular $\mathfrak{m}_K = \pi \mathcal{O}_K$, donde $\pi \in K$ es un parametro uniformizante fijo. Un hecho importante es que todo ideal fraccional en K es de la forma $\pi^t \mathcal{O}_K$, para cierto $t \in \mathbb{Z}$. De esto se sigue que todo $a \in K^*$ se escribe de forma única como $a = u\pi^t$, donde $u \in \mathcal{O}_K^*$ y $t \in \mathbb{Z}$. Cuando la característica del cuerpo residual es 2, decimos que el cuerpo local no arquimediano es diádico.

Ejemplo 2.4.10. \mathbb{Q}_p es la completación de \mathbb{Q} mediante el valor absoluto p -ádico $|\cdot|_p$. Su anillo de enteros $\mathcal{O}_p = \mathbb{Z}_p$ se llama anillo de enteros p -ádicos. Su único ideal maximal \mathfrak{m}_p cumple con $\mathfrak{m}_p = p\mathbb{Z}_p$.

Ejemplo 2.4.11. El cuerpo $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ es la completación de $\mathbb{F}_q(t)$ con el valor absoluto $|\cdot|_\infty$. El conjunto $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ se llama cuerpo de series de Laurent, con anillo de enteros $\mathcal{O}_\infty = \mathbb{F}_q[[t^{-1}]]$. El elemento t^{-1} es un parámetro uniformizante, siendo recurrentemente utilizado como tal a lo largo de esta Tesis. El cuerpo residual de $\mathbb{F}_q((t^{-1}))$ es \mathbb{F}_q .

El siguiente resultado es útil a la hora de realizar cálculos posteriores:

Proposición 2.4.12 (Principio de dominancia). Sean $x, y \in K$ tales que $|x|_K < |y|_K$. Entonces se tiene la igualdad $|x + y|_K = |y|_K$.

Observación 2.4.13. Sobre el cuerpo completo K con valor absoluto no arquimediano $|\cdot|_K$, se define la valuación discreta $\nu_K(a) = \frac{\ln(|a|_K)}{\ln(|\pi|_K)}$. Ver [7, 10] para más detalles.

2.4.1 Cuerpos arquimedianos.

Los cuerpos arquimedianos son, salvo isometría, \mathbb{R} y \mathbb{C} . En \mathbb{C} tenemos el valor absoluto usual $|\cdot|_{\mathbb{C}}$, definido por $|a + bi|_{\mathbb{C}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. El cuerpo \mathbb{R} es la completación de \mathbb{Q} por el valor absoluto definido por el orden. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $\mathbb{Q}(\alpha)$ es un cuerpo de números y $\sigma : \mathbb{Q}(\alpha) \hookrightarrow \mathbb{C}$ es una incrustación, entonces se tiene que $\rho_{\sigma}(z) = |\sigma(z)|_{\mathbb{C}}$ es un valor absoluto en $\mathbb{Q}(\alpha)$.

2.5 Reticulados y Ordenes

Para entender la estructura del árbol principal de esta Tesis el cual es objeto de estudio, es necesario entender lo que es un reticulado y un orden. En esta sección se definen y se establece la conexión que existen entre ambos.

En primera instancia, se sabe que los anillos de enteros de los cuerpos \mathbb{Q} y $F(t)$ son \mathbb{Z} y $F[t]$. De hecho \mathbb{Q} y $F(t)$ son los cuerpos de fracciones de estos anillos. Cuando K es un cuerpo local, su anillo de enteros \mathcal{O}_K es aquel que vimos en la Sección 2.4. La diferencia entre \mathbb{Z} , $K[t]$ y \mathcal{O}_K es que \mathcal{O}_K posee un único ideal maximal \mathfrak{m} . Cuando X es una curva afín o proyectiva sobre el cuerpo F y $F(X)$ es su cuerpo de funciones racionales entonces, para cada punto $\mathfrak{p} \in X$ su anillo de enteros $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}} \subseteq F(X)$ consiste en las funciones que son regulares en \mathfrak{p} . Análogamente al caso de los cuerpos locales, $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}$ tiene un único ideal maximal $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ de funciones regulares que se anulan en \mathfrak{p} . Para el caso de cuerpos globales (ver [11]), en el Capítulo 2.6 damos una definición de S -enteros que incluye los casos \mathbb{Z} y $F[t]$. Como vemos, existen distintas interpretaciones de lo que es un anillo de enteros para un cuerpo F , y en todos estos casos es válida la definición siguiente:

Definición 2.5.1 (Ver [11]). Sea V un F -espacio vectorial de dimensión n sobre F . Sea \mathcal{O}_F el anillo de enteros de F . Diremos que $\Lambda \subseteq V$ es un \mathcal{O}_F -**reticulado** en V , si Λ es un \mathcal{O}_F -módulo

tal que existe una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V con

$$\Lambda \subseteq \mathcal{O}_F x_1 + \dots + \mathcal{O}_F x_n.$$

Si un reticulado Λ satisface $F\Lambda = V$, decimos que Λ es un reticulado sobre V . Un reticulado Λ es libre si lo es como \mathcal{O}_F -módulo, y su rango es el rango de Λ como \mathcal{O}_F -módulo.

Cuando no haya riesgo de confusión, nos referimos a un \mathcal{O}_F -reticulado como simplemente reticulado.

Ejemplo 2.5.2. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base de V como F -espacio vectorial. El \mathcal{O}_F -submódulo $\Lambda = \mathcal{O}_F x_1 + \dots + \mathcal{O}_F x_n$ es un reticulado libre sobre V .

Lema 2.5.3. (Ver [11, §81]) Supongamos que K es un cuerpo local cuyo anillo de enteros es \mathcal{O}_K . Entonces $\Lambda \subseteq K^n$ es un \mathcal{O}_K -reticulado si y solamente si es un \mathcal{O}_K -módulo finitamente generado.

Observación 2.5.4. La propiedad equivalente al Lema 2.5.3 sobre \mathbb{Z} y $F[t]$ es cierta, y de hecho se extiende a S -enteros.

Es necesario enfatizar que todo reticulado sobre un cuerpo local no arquimediano K es libre. Esto se debe a que el anillo de enteros \mathcal{O}_K es un dominio de ideales principales y a que todo reticulado es un módulo libre de torsión, pues está contenido en un módulo libre.

Ejemplo 2.5.5. $\mathbb{Z}[i]$ es un \mathbb{Z} -reticulado libre sobre el \mathbb{Q} -espacio vectorial $\mathbb{Q}[i]$.

Ejemplo 2.5.6. Sea $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{5})$, entonces $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}_2 \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)$ es un \mathbb{Z}_2 -reticulado libre sobre L . Esto es particular nos dice que \mathcal{O}_L es un \mathbb{Z}_2 -módulo libre.

Sea \mathcal{A} una F -álgebra. A continuación se define uno de los conceptos más importantes de esta Tesis:

Definición 2.5.7. El conjunto $\mathfrak{D} \subset \mathcal{A}$ es un \mathcal{O}_F -orden si \mathfrak{D} es un \mathcal{O}_F -reticulado en \mathcal{A} tal que $1 \in \mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}$. Un orden es maximal si lo es respecto a la contención de conjuntos.

Cuando no haya riesgo de confusión, nos referimos a un \mathcal{O}_F -orden como simplemente orden. De la Definición 2.5.7 se deduce que un orden es un reticulado que a su vez es un subanillo.

Ejemplo 2.5.8. $\mathbb{M}_2(\mathcal{O}_F)$ es un orden maximal en la F -álgebra $\mathbb{M}_2(F)$.

Ejemplo 2.5.9. Sea $\sigma \in \text{GL}_2(F)$, entonces $\sigma\mathbb{M}_2(\mathcal{O}_F)\sigma^{-1} = \{\sigma M\sigma^{-1} : M \in \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_F)\}$ es un orden maximal en la F -álgebra $\mathbb{M}_2(F)$, debido a que en cierta base este orden luce como el mencionado en el ejemplo anterior.

Si Λ es un reticulado en F^2 , entonces $\mathfrak{D}_\Lambda = \text{End}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda) = \{\sigma \in \mathbb{M}_2(F) : \sigma\Lambda \subseteq \Lambda\}$ es un orden maximal en $\mathbb{M}_2(F)$. El recíproco también es cierto, es decir, todo orden maximal \mathfrak{D} en $\mathbb{M}_2(F)$ es de la forma $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_\Lambda$, donde Λ es un reticulado en F^2 . Es inmediato el hecho que $\sigma \in \mathfrak{D}^*$ sí y sólo si $\sigma\Lambda = \Lambda$.

Teorema 2.5.10. Sea \mathfrak{D} un orden maximal en $\mathbb{M}_2(K)$ y $\sigma \in \text{GL}_2(K)$, entonces $\sigma\mathfrak{D}\sigma^{-1} = \mathfrak{D}$ sí y solamente si $\sigma \in K^*\mathfrak{D}^*$.

Demostración. Como $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_\Lambda$, donde Λ es un \mathcal{O}_K -reticulado en K^2 , se tiene la identidad $\sigma\mathfrak{D}_\Lambda\sigma^{-1} = \mathfrak{D}_{\sigma\Lambda}$. Por otro lado $\mathfrak{D}_\Lambda = \mathfrak{D}_{\sigma\Lambda}$ sí y solamente si $\sigma\Lambda = k\Lambda$ para algún $k \in K^*$. Para una base adecuada de K^2 , se tiene $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K \end{pmatrix}$, y por lo tanto $\sigma \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\mathcal{O}_K \\ k\mathcal{O}_K \end{pmatrix}$, o de manera equivalente $k^{-1}\sigma \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_K \\ \mathcal{O}_K \end{pmatrix}$, es decir, $k^{-1}\sigma \in \mathfrak{D}^*$. \square

2.6 S-Unidades en cuerpos globales

En esta sección se define el concepto de cuerpo global y cómo se relaciona con los cuerpos locales. Además se definen los conjunto de elementos adélicos junto con sus propiedades, además de algunos ejemplos. En las secciones siguientes se explica su rol a la hora de clasificar reticulados y órdenes.

Cuando decimos que F es un cuerpo global, nos referimos a una de las siguientes alternativas:

- (i) F es una extensión finita y algebraica de \mathbb{Q}
- (ii) F es extensión finita del cuerpo $\mathbb{F}_q(t)$, donde \mathbb{F}_q es el único cuerpo finito de q elementos, q es potencia de un número primo y t es un elemento trascendente sobre \mathbb{F}_q ; o equivalentemente, F es el cuerpo de funciones racionales de una curva suave y proyectiva Y , sobre un cuerpo finito.

Consideremos el conjunto $\Pi(F) = \Pi_\infty(F) \cup \Pi_f(F)$ de lugares de F , o sea, el conjunto de clases de equivalencia de valores absolutos. El conjunto $\Pi_\infty(F)$ contiene los lugares arquimedianos y $\Pi_f(F)$ los no arquimedianos no triviales. En lo que sigue, S es un conjunto finito y no vacío de lugares en F , que incluye los lugares arquimedianos.

Definición 2.6.1. El conjunto $\mathcal{O}_{F,S}$ se llama *conjunto de S -enteros*, mientras que el conjunto $\mathcal{O}_{F,S}^*$ se llama *conjunto de S -unidades*. Se definen a continuación:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{F,S} &= \{z \in F : |z|_p \leq 1, \forall p \notin S\}, \\ \mathcal{O}_{F,S}^* &= \{z \in F : |z|_p = 1, \forall p \notin S\}.\end{aligned}$$

Proposición 2.6.2. El conjunto $\mathcal{O}_{F,S}$ es un anillo conmutativo con unidad. Además, $\mathcal{O}_{F,S}^*$ es un subgrupo de F^* . De hecho es el grupo de unidades de $\mathcal{O}_{F,S}$.

Demostración. En efecto, sean $z, w \in \mathcal{O}_{F,S}$, entonces $|z + w|_p \leq \max\{|z|_p, |w|_p\} \leq 1$, para todo $p \notin S$. Más fácil aún es ver que $|zw|_p = |z|_p |w|_p \leq 1$. Del mismo modo se puede ver que $\mathcal{O}_{F,S}^*$ es un subgrupo de F^* . \square

Ejemplo 2.6.3. Para el caso $F = \mathbb{Q}$, es común tomar $S = \Pi_\infty(F) = \{\infty\}$. En particular $\mathcal{O}_{F,S} = \mathbb{Z}$. Esto quiere decir que $z \in \mathbb{Q}$ es entero si y sólo si es entero en todos sus lugares no arquimedianos.

Ejemplo 2.6.4. En $F = \mathbb{F}_q(t)$, por el Ejemplo 2.4.8, se tiene que $\Pi(F) = \Pi_f(F)$. En particular, para $S = \{\infty\}$, el anillo de S -enteros es $\mathbb{F}_q[t]$.

El cuerpo F_p indica la completación de F por el valor absoluto $|\cdot|_p$. A Continuación se define el conjunto de Adeles \mathbb{A}_F :

Definición 2.6.5. El anillo de *Adeles* de F es el subanillo $\mathbb{A}_F \subset \prod_{p \in \Pi(F)} F_p$, cuyos elementos $(a_p)_p$ cumplen que $a_p \in \mathcal{O}_p$, salvo para un conjunto finito de lugares.

Cuando no hay riesgo de confusión, simplemente escribimos $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$. El \mathbb{A} -módulo \mathbb{A}^2 se identifica con $F^2 \otimes_F \mathbb{A}$. Para el álgebra de matrices $\mathbb{M}_n(F)$ podemos definir su *adelización* como $\mathbb{M}_n(F)_\mathbb{A} = \mathbb{M}_n(F) \otimes_F \mathbb{A} \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{A})$, como \mathbb{A} -álgebra.

Definición 2.6.6. El conjunto de *S-adeles* $\mathbb{A}_{F,S}$ se define como el producto cartesiano

$$\mathbb{A}_{F,S} = \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \in S} F_{\mathfrak{p}}.$$

Es fácil ver que se cumple la contención $\mathbb{A}_{F,S} \subset \mathbb{A}$, en particular,

$$\mathbb{A} = \bigcup_{\substack{\Pi_{\infty}(F) \subseteq S \subset \Pi(F) \\ |S| < \infty}} \mathbb{A}_{F,S}$$

Si $S' \subset S \subset \Pi(F)$ satisfacen las condiciones anteriores, se tiene $\mathbb{A}_{F,S} \subset \mathbb{A}_{F,S'}$. Si tomamos $\mathbb{A}_{F,S}$ con la topología producto y la familia de inclusiones $\{\psi_S : \mathbb{A}_{F,S} \hookrightarrow \mathbb{A}\}_S$, la topología adélica en \mathbb{A} es co-inducida por la familia $\{\psi_S : \mathbb{A}_{F,S} \hookrightarrow \mathbb{A}\}_S$. La topología de $\mathbb{M}_n(F)_{\mathbb{A}}$ es la topología producto, dado que $\mathbb{M}_n(F)_{\mathbb{A}} \cong \mathbb{A}^{n^2}$.

Teorema 2.6.7 (Teorema de aproximación fuerte). [11, §II, 21] Sea S' un conjunto finito de lugares no arquimedianos de F y sea $\{a_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p} \in S'} \subset F$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $A \in F$ tal que

$$\begin{aligned} |A - a_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} &< \varepsilon, \quad \forall \mathfrak{p} \in S', \\ |A|_{\mathfrak{p}} &\leq 1, \quad \forall \mathfrak{p} \in \Pi_f(F) - S'. \end{aligned}$$

2.7 Reticulados y Ordenes maximales desde un punto de vista functorial. Divisores.

En esta sección se extiende la definición de reticulado y orden al contexto de haces definidos sobre la recta proyectiva. De la misma manera, se entrega una definición adecuada de *lugar* de dicha recta y cómo estos ayudan a la clasificación de reticulados y órdenes.

En esta Tesis, se trabaja con la curva proyectiva suave y no singular $X = \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^1$, donde \mathbb{F}_q es el único cuerpo finito de q elementos. Para tal caso, $F = \mathbb{F}_q(t)$ es el cuerpo de funciones

racionales de X [8]. En particular F es un cuerpo global, según la definición establecida en la Sección 2.6. Se denota por $|X|$ el conjunto de puntos cerrados de X [2, 3]. Está demostrado que los puntos cerrados de X están en correspondencia biunívoca con los lugares de $\mathbb{F}_q(t)$ [8]. Por esta razón, los puntos en $|X|$ también son llamados lugares de X . Sea $\mathcal{O}_X(U)$ el anillo de funciones regulares en el abierto $U \subseteq X$. Es sabido que $\mathcal{O}_X(U)$ es un dominio de Dedekind [3]. Las definiciones correspondientes de reticulado y orden, en este sentido, se especializan en lo que sigue al álgebra de matrices $\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q(t))$. El espacio vectorial $\mathbb{F}_q(t)^2$ se considera un haz constante.

Definición 2.7.1. Decimos que Λ es un X -reticulado o X -fibrado en el $\mathbb{F}_q(t)$ -espacio vectorial $\mathbb{F}_q(t)^2$, si es un sub-haz localmente libre de $\mathbb{F}_q(t)^2$, tal que para todo abierto $U \subseteq X$ se tiene que $\Lambda(U) \subseteq \mathbb{F}_q(t)^2$ es un $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo, y su fibra genérica $\Lambda \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{F}_q(t)$ es isomorfa a $\mathbb{F}_q(t)^2$

El conjunto $\Lambda(U)$ es el grupo abeliano de las U -secciones y $\Lambda(X)$ es el \mathbb{F}_q -espacio vectorial de las secciones globales. De manera análoga se define el concepto de orden en lenguaje de haces.

Definición 2.7.2. Decimos que \mathfrak{D} es un X -orden en $\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q(t))$, si \mathfrak{D} es un X -reticulado en $\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q(t))$ tal que $\mathfrak{D}(U)$ es un anillo, para cualquier abierto $U \subseteq X$.

Para el lugar $\mathfrak{p} \in |X|$, se define el $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ -reticulado $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ por $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \Lambda(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, para cualquier abierto $U \subseteq X$ que contenga a \mathfrak{p} ; o de manera equivalente, como la clausura de $\Lambda(U)$ en $\mathbb{F}_q(t)_{\mathfrak{p}}$, para cualquier abierto que contenga a \mathfrak{p} . Una observación interesante es que la definición de $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ no depende de U [3]. De la misma manera se define el $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ -orden $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$. Sea $\mathbb{A} \subseteq \prod_{\mathfrak{p} \in |X|} \mathbb{F}_q(t)_{\mathfrak{p}}$ el anillo de adeles de X y Λ un X -reticulado en $\mathbb{F}_q(t)^2$. Se define la adelización de Λ como $\Lambda_{\mathbb{A}} = \prod_{\mathfrak{p} \in |X|} \Lambda_{\mathfrak{p}}$. Sea $\sigma \in \text{End}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}^2)$. El X -reticulado $L = \sigma\Lambda$ es aquel que cumple $L_{\mathbb{A}} = \sigma\Lambda_{\mathbb{A}}$. Por lo visto en el Capítulo 2.6, para $\sigma \in \text{GL}_2(\mathbb{A})$ y el X -orden \mathfrak{D} en $\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q(t))$, se define el X -orden $\mathfrak{B} = \sigma\mathfrak{D}\sigma^{-1}$ mediante $\mathfrak{B}_{\mathbb{A}} = \sigma\mathfrak{D}_{\mathbb{A}}\sigma^{-1}$ con la misma convención anterior. Un X -orden \mathfrak{D} es maximal sí y sólo si $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ es maximal para todo $\mathfrak{p} \in |X|$.

Observación 2.7.3. La definición de X -reticulado y X -orden se puede extender al espacio vectorial $\mathbb{F}_q(t)^n$ y al álgebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{F}_q(t))$ respectivamente, para cualquier entero positivo n [2]. Así por ejemplo, el haz \mathcal{O}_X es un X -orden en $\mathbb{F}_q(t)$. En particular, para el X -orden \mathcal{O}_X , tenemos que $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{F}_q$ es el cuerpo de constante de $\mathbb{F}_q(t)$.

Los X -reticulados, y en particular los X -órdenes, quedan unívocamente clasificados por sus completaciones en todos los lugares de $|X|$. En otras palabras:

- (i) Para cualquier par de X -reticulados Λ y Λ' en $\mathbb{F}_q(t)^2$, se tiene que $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \Lambda'_{\mathfrak{p}}$ para casi todo $\mathfrak{p} \in |X|$,
- (ii) si $\Lambda_{\mathfrak{p}} = \Lambda'_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in |X|$, entonces $\Lambda = \Lambda'$, y por último,
- (iii) cualquier familia $\{\Lambda''(\mathfrak{p})\}_{\mathfrak{p} \in |X|}$ que cumpla $\Lambda''(\mathfrak{p}) = \Lambda_{\mathfrak{p}}$ para casi todo \mathfrak{p} es la familia de completaciones de un X -reticulado Λ'' en $\mathbb{F}_q(t)^2$.

Para la recta proyectiva X , se define el conjunto de divisores de X , denotado por $\text{Div}(X)$, como el \mathbb{Z} -módulo libre con base $|X|$. Para una función racional $f \in \mathbb{F}_q(t)^*$, se define el divisor principal (f) como

$$(f) = \sum_{\mathfrak{p} \in |X|} \text{ord}_{\mathfrak{p}}(f) \mathfrak{p}.$$

Se demuestra que esta suma siempre es finita, lo que equivale a decir que $f \in \widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{p}}^*$ para casi todo \mathfrak{p} . Además existe la descomposición $(f) = (f)_0 - (f)_{\infty}$, donde $(f)_0 = \sum_{\text{ord}_{\mathfrak{p}}(f) > 0} \text{ord}_{\mathfrak{p}}(f) \mathfrak{p}$ y

$(f)_{\infty} = \sum_{\text{ord}_{\mathfrak{p}}(f) < 0} -\text{ord}_{\mathfrak{p}}(f) \mathfrak{p}$. En este caso, llamamos a $(f)_0$ el divisor de ceros de f y a $(f)_{\infty}$ el

divisor de polos de f . El grado de un divisor $D = \sum_{\mathfrak{p} \in |X|} a_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ es el número $\text{gr}(D) = \sum_{\mathfrak{p} \in |X|} a_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$.

Para los divisores D, D' , se cumple $\text{gr}(D + D') = \text{gr}(D) + \text{gr}(D')$. Un divisor D se llama divisor efectivo si todos sus coeficiente son positivos o 0. Para dos divisores D y D' , decimos que $D' \succeq D$ sí y solamente si $D' - D$ es un divisor efectivo. Dos divisores D, D' son linealmente equivalentes si existe $f \in \mathbb{F}_q(t)^*$ tal que $D' - D = (f)$. La notación para este caso es $D \equiv D'$. La equivalencia lineal es una relación de equivalencia.

Proposición 2.7.4. Para dos funciones $f, f' \in \mathbb{F}_q(t)^*$, se cumple que $(ff') = (f) + (f')$ y que $(f^{-1}) = -(f)$.

Proposición 2.7.5. Para todo $f \in \mathbb{F}_q(t)^*$, el divisor (f) tiene grado 0.

Corolario 2.7.5.1. Para $f \in \mathbb{F}_q(t)^*$, son equivalentes:

1. $(f) \succeq 0$,

2. $f \in \mathbb{F}_q$,
3. $(f) = 0$.

Corolario 2.7.5.2. Para $f, f' \in \mathbb{F}_q(t)^*$, se cumple $(f) = (f')$ sí y sólo si $f' = zf$, donde $z \in \mathbb{F}_q^*$.

Proposición 2.7.6. La equivalencia lineal tiene las siguientes propiedades:

1. $D \equiv 0$ sí y sólo si $D = (f)$ para algún $f \in \mathbb{F}_q(t)^*$.
2. $D \equiv D'$ implica $\deg(D) = \deg(D')$.
3. Si $D \equiv D'$ y $D'' \equiv D'''$, entonces $D + D'' \equiv D' + D'''$.

Ejemplo 2.7.7 (Ver [3]). Todo X -reticulado en el espacio 1-dimensional es de la forma

$$\mathfrak{L}^D(U) = \{f \in \mathbb{F}_q(t) : (f)|_U + D|_U \succeq 0\},$$

para todo abierto $U \subseteq X$ y un divisor D fijo. Estos reticulados se llaman fibrados invertibles y satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) Si $D \equiv D'$, entonces $\mathfrak{L}^D \cong \mathfrak{L}^{D'}$.
- (ii) $\mathfrak{L}^D \mathfrak{L}^{D'} = \mathfrak{L}^{D+D'}$, para cualquier par de divisores D y D' , donde $\mathfrak{L}^D \mathfrak{L}^{D'} \cong \mathfrak{L}^D \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{L}^{D'}$ queda definido como $(\mathfrak{L}^D \mathfrak{L}^{D'})(U) = \mathfrak{L}^D(U) \mathfrak{L}^{D'}(U)$, para cualquier abierto $U \subseteq X$.
- (iii) Si $\mathfrak{L}^D(U) \subseteq \mathfrak{L}^{D'}(U)$ para todo abierto $U \subseteq X$, entonces $D \preceq D'$.

Al X -reticulado Λ en $\mathbb{F}_q(t)^2$ se le asocia el orden $\mathfrak{D}_\Lambda = \text{End}_{\mathcal{O}_X}(\Lambda)$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q(t))$, definido en cada abierto $U \subseteq X$ por $\mathfrak{D}_\Lambda(U) = \{a \in \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q(t)) : a\Lambda(U) \subseteq \Lambda(U)\}$.

Proposición 2.7.8. \mathfrak{D}_Λ es un X -orden maximal en $\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q(t))$ y todo X -orden maximal \mathfrak{D} es de la forma $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_\Lambda$, para algún X -reticulado Λ en $\mathbb{F}_q(t)^2$. Se cumple que $\mathfrak{D}_\Lambda = \mathfrak{D}_{\Lambda'}$ sí y sólo si $\Lambda' = \mathfrak{L}\Lambda$, con \mathfrak{L} un fibrado invertible.

Ejemplo 2.7.9. (Ver [3, §1]) Llamamos al X -orden maximal $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_\Lambda$ en $\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q(t))$ asociado al reticulado Λ isomorfo a $\mathcal{O}_X \oplus \mathfrak{L}^D$, donde D es un divisor de X , un X -orden descompuesto.

Vemos que \mathfrak{D} tiene, en una cierta base de $\mathbb{F}_q(t)^2$, la siguiente forma:

$$\mathfrak{D}_D = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_X & \mathfrak{L}^{-D} \\ \mathfrak{L}^D & \mathcal{O}_X \end{pmatrix}.$$

Para dos X -órdenes maximales \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' , se define el X -orden de Eichler correspondiente como el X -orden $\mathfrak{E} = \mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}'$. Todo X -orden de Eichler queda completamente determinado por sus completaciones en todos los lugares de X , donde $\mathfrak{E}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{D}'_{\mathfrak{p}}$ en cada lugar \mathfrak{p} . Dos X -órdenes maximales \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' son conjugados si existe $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q(t))$ tal que cumple $\mathfrak{D}' = \sigma \mathfrak{D} \sigma^{-1}$, o de manera equivalente, $\mathfrak{D}'_{\mathfrak{p}} = \sigma \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} \sigma^{-1}$ para todo $\mathfrak{p} \in |X|$.

Ejemplo 2.7.10. Sean $\mathfrak{D} = \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_X)$ y \mathfrak{D}' tal que $\mathfrak{D}'_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in |X|$ y $\mathfrak{p} \neq \infty$, mientras que $\mathfrak{D}'_{\infty} = \pi_{\infty} \mathfrak{D}_{\infty} + \mathcal{O}_{\infty} I_2$. Para encontrar $\mathfrak{D}'(X)$, se considera el conjunto abierto $V = X - \{\infty\}$. Como se cumple $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{D}'_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in V$, entonces $\mathfrak{D}(V) = \mathfrak{D}'(V)$. Por otro lado $\mathfrak{D}'(X) \subset \mathfrak{D}'(V) = \mathfrak{D}(V) = \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[t])$ y $\mathfrak{D}'(X) \subset \mathfrak{D}'_{\infty}$. Eligiendo a $\pi_{\infty} = t^{-1}$ como parámetro uniformizante, tenemos que $\mathcal{O}_{\infty} = \mathbb{F}_q[[t^{-1}]]$, luego la igualdad a continuación sigue, para la matriz $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}'(X)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = t^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix},$$

donde $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[[t^{-1}]])$ y $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_q[[t^{-1}]] I_2$. Las condiciones que se tienen para los coeficientes de σ son:

$$b = 0, \quad c = 0, \quad a - j = t^{-1}e, \quad d - j = t^{-1}h.$$

Se sigue que $a, d = j$, y la conclusión es $\mathfrak{D}'(X) = \mathbb{F}_q I_2$. En particular, $\mathfrak{D}'(X)$ no posee idempotentes no triviales.

Teorema 2.7.11. [2, §4] Los X -órdenes maximales descompuestos \mathfrak{D}_D y $\mathfrak{D}_{D'}$ son conjugados sí y sólo si D es linealmente equivalente a D' o a $-D'$.

Observación 2.7.12. De ahora en adelante, llamamos a los X -reticulados y X -órdenes simplemente como reticulados y órdenes, al igual como en las definiciones del Capítulo 2.5. Por otro lado, el abierto V definido en el Ejemplo 2.7.10 juega un rol importante en los cálculos posteriores de esta Tesis. El estudio de fibrados se conecta con el estudio de grafos cocientes, dado que las clases de conjugación de fibrados son los vértices de ciertos cocientes del árbol de Bruhat-Tits que se definen en la Sección siguiente.

2.8 El árbol de Bruhat-Tits y su relación con el grupo de transformaciones de Moebius.

En esta sección se define el árbol de Bruhat-Tits, junto con una descripción de sus propiedades más importantes. Por otro lado, se explica en detalle la acción del grupo de transformaciones de Moebius sobre este árbol.

2.8.1 Existencia del árbol de Bruhat-Tits de $\mathbb{M}_2(K)$.

Sea K un cuerpo local no arquimediano con $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ su anillo de enteros, $\mathfrak{m}_K = \mathfrak{m}$ su único ideal maximal, $|\cdot| = |\cdot|_K$ su valor absoluto y $\pi \in K$ un parámetro uniformizante. Sea Λ un \mathcal{O} -reticulado de rango 2 en K^2 . Para $x \in K^*$, $x\Lambda$ es también un reticulado de K^2 . Se sigue que el grupo K^* actúa mediante homotecias en el conjunto de reticulados. Denotamos por $[\Lambda]$ a la órbita, o clase de homotecias, del reticulado Λ bajo esta acción. Llamamos $V(\mathfrak{T})$ al conjunto de órbitas. Sea Λ' un segundo \mathcal{O} -reticulado de rango 2 en K^2 . Por el Teorema de factores invariantes existe una \mathcal{O} -base $\{e_1, e_2\}$ de Λ y enteros a, b tales que $\{e_1\pi^a, e_2\pi^b\}$ es una \mathcal{O} -base para Λ' . El conjunto $\{a, b\}$ no depende de la elección de las bases para Λ y Λ' . De este modo, se tiene $\Lambda' \subset \Lambda$ sí y solo si $a, b \geq 0$, en cuyo caso Λ/Λ' es isomorfo a $(\mathcal{O}/\pi^a\mathcal{O}) \oplus (\mathcal{O}/\pi^b\mathcal{O})$. Reemplazar Λ y Λ' por $x\Lambda$ e $y\Lambda'$, con $x, y \in K^*$, cambia el conjunto $\{a, b\}$ por $\{a + c, b + c\}$, donde $c = \nu_K(y/x)$. Por lo tanto el entero $|a - b|$ depende sólo de las clases $[\Lambda]$ y $[\Lambda']$ de Λ y Λ' , respectivamente.

Definición 2.8.1. Sean Λ, Λ' dos reticulados en V . La *distancia entre sus clases* $[\Lambda], [\Lambda']$ se define como $d([\Lambda], [\Lambda']) = |a - b|$. Dos reticulados Λ y Λ' se dicen vecinos si $d([\Lambda], [\Lambda']) = 1$.

Observación 2.8.2. En [14] se muestra que el conjunto de órbitas de reticulados en K tiene estructura de grafo. Además este grafo es un árbol.

Considérese el reticulado $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \end{pmatrix}$. Si $[\Lambda]$ y $[\Lambda']$ son vecinos, entonces, salvo múltiplo escalar, se tiene $\Lambda' = \pi \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \end{pmatrix} + \mathcal{O} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, donde $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ y no están ambos en \mathfrak{m} . Se concluye que los vecinos de $[\Lambda]$ están en correspondencia con los subespacios de dimensión 1 en $(\mathcal{O}/\pi\mathcal{O})^2$. Si suponemos que $|\mathcal{O}/\pi\mathcal{O}| = q$, entonces hay $q + 1$ subespacios de dimensión 1, que en el grafo corresponden a $q + 1$ vecinos de $[\Lambda]$, es decir, $q + 1$ vértices unidos por aristas al vértice correspondiente a $[\Lambda]$. Lo anterior quiere decir que el árbol de clases de homotecias de reticulados en K tiene por cada uno de sus vértices $q + 1$ vértices vecinos. Nótese también que q depende exclusivamente del cuerpo residual \mathcal{O}/\mathfrak{m} . Para cada orden maximal $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{M}_2(K)$, existe un reticulado $\Lambda \subseteq K^2$ tal que $\mathfrak{D} = \text{End}_{\mathcal{O}}(\Lambda)$. El siguiente resultado nos indica cuándo dos órdenes maximales son iguales:

Proposición 2.8.3. Sean $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$ dos órdenes maximales en $\mathbb{M}_2(K)$ tales que $\mathfrak{D} = \text{End}_{\mathcal{O}}(\Lambda)$ y $\mathfrak{D}' = \text{End}_{\mathcal{O}}(\Lambda')$. Entonces $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'$ si y sólo si existe $k \in K^*$ que satisface $\Lambda = k\Lambda'$.

La Proposición 2.8.3 establece una biyección entre órdenes maximales en $\mathbb{M}_2(K)$ y las clases de reticulados $[L]$ en $V(\mathfrak{T})$. Esto nos dice que dos reticulados corresponden al mismo orden maximal si y solamente si están en la misma clase de homotecia.

Definición 2.8.4. El *árbol de Bruhat-Tits* $\mathfrak{T}(K)$ para $\mathbb{M}_2(K)$ es el grafo donde sus vértices son órdenes maximales en $\mathbb{M}_2(K)$, donde dos de ellos son vecinos si las clases de reticulados correspondientes son vecinas en \mathfrak{T} .

Para más detalle sobre el árbol de Bruhat-Tits, ver [1].

Observación 2.8.5. Dos órdenes \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' son vecinos si en alguna base de K^2 son de la forma:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}' = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi\mathcal{O} \\ \pi^{-1}\mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

2.8.2 El árbol de bolas asociado a K .

En esta subsección se analiza la correspondencia que existe entre el árbol de Bruhat-Tits de $\mathbb{M}_2(K)$ cuyos vértices son órdenes maximales $\mathfrak{D} \subseteq \mathbb{M}_2(K)$, con otro grafo donde los vértices son bolas cerradas de K . El objetivo es demostrar que estos grafos son isomorfos, es decir, existe una correspondencia biunívoca entre ellos que preserva la distancia entre sus vértices. Además, se demuestra que existe una forma natural de conjugar ramas en el árbol de Bruhat-Tits $\mathfrak{T}(K)$ en este contexto. Esto último se realiza vía transformaciones de Moebius.

Usamos, de ahora en adelante, la notación $B_a^{[r]} = B[a, |\pi^r|]$ para denotar la bola cerrada de centro $a \in K$ y radio $|\pi^r|$. Comenzamos con el siguiente Lema:

Lema 2.8.8. Sea $B = B(a, r)$ la bola abierta de centro a y radio r en K . Para todo $z \in B$, se tiene $B(z, r) = B$.

Demostración. Sea $b \in B(z, r)$. Por la desigualdad ultramétrica, es fácil obtener la desigualdad $|b - a| \leq \max\{|b - z|, |a - z|\} < r$, luego $b \in B$. Análogamente, si $b \in B$, se tiene la segunda desigualdad $|b - z| \leq \max\{|b - a|, |a - z|\} < r$. Se concluye que $B = B(z, r)$. \square

Observación 2.8.9. La demostración del Lema 2.8.8 se puede modificar para el caso de bolas cerradas.

Proposición 2.8.10. En K , dos bolas abiertas, o bien dos bolas cerradas, del mismo radio son iguales o son disjuntas.

Observación 2.8.11. Sean $B = B_a^{[r]}$ y $B' = B_a^{[s]}$ bolas en K con el mismo centro. El que las bolas cumplan $B' \subseteq B$, es equivalente a que $r \leq s$.

Proposición 2.8.12. Existe una correspondencia biunívoca entre bolas en K y órdenes maximales de $\mathbb{M}_2(K)$, dada por:

$$\Sigma : B = B_a^{[r]} \mapsto \mathfrak{D}_{\Lambda_B},$$

$$\text{donde } \Lambda_B = \left\langle \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle.$$

Demostración. Primero veamos que Σ está bien definida. Dadas las bolas iguales $B_a^{[r]} = B_b^{[r]}$,

se tiene $a - b \equiv 0 \pmod{\pi^r}$. Luego $a - b = t\pi^r$, con $t \in \mathcal{O}$. Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De esto se sigue que $\Lambda_{B_a^{[r]}} = \Lambda_{B_b^{[r]}}$. En particular, $\mathfrak{D}_{\Lambda_{B_a^{[r]}}} = \mathfrak{D}_{\Lambda_{B_b^{[r]}}}$.

Para verificar que Σ es sobreyectiva, tomemos \mathfrak{D}_Λ el orden maximal asociado al reticulado

$$\Lambda = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sabemos que $|b| \leq |d|$ o bien $|d| \leq |b|$. Sin pérdida de generalidad asumimos la desigualdad $|d| \leq |b|$. Observe que si $b = 0$ entonces $d = 0$, de donde Λ es un reticulado de rango 1 que corresponde a un orden maximal; pero esto es una contradicción. Luego debe cumplirse $b \neq 0$.

Entonces, como reticulados ponderados corresponden al mismo orden, se puede reemplazar el reticulado Λ por $b^{-1}\Lambda$ y asumir $b = 1$, de forma que \mathfrak{D}_Λ se corresponda con el reticulado:

$$\Lambda = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ donde } d \in \mathcal{O}. \text{ Restando } d \text{ por la primera columna a la segunda}$$

obtenemos que $\Lambda = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u\pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, donde u es unidad. Luego $\mathfrak{D}_\Lambda = \mathfrak{D}_{\Lambda_B}$, para

$B = B_a^{[r]}$. Por último, falta demostrar que la función Σ es inyectiva. Sean $B = B_a^{[r]}$ y $B' = B_b^{[s]}$ dos bolas tales que $\mathfrak{D}_{\Lambda_B} = \mathfrak{D}_{\Lambda_{B'}}$. Entonces por lo mencionado en la Proposición 2.8.3, existe $\lambda \in K^*$ tal que:

$$\Lambda_B = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda \left\langle \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^s \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda \Lambda_{B'}.$$

Sin pérdida de generalidad, $\lambda \in \mathcal{O}$. Como $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \in \lambda \Lambda_{B'}$, entonces existen $x, y \in \mathcal{O}$ tales

que $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda x \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda y \begin{pmatrix} \pi^s \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $1 = \lambda x$ y $a = b + \lambda y \pi^s$, es decir

$\lambda \in \mathcal{O}^*$ y $a \equiv b \pmod{\pi^s}$. Luego tenemos que $a \in B'$ y por lo tanto $B' = B_a^{[s]}$. De la misma

manera, como $\begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \in \lambda\Lambda_{B'}$, se tiene que $\begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda x' \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda y' \begin{pmatrix} \pi^s \\ 0 \end{pmatrix}$, para ciertos $x', y' \in \mathcal{O}$. De esta última igualdad se sigue que $\pi^r = \lambda y' \pi^s$. Por otro lado, como $\lambda \begin{pmatrix} \pi^s \\ 0 \end{pmatrix} = x'' \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} + y'' \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix}$, con $x'', y'' \in \mathcal{O}$, se sigue que $x'' = 0$ y $\lambda \pi^s = y'' \pi^r$. Luego $y' y'' = 1$, de donde $y, y'' \in \mathcal{O}^*$. Se concluye la igualdad $|\pi^r| = |\pi^s|$, y más aún, $B = B_a^{[r]} = B_a^{[s]} = B_b^{[s]} = B'$.

□

Es posible definir el grafo $\mathfrak{B}(K)$ en K , donde los vértices son las bolas $B[a, |\pi^r|]$ y dos bolas son vecinas sí y sólo si sus órdenes maximales asociados son vecinos. Sean $\mathfrak{D}_{\Lambda_B}, \mathfrak{D}_{\Lambda_{B'}}$ dos órdenes maximales asociados a los reticulados $\Lambda_B, \Lambda_{B'}$. En el caso de que \mathfrak{D}_{Λ_B} y $\mathfrak{D}_{\Lambda_{B'}}$ sean vecinos, entonces $\Lambda_B/\Lambda_{B'} \cong (\mathcal{O}/\mathcal{O}) \oplus (\mathcal{O}/\pi\mathcal{O})$. Podemos suponer por las igualdades (2.1) de la Observación 2.8.5, que $\Lambda_B = \left\langle \left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^r \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$. Los órdenes correspondientes a los $q + 1$ reticulados $\left\langle \left(\begin{pmatrix} a + a_i \pi^r \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^{r+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$ con $\mathcal{O}/\mathfrak{m} = \{\overline{a_1}, \dots, \overline{a_q}\}$ y $\left\langle \left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^{r-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\rangle$ son todos vecinos de \mathfrak{D}_{Λ_B} . Se sigue que estos son todos los vecinos de \mathfrak{D}_{Λ_B} , lo que motiva la siguiente definición:

Definición 2.8.13. Dos bolas B y B' de radios d y d' respectivamente se dicen vecinas si $B' \subseteq B$ y $d' = |\pi|d$ o a la inversa. Sea $\{a_i\}_{i=1}^p$ un conjunto de representantes de \mathcal{O}/\mathfrak{m} . Una bola fija $B_a^{[r]}$ tiene una bola vecina $B_a^{[r-1]}$ de radio mayor y $p = |\mathcal{O}/\mathfrak{m}|$ sub-bolas vecinas, a saber $B_i = B_{a+a_i\pi^r}^{[r+1]}$, las cuales satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $B_a^{[r]} = \bigcup_{i=1}^p B_i$.

(ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

Debido a (i) y (ii), el grafo de bolas es un árbol, al cual llamamos **árbol de Bruhat-Tits asociado a las bolas de K** y lo denotamos por $\mathfrak{B}(K)$. Este es isomorfo al árbol de Bruhat-Tits de órdenes maximales de $\mathbb{M}_2(K)$.

El conjunto de K -puntos se define como el espacio cociente

$$\mathbb{P}^1(K) = (K^2 \setminus \{(0, 0)\}) / \sim,$$

donde \sim es la menor relación de equivalencia que identifica el punto (x, y) con $(\lambda x, \lambda y)$, para cualquier $\lambda \in K^*$. Se denotan los puntos de $\mathbb{P}^1(K)$ como pares $[a : b]$. No es difícil ver que $\mathbb{P}^1(K) = \{[a : 1] : a \in K\} \cup \{[1 : 0]\}$. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$. El punto $\infty = [1 : 0]$ se llama punto en el infinito. Una función racional del tipo $\tau(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ donde sus coeficientes cumplen $ad - bc \neq 0$, se llama transformación de Moebius. Las transformaciones de Moebius son funciones $\mathbb{P}^1(K) \rightarrow \mathbb{P}^1(K)$ biyectivas, donde $\tau(\infty) = \frac{a}{c}$ y $\tau\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ si τ se define como arriba. De lo anterior se deduce que el conjunto de transformaciones de Moebius $\mathcal{M}(K)$ tiene estructura de grupo. En particular:

Lema 2.8.14. $\mathcal{M}(K)$ es isomorfo a $\text{PGL}_2(K)$.

Demostración. La función $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \tau_\sigma$, donde $\tau_\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ es un homomor-

fismo de grupos, ya que para $\sigma, \sigma' \in \text{GL}_2(K)$ con $\sigma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, se tiene que el producto

$\sigma\sigma' \in \text{GL}_2(K)$ y $\sigma\sigma' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & cb' + dd' \end{pmatrix}$. Por otro lado, se tiene la composición

$\tau_\sigma \circ \tau_{\sigma'}(z) = \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(a'c + c'd)z + cb' + dd'}$. Es evidente que es un homomorfismo epiyectivo. Si

$\tau_\sigma(z) = z$, entonces $b = c = 0$ ya que $\tau_\sigma(0) = 0$ y $\tau_\sigma(\infty) = \infty$. Como además $\tau_\sigma(1) = 1$, se tiene $a = c$. Se concluye con esto que el núcleo del homomorfismo es el subgrupo de matrices escalares K^* . Por el primer teorema de isomorfía, la demostración finaliza. \square

Observación 2.8.15. Para un subgrupo de matrices invertibles $J \subset \text{GL}_2(K)$, se denota por τ_J la imagen de J en $\mathcal{M}(K)$ dada por la función del Lema 2.8.14. Esta notación es de gran utilidad a partir del Capítulo 3 hasta el final de la Tesis.

Observación 2.8.16. En $\mathbb{P}^1(K)$, decimos que $B \subseteq \mathbb{P}^1(K)$ es una bola si B cumple las siguientes condiciones:

(i) Si $\infty \notin B$, entonces B es una bola en el sentido usual.

(ii) Si $\infty \in B$, entonces B es el complemento de una bola en K .

Para cualquier $\tau \in \mathcal{M}(K)$, el elemento $\tau(B)$ es una bola en $\mathbb{P}^1(K)$ para cada bola $B \subseteq \mathbb{P}^1(K)$.

En [5] se demuestra que el grupo transformaciones de Moebius actúan sobre las bolas en K vía $\tau.B = D$, para dos bolas B y D , sí y solamente si $\tau(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(D)$, donde $\mathcal{P}(B) = \{B^c, B_1, \dots, B_p\}$, $\tau(\mathcal{P}(B)) = \{\tau(B') : B' \in \mathcal{P}(B)\}$ y B_1, \dots, B_p son las bolas de radio menor a B que cumplen (i) y (ii) de la Definición 2.8.13. Observe que las bolas B_i son las sub-bolas vecinas de B y que toda partición de $\mathbb{P}^1(K)$ en $p + 1$ bolas y complementos de bolas es de este tipo.

Definición 2.8.17. El conjunto $\mathcal{P}(B)$ se llama *partición definida por B* .

Lema 2.8.18. Sea $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PGL}_2(K)$. Sea $\tau_\sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ la transformación de Moebius asociada a σ . Entonces $\sigma\mathfrak{D}_B\sigma^{-1} = \mathfrak{D}_D$ sí y solamente si $\tau_\sigma.B = D$.

Demostración. El grupo $\text{GL}_2(K)$ tiene por generadores a las matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\alpha, \beta \in K$ (ver [11] para los detalles). Luego basta demostrar que la equivalencia se cumple para τ_σ , donde σ es uno de los generadores anteriores. Consideremos la bola $B = B_a^{[r]}$ y la partición de \mathbb{P}_K^1 inducida por B que consiste en las bolas $B_i = B_{a+a_i\pi^r}^{[r+1]}$, para $i = 1, \dots, p$, y B^c .

(i) Si $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\tau_\sigma(z) = \alpha z$. Se tiene que $\tau_\sigma(B_i) = B_{\alpha(a+a_i\pi^r)}^{[\nu(\alpha)+r+1]}$. Supongamos que $|\alpha| = |\pi^s|$, entonces existe $m \in \mathcal{O}^*$ tal que $\alpha = m\pi^s$. Sea $a_j \in \mathcal{O}$ un representante de \mathcal{O}/\mathfrak{m} tal que $a_j \equiv a_i m \pmod{\pi}$. La igualdad $\tau_\sigma(B_i) = B_{\alpha a + a_j \pi^{r+s}}^{[r+s+1]}$ implica $\tau_\sigma(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(D)$, donde $D = B_{\alpha a}^{[r+s]}$. Para ver que $\tau_\sigma(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(D)$ es equivalente a $\sigma\mathfrak{D}_{\Lambda_B}\sigma^{-1} = \mathfrak{D}_{\Lambda_D}$, basta recordar que, por la Proposición 2.8.3, es suficiente ver que existe $u \in K^*$ tal que $\sigma\Lambda_B = u\Lambda_D$. Como

$$\begin{aligned}
\sigma\Lambda_B &= \left\langle \left(\begin{array}{c} \alpha a \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \alpha\pi^r \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\begin{array}{c} \alpha a \\ 1 \end{array} \right), m \left(\begin{array}{c} \pi^{r+s} \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\begin{array}{c} \alpha a \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \pi^{r+s} \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle \\
&= \Lambda_D,
\end{aligned}$$

la igualdad $\sigma\Lambda_B = u\Lambda_D$ se cumple para $u = 1$.

- (ii) Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\tau_\sigma(z) = z + \beta$. Se tiene que $\tau_\sigma(B_i) = B_{a+\beta+a_i\pi^r}^{[r+1]}$. Por lo tanto $\tau_\sigma(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(D)$, donde $D = B_{a+\beta}^{[r]}$. Como

$$\begin{aligned}
\sigma\Lambda_B &= \left\langle \left(\begin{array}{c} a + \beta \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \pi^r \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle \\
&= \Lambda_D,
\end{aligned}$$

la igualdad $\sigma\Lambda_B = u\Lambda_D$ se cumple para $u = 1$.

- (iii) Si $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\tau_\sigma(z) = z^{-1}$. La demostración en este caso depende de si $0 \in B$ o no. Supongamos que $0 \in B$. Por el Lema 2.8.8 se tiene que $B = B_0^{[r]}$. Para la bola $B_1 = B_0^{[r+1]}$ está la igualdad

$$\tau_\sigma(B_1) = \{x^{-1} : |x| \leq |\pi^{r+1}|\} = \left(B_0^{[-r]}\right)^c.$$

Se concluye con esto que $\tau_\sigma(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(D)$, donde $D = B_0^{[-r]}$. Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\sigma\Lambda_B &= \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \pi^r \end{array} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \pi^r \left(\begin{array}{c} \pi^{-r} \\ 0 \end{array} \right), \pi^r \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle \\
&= \pi^r \Lambda_D.
\end{aligned}$$

La igualdad $\sigma\Lambda_B = u\Lambda_D$ se cumple para $u = \pi^r$. Ahora, si $0 \notin B$, entonces $|a| > |\pi^r|$. Si $a = m\pi^s$, entonces el elemento π^{r-s} cumple $|\pi^{r-s}| < 1$. Sea $w = a + l\pi^r \in B$, con $l \in \mathcal{O}$. Se tiene $\tau_\sigma(w) = (a + l\pi^r)^{-1} = \pi^{-s}(m + l\pi^{r-s})^{-1}$. La siguiente congruencia sigue de lo anterior:

$$\frac{1}{m + l\pi^{r-s}} \equiv m^{-1} \pmod{\pi^{r-s}}.$$

Se sigue que:

$$\begin{aligned}
\tau_\sigma(w) &= \frac{\pi^{-s}}{m + l\pi^{r-s}} = \frac{1}{m\pi^s} + l'\pi^{r-2s} \\
&= a^{-1} + l'\pi^{r-2s},
\end{aligned}$$

con $l' \in \mathcal{O}$. Se tiene la contención $\tau_\sigma(B) \subseteq B_{a^{-1}}^{[r-2s]}$. Por otro lado, como $|a^{-1}| = |\pi^{-s}|$, se deduce por simetría la contención $\tau_\sigma\left(B_{a^{-1}}^{[r-2s]}\right) \subseteq B_a^{[r-2s+2s]} = B$. Por lo tanto la igualdad de bolas $\tau_\sigma(B) = B_{a^{-1}}^{[r-2s]}$. En particular, $\tau_\sigma(\mathcal{P}(B)) = \mathcal{P}(D)$, donde D es la bola $D = B_{a^{-1}}^{[r-2s]}$. Ahora:

$$\begin{aligned}
\sigma\Lambda_B &= \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ a \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \pi^r \end{array} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ a \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} -m^{-1}\pi^{r-s} \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle a \left(\begin{array}{c} a^{-1} \\ 1 \end{array} \right), a \left(\begin{array}{c} -m^{-2}\pi^{r-2s} \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle \\
&= \left\langle a \left(\begin{array}{c} a^{-1} \\ 1 \end{array} \right), a \left(\begin{array}{c} \pi^{r-2s} \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle \\
&= a\Lambda_D.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la igualdad $\sigma\Lambda_B = u\Lambda_D$ se cumple para $u = a$.

□

Observación 2.8.19. De la demostración del Lema 2.8.18 se deduce que si $\tau \in \mathcal{M}(K)$ satisface $\tau(\infty) = \infty$, entonces $\tau.B = D$ sí y solamente si $\tau(B) = D$.

De lo anterior, queda establecido un isomorfismo Σ de árboles con acción de grupo:

$$(\mathfrak{B}(K), \mathcal{M}(K)) \cong (\mathfrak{T}(K), \text{PGL}_2(K)),$$

donde la correspondencia entre vértices está dada por $\Sigma(B[a, |\pi^r|]) = \mathfrak{D}_\Lambda$ para el reticulado $\Lambda = \left\langle \left(\begin{array}{c} a \\ 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \pi^r \\ 0 \end{array} \right) \right\rangle$, y la correspondencia entre grupos es $\tau_\sigma \mapsto \sigma K^* \in \text{PGL}_2(K)$.

Observación 2.8.20. De ahora en adelante usamos la misma notación para ambos árboles de Bruhat-Tits, y los denotamos por $\mathfrak{T}(K)$.

A estas alturas de la Tesis es necesario mencionar el concepto de camino maximal. Para ello se indaga aún más en la estructura de $\mathfrak{T}(K)$. Se demuestra que los extremos de los caminos maximales en $\mathfrak{T}(K)$ están en correspondencia con los puntos de $\mathbb{P}^1(K)$. Recordemos que los vértices del árbol $\mathfrak{T}(K)$ pueden, sin pérdida de generalidad, identificarse con las bolas cerradas

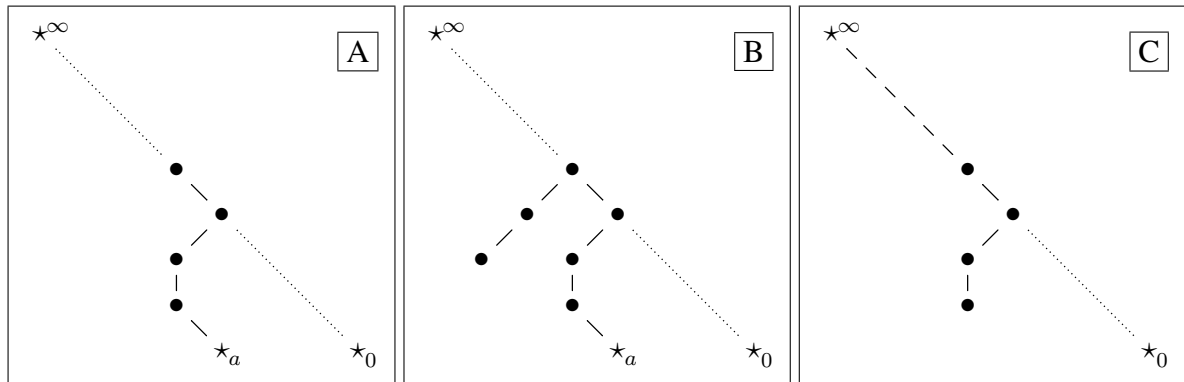


Figura 2.6: Distintos tipos de rayos en el árbol de Bruhat-Tits $\mathfrak{T}(K)$.

$B_a^{[r]}$, donde $a \in K$ y $r \in \mathbb{Z}$. Dadas dos bolas $B = B_a^{[r]}$ y $B' = B_a^{[s]}$, se cumple $B' \subseteq B$ sí y sólo si $s \geq r$. En la Figura 2.6 se muestran los posibles tipos de rayos que se dirigen a los puntos de $\mathbb{P}^1(K)$. En la Figuras 2.6.A y 2.6.B los rayos se dirigen hacia el elemento $a \in \mathbb{P}^1(K)$. Si $\{B_i\}_{i \geq 0}$ es el conjunto de vértices del rayo, entonces para todo $r \in \mathbb{Z}$ existe $i = i(r)$ tal que $B_i \subseteq B_a^{[r]}$. El rayo de la Figura 2.6.A se llama rayo descendente, mientras que el rayo de la Figura 2.6.B se llama eventualmente descendente. En ambos casos el elemento $a \in \mathbb{P}^1(K)$ se llama extremo inferior del árbol $\mathfrak{T}(K)$. Este rayo descendente se denota por $]a, B_0]$. El rayo de la Figura 2.6.C se dirige hacia $\infty \in \mathbb{P}^1(K)$. Se observa que si $\{B'_i\}_{i \geq 0}$ es el conjunto de vértices de este rayo, entonces para todo $r \in \mathbb{Z}$ existe $i = i(r)$ tal que $B_0^{[r]} \subseteq B'_i$. El rayo de la Figura 2.6.C se llama rayo ascendente, mientras que $\infty \in \mathbb{P}^1(K)$ es el único extremo superior del árbol. Este rayo ascendente se denota por $] \infty, B'_0]$. A continuación tenemos la siguiente definición:

Definición 2.8.21. Un *extremo* en $\mathfrak{T}(K)$ es un extremo inferior o el extremo superior de $\mathfrak{T}(K)$, tal como se ha definido anteriormente.

También queda claro, por la discusión anterior, la siguiente proposición:

Proposición 2.8.22 (Ver [6]). El conjunto de extremos de $\mathfrak{T}(K)$ está en biyección con los puntos en $\mathbb{P}^1(K)$.

Dados $a, b \in \mathbb{P}^1(K)$ distintos, el vértice $B_a^{[s]} \in V(\mathfrak{T}(K))$ donde $s = \nu_K(a - b)$, corresponde a la intersección de los rayos $]a, B_a^{[s]}$ y $]b, B_a^{[s]}$, como se ve en la Figura 2.7.B, 2.7.C. En la Figura 2.7.A la bola $B_0^{[r]}$ es el vértice de intersección de los rayos $]a, B_a^{[r]}$ y $] \infty, B_a^{[r]}$, donde $r = \nu_K(a)$. En la Figura 2.7.C, se cumple $r = s$. Un camino maximal en el árbol de Bruhat-Tits

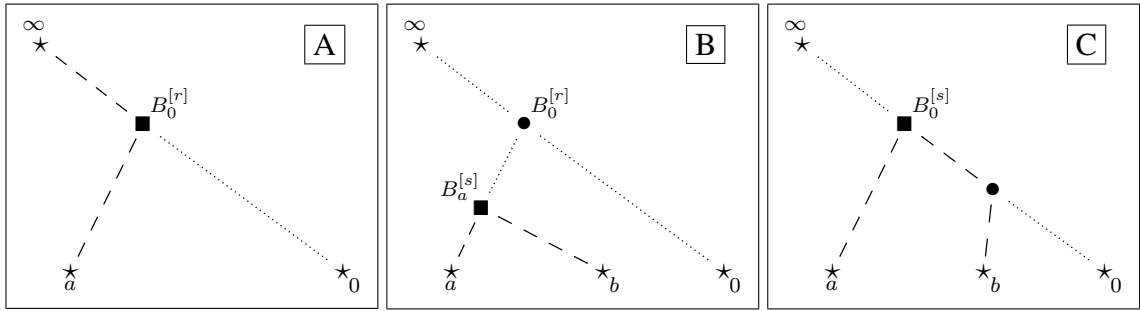


Figura 2.7: Intersección de rayos y caminos maximales en $\mathfrak{T}(K)$.

$\mathfrak{T}(K)$ se interpreta como la unión de dos rayos con un sólo vértice, el vértice inicial de cada rayo, en común. De la discusión anterior se tiene la siguiente Proposición:

Proposición 2.8.23. (ver [6]) Los extremos de un camino maximal en $\mathfrak{T}(K)$ son dos puntos $a, b \in \mathbb{P}^1(K)$ tales que $a \neq b$. Todo camino maximal en $\mathfrak{T}(K)$ está unívocamente determinado por sus extremos $a, b \in \mathbb{P}^1(K)$. Es decir, existe la correspondencia siguiente:

$$\{\text{caminos maximales en } \mathfrak{T}(K)\} \longleftrightarrow \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{P}^1(K), a \neq b\}.$$

Capítulo III

Grafos cocientes asociados a un divisor.

Resultados generales y polinomios lineales.

3.1 El grafo cociente $\tau_\Gamma \backslash \mathfrak{T}(K)$, donde $K = \mathbb{F}_q((t^{-1}))$ y sus recubrimientos.

En esta sección se muestra el primer cociente, y el principal, del árbol de Bruhat-Tits bajo cierto subgrupo de transformaciones de Moebius. Esta sección sustenta teóricamente los cálculos explícitos que se hagan durante el resto de la Tesis.

A partir de ahora y por el resto de la Tesis, trabajamos sobre el cuerpo local $K = \mathbb{F}_q((t^{-1}))$ (para los detalles ver Ejemplo 2.4.11). A lo largo de la Tesis, el grupo más grande que actúa sobre $\mathfrak{T}(K)$ es $\mathrm{PGL}_2(K)$. Por otro lado, para el grupo $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[t])$ tenemos su subgrupo de transformaciones de Moebius asociado $\tau_\Gamma \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_q[t])$, donde τ_Γ está descrito en la Observación 2.8.15 y el grafo cociente $\tau_\Gamma \backslash \mathfrak{T}(K)$ es el de la Figura 3.1 [14, §II.2.3]. Los vértices A_n , con $n = 0, 1, 2, \dots$ corresponden a las órbitas de las bolas $B_0^{[-n]}$, o equivalentemente, a las órbitas de los órdenes maximales $\mathfrak{D}_{n\infty}$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ [3, §2]. Recordemos que para $a \in \mathbb{P}^1(K)$ y $B \in \mathfrak{T}(K)$, el único rayo que tiene origen en B y se dirige a a es denotado por $]a, B]$. El único camino maximal determinado por el par $\{0, \infty\}$ es denotado por $]0, \infty[$, es decir, el conjunto de vértices de $]0, \infty[$ es $\{B_0^{[r]} : r \in \mathbb{Z}\}$. El rayo $] \infty, B_0^{[0]}$ es aquel cuyo conjunto de vértices es $\{B_0^{[-r]} : r \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Definición 3.1.1. [14, §II,2.4.1] Sea B un vértice del árbol de Bruhat-Tits $\mathfrak{T}(K)$. Decimos que B es un *vértice de tipo* n si está en la preimagen del vértice A_n del rayo $\tau_\Gamma \backslash \mathfrak{T}(K)$.

Proposición 3.1.2. En $\mathfrak{T}(K)$, para cada vértice de tipo 0, sus vecinos son vértices de tipo 1. Cada vértice de tipo $n \geq 1$ tiene sólo un vecino de tipo $n + 1$, y el resto de sus vecinos son de tipo $n - 1$.

Demostración. Supongamos que $B \in \mathfrak{T}(K)$ es un vértice de tipo 0, esto es, existe $\tau \in \tau_\Gamma$ tal que $\tau.B = B_0^{[0]}$. Sea $\{B_1, \dots, B_q, B^c\}$ la partición de $\mathbb{P}^1(K)$ definida por B . Como en el cociente $\tau_\Gamma \backslash \mathfrak{T}(K)$ el único vecino de A_0 es A_1 , se tiene que existen transformaciones de Moebius $\tau_1, \dots, \tau_q, \tau_{q+1} \in \tau_\Gamma$ que cumplen la igualdad:

$$\tau_1\tau(B_1) = \tau_2\tau(B_2) = \dots = \tau_q\tau(B_q) = \tau_{q+1}\tau(B^c) = B_0^{[-1]}.$$

Con esto se tiene que todos los vecinos de B son de tipo 1. Para el caso de los vértices de tipo $n \geq 1$, antes hay que notar que el vértice $B_0^{[-n]}$ tiene como conjunto de vecinos a $\{B_0^{[-n+1]}, B_{a_1 t^n}^{[-n+1]}, \dots, B_{a_{q-1} t^n}^{[-n+1]}, B_0^{[-n-1]}\}$. Eligiendo traslaciones del tipo $\tau_i(z) = z - a_i t^n$, es posible enviar cada una de las bolas $B_{a_1 t^n}^{[-n+1]}, \dots, B_{a_{q-1} t^n}^{[-n+1]}$ a $B_0^{[-n+1]}$. Ahora si B es un vértice de tipo $n \geq 1$, entonces existe $\tau' \in \tau_\Gamma$ tal que $\tau'.B = B_0^{[-n]}$, en particular, manda a los vecinos de B en los vecinos de $B_0^{[-n]}$. Como los vértices $B_0^{[-n-1]}$ y $B_0^{[-n+1]}$ están en órbitas distintas y son del tipo $n + 1$ y $n - 1$ respectivamente, esto concluye la demostración. \square

Corolario 3.1.2.1. Para cada vértice B de tipo 1 en $\mathfrak{T}(K)$ existe un único rayo con conjunto de vértices $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ que comienza en $B_1 = B$, donde B_n es un vértice de tipo n .

Observación 3.1.3. Sea $\tau_{\Gamma'}$ un subgrupo normal de τ_Γ . por lo discutido en el Capítulo 2.3, el grupo cociente $\tau_\Gamma/\tau_{\Gamma'}$ actúa sobre $\tau_{\Gamma'} \backslash \mathfrak{T}(K)$ con cociente $\tau_\Gamma \backslash \mathfrak{T}(K)$. En particular, $\tau_{\Gamma'} \backslash \mathfrak{T}(K)$ es un cubrimiento ramificado de $\tau_\Gamma \backslash \mathfrak{T}(K)$. Sean B y B' dos vértices de $\mathfrak{T}(K)$ que están en la misma $\tau_{\Gamma'}$ -órbita. Al ser $\tau_{\Gamma'}$ subgrupo de τ_Γ , se tiene que las órbitas de B y B' en $\tau_\Gamma \backslash \mathfrak{T}(K)$ son iguales. Luego el tipo de un vértice en $\tau_{\Gamma'} \backslash \mathfrak{T}(K)$ está bien definido.

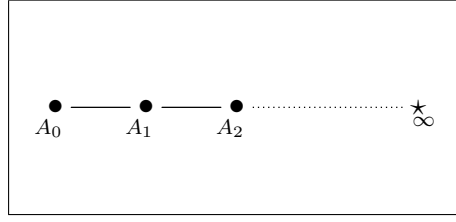


Figura 3.1: Grafo cociente $\tau_\Gamma \backslash \mathfrak{Z}(K)$.

3.1.1 Los grafos cocientes $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{Z}(K)$ y $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{Z}(K)$

Sea $V \subseteq X$ el abierto definido en el Ejemplo 2.7.10. Para el divisor de ceros D_N del polinomio no constante $N \in \mathbb{F}_q[t]$ se define el orden de Eichler $\mathfrak{E} = \mathbb{M}_2(\mathcal{O}_X) \cap \mathfrak{D}_{D_N}$, donde

$$\mathfrak{D}_{D_N} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_X & \mathfrak{L}^{D_N} \\ \mathfrak{L}^{-D_N} & \mathcal{O}_X \end{pmatrix}$$

es un orden maximal descompuesto. De las igualdades

$$\mathfrak{L}^{D_N}(V) = \frac{1}{N}\mathbb{F}_q[t] \text{ y } \mathfrak{L}^{-D_N}(V) = N\mathbb{F}_q[t]$$

se tiene la igualdad $\mathfrak{E}(V) = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q[t] & \mathbb{F}_q[t] \\ N\mathbb{F}_q[t] & \mathbb{F}_q[t] \end{pmatrix}$. Es evidente que $\mathfrak{E}(V) \subseteq \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[t])$ y $\mathfrak{E}(V)^* \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[t])$. Por otro lado, sea el homomorfismo de grupos:

$$\varrho_N : \text{GL}(\mathbb{F}_q[t]) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[t]/N\mathbb{F}_q[t])$$

definido por,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \pmod{N} & b \pmod{N} \\ c \pmod{N} & d \pmod{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{N},$$

denotamos por Γ_N el núcleo ϱ_N . Como

$$\Gamma_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[t]) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\},$$

se tiene que Γ_N es subgrupo normal de $\mathfrak{E}(U)^*$ y de Γ .

El siguiente Lema es de ayuda en la construcción de grupos cocientes de $\mathcal{M}(K)$.

Lema 3.1.4. Sean G, H grupos y $\psi : G \rightarrow H$ un epimorfismo de grupos. Si N es un subgrupo normal de G , entonces $\psi(N)$ es un subgrupo normal de H .

Demostración. Para cualquier $h \in H$ existe $g \in G$ tal que $\psi(g) = h$. Luego:

$$\begin{aligned} h\psi(N)h^{-1} &= \psi(g)\psi(N)\psi(g)^{-1} \\ &= \psi(g)\psi(N)\psi(g^{-1}) \\ &= \psi(gNg^{-1}) \\ &= \psi(N). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\psi(N)$ es un subgrupo normal de H . □

Observación 3.1.5. El objetivo en los capítulos siguientes es calcular $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{I}(K)$. Para dicho fin, se recurre al hecho de que $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{I}(K)$ es un recubrimiento ramificado de $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{I}(K)$. Como Γ_N es un subgrupo normal de $\mathfrak{E}(V)^*$, por el Lema 3.1.4 el grupo $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*}$ tiene a τ_{Γ_N} por subgrupo normal. Una forma de simplificar el análisis es estudiando la acción del grupo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} / \tau_{\Gamma_N}$ sobre el grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{I}(K)$, para después aplicar el Lema 2.2.3. El cálculo de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{I}(K)$ es más simple dado que Γ_N es subgrupo normal de Γ .

Un resultado que ayudará a cumplir este propósito es el siguiente:

Teorema 3.1.6. Para cualquier X -orden \mathfrak{D} que cumple $\mathfrak{D}(V) = \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[t])$, se tiene que el estabilizador de \mathfrak{D}_∞ en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[t])$ es $\mathbb{F}_q^* \mathfrak{D}(X)^*$.

Demostración. Como todo $\sigma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[t])$ cumple $\sigma \mathfrak{D}(V) \sigma^{-1} = \mathfrak{D}(V)$, entonces tenemos $\sigma K^* \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q[t])}(\mathfrak{D}_\infty)$ es equivalente a que $\sigma \mathfrak{D}_p \sigma^{-1} = \mathfrak{D}_p$, para todo $\mathfrak{p} \in |X|$. Por el Teorema 2.5.10, se tiene que $\sigma \in \mathbb{F}_q(t)_p^* \mathfrak{D}_p^*$. Luego $\sigma = \lambda_p \rho_p$, con $\lambda_p \in \mathbb{F}_q(t)_p^*$, $\rho_p \in \mathfrak{D}_p^*$. En particular, $\det(\sigma) = \lambda_p^2 \det(\rho_p)$. Como $\det(\sigma) \in \mathcal{O}_p^*$ en casi todo lugar \mathfrak{p} , lo mismo se tiene de λ_p . Se define a continuación el divisor $D = \sum_p \nu_p(\lambda_p) \mathfrak{p}$. Por la igualdad del determinante anterior se tiene la identidad $2D = (\det(\sigma))$. Luego D es de grado 0 y $D = (f)$, para algún $f \in \mathbb{F}_q(t)^*$. Se sigue que $f^{-1} \sigma \in \mathfrak{D}_p^*$, para todo \mathfrak{p} . Lo anterior equivale a $f^{-1} \sigma \in \mathfrak{D}(X)^*$, es decir $\sigma \in \mathbb{F}_q(t)^* \mathfrak{D}(X)^*$. □

Ejemplo 3.1.7. Para el caso $q = 2$, que asumiremos en el Capítulo 3, se tiene $GL_2(\mathbb{F}_2[t]) = \Gamma$. Mediante el homomorfismo ϱ_N y el primer Teorema de isomorfía, es claro el homomorfismo inyectivo

$$\Gamma/\Gamma_N \hookrightarrow \Delta_{N,2},$$

donde $\Delta_{N,2} = SL_2(\mathbb{F}_2[t]/N\mathbb{F}_2[t])$. Es más, por el Teorema de Aproximación Fuerte (Teorema 2.6.7), se tiene el isomorfismo $\Gamma/\Gamma_N \cong \Delta_{N,2}$. Este resultado es de ayuda en las Secciones 4.1, 4.2 y 4.3.

3.2 S-grafos y C-grafos

Esta sección sirve como motivación de porqué es importante la acción del árbol de Bruhat-Tits bajo ciertos subgrupos de transformaciones de Moebius.

Para un X -orden \mathfrak{D} en $\mathbb{M}_2(F)$, donde $F = \mathbb{F}_q(t)$ es el cuerpo global de funciones racionales de la Sección 2.7, el S-grafo se define como el cociente $S_\infty(\mathfrak{D}) = \Gamma_0 \backslash \mathfrak{T}(\mathbb{F}_q((t^{-1})))$, donde el grupo $\Gamma_0 = \mathbb{F}_q^* \mathfrak{D}(V)^* / \mathbb{F}_q^*$ se identifica con el subgrupo $\tau_{\mathfrak{D}(V)^*}$ de transformaciones de Moebius. En un contexto más general, los S-grafos son estudiados inicialmente por Serre y definidos por grupos de unidades de órdenes maximales en un lugar \mathfrak{p} arbitrario. El C-grafo se define como el cociente $C_\infty(\mathbb{M}_2(\mathcal{O}_X)) = \Gamma'_0 \backslash \mathfrak{T}(\mathbb{F}_q((t^{-1})))$ donde Γ'_0 es el estabilizador en $PGL_2(K)$ del orden $\mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[t])$. Para un orden \mathfrak{F} de rango maximal, que es maximal en el lugar ∞ y que además cumple la condición $\mathfrak{F}(V) = \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[t])$, el orden maximal \mathfrak{F}_∞ se identifica con un vértice del árbol de Bruhat-Tits $\mathfrak{T}(\mathbb{F}((t^{-1})))$ y la clase de conjugación de \mathfrak{F} mediante Γ'_0 se identifica con un vértice de C_∞ . Como en esta Tesis sólomente se trabaja con el lugar ∞ de grado 1, se tiene que S_∞ y C_∞ son isomorfos en el caso del orden $\mathbb{M}_2(\mathcal{O}_X)$, siendo isomorfos a su vez con el grafo de la Figura 3.1. [2], [3]. Una consecuencia del Teorema de Grothendieck-Birkhoff es la siguiente:

Teorema 3.2.1. Asumiendo que $X = \mathbb{P}^1$ es la recta proyectiva, todo X -orden maximal \mathfrak{D} es descompuesto.

Definición 3.2.2. El *nivel* de un X -orden de Eichler \mathfrak{E} como el divisor

$$\lambda(\mathfrak{E}) = \sum_{P \in |X|} d(\mathfrak{D}_P, \mathfrak{D}'_P)P,$$

donde $d(\mathfrak{D}_P, \mathfrak{D}'_P)$ es la distancia de los órdenes \mathfrak{D}_P y \mathfrak{D}'_P vistos como vértices del árbol de Bruhat-Tits $\mathfrak{T}(F_P)$.

Por lo discutido en la Sección 2.7, es claro que $d(\mathfrak{D}_P, \mathfrak{D}'_P) = 0$ para caso todo P . Además $\lambda(\mathfrak{E})$ es un divisor efectivo. Desde un punto de vista geométrico, \mathfrak{E} se puede ver como una cuadrícula en el producto de árboles $\prod_Q \mathfrak{T}(F_Q)$, donde Q recorre los lugares de F que cumplen $d(\mathfrak{D}_Q, \mathfrak{D}'_Q) > 0$. En un contexto más general, para un orden \mathfrak{D} , ya sea maximal o de Eichler, sobre una curva proyectiva no singular, su C-grafo es un cociente de su S-grafo [3]. Como ya sabemos, los vértices de un C-grafo están en correspondencia con clases de conjugación de órdenes. La importancia de calcular el S-grafo de un orden es que nos permite entender de mejor manera la estructura del C-grafo que lo recubre.

3.3 Cálculo del grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{T}(K)$ asociado a un polinomio lineal.

En esta sección se encuentran los cálculos explícitos asociado a un polinomio lineal. El resultado principal es que el camino maximal $]0, \infty[$ es un dominio fundamental de la acción de $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*}$ sobre $\mathfrak{T}(K)$.

Consideramos el cuerpo local K de la Sección 3.1. Sea $N = t - \alpha$, cuyo divisor de ceros es $D_N = [\alpha : 1]$. El objetivo es calcular el grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{T}(K)$, donde el grupo $\mathfrak{E}(V)^*$ está descrito en detalle en la Sección 3.1.1. Por la Observación 3.1.5, partimos estudiando la acción de τ_{Γ_N} en $\mathfrak{T}(K)$. Para fijar la notación, en lo que sigue $\tau = \tau_\sigma(z)$ es la transformación de Moebius que corresponde a la matriz $\sigma \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[t])$. En este capítulo, la inversión es

$\iota(z) = z^{-1}$. Es fácil observar que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \Gamma_N$.

Sea $a \in K$ tal que $|a| > 1$ (Figura 3.2.A). El elemento a es de la forma

$$a = \sum_{j=0}^{-\nu_K(a)} a_j t^j + \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} t^{-i},$$

donde $a_l \in \mathbb{F}_q$ para todo entero $l \leq -\nu_K(a)$ y $a_{-\nu_K(a)} \neq 0$. Sea $a' = \sum_{j=0}^{-\nu_K(a)} a_j t^j$ la parte polinomial de a . Por el algoritmo de la división de polinomios, se tiene $a' = Nb + b'$, donde $b \in \mathbb{F}_q[t]$ y $b' \in \mathbb{F}_q$. Definiendo $f = Nb$, se tiene que $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & -f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_N$ y $|\tau_\gamma(a)| \leq 1$.

En particular,

$$\begin{aligned} \tau_\gamma \cdot \left[B_0^{[-\nu_K(a)]}, B_a^{[\nu_K(\tau_\gamma(a))]} \right] &= \left[B_0^{[-\nu_K(a)]}, B_0^{[\nu_K(\tau_\gamma(a))]} \right] \text{ y} \\ \tau_\gamma \cdot \left[a, B_a^{[\nu_K(\tau_\gamma(a))+1]} \right] &= \left[\tau_\gamma(a), B_{\tau_\gamma(a)}^{[\nu_K(\tau_\gamma(a))+1]} \right], \end{aligned}$$

tal como se muestra en la Figura 3.2.B. Si ocurre el caso $\tau_\gamma(a) = 0$, entonces el proceso se ve tal como muestra la Figura 3.2.C.

Como se dijo al principio, la ventaja de que Γ_N sea un subgrupo normal de Γ es que se pueden aprovechar las simetrías de $\mathfrak{T}(K)$ que no están en τ_{Γ_N} , ya que para todo $\mu \in \Gamma$ se cumple $\mu\Gamma_N\mu^{-1} = \Gamma_N$. La condición de normalidad se aprovecha en el caso de un elemento $a \in K$ que satisface $|a| < 1$ (Figura 3.3.A), quedando $|\iota(a)| > 1$. Por lo ya discutido en el párrafo anterior, existe una traslación $\tau = \tau_\sigma$ con $\sigma \in \Gamma_N$, tal que $|\tau\iota(a)| \leq 1$ y $\tau \cdot B_{\iota(a)}^{[s]} = B_0^{[s]}$, para todo $-\nu_K(a) \leq s \leq \nu_K(\tau\iota(a))$ y siendo $\nu_K(\tau\iota(a))$ maximal con esta propiedad. Por otro lado, existe $\phi \in \Gamma_N$ tal que $\iota\tau\iota = \tau_\phi$. Si $\tau\iota(a) = 0$, entonces τ_ϕ cumple $\tau_\phi \cdot B_a^{[\nu_K(a)+s]} = B_0^{[\nu_K(a)-s]}$ para $0 \leq s$ (Figura 3.3.C). Si $0 < |\tau\iota(a)| < 1$, entonces $|\tau_\phi(a)| > 1$ y $\tau_\phi \cdot B_a^{[\nu_K(a)+s]} = B_0^{[\nu_K(a)-s]}$, para $0 \leq s \leq \nu_K(a) + \nu_K(\tau\iota(a))$. En otras palabras, se cumple

$$\begin{aligned} \tau_\phi \cdot \left[B_0^{[\nu_K(a)]}, B_a^{[2\nu_K(a)+\nu_K(\tau\iota(a))]} \right] &= \left[B_0^{[-\nu_K(\tau\iota(a))]}, B_0^{[\nu_K(a)]} \right] \text{ y} \\ \tau_\phi \cdot \left[a, B_a^{[2\nu_K(a)+\nu_K(\tau\iota(a))+1]} \right] &= \left[\tau_\phi(a), B_{\tau_\phi(a)}^{[-\nu_K(\tau\iota(a))+1]} \right]. \end{aligned}$$

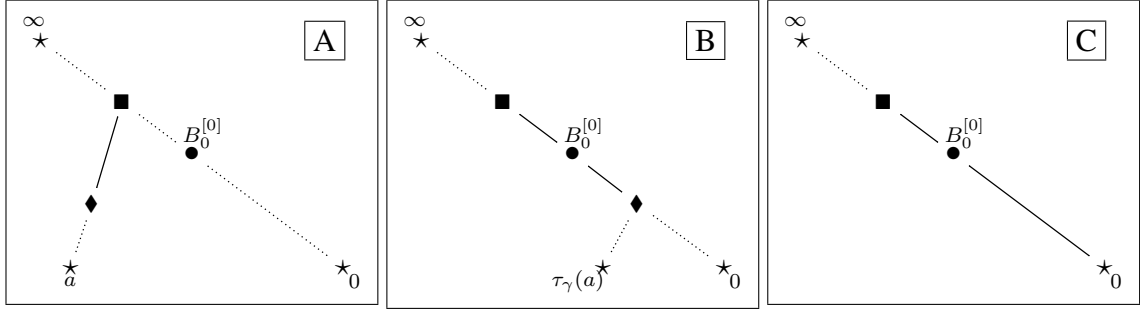


Figura 3.2: Acción de la traslación $\tau_\gamma \in \tau_{\Gamma_N}$ sobre $\mathfrak{T}(K)$.

El detalle geométrico está en la Figura 3.3.B. Para el caso $|\tau_\iota(a)| = 1$, procedemos como en el siguiente párrafo.

Si $|a| = 1$ (Figura 3.4.A), entonces existe $a_0 \in \mathbb{F}_q^*$ tal que $|a - a_0| < 1$. Con ayuda de la transformación de Moebius $\tau_\sigma(z) = z - a_0$ se tiene la igualdad $|\tau_\sigma(a)| = |a - a_0|$ y $\tau_\sigma \cdot B_{a_0}^{[s]} = B_0^{[s]}$, con $0 \leq s \leq \nu_K(\tau_\sigma(a))$. Sea $\tau_\phi \in \tau_{\Gamma_N}$ la transformación de Moebius del párrafo anterior. La conjugación $\tau_\epsilon = \tau_\sigma^{-1} \tau_\phi \tau_\sigma$ es un elemento de τ_{Γ_N} y cumple la igualdad de bolas $\tau_\epsilon \cdot B_a^{[\nu_K(\tau_\sigma(a))+s]} = B_{a_0}^{[\nu_K(\tau_\sigma(a))-s]}$ para $0 \leq s \leq \nu_K(\tau_\sigma(a))$. Si $\tau_\phi \tau_\sigma(a) = \infty$, entonces la transformación τ_ϵ satisface $\tau_\epsilon \cdot]a, B_a^{[\nu_K(\tau_\sigma(a))}] =]\infty, B_a^{[\nu_K(\tau_\sigma(a))}]$ (Figura 3.4.C). En caso contrario, existe $r_0 > 0$ maximal con la propiedad

$$\tau_\epsilon \cdot [B_a^{[\nu_K(\tau_\sigma(a))]}, B_a^{[2\nu_K(\tau_\sigma(a))+r_0]}] = [B_0^{[-r_0]}, B_a^{[\nu_K(\tau_\sigma(a))]}]$$

y además

$$\tau_\epsilon \cdot]a, B_a^{[2\nu_K(\tau_\sigma(a))+r_0+1]} =]\tau_\epsilon(a), B_a^{[-r_0+1]}].$$

Por principio de dominancia, $|\tau_\epsilon(a)| = |\tau_\phi \tau_\sigma(a)| > 1$ (Figura 3.4.B).

Sea $\mathfrak{P} = (\{p\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ el grafo que consiste solamente en el vértice p , sin aristas. Para los rayos $]a_i, B_0^{[0]}]$, con $a_i \in \mathbb{F}_q$, sea \mathfrak{Q} el grafo que consiste en la suma amalgamada de los rayos $]a_i, B_0^{[0]}]$ con respecto a la familia de morfismos de grafos $T_i : \mathfrak{P} \rightarrow]a_i, B_0^{[0]}]$ definidos por $T_{iV}(p) = B_0^{[0]}$ [4, §2]. Es evidente que el grafo \mathfrak{Q} es un árbol. Su estructura viene dada por la Figura 3.5. El análisis anterior es necesario para demostrar lo siguiente:

Proposición 3.3.1. El grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ es isomorfo a \mathfrak{Q} .

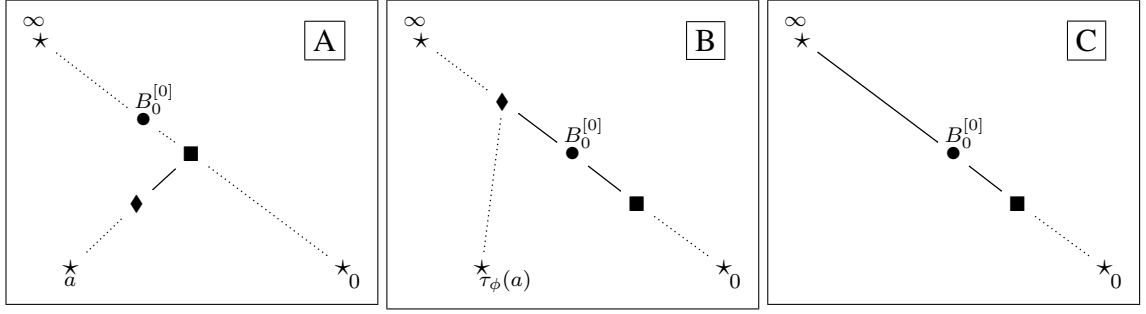


Figura 3.3: Acción de la transformación $\tau_\phi \in \tau_{\Gamma_N}$ sobre $\mathfrak{T}(K)$.

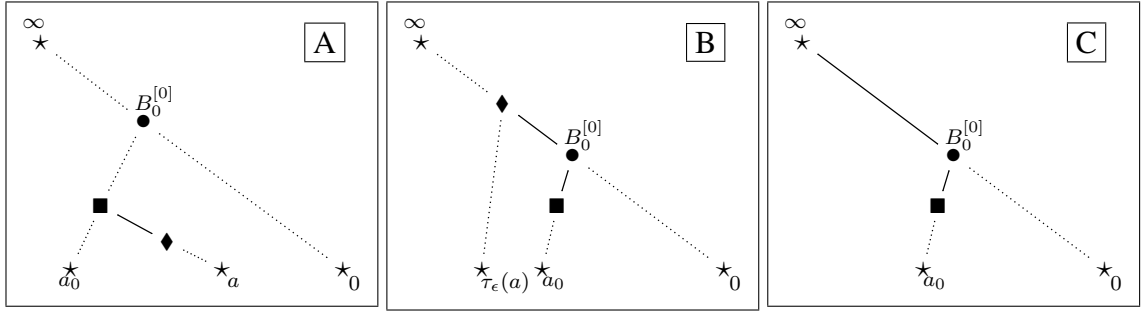


Figura 3.4: Acción de la transformación $\tau_\epsilon \in \tau_{\Gamma_N}$ sobre $\mathfrak{T}(K)$.

Demostración. Sea $B = B_a^{[l]} \in \mathfrak{T}(K)$ un vértice. Probaremos primero que hay un vértice de la órbita de B en el conjunto Ω . Si $a \in \mathbb{F}_q$, entonces B es un vértice de Ω . Si $l \leq 0$, entonces ya se sabe por la discusión anterior que existe una traslación τ_γ , con $\gamma \in \Gamma_N$, tal que $\tau_\gamma \cdot B_a^{[0]} \in [B_0^{[0]}, \infty[$, por lo que lo mismo ocurre para la bola B que contiene a $B_a^{[0]}$. Esto reduce la demostración a los vértices $B = B_a^{[l]}$ para los cuales $l > 0$. Si $|a| > 1$, entonces existe traslación $\tau_\gamma \in \tau_{\Gamma_N}$ tal que $\tau_\gamma \cdot B_a^{[0]} = B_0^{[0]}$, $\tau_\gamma \cdot B_a^{[l]} = B_{\tau_\gamma(a)}^{[l]}$ y $|\tau_\gamma(a)| \leq 1$. Ergo, sin pérdida de generalidad, se puede asumir $0 < |a| \leq 1$. El resto de la demostración se divide en dos partes:

- (i) Sea $|a| < 1$. Se puede suponer $0 < \nu_K(a) < l$ y la bola $B_0^{[\nu_K(a)]}$ es vértice común de los rayos $]a, B_0^{[\nu_K(a)]}]$ y $]0, B_0^{[\nu_K(a)]}]$. Sea $\tau_\phi \in \tau_{\Gamma_N}$ que cumple $|\tau_\phi(a)| > 1$ y $\tau_\phi \cdot B_a^{[\nu_K(a)+s]} = B_0^{[\nu_K(a)-s]}$, para $0 \leq s \leq \nu_K(a)$. En el caso de que $\tau_\phi(a) = \infty$, automáticamente la bola $\tau_\phi \cdot B$ es un vértice del rayo $] \infty, B_0^{[\nu_K(a)]}$. En otro caso, existe $r_0 > 0$ maximal con la propiedad $\tau_\phi \cdot [B_0^{[\nu_K(a)]}, B_a^{[2\nu_K(a)+r_0]}] = [B_0^{[-r_0]}, B_0^{[\nu_K(a)]}]$. La demostración concluye si $\nu_K(a) \leq l \leq 2\nu_K(a) + r_0$. En el caso de que $2\nu_K(a) + r_0 < l$, entonces se tiene $\tau_\phi \cdot [B_a^{[2\nu_K(a)+r_0+1]}, B_a^{[l]}] = [B_{\tau_\phi(a)}^{[-r_0+1]}, B_{\tau_\phi(a)}^{[l-2\nu_K(a)-2r_0]}]$. En esta última

situación el algoritmo de la división nos permite considerar una traslación $\tau_\gamma \in \tau_{\Gamma_N}$ que satisface $|\tau_\gamma \tau_\phi(a)| \leq 1$ y $\tau_\gamma \cdot [B_0^{[-r_0]}, B_{\tau_\phi(a)}^{[\nu_K(\tau_\gamma \tau_\phi(a))]}] = [B_0^{[-r_0]}, B_0^{[\nu_K(\tau_\gamma \tau_\phi(a))]}]$. Si $\nu_K(\tau_\gamma \tau_\phi(a)) = \infty$ o $-r_0 + 1 \leq l - 2\nu_K(a) - 2r_0 \leq \nu_K(\tau_\gamma \tau_\phi(a))$, entonces $\tau_\gamma \tau_\phi \cdot B$ es un vértice del rayo $]0, B_0^{[-r_0]}$ o del camino $[B_0^{[-r_0]}, B_0^{[\nu_K(\tau_\gamma \tau_\phi(a))]}]$ y la demostración concluye. En otro caso $0 \leq \nu_K(\tau_\gamma \tau_\phi(a)) < \infty$ y $\nu_K(\tau_\gamma \tau_\phi(a)) + 2\nu_K(a) + 2r_0 < l$. El en caso de que $|\tau_\gamma \tau_\phi(a)| < 1$, la transformación $\tau_\gamma \tau_\phi$ cumple $\tau_\gamma \tau_\phi \cdot B = B_{\tau_\gamma \tau_\phi(a)}^{[l - 2\nu_K(a) - \nu_K(\tau_\gamma \tau_\phi(a)) - 2r_0]}$ y vuelve a reanudarse el proceso. El caso $|\tau_\gamma \tau_\phi(a)| = 1$ se estudia de manera independiente como sigue a continuación.

- (ii) Sea $|a| = 1$. Si $a \in \mathbb{F}_q^*$, entonces la bola B ya pertenece a una de las cúspides del tipo $]a', B_0^{[0]}$, para algún $a' \in \mathbb{F}_q^*$, y la demostración concluye. Si $a \notin \mathbb{F}_q^*$, existe un único $a_0 \in \mathbb{F}_q^*$ tal que $|a - a_0| < 1$. Considere la transformación de Moebius $\tau_\epsilon \in \tau_{\Gamma_N}$ que cumple $|\tau_\epsilon(a)| \geq 1$ y $\tau_\epsilon \cdot [B_{a_0}^{[\nu_K(a-a_0)]}, B_a^{[2\nu_K(a-a_0)]}] = [B_{a_0}^{[\nu_K(a-a_0)]}, B_0^{[0]}]$. Si $\tau_\epsilon(a) = \infty$, entonces $\tau_\epsilon \cdot B$ es un vértice del rayo $] \infty, B_a^{[\nu_K(a-a_0)]}$ y la demostración concluye. Si $1 < |\tau_\epsilon(a)| < \infty$, entonces existe $r_0 > 0$ que cumple la condición $\tau_\epsilon \cdot [B_{a_0}^{[\nu_K(a-a_0)]}, B_a^{[2\nu_K(a-a_0)+r_0]}] = [B_0^{[-r_0]}, B_{a_0}^{[\nu_K(a-a_0)]}]$. Puede considerarse a $r_0 > 0$ maximal con esa propiedad. La demostración concluye cuando se cumple la condición $\nu_K(a - a_0) + 1 \leq l \leq 2\nu_K(a - a_0) + r_0$, en caso contrario se procede como en (i). En el caso de que se tenga la igualdad $|\tau_\epsilon(a)| = 1$ se repite nuevamente el mismo procedimiento.

Para ver que este proceso avanza, tenemos el Lema:

Lema 3.3.2. Si B es un vértice de $\mathfrak{T}(K)$ tal que $d(B, \Omega) = 1$, entonces existe B' en la órbita de B tal que B' es un vértice del árbol Ω .

Demostración. Sea $B = B_a^{[r]}$. Si $|a| > 1$, entonces $\nu_K(a) = r - 1 < 0$. Por lo visto anteriormente, existe una traslación τ_γ tal que $\gamma \in \Gamma_N$ y $|\tau_\gamma(a)| \leq 1$. En particular, ya vimos que $\tau_\gamma \cdot B_a^{[s]} = B_0^{[s]}$ para todo $-\nu_K(a) \leq s \leq \nu_K(\tau_\gamma(a))$. La bola $\tau_\gamma \cdot B$ es un vértice del árbol Ω . Si $|a| = 1$, entonces existe $a_0 \in \mathbb{F}_q^*$ tal que la bola B es vecina a la bola $B_{a_0}^{[\nu_K(a-a_0)]}$.

Es evidente que $\nu_K(a - a_0) > 0$, en particular $r = \nu_K(a - a_0) + 1$. Considerando la transformación de Moebius $\tau_\phi \in \tau_{\Gamma_N}$ que cumple la propiedad de la Figura 3.4 y $|\tau_\phi(a)| \geq 1$, se tiene que $\tau_\phi.B = B_{a_0}^{[\nu_K(a-a_0)-1]}$ es una bola del árbol Ω . Finalmente si $|a| < 1$, entonces $\nu_K(a) > 0$ y $r = \nu_K(a) + 1$. Por lo visto anteriormente, existe $\tau_\phi \in \tau_{\Gamma_N}$ tal que $|\tau_\phi(a)| > 1$ y $\tau_\phi.B_a^{[\nu_K(a)+s]} = B_0^{[\nu_K(a)-s]}$, para $0 \leq s \leq \nu_K(a)$. La bola $\tau_\phi.B = B_0^{[r-2]}$ pertenece al grafo Ω .

□

Para la demostración del caso general, que sigue por inducción, asume que la afirmación es cierta para los vértices del árbol $\mathfrak{T}(K)$ que están a distancia m del árbol Ω . Supongamos que B está a distancia $m + 1$ de Ω . Existe una sucesión de vértices $\{B_i\}_{i=1}^{m+1}$ donde B_1 es el único vértice de Ω , se cumple $d(B_i, B_{i+1}) = 1$ para $1 \leq i \leq m$ y $d(B_{m+1}, B) = 1$. Consideramos la transformación de Moebius $\tau' \in \tau_{\Gamma_N}$ que satisface $\tau'.B_2 \in \Omega$. Si ocurre el caso de que $\tau'.B_i \in V(\Omega)$ para todo índice i , entonces la demostración concluye. En caso contrario, sea $i_0 > 1$ el menor índice tal que $\tau'.B_{i_0} \notin V(\Omega)$. Como $\mathfrak{T}(K)$ no puede tener ciclos por ser un árbol, entonces para $1 \leq i < i_0$ se tiene que $\tau'.B_i \in V(\Omega)$ y para $i_0 \leq i \leq m + 1$ los vértices $\tau'.B_i$ no son parte del árbol Ω . En ese caso, $d(\tau'.B, \Omega) \leq m - 1$ y se sigue por inducción que existe $\tau'' \in \tau_{\Gamma_N}$ tal que $\tau''\tau'.B$ es un vértice de Ω . Eso finaliza la demostración.

Falta demostrar que los vértices del candidato a grafo cociente están en órbitas disjuntas bajo la acción de τ_{Γ_N} . En este caso, sean B y B' dos vértices del grafo Ω que están en la misma órbita, es decir, existe $\sigma \in \Gamma_N$ tal que $\tau_\sigma.B = B'$. Sea $\tau_{\sigma'} \in \tau_\Gamma$ el elemento que cumple $\tau_{\sigma'\sigma}.B = \tau_{\sigma'}.B' \in]\infty, B_0^{[0]}$. Como $\tau_{\sigma'\sigma}.B = \tau_{\sigma'}.B'$, entonces B y B' deben ser del mismo tipo. Por otro lado, para cada $a \in \mathbb{F}_q$, el elemento $\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ cumple con $\tau_\mu \in \tau_\Gamma$, y $\tau_\mu(a) = \infty$; en particular, $\tau_\mu.]a, B_0^{[0]}[=]\infty, B_0^{[0]}[$. Lo anterior quiere decir que los vértices del rayo $]a, B_0^{[0]}[$ son de tipos distintos, a saber, $B_a^{[n]} \in]a, B_0^{[0]}[$ es un vértice de tipo n . Como B y B' son vértices del mismo tipo, entonces, o se cumple que $B = B'$, o existen $b, b' \in \mathbb{F}_q$ distintos tales que $B = B_b^{[n]}$ y $B' \in \{B_{b'}^{[n]}, B_0^{[-n]}\}$, con $n > 0$. La demostración concluye verificando que los extremos del grafo Ω se encuentran en órbitas disjuntas bajo la acción de

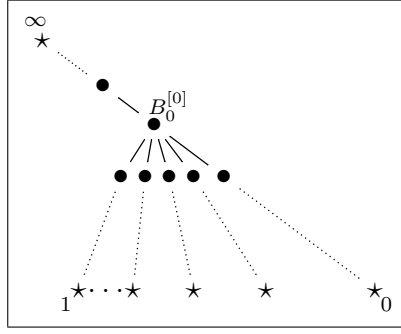


Figura 3.5: El árbol Ω .

τ_{Γ_N} . En efecto, sea $\mu' = \begin{pmatrix} 1 + xN & yN \\ uN & 1 + vN \end{pmatrix} \in \Gamma_N$. Si $u = 0$, entonces $\tau_{\mu'}(\infty) = \infty$; y en caso de que $u \neq 0$, se tiene que $\tau_{\mu'}(\infty) = \frac{x}{u} + \frac{1}{uN} \notin \mathbb{F}_q$. Ahora, sean $x_0, y_0 \in \mathbb{F}_q$ que cumplen $y_0 = \tau_{\mu'}(x_0)$. La última igualdad es equivalente a que $y_0(uNx_0 + 1 + vN) = (1 + xN)x_0 + yN$. Evaluando en $t = \alpha$, queda la igualdad $x_0 = y_0$. Por lo tanto, si $\tau_{\mu'} \cdot B = B'$, entonces $B = B'$ y con esto se concluye que el grafo Ω es un dominio fundamental de $\mathfrak{T}(K)$ bajo la acción de τ_{Γ_N} . \square

El grafo $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ es un cubrimiento ramificado de $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{T}(K)$. Notemos que se tiene el siguiente isomorfismo:

$$\mathfrak{E}(V)^* / \Gamma_N \cong \Omega_N := \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q^* & \mathbb{F}_q \\ & \mathbb{F}_q^* \end{pmatrix}.$$

Podemos conocer más acerca del grupo τ_{Ω_N} gracias al siguiente Lema:

Lema 3.3.3. El grupo de transformaciones de Moebius τ_{Ω_N} es isomorfo al cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} / \tau_{\Gamma_N}$.

Demostración. Si consideramos los epimorfismos $\mathfrak{E}(V)^* \twoheadrightarrow \tau_{\mathfrak{E}(V)^*} / \tau_{\Gamma_N}$ y $\mathfrak{E}(V)^* \twoheadrightarrow \tau_{\Omega_N}$ definidos por $\sigma \mapsto \tau_\sigma \tau_{\Gamma_N}$ y $\sigma \mapsto \tau_{\bar{\sigma}}$, donde $\bar{\sigma}$ es la imagen de σ en Ω_N , entonces existe un único isomorfismo $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} / \tau_{\Gamma_N} \rightarrow \tau_{\Omega_N}$. \square

Por el Lema 2.2.3 y 3.3.3, se tiene que un grupo que actúa sobre $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ es τ_{Ω_N} y el grafo cociente en este caso es $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{T}(K)$.

Proposición 3.3.4. El grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{T}(K)$ es isomorfo al camino maximal $]0, \infty[$. Más aún, $]0, \infty[$ es un dominio fundamental para la acción de $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*}$ en $\mathfrak{T}(K)$.

Demostración. Sea $B \in V(\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K))$ un vértice de tipo n que no está en $]0, \infty[$. El vértice B es de la forma $B = B_a^{[n]}$, donde $a \in \mathbb{F}^*$ y $n \in \mathbb{N}$. La traslación $\tau_\gamma(z) = z - a$ cumple con $\tau_\gamma(a) = 0$ y $\tau_\gamma.B = B_0^{[n]}$. Se tiene así que $\tau_\gamma. [B_0^{[0]}, B_a^{[n]}] = [B_0^{[0]}, B_0^{[n]}]$. Para finalizar, hay que demostrar que los vértices de $]0, \infty[$ están en órbitas distintas. Sean B, B' dos bolas de árbol del camino maximal $]0, \infty[$ que se encuentran en la misma órbita, es decir, existe $\sigma \in \mathfrak{E}(V)^*$ tal que $\tau_\sigma.B = B'$. Sean \mathfrak{D} y \mathfrak{D}' dos X -órdenes tales que $\mathfrak{D}(V) = \mathfrak{D}'(V) = \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[t])$. Además supongamos \mathfrak{D}_∞ y \mathfrak{D}'_∞ son los órdenes maximales en $\mathbb{M}_2(K)$ asociados a las bolas B y B' , respectivamente. Al ser B, B' vértices del camino maximal $]0, \infty[$, existen $n, n' \in \mathbb{N}$ tales que $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{n\infty}$ y $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_{n'\infty}$. Del Teorema 2.7.11 se concluye que $n' = -n$ y por la Observación 2.8.5, en alguna base de K^2 , los órdenes maximales \mathfrak{D}_∞ y \mathfrak{D}'_∞ lucen como $\mathfrak{D}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q[[t^{-1}]] & t^{-n}\mathbb{F}_q[[t^{-1}]] \\ t^n\mathbb{F}_q[[t^{-1}]] & \mathbb{F}_q[[t^{-1}]] \end{pmatrix}$ y $\mathfrak{D}'_\infty = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_q[[t^{-1}]] & t^n\mathbb{F}_q[[t^{-1}]] \\ t^{-n}\mathbb{F}_q[[t^{-1}]] & \mathbb{F}_q[[t^{-1}]] \end{pmatrix}$. Se sigue que la igualdad $\tau_\sigma.B = B'$ es equivalente a $\sigma\mathfrak{D}_\infty\sigma^{-1} = \mathfrak{D}'_\infty$. Como

$$\mathfrak{D}_\infty = \begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[[t^{-1}]]) \begin{pmatrix} t^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{D}'_\infty = \begin{pmatrix} t^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_q[[t^{-1}]]) \begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la igualdad $\sigma\mathfrak{D}_\infty\sigma^{-1} = \mathfrak{D}'_\infty$ es equivalente a que

$$\begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_q((t^{-1}))^* \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q[[t^{-1}]]) .$$

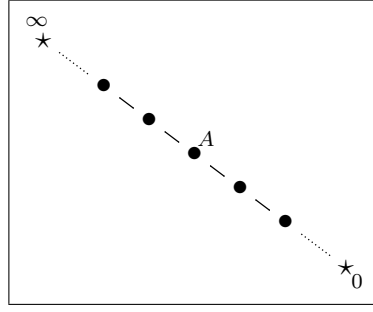


Figura 3.6: Grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{T}(K)$.

Es decir, existen $z \in \mathbb{F}_q((t^{-1}))^*$ y $\mu \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[[t^{-1}]])$ tal que

$$\begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = z\mu.$$

Como $\det(\sigma) \in \mathbb{F}_q^*$ y $\det(\mu) \in \mathbb{F}_q[[t^{-1}]]^*$, se tiene que $|z| = |t^{-n}|$. Si suponemos la igualdad matricial $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}$, entonces $\begin{pmatrix} at^{-n} & b \\ cN & dt^n \end{pmatrix} = u\mu$, con $u \in \mathbb{F}_q[[t^{-1}]]^*$. Del hecho que $d \in \mathbb{F}_q[t]$ y $\mu \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_q[[t^{-1}]])$, se tiene $d = 0$. Por lo tanto, $\det(\sigma) = bcN$, lo cual contradice el hecho de que $\det(\sigma) \in \mathbb{F}_q^*$.

□

Capítulo IV

Grafos cocientes asociados a un polinomio cuadrático.

4.1 El caso $N \in \mathbb{F}_2[t]$ cuadrático reducible con raíces distintas.

En esta Sección se presentan los cálculos explícitos para la obtención del grafo cociente asociado a un polinomio de grado 2 en $\mathbb{F}_2[t]$ con raíces distintas en \mathbb{F}_2 .

Desde ahora hasta el final de la Tesis, nos restringimos al caso $q = 2$, es decir, el trabajo se realiza sobre el cuerpo local $K = \mathbb{F}_2((t^{-1}))$. En esta Sección, N es un polinomio cuadrático con raíces distintas en el cuerpo \mathbb{F}_2 . Podemos asumir que $D_N = [0 : 1] + [1 : 1]$. Por el resultado de la Subsección 3.1.1, se tiene que $N = t(t + 1)$. Aquí se cumplen las condiciones del Ejemplo 3.1.7. Para el cálculo de $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \setminus \mathfrak{T}(K)$, el método utilizado es el descrito en la Observación 3.1.5.

Lema 4.1.1. Se cumple el isomorfismo $\Delta_{N,2} \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$.

Demostración. Es una consecuencia del Teorema chino de los restos y del Teorema de Aproximación Fuerte para $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2(t))$ (Teorema 2.6.7). \square

Del Lema anterior, $|\Delta_{N,2}| = 36$. Por otro lado, $|\mathfrak{E}(V)^*/\Gamma_N| = 4$ con las siguientes matrices como elementos de $\mathfrak{E}(V)^*/\Gamma_N$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & T+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde T es la imagen de $t \in \mathbb{F}_2[t]$ en $\mathbb{F}_2[t]/N\mathbb{F}_2[t]$.

Observación 4.1.2. Para entender cómo trabaja el isomorfismo anterior, veamos que la imagen de $\begin{pmatrix} T+1 & 1 \\ T & 1 \end{pmatrix} \in \Delta_{N,2}$ es el par $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Es decir, en la primera

coordenada se ve la matriz $\begin{pmatrix} t+1 & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ módulo t y en la segunda coordenada se ve módulo $t+1$. Mediante las formas de Jordan, encontramos los posibles órdenes de los elementos de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$. Sea $\delta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ distinto de la matriz identidad y sea $p_\delta(t) = \det(tI_2 - \delta) \in \mathbb{F}_2[t]$ su polinomio característico. Esencialmente, tenemos los siguientes casos:

- (i) Si $a \in \mathbb{F}_2^*$ es el único valor propio de δ , entonces δ es conjugada a la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$.
- (ii) Si $p_\delta(t)$ no tiene raíces en \mathbb{F}_2 , entonces $\mathbb{F}_2[\delta]/\mathbb{F}_2$ es una extensión cuadrática. Se sigue que $\mathbb{F}_2[\delta] \cong \mathbb{F}_4$.

Del análisis anterior tenemos las posibilidades siguientes:

1. Si δ tiene sólo un valor propio, entonces es de orden 2.
2. Si δ no tiene valores propios, entonces es de orden 3.

En conclusión, los elementos de $\Delta_{N,2}$ tienen orden 1, 2, 3 o 6.

Observación 4.1.3. Es evidente que K es un cuerpo de característica 2 sin raíces de 1 no triviales. De esto se deduce que $\mathrm{PSL}_2(K) = \mathrm{SL}_2(K)/\{\pm 1\} \cong \mathrm{SL}_2(K)$. Más aún, se tienen los isomorfismos $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2(t)) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2(t))$ y $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2[t]) \cong \Gamma$. En particular, las transformaciones de Moebius en τ_Γ se identifican con matrices del grupo Γ .

En lo que sigue, $H_{N,2} = \mathfrak{E}(V)^*/\Gamma_N \subseteq \Delta_{N,2}$. Más aún, tenemos el siguiente resultado al respecto:

Proposición 4.1.4. El grupo $H_{N,2}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Demostración. El grupo $H_{N,2}$ es abeliano y cada uno de sus elementos a excepción de la identidad tiene orden 2. □

De la Observación 4.1.3, el grupo $\Delta_{N,2}$ es isomorfo al cociente $\Lambda_N := \tau_\Gamma/\tau_{\Gamma_N}$, en particular $|\Lambda_N| = |\Delta_{N,2}|$. Para una transformación de Moebius $\tau_\delta \in \tau_\Gamma$, denotamos por $[\tau_\delta]$ su imagen de Λ_N . La imagen $[\tau_\delta]$ es una simetría del grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$. Con respecto a la Observación 3.1.5, definimos $\Phi_N := \tau_{\mathfrak{E}(V)^*}/\tau_{\Gamma_N}$ para simplificar los cálculos posteriores, hasta el final de la Tesis. Los grupos Φ_N y $H_{N,2}$ son isomorfos.

Observación 4.1.5. Si $\tau_\delta \in \tau_\Gamma$ satisface $[\tau_\delta] \in \text{Stab}_{\Lambda_N}(\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[0]})$, entonces por definición, $[\tau_\delta] \cdot (\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[0]}) = \tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[0]}$ y conversamente. Por el Lema 2.2.3 lo anterior es equivalente a que existe $\tau_\mu \in \tau_{\Gamma_N}$ que cumple $\tau_{\mu\delta} \in \text{Stab}_{\tau_\Gamma}(B_0^{[0]})$. Luego se concluye que $[\tau_\delta]$ pertenece a $\text{Stab}_{\Lambda_N}(\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[0]})$ sí y sólo si $\tau_\delta \in \tau_\mu \text{Stab}_{\tau_\Gamma}(B_0^{[0]})$ para algún $\tau_\mu \in \tau_{\Gamma_N}$, o de manera equivalente, $[\tau_\delta] \in \text{Stab}_{\Lambda_N}(\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[0]})$ sí y sólo si $[\tau_\delta]$ es igual a la clase de algún elemento de $\text{Stab}_{\tau_\Gamma}(B_0^{[0]})$. La última equivalencia establece la igualdad siguiente:

$$\left| \text{Stab}_{\Lambda_N}(\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[0]}) \right| = \left| \text{Stab}_{\tau_\Gamma}(B_0^{[0]}) \tau_{\Gamma_N} / \tau_{\Gamma_N} \right|. \quad (4.1)$$

Del Teorema 3.1.6 y la Observación 2.8.5, $\text{Stab}_{\tau_\Gamma}(B_0^{[0]}) = \tau_{\text{SL}_2(\mathbb{F}_2)}$, y como también se cumple la igualdad $\tau_{\Gamma_N} \cap \text{Stab}_{\tau_\Gamma}(B_0^{[0]}) = \{\tau_{I_2}\}$, se tiene que $\left| \text{Stab}_{\Lambda_N}(\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[0]}) \right| = 6$. De la Proposición 2.2.1 se deduce finalmente la igualdad $\left| \Lambda_N \cdot (\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[0]}) \right| = 6$ para el vértice $\tau_{\Gamma_N} \cdot (B_0^{[-1]})$, que es de tipo 1. La cantidad de elementos de $\text{Stab}_{\Lambda_N}(\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[-1]})$ se calcula de

la misma manera, con la salvedad de que:

$$\text{Stab}_{\tau_T} \left(B_0^{[-1]} \right) = \left\{ \tau_\delta : \delta \in \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como $|\text{Stab}_{\tau_T} \left(B_0^{[-1]} \right)| = 4$, por la Proposición 2.2.1 se tiene $|\Lambda_N \cdot \left(\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[-1]} \right)| = 9$. Mediante un argumento similar al ocupado en la Sección 3.3, se demuestra que $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ posee una cúspide que comienza en la τ_{Γ_N} -órbita de $B_0^{[-1]}$. En el cubrimiento $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K) \rightarrow \tau_T \backslash \mathfrak{T}(K)$ los vértices de tipo $n \geq 2$ son no ramificados, es más, los únicos vértices que son ramificados son los de tipo 0 y 1, porque la transformación de Moebius τ_{I_2} es el único elemento de τ_{Γ_N} en los estabilizadores de $B_0^{[0]}$ y $B_0^{[-1]}$. Por otro lado, la Λ_N -órbita de $\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[0]}$ tiene 6 elementos y la Λ_N -órbita de $\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[-1]}$ tiene 9 elementos. Para determinar el grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ se denota por $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ los vértices de tipo 0 del grafo $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$, o sea, las imágenes de las bolas $\tau_\delta \cdot B_0^{[0]}$ y $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9$ las imágenes de las bolas $\tau_\delta \cdot B_0^{[-1]}$. El siguiente resultado es producto de la discusión de este párrafo:

Proposición 4.1.6. El grafo $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ es bipartido. Cada vértice de tipo 0 y 1 tiene valencia 3.

La Proposición anterior implica que cada vértice v_i tiene por vecino (o vecinos) a un vértice w_j . Si $[\tau_\delta] \in \Lambda_N$ es una simetría de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$, entonces de la Observación 4.1.5 se tiene que $[\tau_\delta] \cdot v_i = v_{i'}$ para algún índice $i' \in \{1, \dots, 6\}$. De la misma manera se deduce la permutación $[\tau_\delta] \cdot w_j = w_{j'}$. Como en $\Delta_{N,2}$ existen elementos de orden 6, entonces existe una simetría $[\tau_\delta]$ tal que permuta los vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ de manera cíclica. Es más, la matriz $\begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene orden 6 en $\Delta_{N,2}$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} T+1 & T \\ T & 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} T & T+1 \\ T+1 & T \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 1 & T \\ T & T+1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sea $\sigma \in \Gamma$ una matriz tal que $[\tau_\sigma]$ es una simetría del grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{X}(K)$. En el caso de $[\sigma] = \begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, el resultado sigue a continuación:

Proposición 4.1.7. Las simetrías $[\tau_\sigma]$, $[\tau_{\sigma^2}]$, $[\tau_{\sigma^3}]$, $[\tau_{\sigma^4}]$ y $[\tau_{\sigma^5}]$ no fijan los vértices $\tau_{\Gamma_N} \cdot (B_0^{[0]})$ y $\tau_{\Gamma_N} \cdot (B_0^{[-1]})$.

Demostración. Afirar que la simetría $[\tau_\sigma]$ pertenece al estabilizador de $\tau_{\Gamma_N} \cdot (B_0^{[0]})$ es equivalente a que la imagen de σ en $\Delta_{N,2}$ sea igual a la imagen de algún elemento de $\text{SL}_2(\mathbb{F}_2)$. Como ninguna de las potencias $[\sigma]$, $[\sigma^2]$, $[\sigma^3]$, $[\sigma^4]$, $[\sigma^5]$ cumple esta condición, entonces se concluye que $[\tau_{\sigma^i}]$ no fija a $\tau_{\Gamma_N} \cdot (B_0^{[0]})$. Por el mismo argumento, tampoco se cumple que las potencias de

$[\tau_\sigma]$ fijen a $\tau_{\Gamma_N} \cdot (B_0^{[-1]})$, porque las imágenes en $\Delta_{N,2}$ de los elementos de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no son iguales a ninguna de las potencias de $[\sigma]$. \square

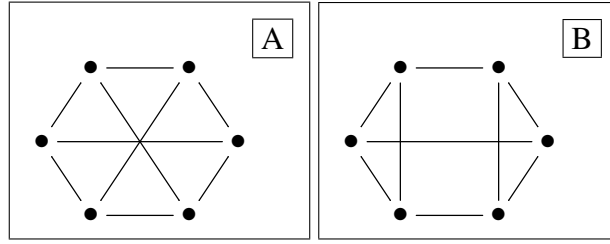


Figura 4.1: Grafos no isomorfos que posiblemente representan al grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$, asociado a $N = t(t + 1)$.

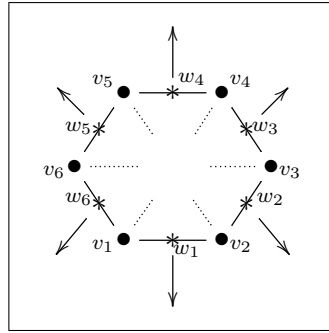


Figura 4.2: 12-ciclo del grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$, asociado a $N = t(t + 1)$.

Si la bola $B_0^{[0]}$ es un representante del vértice v_1 y $B_0^{[-1]}$ es un representante del vértice w_1 , entonces de la Proposición 4.1.7 se sigue que los vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ forman un hexágono regular, en el cual el vértice w_i se ubica en el lado que tiene por extremos a v_i y v_{i+1} (Figura 4.2). Si $\tau_{\sigma^i}.B_0^{[0]}$ tiene por imagen al vértice v_i , entonces se cumple el siguiente resultado:

Corolario 4.1.7.1. Los vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$ cumplen $[\tau_{\sigma^i}].v_1 = v_{i+1}$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$ y $[\tau_{\sigma}].v_6 = v_1$. En particular, $[\tau_{\sigma}]$ define una rotación en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$.

Una interrogante hasta aquí abierta, es saber cuál es la representación del grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$. En la figura 4.1 se muestra a dos grafos no isomorfos entre sí. La consecuencia principal del Corolario 4.1.7.1, es que el grafo de la Figura 4.1.A es el que representa a $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$, donde cada diagonal contiene un vértice de tipo 1. La ubicación de los vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$ y w_9 se muestran en la Figura 4.4. En la Figura 4.3 se muestra cómo la rotación permuta los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$.

Observación 4.1.8. Ahora es necesario encontrar la ubicación de los representantes de los

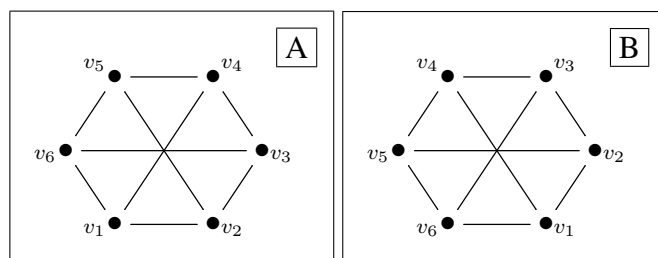


Figura 4.3: Rotación del grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$ para $N = t(t + 1)$ vía $[\tau_\sigma]$.

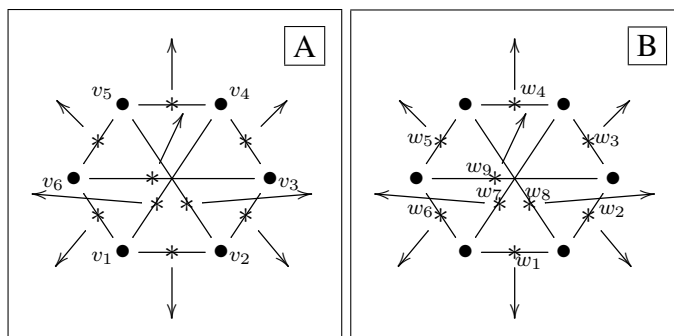


Figura 4.4: Grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$ para $N = t(t + 1)$.

vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6 . Aunque es evidente que por cada vértice existen infinitos representantes, el hecho de que en Λ_N exista un elemento de orden 6 ayuda no sólo a simplificar los cálculos, sino que también a entregar una colección de representantes que serán ocupados de manera sistemática con la Observación 4.1.5, de aquí hasta el final de la Tesis. Considere la transformación de Moebius $\tau_\sigma(z) = \frac{tz + 1}{z}$, un levantamiento de la simetría $[\tau_\sigma]$, donde $\sigma = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Primero, para encontrar los puntos fijos de τ_σ , es necesario estudiar la ecuación $\tau_\sigma(z) = z$. La última igualdad es equivalente a $z^2 + tz + 1 = 0$. El polinomio $p(z) = z^2 + tz + 1$ tiene por derivada $p'(z) = t$, luego en caso de tener raíces, estas son distintas. Veamos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
p(t) &= 1, \\
p(t + t^{-1}) &= t^{-2}, \\
p(t + t^{-1} + t^{-3}) &= t^{-6}, \\
p(t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-7}) &= t^{-14}, \\
p(t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-7} + t^{-15}) &= t^{-30}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Una raíz de $p(z)$ en $\mathbb{F}_2((t^{-1}))$ es $z_1 = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-7} + t^{-15} + \dots$. Es fácil ver que $z_2 = z_1 + t$ también es una raíz. En efecto:

$$\begin{aligned}
p(z_2) &= p(z_1 + t) \\
&= (z_1 + t)^2 + t(z_1 + t) + 1 \\
&= z_1^2 + t^2 + tz_1 + t^2 + 1 \\
&= z_1^2 + tz_1 + 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La transformación de Moebius τ_σ deja invariante al camino maximal que determina el par $\{z_1, z_2\}$. En la Figura 4.5 se muestra cómo τ_σ mueve a los vértices de $\mathfrak{T}(K)$.

A continuación está la lista de los vértices $B_0^{[0]}$, $\tau_\sigma.B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^2}.B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^3}.B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^4}.B_0^{[0]}$ y $\tau_{\sigma^5}.B_0^{[0]}$ y su ubicación en el árbol de Bruhat-Tits $\mathfrak{T}(K)$.

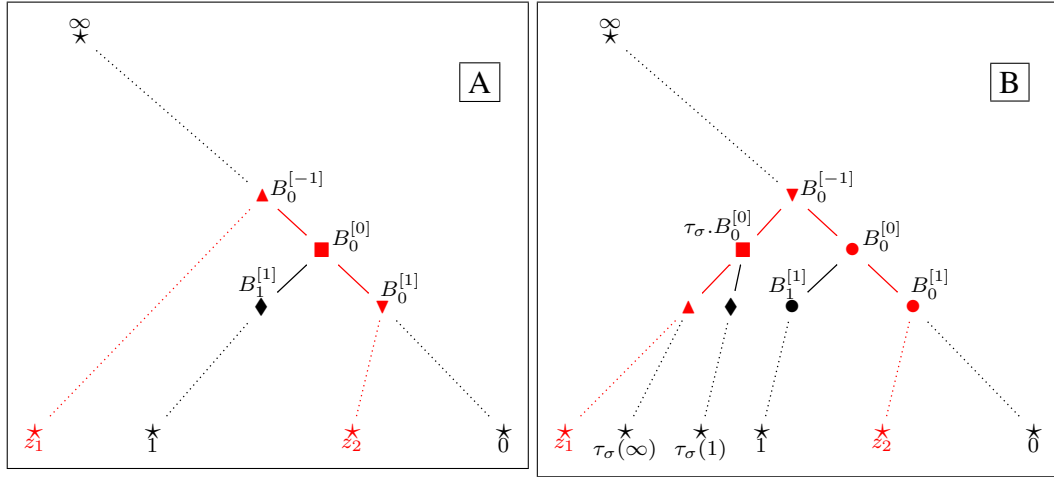


Figura 4.5: Acción de τ_σ en el árbol $\mathfrak{T}(K)$. Los elementos $z_1, z_2 \in K$ son sus puntos fijos.

1. De las igualdades

$$\tau_\sigma(0) = \infty,$$

$$\tau_\sigma(1) = t + 1,$$

$$\tau_\sigma(\infty) = t,$$

$$|\tau_\sigma(1) - \tau_\sigma(\infty)| = |1| = 1,$$

se tiene que $\tau_\sigma.B_0^{[0]} = B_t^{[0]}$, de hecho, $B_0^{[0]}$ y $B_t^{[0]}$ están a distancia 2.

2. De las igualdades

$$\tau_{\sigma^2}(0) = t,$$

$$\tau_{\sigma^2}(1) = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} = t + t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + t^{-4} + \dots,$$

$$\tau_{\sigma^2}(\infty) = \frac{t^2 + 1}{t} = t + t^{-1},$$

$$|\tau_{\sigma^2}(0) - \tau_{\sigma^2}(1)| = |t^{-1}|,$$

$$|\tau_{\sigma^2}(0) - \tau_{\sigma^2}(\infty)| = |t^{-1}|,$$

$$|\tau_{\sigma^2}(1) - \tau_{\sigma^2}(\infty)| = |t^{-2}|,$$

se tiene que $\tau_{\sigma^2}.B_0^{[0]} = B_{\tau_{\sigma^2}(\infty)}^{[2]} = B_{t+t^{-1}}^{[2]}$.

3. De las igualdades

$$\tau_{\sigma^3}(0) = \frac{t^2 + 1}{t} = t + t^{-1},$$

$$\tau_{\sigma^3}(1) = \frac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-4} + t^{-6} + \dots,$$

$$\tau_{\sigma^3}(\infty) = \frac{t^3}{t^2 + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-5} + \dots,$$

$$|\tau_{\sigma^3}(0) - \tau_{\sigma^3}(1)| = |t^{-3}|,$$

$$|\tau_{\sigma^3}(0) - \tau_{\sigma^3}(\infty)| = |t^{-3}|,$$

$$|\tau_{\sigma^3}(1) - \tau_{\sigma^3}(\infty)| = |t^{-4}|,$$

se tiene que $\tau_{\sigma^3}.B_0^{[0]} = B_{\tau_{\sigma^3}(\infty)}^{[4]} = B_{t+t^{-1}+t^{-3}}^{[4]}$.

4. De las igualdades:

$$\tau_{\sigma^4}(0) = \frac{t^3}{t^2 + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-5} + t^{-7} + \dots,$$

$$\tau_{\sigma^4}(1) = \frac{t^4 + t^3 + t^2 + 1}{t^3 + t^2 + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-6} + t^{-7} + \dots,$$

$$\tau_{\sigma^4}(\infty) = \frac{t^4 + t^2 + 1}{t^3} = t + t^{-1} + t^{-3},$$

$$|\tau_{\sigma^4}(0) - \tau_{\sigma^4}(1)| = |t^{-5}|,$$

$$|\tau_{\sigma^4}(0) - \tau_{\sigma^4}(\infty)| = |t^{-5}|,$$

$$|\tau_{\sigma^4}(1) - \tau_{\sigma^4}(\infty)| = |t^{-6}|,$$

se tiene que $\tau_{\sigma^4}.B_0^{[0]} = B_{\tau_{\sigma^4}(\infty)}^{[6]} = B_{t+t^{-1}+t^{-3}}^{[6]}$.

5. De las igualdades:

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma^5}(0) &= \frac{t^4 + t^2 + 1}{t^3} = t + t^{-1} + t^{-3}, \\ \tau_{\sigma^5}(1) &= \frac{t^5 + t^4 + t^2 + t + 1}{t^4 + t^3 + t^2 + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-7} + t^{-8} + t^{-12}, \\ \tau_{\sigma^5}(\infty) &= \frac{t^5 + t}{t^4 + t^2 + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-7} + t^{-9} + \dots,\end{aligned}$$

$$|\tau_{\sigma^5}(0) - \tau_{\sigma^5}(1)| = |t^{-7}|,$$

$$|\tau_{\sigma^5}(0) - \tau_{\sigma^5}(\infty)| = |t^{-7}|,$$

$$|\tau_{\sigma^5}(1) - \tau_{\sigma^5}(\infty)| = |t^{-8}|$$

se tiene que $\tau_{\sigma^5}.B_0^{[0]} = B_{\tau_{\sigma^5}(\infty)}^{[8]} = B_{t+t^{-1}+t^{-3}+t^{-7}}^{[8]}$.

6. De las igualdades:

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma^6}(0) &= \frac{t^5 + t}{t^4 + t^2 + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-7} + t^{-9} + t^{-13} + t^{-15} + \dots, \\ \tau_{\sigma^6}(1) &= \frac{t^6 + t^5 + t^4 + t + 1}{t^5 + t^4 + t^2 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-7} + t^{-10} + t^{-12} + \dots, \\ \tau_{\sigma^6}(\infty) &= \frac{t^6 + t^4 + 1}{t^5 + t} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-7} + t^{-11} + t^{-15} + \dots,\end{aligned}$$

$$|\tau_{\sigma^6}(0) - \tau_{\sigma^6}(1)| = |t^{-9}|,$$

$$|\tau_{\sigma^6}(0) - \tau_{\sigma^6}(\infty)| = |t^{-9}|,$$

$$|\tau_{\sigma^6}(1) - \tau_{\sigma^6}(\infty)| = |t^{-10}|$$

se tiene que $\tau_{\sigma^6}.B_0^{[0]} = B_{\tau_{\sigma^6}(\infty)}^{[10]} = B_{t+t^{-1}+t^{-3}+t^{-7}}^{[10]}$.

Del cálculo anterior se deduce que los vértices $B_0^{[0]}$ y $B_t^{[0]}$ están a distancia 2, lo mismo ocurre con los vértices consecutivos $\tau_{\sigma^i}.B_0^{[0]}$ y $\tau_{\sigma^{i+1}}.B_0^{[0]}$ para los enteros $n = 1, 2, 3, 4, 5$, en donde los vértices medios entre cada par es de tipo 1.

Por otro lado, por un razonamiento análogo al de la Sección 3.3, cada vértice w_j del grafo $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ posee una cúspide cuyo levantamiento en el árbol $\mathfrak{T}(K)$ es un rayo que se dirige al elemento $\tau_\delta(\infty)$ correspondiente. Lo anterior está expresado en el siguiente Lema:

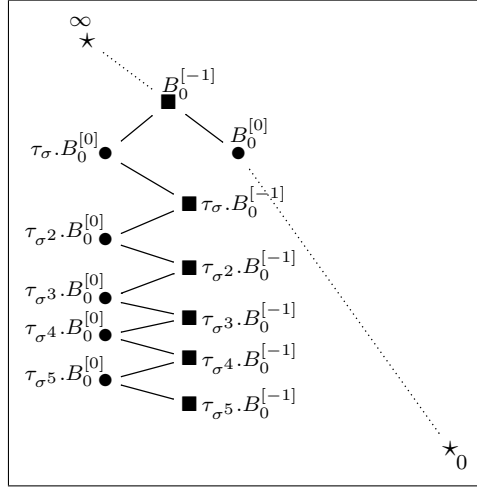


Figura 4.6: Representantes de los vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5$ y w_6 en árbol $\mathfrak{T}(K)$.

Lema 4.1.9. Sea $\tau_\delta \in \tau_\Gamma$ y $z_0 \in K$ tal que $\tau_\delta(\infty) = z_0$. Si w_{j_0} el vértice de tipo 1 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ tal que $[\tau_\delta] \cdot w_1 = w_{j_0}$, entonces el rayo $]z_0, \tau_\delta \cdot B_0^{[-1]}]$ del árbol $\mathfrak{T}(K)$ es un levantamiento de la cúspide de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ que tiene por origen a w_{j_0} . Más aún, para cualquier $z_1 \in K$ y un vértice B_1 en $\mathfrak{T}(K)$ que se encuentran en las órbitas de ∞ y $B_0^{[-1]}$ bajo la acción de τ_{Γ_N} , respectivamente, la imagen del rayo $]\tau_\beta(z_1), \tau_\beta \cdot B_1]$ en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$, donde $\tau_\beta \in \tau_{\Gamma_N}$, es una cúspide.

Demostración. Si $\tau_\delta(\infty) = z_0$, entonces $\tau_{\delta^{-1}}(z_0) = \infty$ y para cualquier vértice $B \in V(\mathfrak{T}(K))$ que está a distancia 1 del rayo $]z_0, \tau_\delta \cdot B_0^{[-1]}]$ y distinto de $\tau_\delta \cdot B_0^{[-1]}$, el vértice $\tau_{\delta^{-1}} \cdot B$ se encuentra a distancia 1 del rayo $]\infty, B_0^{[-1]}]$. Por el resultado de la Sección 3.3, existe una transformación de Moebius $\tau_{\delta'} \in \tau_{\Gamma_N}$ tal que $\tau_{\delta'\delta^{-1}} \cdot B$ es un vértice de $]\infty, B_0^{[-1]}]$. Concluimos que la conjugación $\tau_{\delta\delta'\delta^{-1}}$ es un elemento de τ_{Γ_N} y $\tau_{\delta\delta'\delta^{-1}} \cdot B$ es un vértice de $]z_0, \tau_\delta \cdot B_0^{[-1]}]$. La segunda parte del Lema se sigue del hecho de que existe $\tau_{\beta'} \in \tau_{\Gamma_N}$ tal que $\tau_{\beta'}(\infty) = z_1$ y $\tau_{\beta'} \cdot B_0^{[-1]} = B_1$. De lo anterior se tiene $]\tau_\beta(z_1), \tau_\beta \cdot B_1] =]\tau_{\beta\beta'}(\infty), \tau_{\beta\beta'} \cdot B_0^{[-1]}]$ y su imagen es una cúspide en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ que comienza en $[\tau_{\beta\beta'}] \cdot w_1$. \square

El Lema 4.1.9 nos permite encontrar representantes para los vértices w_7, w_8 y w_9 . Sin pérdida de generalidad, se asume que w_7 es vecino de w_1 . Los vecinos del representante $B_0^{[0]}$ son las bolas $B_0^{[-1]}, B_0^{[1]}$ y $B_1^{[1]}$. La transformación de Moebius $\tau_{\sigma^{-1}}$ cumple $\tau_{\sigma^{-1}}(0) = t^{-1}$,

$\tau_{\sigma^{-1}}(1) = \frac{1}{t+1} = t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} \dots$, y $\tau_{\sigma^{-1}}(\infty) = 0$, en particular $\tau_{\sigma^{-1}}.B_0^{[0]} = B_{t^{-1}}^{[2]}$. La igualdad $\tau_{\sigma^{-1}}(\infty) = 0$ implica $\tau_{\sigma^{-1}}.B_0^{[-1]} = B_0^{[1]}$. Luego las imágenes de las bolas $B_{t^{-1}}^{[2]}$ y $B_0^{[1]}$ en $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ son los vértices v_6 y w_6 , respectivamente. La transformación de Moebius τ_μ donde $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, cumple $\tau_\mu \in \text{Stab}_{\tau_{\Gamma_N}}(B_0^{[0]})$, $\tau_\mu(\infty) = 1$ y $\tau_\mu.B_0^{[-1]} = B_1^{[1]}$. Del Lema 4.1.9 se deduce que la imagen de $]1, B_1^{[1]}$ en $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ es una cúspide y $\Gamma_N.(B_1^{[1]})$ es un vértice de tipo 1. A continuación se demuestra que la simetría $[\tau_\mu]$ fija a los vértices v_1 y w_6 . En efecto, fija a v_1 porque $\mu \in \text{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ y la igualdad:

$$\begin{aligned}
[\sigma^{-5}\mu\sigma^5] &= \begin{pmatrix} T & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} T+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

implica $[\tau_{\sigma^{-5}\mu\sigma^5}].w_1 = w_1$. Al ser $[\tau_{\sigma^5}].w_1 = w_6$, se deduce que $[\tau_\mu].w_6 = w_6$. Como $[\tau_\mu]$ no fija a w_1 , entonces la única posibilidad es que $[\tau_\mu].w_1 = w_7$ y un representante de w_7 es la bola $\tau_\mu.B_0^{[-1]} = B_1^{[1]}$. Para encontrar representantes de los vértices w_8 y w_9 basta con aplicar la rotación $[\tau_\sigma]$ de la Proposición 4.1.7, es decir, $w_8 = [\tau_\sigma].w_7$ y $w_9 = [\tau_{\sigma^2}].w_7$. Los representantes en $\mathfrak{T}(K)$ en este caso son los vértices $\tau_{\sigma\mu}.B_0^{[-1]}$ y $\tau_{\sigma^2\mu}.B_0^{[-1]}$, respectivamente. Como

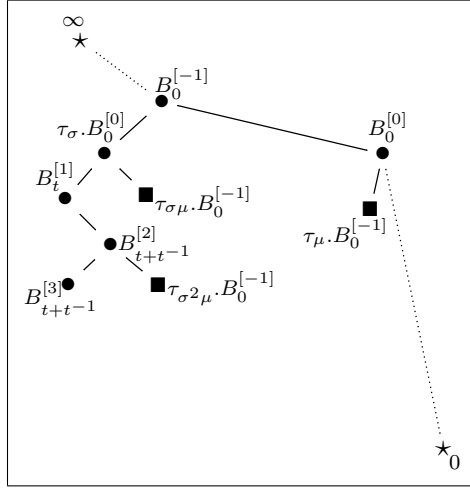


Figura 4.7: Representantes de los vértices w_7 , w_8 y w_9 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$.

$$\sigma\mu = \begin{pmatrix} t+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2\mu = \begin{pmatrix} t^2+t+1 & t \\ t+1 & 1 \end{pmatrix},$$

es posible calcular $\tau_{\sigma\mu} \cdot B_0^{[-1]}$ y $\tau_{\sigma^2\mu} \cdot B_0^{[-1]}$. Las igualdades $\tau_{\sigma\mu}(0) = \infty$, $\tau_{\sigma\mu}(\infty) = t+1$ y $\tau_{\sigma\mu}(t) = t+1+t^{-1}$ garantizan que $\tau_{\sigma\mu} \cdot B_0^{[-1]} = B_{t+1}^{[1]}$. Por otro lado, de

$$\begin{aligned} \tau_{\sigma^2\mu}(0) &= t, \\ \tau_{\sigma^2\mu}(\infty) &= t + \frac{1}{1+t} = t + t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + t^{-4} + \dots, \\ \tau_{\sigma^2\mu}(t) &= \frac{t^3+t^2}{t^2+t+1} = t + t^{-1} + t^{-2} + t^{-4} + t^{-5} + \dots, \end{aligned}$$

se deduce la transformación de Moebius $\tau_{\sigma^2\mu}$ cumple con $\tau_{\sigma^2\mu} \cdot B_0^{[-1]} = B_{t+t-1+t-2}^{[3]}$. En la Figura 4.7 se muestran en el árbol $\mathfrak{T}(K)$ a los representantes $\tau_{\mu} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma\mu} \cdot B_0^{[-1]}$ y $\tau_{\sigma^2\mu} \cdot B_0^{[-1]}$ de los vértices w_7 , w_8 y w_9 .

Ahora se procede a estudiar la acción de Φ_N sobre $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$. El grupo $H_{N,2}$ está generado

por las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. En el caso de $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $[\zeta] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_{N,2}$, la transformación de Moebius $\tau_\zeta \in \tau_{\mathfrak{E}(V)^*}$ pertenece al estabilizador de $B_0^{[0]}$ y $[\tau_\zeta]$ define una simetría en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{X}(K)$ que fija a v_1 . Es evidente que $[\tau_\zeta]$ tiene orden 2. Como

$$\tau_\zeta \cdot]0, B_0^{[1]}] =]1, B_0^{[1]}],$$

se tiene que $[\tau_\zeta] \cdot w_6 = w_7$ y con ello $[\tau_\zeta] \cdot v_6 = v_4$. Por otro lado, como los vértices $B_0^{[0]}$, $B_0^{[-2]}$ y $B_t^{[0]}$ son vecinos del vértice $B_0^{[-1]}$ y τ_ζ fija a $B_0^{[0]}$, $B_0^{[-2]}$ y $B_0^{[-1]}$, la única posibilidad es que también fije a $B_t^{[0]}$. Luego $[\tau_\zeta] \cdot v_2 = v_2$. En el caso de que no se cumpla $[\tau_\zeta] \cdot v_3 = v_3$ la única opción posible es que $[\tau_\zeta] \cdot v_3 = v_5$. La última igualdad es verdadera y se deduce de la Observación 4.1.5 mediante el producto:

$$[\sigma^{-4}\zeta\sigma^2] = \begin{pmatrix} T+1 & T \\ T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T+1 & T \\ T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $[\tau_{\sigma^4}] \cdot v_1 = v_5$, es claro que $[\tau_\zeta] \cdot v_3 = [\tau_{\zeta\sigma^2}] \cdot v_1 = [\tau_{\sigma^4}] \cdot v_1 = v_5$. En resumen, $[\tau_\zeta]$ permuta los vértices de tipo 0 y 1 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{X}(K)$ como se muestra a continuación, donde

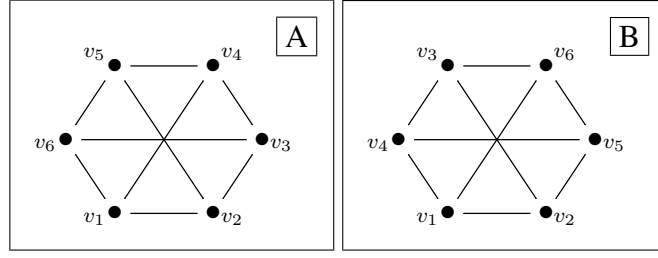


Figura 4.8: Acción de $[\tau_\zeta]$ sobre los vértices de tipo 0 de $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \setminus \mathfrak{I}(K)$ asociado a $N = t(t+1)$.

la permutación de los vértices de tipo 1 es consecuencia de las condiciones de vecindad:

$$\begin{aligned}
v_1 &\mapsto v_1, & w_1 &\mapsto w_1, & w_7 &\mapsto w_6, \\
v_2 &\mapsto v_2, & w_2 &\mapsto w_8, & w_8 &\mapsto w_2, \\
v_3 &\mapsto v_5, & w_3 &\mapsto w_5, & w_9 &\mapsto w_4, \\
v_4 &\mapsto v_6, & w_4 &\mapsto w_9, \\
v_5 &\mapsto v_3, & w_5 &\mapsto w_3, \\
v_6 &\mapsto v_4, & w_6 &\mapsto w_7,
\end{aligned}$$

La permutación de los vértices de tipo 0 mediante la simetría $[\tau_\zeta]$ viene dada por la Figura 4.8.

2. Para $\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H_{N,2}$ se considera la matriz $\rho = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{E}(V)^*$. La transformación de Moebius $\tau_\rho \in \tau_{\mathfrak{E}(V)^*}$ fija al rayo $\left] \infty, B_0^{[-1]} \right[$. Además como $\tau_\rho(0) = t$ y no fija a $B_0^{[0]}$, automáticamente se tiene $[\tau_\rho].w_1 = w_1$ y $[\tau_\rho].v_1 = v_2$. Por otro lado $\tau_\rho(1) = t+1$ y $\tau_\rho(\infty) = \infty$, por lo que $\tau_\rho.B_0^{[0]} = B_t^{[0]}$. Una consecuencia de lo anterior es que $\tau_\rho.\left] 0, B_0^{[1]} \right[= \left] t, B_t^{[1]} \right[$, es decir, $[\tau_\rho]$ permuta las cúspides correspondientes a las imágenes en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$ de los rayos $\left] 0, B_0^{[1]} \right[$ y $\left] t, B_t^{[1]} \right[$. Más aún, $[\tau_\rho].w_6 = w_2$. Se sigue de inmediato la igualdad $[\tau_\rho].v_6 = v_3$. Como w_5 es vecino de v_6 , entonces las posibilidades para w_5 bajo la acción de $[\tau_\rho]$ serían $[\tau_\rho].w_5 = w_3$ o bien $[\tau_\rho].w_5 = w_9$. Si $[\tau_\rho].w_5 = w_9$ entonces $[\tau_\rho].v_5 = v_6$, lo cual es una contradicción. Para los vértices

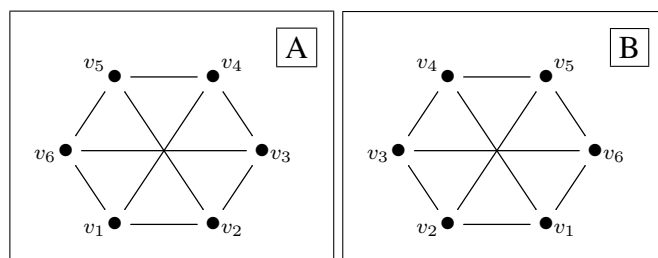


Figura 4.9: Acción de $[\tau_\rho]$ sobre los vértices de tipo 0 de $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \setminus \mathfrak{I}(K)$ asociado a $N = t(t+1)$.

restantes se aplica el hecho de que al ser $[\tau_\rho]$ un morfismo de grafos, preserva la distancia entre vecinos. En resumen, la simetría $[\tau_\rho]$ permuta los vértices de tipo 0 y 1 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 v_1 &\mapsto v_2, & w_1 &\mapsto w_1, & w_7 &\mapsto w_8, \\
 v_2 &\mapsto v_1, & w_2 &\mapsto w_6, & w_8 &\mapsto w_7, \\
 v_3 &\mapsto v_6, & w_3 &\mapsto w_5, & w_9 &\mapsto w_9. \\
 v_4 &\mapsto v_5, & w_4 &\mapsto w_4, \\
 v_5 &\mapsto v_4, & w_5 &\mapsto w_3, \\
 v_6 &\mapsto v_3, & w_6 &\mapsto w_2,
 \end{aligned}$$

La permutación de los vértices de tipo 0 mediante $[\tau_\rho]$ viene dada por la Figura 4.9.

El cálculo de las órbitas y su ilustración con distintos colores (Figura 4.10) de los vértices de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$ bajo la acción de Φ_N viene dado a continuación:

$$\text{orb}(v_1) = \{v_1, v_2\},$$

$$\text{orb}(v_3) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

$$\text{orb}(w_1) = \{w_1\},$$

$$\text{orb}(w_2) = \{w_2, w_6, w_7, w_8\},$$

$$\text{orb}(w_3) = \{w_3, w_5\},$$

$$\text{orb}(w_4) = \{w_4, w_9\}.$$

De aquí se sigue que el grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{T}(K)$ es como se ilustra en la Figura 4.11, donde los vértices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 y A_6 , son los siguientes:

$$A_1 = \Phi_N \cdot w_5,$$

$$A_2 = \Phi_N \cdot v_6,$$

$$A_3 = \Phi_N \cdot w_9,$$

$$A_4 = \Phi_N \cdot w_6,$$

$$A_5 = \Phi_N \cdot v_1,$$

$$A_6 = \Phi_N \cdot w_1.$$

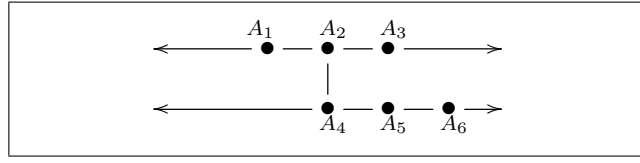


Figura 4.11: Grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{I}(K)$ asociado a $N = t(t + 1)$.

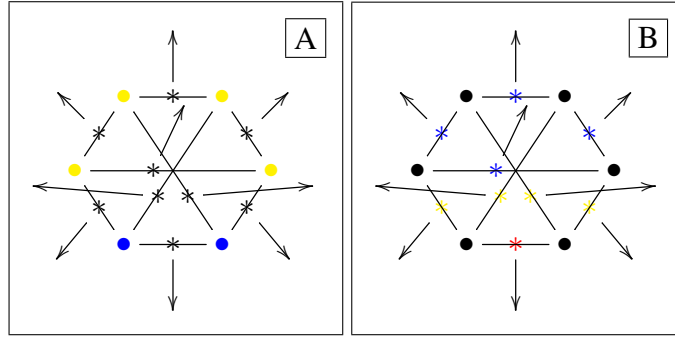


Figura 4.10: Ordenes de las Φ_N -órbitas de los vértices de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{I}(K)$, para $N = t(t + 1)$.

4.2 El caso $N \in \mathbb{F}_2[t]$ con una raíz repetida.

En esta Sección se presentan los cálculos explícitos para la obtención del grafo cociente asociado a un polinomio de grado 2 en $\mathbb{F}_2[t]$ con una raíz doble en \mathbb{F}_2 .

En este Capítulo se mantienen las notaciones dadas en la Sección 4.1, pero ahora consideramos el polinomio $N = t^2$, asociado al divisor $D_N = 2[0 : 1]$. Considere el epimorfismo $\varsigma : \Delta_{N,2} \longrightarrow \Delta_{t,2}$, dado por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{N} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{t},$$

cuyo núcleo es el conjunto de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 + at & bt \\ ct & 1 + dt \end{pmatrix} \pmod{N} : a, b, c, d = 0, 1 \right\}.$$

Como $\Delta_{t,2} \cong \text{SL}_2(\mathbb{F}_2)$, se concluye que $|\Delta_{N,2}| = 8 \cdot 6 = 48$. Los órdenes de los elementos de $\Delta_{N,2}$ son más fáciles de calcular si estos se consideran como preimágenes, bajo ς , de los elementos de $\Delta_{t,2}$. En lo que sigue, si $\eta \in \Delta_{N,2}$ es una preimagen de $\eta' \in \Delta_{t,2}$, entonces $\eta = \eta' + t\eta''$, donde $\eta'' \in \mathbb{M}_2(\mathbb{F}_2[t]/N\mathbb{F}_2[t])$.

(i) Para $\eta' = I_2$, se tiene $\eta^2 = I_2$. Por lo tanto, $\eta = I_2$ o η tiene orden 2.

(ii) Para $\eta' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\eta^2 = I_2 + t \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \eta'' + \eta'' \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Si η'' y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ conmutan, entonces η tiene orden 2. En caso contrario, η tiene orden 4.

(iii) El cuadrado de $\eta' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es $\eta'^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, luego las primeras potencias de η , en este caso, son:

$$\eta^2 \equiv \eta'^2 + t(\eta'\eta'' + \eta''\eta'),$$

$$\eta^3 \equiv I_2 + t(\eta'^2\eta'' + \eta'\eta''\eta' + \eta''\eta'^2).$$

En particular, si $\eta'^2\eta'' + \eta'\eta''\eta' + \eta''\eta'^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces η tiene orden 3; en caso contrario η tiene orden 6.

(iv) El cuadrado de $\eta' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es $\eta'^2 = I_2 + t(\eta'\eta'' + \eta''\eta')$. En particular, si η' y η'' conmutan, entonces η tiene orden 2. En caso contrario η tiene orden 4.

(v) Si $\eta' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\eta^2 = I_2 + t(\eta'\eta'' + \eta''\eta')$. En el caso de que η' y η'' conmuten, η tiene orden 2. Si no, η tiene orden 4.

(vi) El cuadrado de $\eta' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es $\eta'^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, luego las primeras potencias de η

son:

$$\begin{aligned}\eta^2 &\equiv \eta'^2 + t(\eta'\eta'' + \eta''\eta'), \\ \eta^3 &\equiv I_2 + t(\eta'^2\eta'' + \eta'\eta''\eta' + \eta''\eta'^2).\end{aligned}$$

Luego, si $\eta'^2\eta'' + \eta'\eta''\eta' + \eta''\eta'^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces η tiene orden 3; en caso contrario η tiene orden 6.

Por el Teorema órbita-estabilizador y la igualdad de estabilizadores de la Observación 4.1.5, se tiene que $|\Lambda_N \cdot (\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[0]})| = 8$ y $|\Lambda_N \cdot (\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[-1]})| = 12$. Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ y v_8 los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$, y sean $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}$ y w_{12} los vértices de tipo 1. En analogía a la Proposición 4.1.6 de la Sección 4.1, $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ es un grafo bipartido y cada vértices de tipo 0 o 1 tiene valencia 3, además de que cada vértice de tipo 1 es el origen de una cúspide. Se sabe que $\Delta_{N,2}$ no tiene elementos de orden 8, así que no hay octágonos cuyos vértices sean $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$ en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ que cumplan la condición de que v_i tenga un τ_{Γ_N} -representante del tipo $\tau_{\sigma^i} \cdot B_0^{[0]}$. Lo mejor que se puede hacer es tomar una transformación de Moebius de orden 4 para tener 2 ciclos cuadrados que cumplan el papel del hexágono de la Sección precedente. Escogiendo nuevamente la matriz $\sigma = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de la Sección 4.1, su imagen en $\Delta_{N,2}$ es $[\sigma] = \begin{pmatrix} u & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y tiene orden 4. En efecto:

$$\begin{aligned}
[\sigma] &= \begin{pmatrix} u & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
[\sigma^2] &= \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & 1 \end{pmatrix}, \\
[\sigma^3] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & u \end{pmatrix}, \\
[\sigma^4] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En esta Sección, u es la imagen de t en $\mathbb{F}_2[t]/N\mathbb{F}_2[t]$. Hay que notar que u es nilpotente. El resultado análogo a la Observación 4.1.5 permite deducir que si $v_1 = \tau_{\Gamma_N}.B_0^{[0]}$, entonces los vértices $[\tau_\sigma].v_1$, $[\tau_{\sigma^2}].v_1$, $[\tau_{\sigma^3}].v_1$ y $[\tau_{\sigma^4}].v_1$ son distintos y están en un cuadrado, donde las imágenes de los elementos τ_σ , τ_{σ^2} y τ_{σ^3} se ven en el cociente Λ_N . Al igual que en la Sección 4.1, los vértices de tipo 0 están a distancia dos y lo mismo ocurre para los vértices de tipo 1. El Corolario a continuación es consecuencia de lo discutido anteriormente, ya que el grafo debe ser conexo y debe ser invariante por una rotación una rotación de alguno de los cuadrados que lo componen:

Proposición 4.2.1. Los vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ y v_8 de $\tau_{\Gamma_N}\backslash\mathfrak{T}(K)$ forman un cubo, en donde por cada arista se ubica un vértice de tipo 1.

El grafo cociente $\tau_{\Gamma_N}\backslash\mathfrak{T}(K)$ viene dado por la Figura 4.12. Los representantes de los vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, w_1, w_2, w_3$ y w_4 están descritos en la Figura 4.6 de la Sección 4.1.

Proposición 4.2.2. la simetría $[\tau_\sigma]$ es una rotación de $\tau_{\Gamma_N}\backslash\mathfrak{T}(K)$ con respecto al eje que pasa por la cara que contiene a los vértices v_1, v_2, v_3, v_4 y la cara opuesta.

Demostración. De la Sección anterior, ya se sabe que $[\tau_\sigma].v_1$ es vecino de v_1, v_3 y v_6 . El vértice $[\tau_\sigma].v_5$ debe ser un vecino de v_2 . Como $[\tau_\sigma].v_4 = v_1$ y $[\tau_\sigma].v_2 = v_3$, la única posibilidad es que

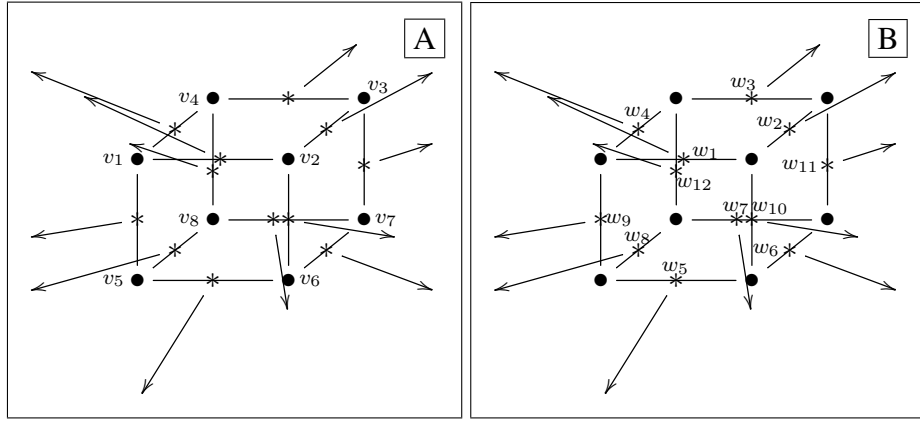


Figura 4.12: Grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{F}(K)$ con los vértices de tipo 0 y 1, para el caso $N = t^2$.

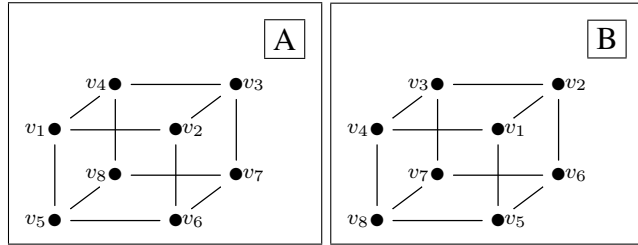


Figura 4.13: Rotación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{F}(K)$ via $[\tau_\sigma]$, para el caso $N = t^2$.

$[\tau_\sigma] \cdot v_5 = v_6$. Por condición de vecindad de vértices, se tiene $[\tau_{\sigma^2}] \cdot v_5 = v_7$ y $[\tau_{\sigma^3}] \cdot v_5 = v_8$. \square

La rotación $[\tau_\sigma]$ viene dada por la Figura 4.13. Con la Proposición 4.2.2, es posible encontrar representantes de los vértices v_5, v_6, v_7 y v_8 . Por lo visto en la Sección 4.1, los vértices $B_{t^{-2}}^{[2]}$ y $B_t^{[0]}$ son de tipo 0 y cumplen $B_{t^{-1}}^{[2]} = \tau_{\sigma^{-1}} \cdot B_0^{[0]}$ y $B_t^{[0]} = \tau_\sigma \cdot B_0^{[0]}$, por lo que sus imágenes en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{F}(K)$ son v_4 y v_2 respectivamente. La matriz $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de la Sección 4.1, tiene la siguiente propiedad:

Proposición 4.2.3. La simetría $[\tau_\mu]$ corresponde a una reflexión del cubo con respecto a un plano que contiene a los vértices v_1, v_4, v_6 y v_7 .

Demostración. El elemento $[\tau_\mu]$ es de orden 2 y fija al vértice v_1 porque $\mu \in \text{SL}_2(\mathbb{F}_2)$. También como $\tau_\mu(0) = 0$, $\tau_\mu(\infty) = 1$ y $|\tau_\mu(t^{-1})| = |t^{-1}|$, se tiene que $\tau_\mu \cdot B_0^{[1]} = B_0^{[1]}$ y con ello $[\tau_\mu] \cdot w_4 = w_4$. Al ser v_4 el otro vecino de tipo 0 de w_4 , también ocurre que $[\tau_\mu] \cdot v_4 = v_4$. Por otro lado, es claro que τ_μ no fija a $B_0^{[-1]}$, en particular $\tau_\mu \cdot B_0^{[-1]} = B_1^{[-1]}$ y como consecuencia en

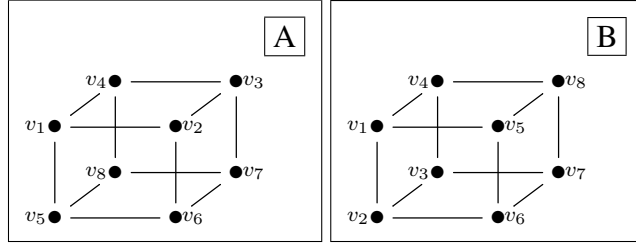


Figura 4.14: Acción de $[\tau_\mu]$ sobre los vértices de tipo 0 de $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \setminus \mathfrak{Z}(K)$ asociado a $N = t^2$.

el caso de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{Z}(K)$ la simetría $[\tau_\mu]$ satisface $[\tau_\mu].v_2 = v_5$. Para ver que $[\tau_\mu]$ fija a v_6 , basta aplicar la Observación 4.1.5 mediante el producto matricial:

$$[(\sigma\mu\sigma)^{-1}\mu\sigma\mu\sigma] = \begin{pmatrix} 1 & u+1 \\ u & u+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 & u+1 \\ u & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $[\tau_\mu].v_6 = [\tau_{\mu\sigma\mu}].v_1 = [\tau_{\sigma\mu\sigma}].v_1 = v_6$. Los vértices w_5, w_6 y w_{10} son vecinos de v_6 , y de la igualdad $[\tau_\mu].v_2 = v_5$ se obtienen las igualdades $[\tau_\mu].w_{10} = w_5$ y $[\tau_\mu].w_6 = w_6$. De inmediato se sigue $[\tau_\mu].v_7 = v_7$. Finalmente $[\tau_\mu].v_3 = v_8$. \square

La acción de $[\tau_\mu]$ sobre los vértices de tipo 0 del grafo $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{Z}(K)$ viene dada por la Figura 4.14.

Como consecuencia, un representante del vértice v_5 es el vértice $\tau_{\mu\sigma}.B_0^{[0]}$. Es más, se tiene el siguiente Corolario:

Corolario 4.2.3.1. Las imágenes en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{Z}(K)$ de los vértices $\tau_{\mu\sigma}.B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma\mu\sigma}.B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^2\mu\sigma}.B_0^{[0]}$ y $\tau_{\sigma^3\mu\sigma}.B_0^{[0]}$, son v_5, v_6, v_7 y v_8 respectivamente. Las imágenes en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{Z}(K)$ de los vértices $\tau_\mu.B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma\mu}.B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma^2\mu}.B_0^{[-1]}$ y $\tau_{\sigma^3\mu}.B_0^{[-1]}$, son w_9, w_{10}, w_{11} y w_{12} respectivamente.

Los siguientes cálculos son necesarios para conocer las ubicaciones relativas de los representantes en $\mathfrak{Z}(K)$ de los vértices $v_5, v_6, v_7, v_8, w_9, w_{10}, w_{11}$ y w_{12} :

$$\begin{aligned}\mu\sigma &= \begin{pmatrix} t+1 & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma\mu\sigma &= \begin{pmatrix} t^2+t+1 & t+1 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma^2\mu\sigma &= \begin{pmatrix} t^3+t^2 & t^2+t+1 \\ t^2+t+1 & t+1 \end{pmatrix}, \\ \sigma^3\mu\sigma &= \begin{pmatrix} t^4+t^3+t^2+t+1 & t^3+t^2+1 \\ t^3+t^2 & t^2+t+1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

1. De

$$\begin{aligned}\tau_{\mu\sigma}(0) &= 1, \\ \tau_{\mu\sigma}(1) &= \frac{t}{t+1} = 1 + t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + t^{-4} + \dots, \\ \tau_{\mu\sigma}(\infty) &= \frac{t+1}{t} = 1 + t^{-1},\end{aligned}$$

se tiene $\tau_{\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]} = B_{\tau_{\mu\sigma}(\infty)}^{[2]} = B_{1+t^{-1}}^{[2]}$.

2. En el caso de

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma\mu\sigma}(0) &= t+1, \\ \tau_{\sigma\mu\sigma}(1) &= \frac{t^2}{t+1} = t+1 + t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + \dots, \\ \tau_{\sigma\mu\sigma}(\infty) &= \frac{t^2+t+1}{t} = t+1 + t^{-1},\end{aligned}$$

se tiene la igualdad $\tau_{\sigma\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]} = B_{\tau_{\sigma\mu\sigma}(\infty)}^{[2]} = B_{t+1+t^{-1}}^{[2]}$.

3. De

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma^2\mu\sigma}(0) &= \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} = t + t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + t^{-4} + t^{-5} + \dots, \\ \tau_{\sigma^2\mu\sigma}(1) &= \frac{t^3 + t + 1}{t^2} = t + t^{-1} + t^{-2}, \\ \tau_{\sigma^2\mu\sigma}(\infty) &= \frac{t^3 + t^2}{t^2 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-2} + t^{-4} + t^{-5} + \dots,\end{aligned}$$

se sigue $\tau_{\sigma^2\mu\sigma}.B_0^{[0]} = B_{\tau_{\sigma^2\mu\sigma}(\infty)}^{[4]} = B_{t+t^{-1}+t^{-2}}^{[4]}$.

4. En el caso de

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma^3\mu\sigma}(0) &= \frac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-4} + t^{-6} + t^{-7} + \dots, \\ \tau_{\sigma^3\mu\sigma}(1) &= \frac{t^4 + t}{t^3 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-4} + t^{-5} + t^{-8} + \dots, \\ \tau_{\sigma^3\mu\sigma}(\infty) &= \frac{t^4 + t^3 + t^2 + t + 1}{t^3 + t^2} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-4} + t^{-5} + t^{-6} + t^{-7} + \dots,\end{aligned}$$

la igualdad que sigue es $\tau_{\sigma^3\mu\sigma}.B_0^{[0]} = B_{\tau_{\sigma^3\mu\sigma}(\infty)}^{[6]} = B_{t+t^{-1}+t^{-3}+t^{-4}+t^{-5}}^{[6]}$.

Por otro lado, se debe repetir este proceso con las matrices μ , $\sigma\mu$, $\sigma^2\mu$ y $\sigma^3\mu$:

$$\begin{aligned}\mu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma\mu &= \begin{pmatrix} t+1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^2\mu &= \begin{pmatrix} t^2+t+1 & t \\ t+1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \sigma^3\mu &= \begin{pmatrix} t^3+t^2+1 & t^2+1 \\ t^2+t+1 & t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

1. De

$$\begin{aligned}\tau_\mu(0) &= 0, \\ \tau_\mu(t) &= \frac{t}{t+1} = 1 + t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + \dots, \\ \tau_\mu(\infty) &= 1,\end{aligned}$$

se tiene $\tau_\mu \cdot B_0^{[-1]} = B_1^{[1]}$.

2. De

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma\mu}(0) &= \infty, \\ \tau_{\sigma\mu}(t) &= \frac{t^2 + t + 1}{t} = t + 1 + t^{-1}, \\ \tau_{\sigma\mu}(\infty) &= t + 1,\end{aligned}$$

se tiene $\tau_{\sigma\mu} \cdot B_0^{[-1]} = B_{\tau_{\sigma\mu}(\infty)}^{[1]} = B_{t+1}^{[1]}$.

3. De

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma^2\mu}(0) &= t, \\ \tau_{\sigma^2\mu}(t) &= \frac{t^3 + t^2}{t^2 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-2} + t^{-5} + t^{-6} + \dots, \\ \tau_{\sigma^2\mu}(\infty) &= \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} = t + t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + t^{-4} + \dots,\end{aligned}$$

se tiene $\tau_{\sigma^2\mu} \cdot B_0^{[-1]} = B_{\tau_{\sigma^2\mu}(\infty)}^{[3]} = B_{t+t^{-1}+t^{-2}}^{[3]}$.

4. De

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma^3\mu}(0) &= \frac{t^2 + 1}{t} = t + t^{-1}, \\ \tau_{\sigma^3\mu}(t) &= \frac{t^4 + t^3 + t^2 + t + 1}{t^3 + t^2} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-4} + t^{-5} + t^{-6} + \dots, \\ \tau_{\sigma^3\mu}(\infty) &= \frac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-4} + t^{-6} + \dots,\end{aligned}$$

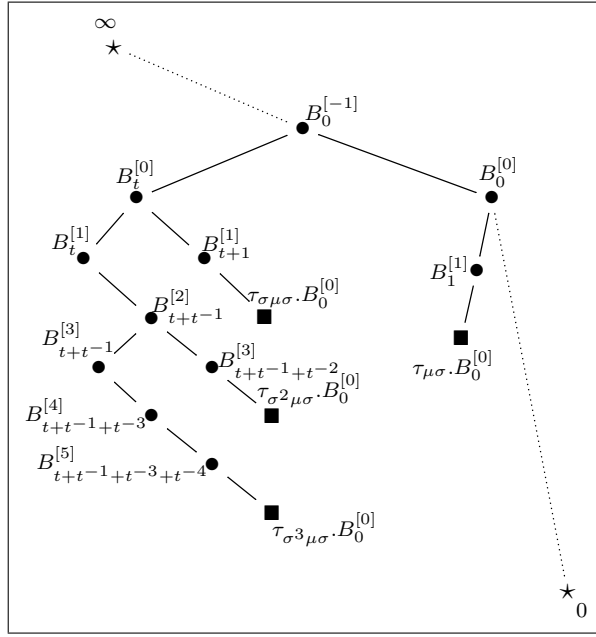


Figura 4.15: Ubicación en el árbol $\mathfrak{Z}(K)$ los representantes de v_5, v_6, v_7 y v_8 , para el caso $N = t^2$.

se tiene $\tau_{\sigma^3\mu} \cdot B_0^{[-1]} = B_{\tau_{\sigma^3\mu}(\infty)}^{[5]} = B_{t+t-1+t-3+t-4}^{[5]}$.

Una lista detallada de estos vértices a continuación:

$$\begin{aligned} \tau_{\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]} &= B_{1+t-1}^{[2]}, \\ \tau_{\sigma\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]} &= B_{t+1+t-1}^{[2]}, \\ \tau_{\sigma^2\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]} &= B_{t+t-1+t-2}^{[4]}, \\ \tau_{\sigma^3\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]} &= B_{t+t-1+t-3+t-4+t-5}^{[6]}, \\ \tau_{\mu} \cdot B_0^{[-1]} &= B_1^{[1]}, \\ \tau_{\sigma\mu} \cdot B_0^{[-1]} &= B_{t+1}^{[1]}, \\ \tau_{\sigma^2\mu} \cdot B_0^{[-1]} &= B_{t+t-1+t-2}^{[3]}, \\ \tau_{\sigma^3\mu} \cdot B_0^{[-1]} &= B_{t+t-1+t-3+t-4}^{[5]}. \end{aligned}$$

En la Figura 4.15 y en la Figura 4.16 se encuentran las posiciones de estos vértices en el

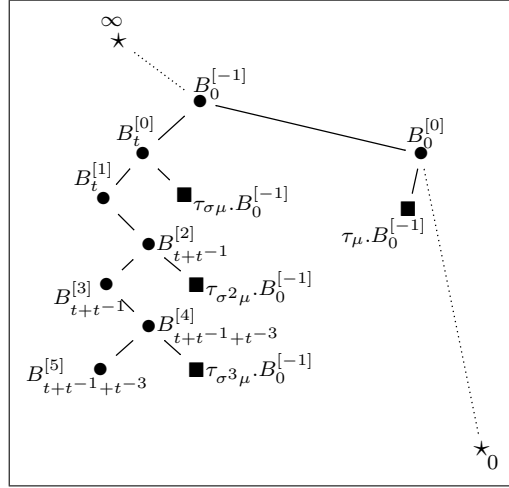


Figura 4.16: Ubicación en el árbol $\mathfrak{T}(K)$ los representantes de w_9, w_{10}, w_{11} y w_{12} , para el caso $N = t^2$.

árbol $\mathfrak{T}(K)$. Por último, falta encontrar representantes de los vértices w_5, w_6, w_7 y w_8 . Para este fin, estudiamos el subgrupo de transformaciones de Moebius:

$$\text{Stab}_{\pi_N} \left(B_t^{[0]} \right) = \tau_\sigma \text{Stab}_{\pi_N} \left(B_0^{[0]} \right) \tau_{\sigma^{-1}}.$$

Dado $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, considere la matriz $\varepsilon = \sigma\zeta\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} t+1 & t^2 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$. La transformación de Moebius τ_ε cumple con $\tau_\varepsilon \in \text{Stab}_{\pi_N} \left(B_t^{[0]} \right)$. Más aún:

Proposición 4.2.4. La simetría $[\tau_\varepsilon]$ define una reflexión en el cubo con respecto al plano que contiene a los vértices v_2, v_3, v_5 y v_8 .

Demostración. Primero hay que notar que $[\tau_\varepsilon]$ es de orden 2. Como $\tau_\varepsilon \cdot B_t^{[0]} = B_t^{[0]}$, la simetría $[\tau_\varepsilon]$ fija al vértice v_2 . Para ver que $[\tau_\varepsilon] \cdot w_2 = w_2$ basta aplicar el resultado de la Observación 4.1.5 mediante el producto matricial siguiente:

$$[\sigma^{-1}\varepsilon\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 1 & u+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

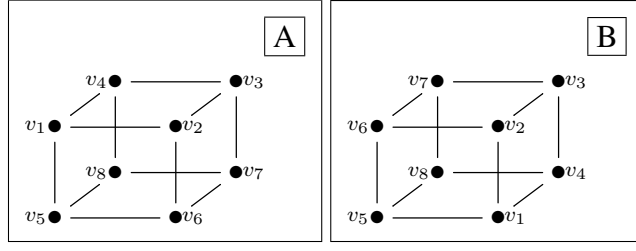


Figura 4.17: Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ vía $[\tau_\varepsilon]$, con $N = t^2$.

Luego $[\tau_\varepsilon].w_2 = [\tau_{\varepsilon\sigma}].w_1 = [\tau_\sigma].w_1 = w_2$. Al ser v_3 vecino de w_2 , es inmediata la igualdad $[\tau_\varepsilon].v_3 = v_3$. Afirmamos que $[\tau_\varepsilon].v_1 = v_6$ y $[\tau_\varepsilon].v_5 = v_5$. En efecto, de los productos:

$$[(\sigma\mu\sigma)^{-1}\varepsilon] = \begin{pmatrix} 1 & u+1 \\ u & u+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 1 & u+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[(\mu\sigma)^{-1}\varepsilon(\mu\sigma)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u+1 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 1 & u+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 1 \\ u+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se siguen a continuación:

$$[\tau_\varepsilon].v_1 = [\tau_{\sigma\mu\sigma}].v_1 = v_6,$$

$$[\tau_\varepsilon].v_5 = [\tau_{\varepsilon\mu\sigma}].v_1 = [\tau_{\mu\sigma}].v_1 = v_5.$$

El vértice v_8 es vecino de v_5 y como $[\tau_\varepsilon].v_6 = v_1$, la única posibilidad es que también $[\tau_\varepsilon].v_8 = v_8$. □

En la Figura 4.17 se ve la permutación de los vértices de tipo 1 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ mediante la simetría $[\tau_\varepsilon]$. Para encontrar un representante del vértice w_5 es necesario notar las igualdades $[\tau_\varepsilon].w_1 = w_{10}$ y $[\tau_\mu].w_5 = w_{10}$. Así $\tau_{\mu\varepsilon}.B_0^{[-1]}$ es un representante de w_5 .

Corolario 4.2.4.1. Las imágenes de los vértices $\tau_{\mu\varepsilon}.B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma\mu\varepsilon}.B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma^2\mu\varepsilon}.B_0^{[-1]}$ y $\tau_{\sigma^3\mu\varepsilon}.B_0^{[-1]}$

en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ son los vértices w_5, w_6, w_7 y w_8 , respectivamente.

Para mayor detalle, buscamos la ubicación de estos vértices en el árbol de Bruhat-Tits $\mathfrak{T}(K)$.

Calculando siguientes productos:

$$\begin{aligned}\mu\varepsilon &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t+1 & t^2 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 & t^2 \\ t & t^2+t+1 \end{pmatrix}, \\ \sigma\mu\varepsilon &= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t+1 & t^2 \\ t & t^2+t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t^3+t^2+t+1 \\ t+1 & t^2 \end{pmatrix}, \\ \sigma^2\mu\varepsilon &= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & t^3+t^2+t+1 \\ t+1 & t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3+t+1 & t^4+t^3+t \\ t^2 & t^3+t^2+t+1 \end{pmatrix}, \\ \sigma^3\mu\varepsilon &= \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3+t+1 & t^4+t^3+t \\ t^2 & t^3+t^2+t+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^4+t & t^5+t^4+t^3+t+1 \\ t^3+t+1 & t^4+t^3+t \end{pmatrix},\end{aligned}$$

se tiene lo siguiente:

1. De

$$\begin{aligned}\tau_{\mu\varepsilon}(0) &= \frac{t^2}{t^2+t+1} = 1 + t^{-1} + t^{-3} + t^{-4} + t^{-6} + \dots, \\ \tau_{\mu\varepsilon}(t) &= \frac{t}{t+1} = 1 + t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + t^{-4} + \dots, \\ \tau_{\mu\varepsilon}(\infty) &= \frac{t+1}{t} = 1 + t^{-1},\end{aligned}$$

se tiene $\tau_{\mu\varepsilon} \cdot B_0^{[-1]} = B_{\tau_{\mu\varepsilon}(\infty)}^{[3]} = B_{1+t^{-1}}^{[3]}$.

2. Ahora si

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma\mu\varepsilon}(0) &= \frac{t^3 + t^2 + t + 1}{t^2} = t + 1 + t^{-1} + t^{-2}, \\ \tau_{\sigma\mu\varepsilon}(t) &= \frac{t^2 + t + 1}{t} = t + 1 + t^{-1}, \\ \tau_{\sigma\mu\varepsilon}(\infty) &= \frac{t^2}{t+1} = t + 1 + t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + t^{-4} + \dots,\end{aligned}$$

entonces $\tau_{\sigma\mu\varepsilon}.B_0^{[-1]} = B_{t+1+t^{-1}+t^{-2}}^{[3]}$.

3. Si

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma^2\mu\varepsilon}(0) &= \frac{t^4 + t^3 + t}{t^3 + t^2 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-2} + t^{-5} + t^{-6} + \dots, \\ \tau_{\sigma^2\mu\varepsilon}(t) &= \frac{t^3 + t^2}{t^2 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-2} + t^{-4} + t^{-5} + \dots, \\ \tau_{\sigma^2\mu\varepsilon}(\infty) &= \frac{t^3 + t + 1}{t^2} = t + t^{-1} + t^{-2},\end{aligned}$$

entonces $\tau_{\sigma^2\mu\varepsilon}.B_0^{[-1]} = B_{\tau_{\sigma^2\mu\varepsilon}(\infty)}^{[5]} = B_{t+t^{-1}+t^{-2}}^{[5]}$.

4. Si

$$\begin{aligned}\tau_{\sigma^3\mu\varepsilon}(0) &= \frac{t^5 + t^4 + t^3 + t + 1}{t^4 + t^3 + t} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-4} + t^{-5} + t^{-7} + \dots, \\ \tau_{\sigma^3\mu\varepsilon}(t) &= \frac{t^4 + t^3 + t^2 + t + 1}{t^3 + t^2} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-4} + t^{-5} + t^{-6} + t^{-7} + t^{-8} + \dots, \\ \tau_{\sigma^3\mu\varepsilon}(\infty) &= \frac{t^4 + t}{t^3 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-4} + t^{-5} + t^{-8} + \dots,\end{aligned}$$

entonces $\tau_{\sigma^3\mu\varepsilon}.B_0^{[-1]} = B_{\tau_{\sigma^3\mu\varepsilon}(\infty)}^{[7]} = B_{t+t^{-1}+t^{-3}+t^{-4}+t^{-5}}^{[7]}$.

Los representantes de los vértices w_5 , w_6 , w_7 y w_8 en $\mathfrak{I}(K)$ se encuentran en la Figura 4.18. Ya conseguido el grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{I}(K)$, procedemos a estudiar la acción de Φ_N sobre $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{I}(K)$ para calcular el cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{I}(K)$ (El grupo Φ_N está definido en la Sección 4.1). Primero es necesario notar que $|H_{N,2}| = 8$, con las siguientes matrices como elementos de este grupo:

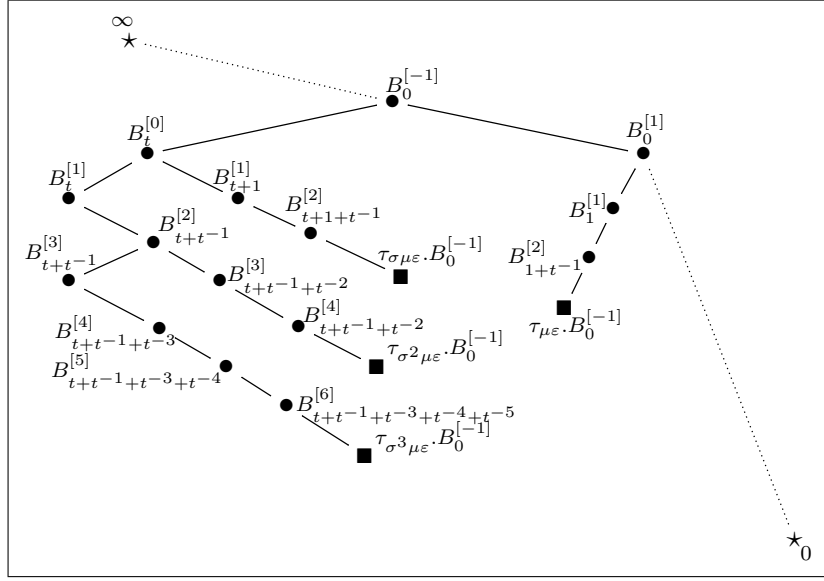


Figura 4.18: Ubicación en el árbol $\mathfrak{T}(K)$ los representantes de los vértices w_5, w_6, w_7 y w_8 , para el caso $N = t^2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & u+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u+1 & 1 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+1 & u \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+1 & u+1 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.2.5. El grupo $H_{N,2}$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Demostración. El grupo $H_{N,2}$ es abeliano, de orden 8 y todos sus elementos son de orden 2. \square

Lema 4.2.6. El grupo $H_{N,2}$ tiene por generadores a las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y

$$\begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Todas las matrices de $H_{N,2}$ se obtienen como productos de los elementos $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}$. En efecto:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & u+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u+1 & 1 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & u+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u+1 & u \\ 0 & u+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u+1 & u+1 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

□

Con ayuda del Lema 4.2.6 podemos estudiar las correspondencias de los vértices de tipo 0 y 1 de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ dadas por la simetría $[\tau_\delta]$, donde $[\delta]$ es uno de los generadores del grupo $H_{N,2}$.

1. Para $[\zeta] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se considera la transformación de Moebius $\tau_\zeta \in \tau_{\mathfrak{E}(V)^*}$, donde

$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es sabido que τ_ζ fija a los vértices del rayo $] \infty, B_0^{[0]}]$ y la bola $B_0^{[-1]}$

tiene por vecinos en $\mathfrak{T}(K)$ a las bolas $B_0^{[0]}$, $B_t^{[0]}$ y $B_0^{[-2]}$. Luego $\tau_\zeta.B_t^{[0]} = B_t^{[0]}$. Se deduce

que $[\tau_\zeta]$ fija a los vértices v_1, v_2 y w_1 del grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$. Por otro lado, como

$\tau_\zeta(0) = 1$ y τ_ζ fija a las bolas $B_0^{[0]}$ y $B_0^{[-1]}$, se tiene que $\tau_\zeta.B_0^{[1]} = B_1^{[1]}$. En otras palabras,

$[\tau_\zeta].w_4 = w_9$. Al ser v_4 vecino de w_4 y v_5 vecino de w_9 , otra igualdad inmediata es

$[\tau_\zeta].v_4 = v_5$. Afirmamos que $[\tau_\zeta]$ fija los vértices v_7 y v_8 . En efecto:

$$\begin{aligned}
[(\sigma^2\mu\sigma)^{-1}\zeta\sigma^2\mu\sigma] &= \begin{pmatrix} u+1 & u+1 \\ u+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u+1 \\ u+1 & u+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
[(\sigma^3\mu\sigma)^{-1}\zeta\sigma^3\mu\sigma] &= \begin{pmatrix} u+1 & 1 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 & 1 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Es decir, $[\tau_{\zeta\sigma^2\mu\sigma}].v_1 = [\tau_{\sigma^2\mu\sigma}].v_1$ y $[\tau_{\zeta\sigma^3\mu\sigma}].v_1 = [\tau_{\sigma^3\mu\sigma}].v_1$, y con ello se tienen las dos igualdades siguientes:

$$[\tau_{\zeta}].v_7 = [\tau_{\zeta\sigma^2\mu\sigma}].v_1 = [\tau_{\sigma^2\mu\sigma}].v_1 = v_7,$$

$$[\tau_{\zeta}].v_8 = [\tau_{\zeta\sigma^3\mu\sigma}].v_1 = [\tau_{\sigma^3\mu\sigma}].v_1 = v_8.$$

Por vecindad, las correspondencias restantes se muestran a continuación:

$$v_1 \mapsto v_1, \quad w_1 \mapsto w_1, \quad w_9 \mapsto w_4,$$

$$v_2 \mapsto v_2, \quad w_2 \mapsto w_{10}, \quad w_{10} \mapsto w_2,$$

$$v_3 \mapsto v_6, \quad w_3 \mapsto w_5, \quad w_{11} \mapsto w_6,$$

$$v_4 \mapsto v_5, \quad w_4 \mapsto w_9, \quad w_{12} \mapsto w_8.$$

$$v_5 \mapsto v_4, \quad w_5 \mapsto w_3,$$

$$v_6 \mapsto v_3, \quad w_6 \mapsto w_{11},$$

$$v_7 \mapsto v_7, \quad w_7 \mapsto w_7,$$

$$v_8 \mapsto v_8, \quad w_8 \mapsto w_{12},$$

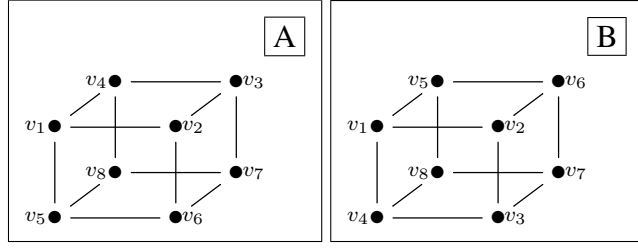


Figura 4.19: Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$, efectuada por $[\tau_\zeta]$, donde $N = t^2$.

La permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ mediante $[\tau_\zeta]$ viene dada por la Figura 4.19.

2. Para $[\delta'] = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se considera la transformación de Moebius $\tau_{\delta'} \in \tau_{\mathfrak{E}(V)^*}$, donde

$\delta' = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como $\tau_{\delta'}$ fija a los vértices del rayo $] \infty, B_0^{[-1]}]$ y no fija la bola $B_0^{[0]}$,

la única posibilidad es que $\tau_{\delta'}.B_0^{[0]} = B_t^{[0]}$. De lo anterior se deducen las igualdades $[\tau_{\delta'}].v_1 = v_2$ y $[\tau_{\delta'}].w_1 = w_1$. Por otro lado $\tau_{\delta'}(0) = t$, $\tau_{\delta'}(t^{-1}) = t + t^{-1}$ y $\tau_{\delta'}(\infty) = \infty$ implican $\tau_{\delta'}.B_0^{[1]} = B_t^{[1]}$. En particular por el Lema 4.1.9, $\tau_{\delta'}$ permuta los vértices de los rayos $]0, B_0^{[1]}]$ y $]t, B_t^{[1]}]$. Luego $[\tau_{\delta'}].w_4 = w_2$, donde w_2 y w_4 son las imágenes en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ de $B_t^{[1]}$ y $B_0^{[1]}$, respectivamente. Por vecindad, el resto de las igualdades se muestra a continuación:

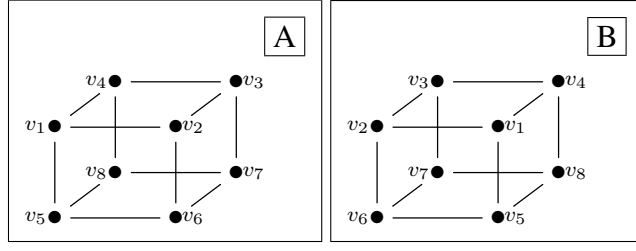


Figura 4.20: Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{F}(K)$, efectuada por $[\tau_{\delta'}]$, donde $N = t^2$.

$$\begin{aligned}
v_1 &\mapsto v_2, & w_1 &\mapsto w_1, & w_9 &\mapsto w_{10}, \\
v_2 &\mapsto v_1, & w_2 &\mapsto w_4, & w_{10} &\mapsto w_9, \\
v_3 &\mapsto v_4, & w_3 &\mapsto w_3, & w_{11} &\mapsto w_{12}, \\
v_4 &\mapsto v_3, & w_4 &\mapsto w_2, & w_{12} &\mapsto w_{11}. \\
v_5 &\mapsto v_6, & w_5 &\mapsto w_5, \\
v_6 &\mapsto v_5, & w_6 &\mapsto w_8, \\
v_7 &\mapsto v_8, & w_7 &\mapsto w_7, \\
v_8 &\mapsto v_7, & w_8 &\mapsto w_6,
\end{aligned}$$

La permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{F}(K)$ mediante $[\tau_{\delta'}]$ viene dada por la Figura 4.20.

3. Para $[\delta''] = \begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix}$ se considera la transformación de Moebius $\tau_{\delta''} \in \tau_{\mathfrak{E}(V)^*}$, donde $\delta'' = \begin{pmatrix} 1+t+t^2+t^3 & t^2 \\ t^2 & 1+t \end{pmatrix}$ es un levantamiento de $[\delta'']$. La simetría $[\tau_{\delta''}]$ traspone los vértices v_1 y v_7 . En efecto, por el resultado de la Observación 4.1.5 basta estudiar la imagen del producto $\delta''^{-1}\sigma^2\mu\sigma$ en $\Delta_{N,2}$:

$$[(\sigma^2\mu\sigma)^{-1}\delta''] = \begin{pmatrix} u+1 & u+1 \\ u+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 & 0 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se sigue $[\tau_{\sigma^2\mu\sigma}].v_1 = [\tau_{\delta''}].v_1$, en particular, $[\tau_{\delta''}].v_7 = [\tau_{\delta''\sigma^2\mu\sigma}].v_1 = [\tau_{(\delta'')^2}].v_1 = v_1$.

También afirmamos que $[\tau_{\delta''}].v_2 = v_8$. En efecto, si:

$$[(\sigma^3\mu\sigma)^{-1}\delta''\sigma] = \begin{pmatrix} u+1 & 1 \\ 0 & u+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & u+1 \\ u+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces $[\tau_{\delta''}].v_2 = [\tau_{\delta''\sigma}].v_1 = [\tau_{\sigma^3\mu\sigma}].v_1 = v_8$. Por último, $[\tau_{\delta''}].v_6 = v_4$. En efecto, si:

$$[\sigma^{-3}\delta''(\sigma\mu\sigma)] = \begin{pmatrix} u & u+1 \\ u+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 & u+1 \\ u & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $[\tau_{\delta''}].v_6 = [\tau_{\delta''\sigma\mu\sigma}].v_1 = [\tau_{\sigma^3}].v_1 = v_4$. El resto de las igualdades resultan del hecho de que la simetría $[\tau_{\delta''}]$ es un morfismo de grafos, luego manda vértices vecinos en vértices vecinos, así:

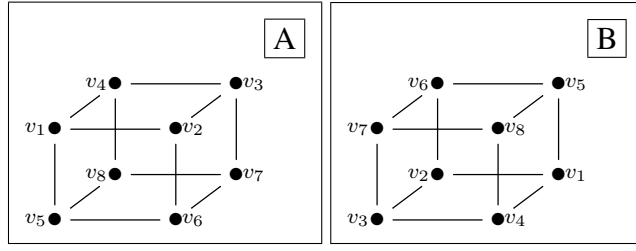


Figura 4.21: Permutación de los vértices de tipo 0 de $\pi_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{F}(K)$, efectuada por $[\tau_{\delta''}]$, donde $N = t^2$.

$$\begin{aligned}
 v_1 &\mapsto v_7, & w_1 &\mapsto w_7, & w_9 &\mapsto w_{11}, \\
 v_2 &\mapsto v_8, & w_2 &\mapsto w_8, & w_{10} &\mapsto w_{12}, \\
 v_3 &\mapsto v_5, & w_3 &\mapsto w_5, & w_{11} &\mapsto w_9, \\
 v_4 &\mapsto v_6, & w_4 &\mapsto w_6, & w_{12} &\mapsto w_{10}. \\
 v_5 &\mapsto v_3, & w_5 &\mapsto w_3, \\
 v_6 &\mapsto v_4, & w_6 &\mapsto w_4, \\
 v_7 &\mapsto v_1, & w_7 &\mapsto w_1, \\
 v_8 &\mapsto v_2, & w_8 &\mapsto w_2,
 \end{aligned}$$

La permutación de los vértices de tipo 0 de $\pi_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{F}(K)$ mediante $[\tau_{\delta''}]$ viene dada por la Figura 4.21.

El cálculo de las órbitas queda de la siguiente manera:

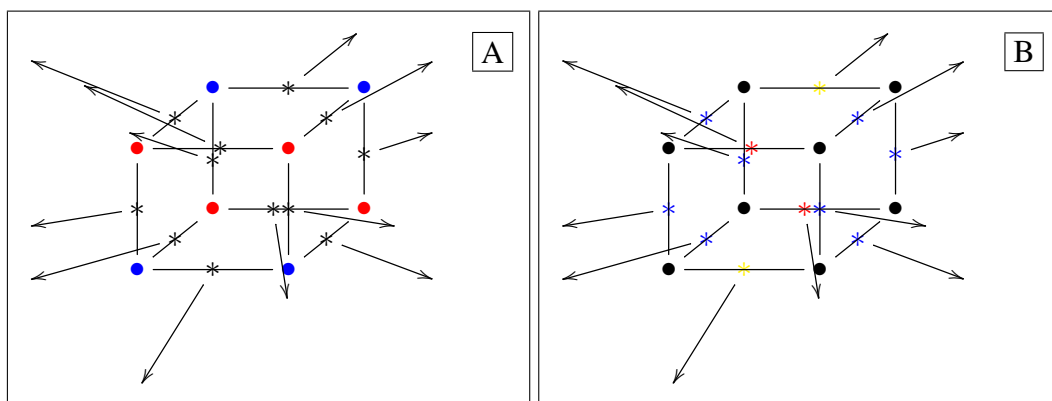


Figura 4.22: Orbits de los vértices de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ para $N = t^2$.

$$\text{orb}(v_1) = \{v_1, v_2, v_7, v_8\},$$

$$\text{orb}(v_3) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

$$\text{orb}(w_1) = \{w_1, w_7\},$$

$$\text{orb}(w_2) = \{w_2, w_4, w_6, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}\},$$

$$\text{orb}(w_3) = \{w_3, w_5\}.$$

En la Figura 4.22.A se muestran los vértices de tipo 0 pintados de distintos colores para indicar la cardinalidad de sus órbitas. La Figura 4.22.B muestra lo mismo pero para los vértices de tipo 1. Por lo tanto, el grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \setminus \mathfrak{T}(K)$ viene dado por la Figura 4.23, donde los vértices A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 son los siguientes:

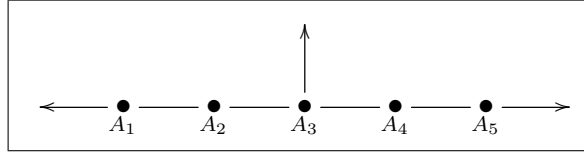


Figura 4.23: Grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{T}(K)$, asociado al polinomio $N = t^2$.

$$A_1 = \Phi_N \cdot w_1,$$

$$A_2 = \Phi_N \cdot v_1,$$

$$A_3 = \Phi_N \cdot w_9,$$

$$A_4 = \Phi_N \cdot v_5,$$

$$A_5 = \Phi_N \cdot w_5.$$

4.3 El caso $N \in \mathbb{F}_2[t]$ irreducible.

En esta Sección se presentan los cálculos explícitos para la obtención del grafo cociente asociado a un polinomio de grado 2 en $\mathbb{F}_2[t]$ irreducible.

Para el divisor $D_N = Q$, donde $Q \in |X|$ es el único punto de grado 2, se sigue, con ayuda de la Sección 2.7 y la Subsección 3.1.1, que el polinomio correspondiente es $N = t^2 + t + 1$. Como N es irreducible en $\mathbb{F}_2[t]$, se sigue del teorema de isomorfía que

$$\mathbb{F}_2[t]/N\mathbb{F}_2[t] \cong \mathbb{F}_2(\omega) = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{F}, \omega^2 + \omega + 1 = 0\},$$

donde ω es la imagen de t . Del Ejemplo 3.1.7, tenemos el isomorfismo $\Delta_{N,2} \cong \text{SL}_2(\mathbb{F}_2(\omega))$. Como $\mathbb{F}_2(\omega) \cong \mathbb{F}_4$ es el cuerpo con 4 elementos, se sigue que $|\text{SL}_2(\mathbb{F}_2(\omega))| = 60$. Por la Observación 4.1.5, los estabilizadores en τ_{Γ} de los vértices $B_0^{[0]}$ y $B_0^{[-1]}$ tienen 6 y 4 elementos,

respectivamente, y con ello, $|\Lambda_N \cdot (\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[0]})| = 10$ y $|\Lambda_N \cdot (\tau_{\Gamma_N} \cdot B_0^{[-1]})| = 15$. Para conocer todos los órdenes posibles de los elementos de $\Delta_{N,2}$, estudiamos las formas de Jordan de las matrices $\eta \in \text{SL}_2(\mathbb{F}_4)$:

(i) El elemento $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, evidentemente, es de orden 1.

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{F}_4^*$ es el único valor propio de η , entonces η es congruente a la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

En este caso η tiene orden 2 porque $\alpha = 1$.

(iii) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_4^*$ son los dos valores propios distintos de η , entonces η es conjugada a la matriz diagonal $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, por lo que η tiene orden 3.

(iv) Si $p_\eta(x)$ no tiene raíces en \mathbb{F}_4 , entonces $\mathbb{F}_4[\eta]/\mathbb{F}_4$ es una extensión cuadrática. Se sigue que $\mathbb{F}_4[\eta] \cong \mathbb{F}_{16}$, y $\mathbb{F}_{16}^* = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ es un grupo cíclico de orden 15. Por lo tanto, los posibles órdenes de η son 3, 5 o 15.

Para un elemento $\eta \in \text{SL}_2(\mathbb{F}_2(\omega))$ tal que τ_η no posee puntos fijos (caso (iv)), el polinomio característico $p_\eta(x) = x^2 + \text{tr}(\eta)x + 1$ no tiene raíces en $\mathbb{F}_2(\omega)$. El polinomio de Artin-Schreier asociado a $p_\eta(x)$ es $x^2 + x + \frac{1}{\text{tr}(\eta)^2}$. Un ejemplo de polinomio de Artin-Schreier irreducible en $\mathbb{F}(\omega)[x]$ es $x^2 + x + \omega$, es decir, el asociado a η con $\text{tr}(\eta) = \omega$. Como ejemplo, se puede considerar un elemento $\sigma \in \Gamma$ cuya imagen en $\Delta_{N,2}$ es la matriz $[\sigma] = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La clase $[\sigma]$ tiene orden 5 en $\Delta_{N,2}$ ya que:

$$\begin{aligned}
[\sigma^2] &= \begin{pmatrix} \omega & \omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}, \\
[\sigma^3] &= \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega & \omega \end{pmatrix}, \\
[\sigma^4] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}, \\
[\sigma^5] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Al igual que en la Secciones 4.1 y 4.2, el grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ con $N = t^2 + t + 1$ es un grafo bipartido y cada uno de sus vértices de tipo 0 y 1 tiene valencia 3. Para encontrar representantes de cada uno de los vértices de tipo 0 o 1 de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ ocupamos las simetrías del grupo τ_{Γ_N} , de la misma manera que en las dos Secciones 4.1 y 4.2. El cálculo de las potencias de $[\sigma]$, junto con la Observación 4.1.5, justifica lo siguiente:

Lema 4.3.1. Las imágenes de las bolas $B_0^{[0]}$, $\tau_\sigma \cdot B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^2} \cdot B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^3} \cdot B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^4} \cdot B_0^{[0]}$ en $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ son distintas.

Como ya sabemos que las bolas del Lema 4.3.1 están a distancia 2 entre sí, la simetría $[\tau_\sigma]$ genera un 10-ciclo en el grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$. Sin pérdida de generalidad, de la misma manera que en las Secciones 4.1 y 4.2, usamos las notaciones $v_1 = \tau_{\Gamma_N} \cdot (B_0^{[0]})$ y $w_1 = \tau_{\Gamma_N} \cdot (B_0^{[-1]})$. En la Figura 4.24 se muestra dicho ciclo, en donde los vértices de tipo 0 forman un pentágono regular.

Observación 4.3.2. Existen dos posibilidades para el grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$, a saber, las que aparecen en la Figura 4.25. Es sabido que $\Delta_{N,2} \cong \text{SL}_2(\mathbb{F}_4)$. Por otro lado, el prisma

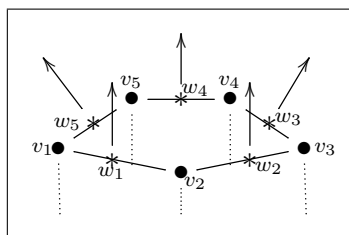


Figura 4.24: 10-ciclo del grafo $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$, con $N = t^2 + t + 1$.

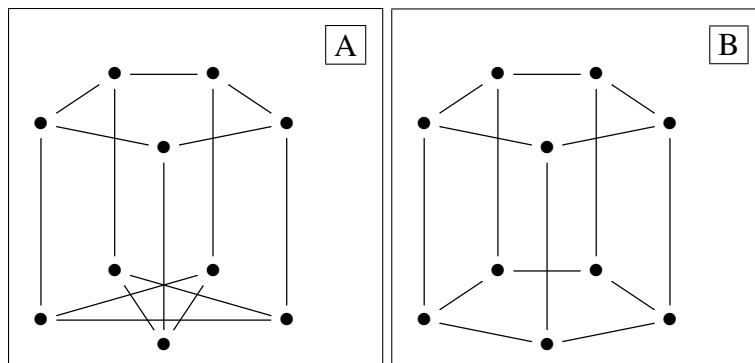


Figura 4.25: Posibles grafos que representan al cociente $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$ con $N = t^2 + t + 1$, no isomorfos entre sí.

pentagonal de la Figura 4.25.B tiene un grupo de simetrías de orden 20, por lo que, si esta fuera la figura correcta, la acción de $\Delta_{N,2}$ poseería un núcleo no trivial, o de manera equivalente, existirían elementos no triviales en $\Delta_{N,2}$ que fijan a todos los vértices del prisma; pero esto no puede ocurrir porque se sabe que $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \cong A_5$ y A_5 es un grupo simple (no tiene subgrupos normales). Se concluye que $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$ es el grafo de la Figura 4.25.A.

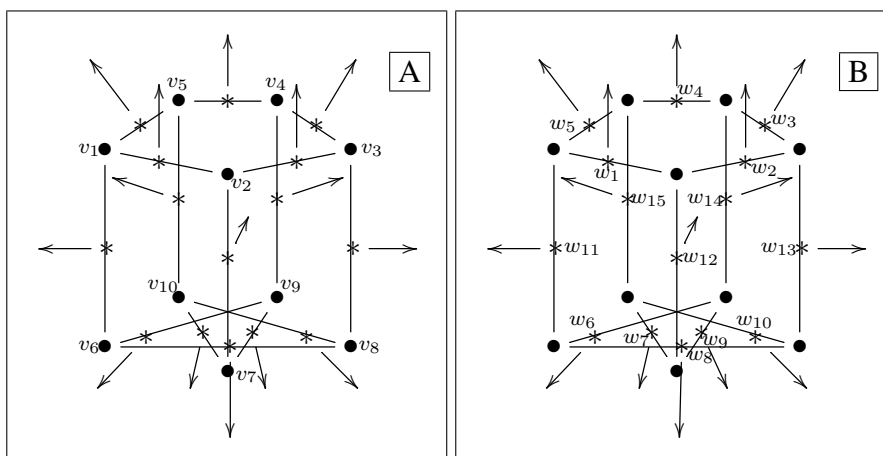


Figura 4.26: Grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{I}(K)$, asociado a $N = t^2 + t + 1$.

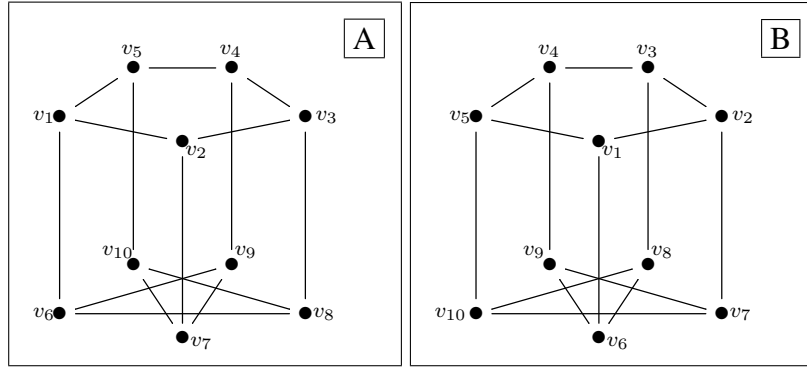


Figura 4.27: Acción de $[\tau_\sigma]$ en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{F}(K)$ con $N = t^2 + t + 1$.

Al igual que en la Sección 4.2, una consecuencia directa es que, si definimos $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\varepsilon = \begin{pmatrix} t+1 & t^2 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$, entonces las imágenes de los vértices $\tau_{\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]}$ y $\tau_\mu \cdot B_0^{[-1]}$ y $\tau_{\mu\varepsilon} \cdot B_0^{[-1]}$ no son iguales a ninguno de los vértices del 10-ciclo anterior.

Corolario 4.3.2.1. La simetría $[\tau_\sigma]$ es una rotación del $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{F}(K)$ con respecto al eje de simetría perpendicular a la cara que contiene a los vértices v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5

Proposición 4.3.3. La simetría $[\tau_\varepsilon]$ permuta los vértices de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{F}(K)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto v_7 & v_6 &\mapsto v_9 \\ v_2 &\mapsto v_2 & v_7 &\mapsto v_1 \\ v_3 &\mapsto v_3 & v_8 &\mapsto v_4 \\ v_4 &\mapsto v_8 & v_9 &\mapsto v_6 \\ v_5 &\mapsto v_{10} & v_{10} &\mapsto v_5 \end{aligned}$$

Demostración. $[\tau_\varepsilon]$ es una simetría de orden 2. En la Sección 4.2, se demostró la igualdad $\tau_\varepsilon \cdot B_t^{[0]} = B_t^{[0]}$, es decir, $[\tau_\varepsilon] \cdot v_2 = v_2$. A continuación se demuestra que también fija al vértice v_3 . En efecto, el producto:

$$[\sigma^{-2}\varepsilon\sigma^2] = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega+1 & \omega+1 \\ 1 & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

implica $[\tau_\varepsilon].v_3 = [\tau_{\varepsilon\sigma^2}].v_1 = [\tau_{\sigma^2}].v_1 = v_3$. Si $[\tau_\varepsilon]$ fija a v_1 y v_4 , entonces fija a todos los v\u00e9rtices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{X}(K)$, lo cual no puede ser. Se afirma que $[\tau_\varepsilon].v_1 = v_7$ y $[\tau_\varepsilon].v_4 = v_8$.

En efecto:

$$[\varepsilon\sigma\mu\sigma] = \begin{pmatrix} \omega + 1 & \omega + 1 \\ 1 & \omega + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[(\varepsilon\sigma^3)^{-1}(\sigma^2\mu\sigma)] = \begin{pmatrix} \omega + 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lo que implica $[\tau_\varepsilon].v_1 = [\tau_{\sigma\mu\sigma}].v_1 = v_7$ y $[\tau_\varepsilon].v_4 = [\tau_{\varepsilon\sigma^3}].v_1 = [\tau_{\sigma^2\mu\sigma}].v_1 = v_8$. N\u00f3tese que $[\tau_\mu]$ no fija a v_2 (ver Figura 4.1.6), luego $[\tau_{\mu\sigma}].v_1 = v_6$. Por vecindad, $[\tau_\varepsilon].v_5 = v_{10}$, $[\tau_\varepsilon].v_6 = v_9$. El resto de las igualdades siguen del hecho que $[\tau_\varepsilon]$ tiene orden 2. \square

Proposici\u00f3n 4.3.4. La simetr\u00eda $[\tau_\mu]$ permuta los v\u00e9rtices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{X}(K)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto v_1 & v_6 &\mapsto v_2 \\ v_2 &\mapsto v_6 & v_7 &\mapsto v_9 \\ v_3 &\mapsto v_8 & v_8 &\mapsto v_3 \\ v_4 &\mapsto v_{10} & v_9 &\mapsto v_7 \\ v_5 &\mapsto v_5 & v_{10} &\mapsto v_4 \end{aligned}$$

Demostraci\u00f3n. $[\tau_\mu]$ es una simetr\u00eda de orden 2 y fija a los v\u00e9rtices v_1 y v_5 . En el primer caso es porque $\tau_\mu.B_0^{[0]} = B_0^{[0]}$, mientras que en el segundo, basta calcular el producto:

$$[\sigma^{-4}\mu\sigma^4] = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, se tiene la igualdad $[\tau_\mu].v_5 = [\tau_{\mu\sigma^4}].v_1 = [\tau_{\sigma^4}].v_1 = v_5$. Por el mismo argumento dado en la Proposici\u00f3n 4.3.3, $[\tau_\mu]$ no puede fijar a los v\u00e9rtices v_2 y v_4 simult\u00e1neamente. Se

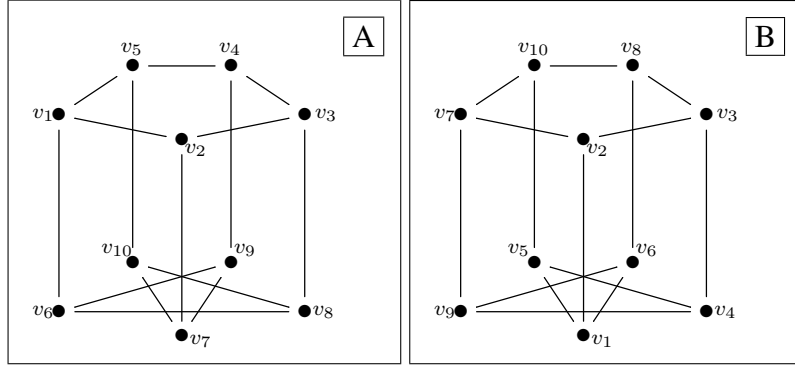


Figura 4.28: Acción de $[\tau_\varepsilon]$ en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ con $N = t^2 + t + 1$.

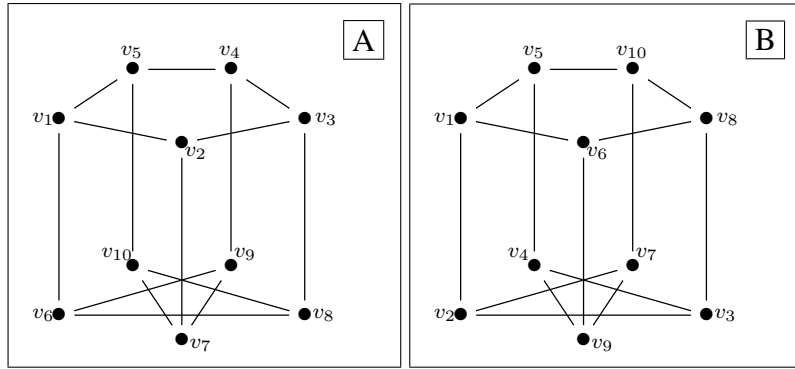


Figura 4.29: Acción de $[\tau_\mu]$ en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ con $N = t^2 + t + 1$.

demuestra que $[\tau_\mu].v_2 = v_6$ y $[\tau_\mu].v_4 = v_{10}$. La primera se demostró en la proposición anterior.

La igualdad $[\tau_\mu].v_4 = v_{10}$ se demuestra con el producto matricial siguiente:

$$[(\mu\sigma^3)^{-1}(\sigma^4\mu\sigma)] = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega + 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega + 1 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por vecindad de vértices, se verifica $[\tau_\mu].v_3 = v_8$ y $[\tau_\mu].v_7 = v_9$. El resto de las igualdades se obtienen recordando que $[\tau_\mu]$ es de orden 2. \square

En la Figura 4.28, se muestra como $[\tau_\varepsilon]$ permuta los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$, mientras que en la Figura 4.29, se ve cómo lo hace $[\tau_\mu]$.

Corolario 4.3.4.1. La imagen del vértice $\tau_\mu.B_0^{[-1]}$ en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ es el vértice w_{11} , y la imagen del vértice $\tau_{\mu\varepsilon}.B_0^{[-1]}$ en $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ es el vértice w_6 .

Demostración. En el caso de $\tau_\mu \cdot B_0^{[-1]}$, basta ver que $[\tau_\mu] \cdot v_1 = v_1$ y $[\tau_\mu] \cdot v_2 = v_6$. Luego, por vecindad se tiene $[\tau_\mu] \cdot w_1 = w_{11}$. Por otro lado:

$$[\tau_{\mu\varepsilon}] \cdot v_1 = [\tau_\mu] \cdot v_7 = v_9,$$

$$[\tau_{\mu\varepsilon}] \cdot v_2 = [\tau_\mu] \cdot v_2 = v_6.$$

Como w_6 es vecino común a v_6 y v_9 , se concluye la igualdad $[\tau_\mu] \cdot w_1 = w_6$. \square

La simetría $[\tau_\sigma]$ permuta los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ de la manera como se muestra en la Figura 4.27. En resumen, las imágenes de los vértices $B_0^{[0]}$, $\tau_\sigma \cdot B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^2} \cdot B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^3} \cdot B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^4} \cdot B_0^{[0]}$, $\tau_{\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^2\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^3\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]}$ y $\tau_{\sigma^4\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]}$ son $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ y v_{10} respectivamente. Por otro lado, las imágenes de los vértices $B_0^{[-1]}$, $\tau_\sigma \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma^2} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma^3} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma^4} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\mu\varepsilon} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma\mu\varepsilon} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma^2\mu\varepsilon} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma^3\mu\varepsilon} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma^4\mu\varepsilon} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_\mu \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma\mu} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma^2\mu} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma^3\mu} \cdot B_0^{[-1]}$ y $\tau_{\sigma^4\mu} \cdot B_0^{[-1]}$ son $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}$ y w_{15} respectivamente.

Observación 4.3.5. De manera análoga como está descrito en la Sección 4.2, falta ubicar en el árbol de Bruhat-Tits $\mathfrak{T}(K)$ los vértices $\tau_{\sigma^4\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]}$, $\tau_{\sigma^4\mu\varepsilon} \cdot B_0^{[-1]}$, $\tau_{\sigma^4\mu} \cdot B_0^{[-1]}$:

1. En el caso del vértice $\tau_{\sigma^4\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]}$, primero es necesario ver que:

$$\sigma^4\mu\sigma = \begin{pmatrix} t^5 + t^4 + t & t^4 + t^3 + t^2 + 1 \\ t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 & t^3 + t^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned} \tau_{\sigma^4\mu\sigma}(0) &= \frac{t^4 + t^3 + t^2 + 1}{t^3 + t^2 + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-6} + t^{-7} + t^{-8} + \dots, \\ \tau_{\sigma^4\mu\sigma}(1) &= \frac{t^5 + t^3 + t^2 + t + 1}{t^4 + t} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-6} + t^{-9} + t^{-12} + \dots, \\ \tau_{\sigma^4\mu\sigma}(\infty) &= \frac{t^5 + t^4 + t}{t^4 + t^3 + t^2 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-6} + t^{-8} + t^{-11} + \dots, \end{aligned}$$

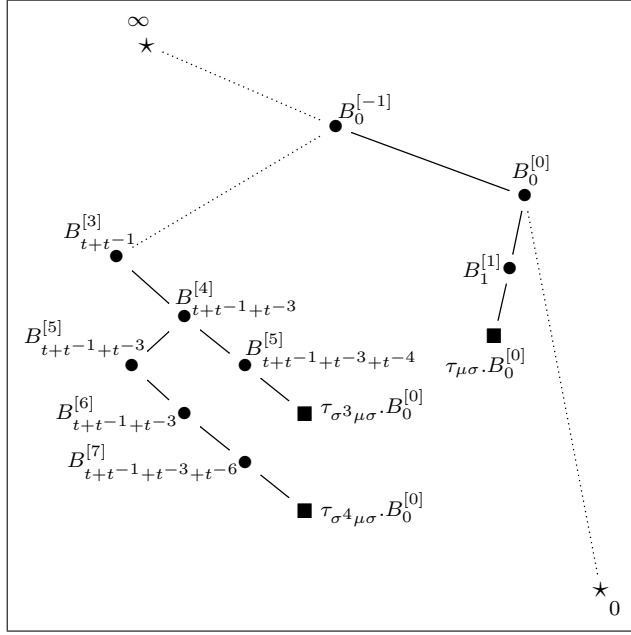


Figura 4.30: Ubicación del vértice $\tau_{\sigma^4\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]}$ en $\mathfrak{T}(K)$.

se concluye que $\tau_{\sigma^4\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]} = B_{\tau_{\sigma^4\mu\sigma}(\infty)}^{[8]}$. De las igualdades $|\tau_{\sigma^4\mu\sigma}(1) - \tau_{\sigma^4\mu\sigma}(\infty)| = |t^{-8}|$ y $\tau_{\sigma^4\mu\sigma}(\infty) = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-6} + t^{-8} + \dots$, se tiene $\tau_{\sigma^4\mu\sigma} \cdot B_0^{[0]} = B_{t+t^{-1}+t^{-3}+t^{-6}}^{[8]}$ y su ubicación en el árbol $\mathfrak{T}(K)$ está dada por la Figura 4.30.

2. Ahora en el caso del vértice $\tau_{\sigma^4\mu\varepsilon} \cdot B_0^{[-1]}$, primero se necesita el producto matricial:

$$\sigma^4\mu\varepsilon = \begin{pmatrix} t^5 + t^3 + t^2 + t + 1 & t^6 + t^5 + t^3 + t^2 \\ t^4 + t & t^5 + t^4 + t^3 + t + 1 \end{pmatrix}.$$

Las igualdades siguientes

$$\begin{aligned} \tau_{\sigma^4\mu\varepsilon}(0) &= \frac{t^6 + t^5 + t^3 + t^2}{t^5 + t^4 + t^3 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-6} + t^{-10} + \dots, \\ \tau_{\sigma^4\mu\varepsilon}(t) &= \frac{t^5 + t^4 + t}{t^4 + t^3 + t^2 + t + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-6} + t^{-8} + t^{-11} \dots, \\ \tau_{\sigma^4\mu\varepsilon}(\infty) &= \frac{t^5 + t^3 + t^2 + t + 1}{t^4 + t} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-6} + t^{-9} + \dots, \end{aligned}$$

se deduce $\tau_{\sigma^4\mu\varepsilon} \cdot B_0^{[-1]} = B_{\tau_{\sigma^4\mu\varepsilon}(\infty)}^{[9]}$. Como $\tau_{\sigma^4\mu\varepsilon}(\infty) = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-6} + t^{-9} + \dots$,

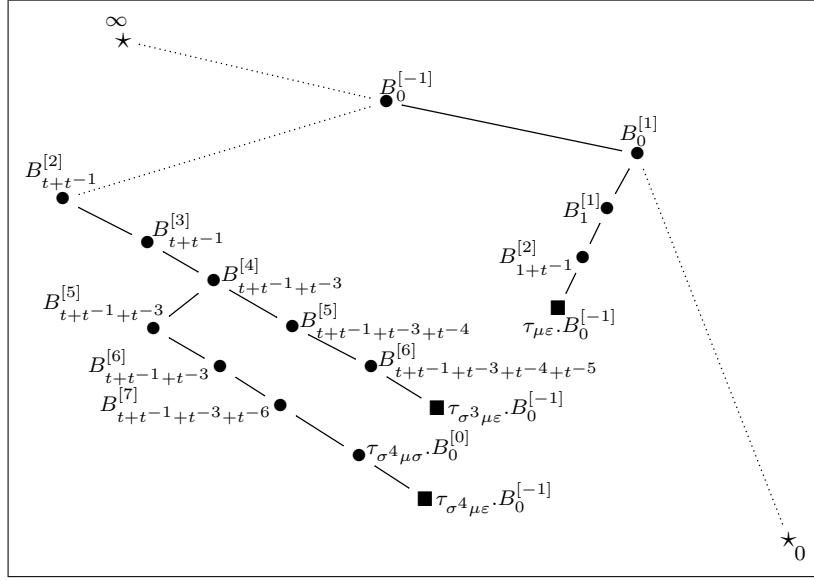


Figura 4.31: Ubicación del vértice $\tau_{\sigma^4 \mu \epsilon} \cdot B_0^{[-1]}$ en $\mathfrak{T}(K)$.

se sigue la igualdad de vértices $\tau_{\sigma^4 \mu \epsilon} \cdot B_0^{[-1]} = B_{t+t-1+t-3+t-6}^{[9]}$. La ubicación de $\tau_{\sigma^4 \mu \epsilon} \cdot B_0^{[-1]}$ en $\mathfrak{T}(K)$ está dada por la Figura 4.31.

3. Por último, para ubicar el vértice $\tau_{\sigma^4 \mu} \cdot B_0^{[-1]}$ en $\mathfrak{T}(K)$, primero es necesario ver que:

$$\sigma^4 \mu = \begin{pmatrix} t^4 + t^3 + t^2 + 1 & t^3 \\ t^3 + t^2 + 1 & t^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned} \tau_{\sigma^4 \mu}(0) &= \frac{t^3}{t^2 + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-5} + t^{-7} + t^{-9} + \dots, \\ \tau_{\sigma^4 \mu}(t) &= \frac{t^5 + t^4 + t}{t^4 + t^3 + t^2 + t + 1} = t + t^{-3} + t^{-6} + t^{-8} + t^{-11} + \dots, \\ \tau_{\sigma^4 \mu}(\infty) &= \frac{t^4 + t^3 + t^2 + 1}{t^3 + t^2 + 1} = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-6} + t^{-7} + \dots, \end{aligned}$$

se concluye que $\tau_{\sigma^4 \mu} \cdot B_0^{[-1]} = B_{\tau_{\sigma^4 \mu}(\infty)}^{[7]}$. Como $\tau_{\sigma^4 \mu}(\infty) = t + t^{-1} + t^{-3} + t^{-6} + t^{-7} + \dots$, se tiene que $\tau_{\sigma^4 \mu} \cdot B_0^{[-1]} = B_{t+t-1+t-3+t-6}^{[7]}$ y su ubicación en $\mathfrak{T}(K)$ está dada por la Figura

Proposición 4.3.8. El grupo $H_{N,2}$ tiene por generadores a las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega + 1 \end{pmatrix}$.

Demostración. Es claro que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tienen orden 2, al igual que el producto $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega + 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por otro lado, la matriz $\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega + 1 \end{pmatrix}$ tiene orden 3, porque:

$$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega + 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \omega + 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega + 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Con ayuda de la Proposición 4.3.8 podemos estudiar las correspondencias de los vértices de tipo 0 y 1 de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$ dadas por la simetría $[\tau_\delta]$, donde $[\delta]$ es uno de los generadores del grupo $H_{N,2}$.

1. Sea $[\zeta] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De igual manera a la Sección 4.2, se considera la transformación

de Moebius $\tau_\zeta \in \tau_{\mathfrak{E}(V)^*}$ donde $\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por un razonamiento análogo al de la

Sección 4.2, $[\tau_\zeta]$ fija a los vértices v_1, v_2 y w_1 del grafo cociente $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{T}(K)$. Por otro lado, se tiene que $\tau_\zeta \cdot B_0^{[1]} = B_1^{[1]}$. En otras palabras, $[\tau_\zeta] \cdot w_5 = w_{11}$. Al ser v_5 vecino de w_5 y v_6 vecino de w_{11} , otra igualdad inmediata es $[\tau_\zeta] \cdot v_5 = v_6$. Para demostrar que

$[\tau_\zeta].w_2 = w_{12}$, basta recordar la igualdad $\tau_\sigma.B_0^{[-1]} = B_t^{[1]}$, junto con $\tau_\zeta(t) = t + 1$, $\tau_\zeta(t + t^{-1}) = t + t^{-1} + 1$ y $\tau_\zeta(\infty) = \infty$. De lo anterior se tiene $\tau_\zeta.B_t^{[1]} = B_{t+1}^{[1]}$. Como consecuencia directa, $[\tau_\zeta].v_3 = v_7$. Es posible sólo una de las siguientes igualdades, o bien $[\tau_\zeta].v_4 = v_9$ o $[\tau_\zeta].v_4 = v_{10}$. La igualdad $[\tau_\zeta].v_4 = v_9$ se infiere del producto:

$$[(\zeta\sigma^3)^{-1}(\sigma^3\mu\sigma)] = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \omega & \omega + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega + 1 & \omega + 1 \\ \omega & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la última igualdad se deduce $[\tau_{(\zeta\sigma^3)^{-1}(\sigma^3\mu\sigma)}].v_1 = [\tau_\zeta].v_1 = v_1$. Luego

$$[\tau_\zeta].v_4 = [\tau_{\zeta\sigma^3}].v_1 = [\tau_{\sigma^3\mu\sigma}].v_1 = v_9.$$

Por último $[\tau_\zeta].v_8 = v_{10}$. En el caso de los vértices w_i , estos son correspondidos mediante $[\tau_\zeta]$ de acuerdo a su condición de vecindad con respecto a los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$. En resumen, $[\tau_\zeta]$ cumple con la siguiente correspondencia de vértices del grafo $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$:

$$v_1 \mapsto v_1, \quad w_1 \mapsto w_1, \quad w_{11} \mapsto w_5,$$

$$v_2 \mapsto v_2, \quad w_2 \mapsto w_{12}, \quad w_{12} \mapsto w_2,$$

$$v_3 \mapsto v_7, \quad w_3 \mapsto w_9, \quad w_{13} \mapsto w_7,$$

$$v_4 \mapsto v_9, \quad w_4 \mapsto w_6, \quad w_{14} \mapsto w_{14},$$

$$v_5 \mapsto v_6, \quad w_5 \mapsto w_{11}, \quad w_{15} \mapsto w_8.$$

$$v_6 \mapsto v_5, \quad w_6 \mapsto w_4,$$

$$v_7 \mapsto v_3, \quad w_7 \mapsto w_{13},$$

$$v_8 \mapsto v_{10}, \quad w_8 \mapsto w_{15},$$

$$v_9 \mapsto v_4, \quad w_9 \mapsto w_3,$$

$$v_{10} \mapsto v_8, \quad w_{10} \mapsto w_{10},$$

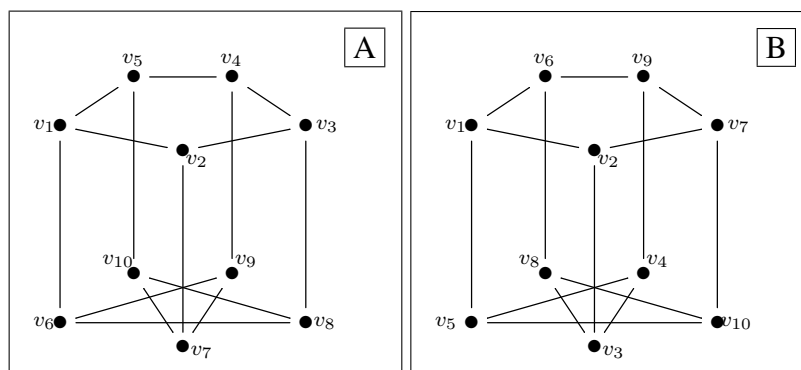


Figura 4.33: Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ vía $[\tau_\zeta]$, con $N = t^2 + t + 1$.

En la Figura 4.33 se ve cómo la simetría $[\tau_\zeta]$ permuta los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$.

2. Si $[\rho] = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces se considera la transformación de Moebius $\tau_\rho \in \tau_{\mathfrak{E}(V)^*}$,

donde $\rho = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo discutido en las Secciones 4.1 y 4.2, automáticamente

se tienen las igualdades $[\tau_\rho].v_1 = v_2$, $[\tau_\rho].w_1 = w_1$, $[\tau_\rho].w_2 = w_5$. Por condición de

vecindad, $[\tau_\rho].v_3 = v_5$, $[\tau_\rho].w_3 = w_4$ $[\tau_\rho].v_4 = v_4$. Como el vértice v_8 está a distancia

2 de v_3 y v_{10} está a distancia 2 de v_5 , la igualdad $[\tau_\rho].v_8 = v_{10}$ sigue, en particular,

$[\tau_\rho].w_{13} = w_{15}$. También como consecuencia se deducen $[\tau_\rho].v_6 = v_7$ y $[\tau_\rho].v_9 = v_9$. El

resto de las correspondencias se presentan a continuación:

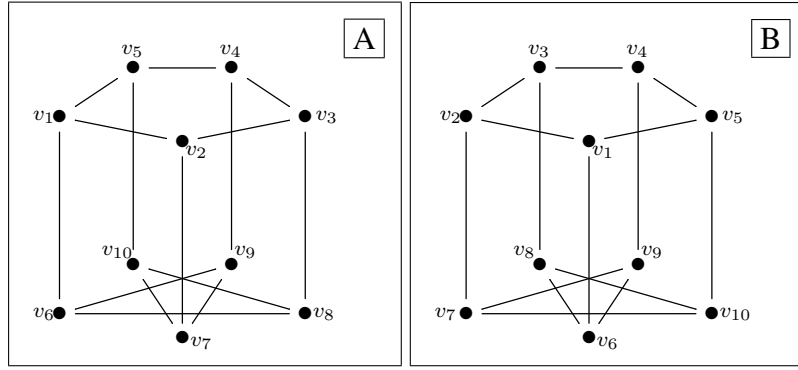


Figura 4.34: Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ vía $[\tau_\rho]$, con $N = t^2 + t + 1$.

$$\begin{aligned}
v_1 &\mapsto v_2, & w_1 &\mapsto w_1, & w_{11} &\mapsto w_{12}, \\
v_2 &\mapsto v_1, & w_2 &\mapsto w_5, & w_{12} &\mapsto w_{11}, \\
v_3 &\mapsto v_5, & w_3 &\mapsto w_4, & w_{13} &\mapsto w_{15}, \\
v_4 &\mapsto v_4, & w_4 &\mapsto w_3, & w_{14} &\mapsto w_{14}, \\
v_5 &\mapsto v_3, & w_5 &\mapsto w_2, & w_{15} &\mapsto w_{13}, \\
v_6 &\mapsto v_7, & w_6 &\mapsto w_9, \\
v_7 &\mapsto v_6, & w_7 &\mapsto w_8, \\
v_8 &\mapsto v_{10}, & w_8 &\mapsto w_7, \\
v_9 &\mapsto v_9, & w_9 &\mapsto w_6, \\
v_{10} &\mapsto v_8, & w_{10} &\mapsto w_{10},
\end{aligned}$$

En la Figura 4.34 se ve cómo la simetría $[\tau_\rho]$ permuta los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$.

3. Por último sea $[\delta'] = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega + 1 \end{pmatrix}$. La transformación de Moebius $\tau_{\delta'} \in \tau_{\mathfrak{E}(V)^*}$,

donde $\delta' = \begin{pmatrix} 1 + t^2 & 1 + t + t^2 \\ 1 + t + t^2 & t^2 \end{pmatrix}$ es un levantamiento de $[\delta'] = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega + 1 \end{pmatrix}$.

Afirmamos que $[\tau_{\delta'}] \cdot v_1 = v_8$, $[\tau_{\delta'}] \cdot v_2 = v_{10}$ y $[\tau_{\delta'}] \cdot v_6 = v_6$. Para ello se comprueban las igualdades matriciales siguientes:

$$\begin{aligned}
[(\sigma^2\mu\sigma)^{-1}\delta'] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega+1 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
[(\sigma^4\mu\sigma)^{-1}\delta'\sigma] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega+1 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
[(\mu\sigma)^{-1}\delta'(\mu\sigma)] &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega+1 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ \omega+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Los tres productos matriciales implican $[\tau_{(\sigma^2\mu\sigma)^{-1}\delta'}].v_1 = v_1$, $[\tau_{(\sigma^4\mu\sigma)^{-1}\delta'\sigma}].v_1 = v_1$ y $[\tau_{(\mu\sigma)^{-1}\delta'(\mu\sigma)}].v_1 = v_1$. Ocupando lo anterior, se verifica que:

$$[\tau_{\delta'}].v_1 = [\tau_{\sigma^2\mu\sigma}].v_1 = v_8,$$

$$[\tau_{\delta'}].v_2 = [\tau_{\delta'\sigma}].v_1 = [\tau_{\sigma^4\mu\sigma}].v_1 = v_{10},$$

$$[\tau_{\delta'}].v_6 = [\tau_{\delta'\mu\sigma}].v_1 = [\tau_{\mu\sigma}].v_1 = v_6.$$

Como consecuencia de lo anterior se deduce la igualdad $[\tau_{\delta'}].v_5 = v_3$, pues es el vértice restante que está a distancia 2 de v_1 . Para el vértice v_7 tenemos dos posibilidades: o bien $[\tau_{\delta'}].v_7 = v_7$ ó $[\tau_{\delta'}].v_7 = v_5$. La correcta es $[\tau_{\delta'}].v_7 = v_5$. En efecto, del producto:

$$[\sigma^{-4}\delta'(\sigma\mu\sigma)] = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ \omega+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se infiere $[\tau_{\sigma^{-4}\delta'(\sigma\mu\sigma)}].v_1 = v_1$, y con ello, $[\tau_{\delta'}].v_7 = [\tau_{\delta'\sigma\mu\sigma}].v_1 = [\tau_{\sigma^4}].v_1 = v_5$. Al ser $[\tau_{\delta'}]$ una simetría de orden 3, de las igualdades $[\tau_{\delta'}].v_5 = v_3$ y $[\tau_{\delta'}].v_7 = v_5$ se deduce $[\tau_{\delta'}].v_3 = v_7$. Por otro lado, como $[\tau_{\delta'}]$ fija a v_6 y $[\tau_{\delta'}].v_1 = v_8$, se tiene $[\tau_{\delta'}].v_9 = v_1$.

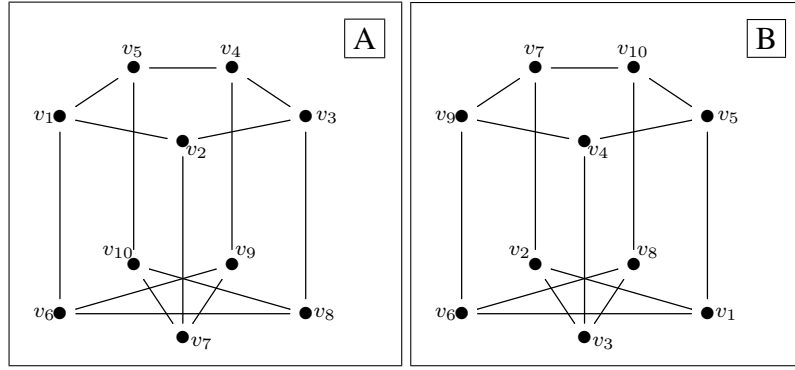


Figura 4.35: Permutación de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$ vía $[\tau_{\delta'}]$, con $N = t^2 + t + 1$.

Las otras igualdades son $[\tau_{\delta'}].v_8 = v_9$, $[\tau_{\delta'}].v_{10} = v_4$ y $[\tau_{\delta'}].v_4 = v_2$. El resto de las correspondencias siguen por condición de vecindad:

$$v_1 \mapsto v_8, \quad w_1 \mapsto w_{10}, \quad w_{11} \mapsto w_8,$$

$$v_2 \mapsto v_{10}, \quad w_2 \mapsto w_7, \quad w_{12} \mapsto w_{15},$$

$$v_3 \mapsto v_7, \quad w_3 \mapsto w_{12}, \quad w_{13} \mapsto w_9,$$

$$v_4 \mapsto v_2, \quad w_4 \mapsto w_2, \quad w_{14} \mapsto w_1,$$

$$v_5 \mapsto v_3, \quad w_5 \mapsto w_{13}, \quad w_{15} \mapsto w_3.$$

$$v_6 \mapsto v_6, \quad w_6 \mapsto w_{11},$$

$$v_7 \mapsto v_5, \quad w_7 \mapsto w_4,$$

$$v_8 \mapsto v_9, \quad w_8 \mapsto w_6,$$

$$v_9 \mapsto v_1, \quad w_9 \mapsto w_5,$$

$$v_{10} \mapsto v_4, \quad w_{10} \mapsto w_{14},$$

En la Figura 4.35 se ve cómo la simetría $[\tau_{\delta'}]$ permuta los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \setminus \mathfrak{T}(K)$.

El cálculo de las órbitas queda de la siguiente manera:

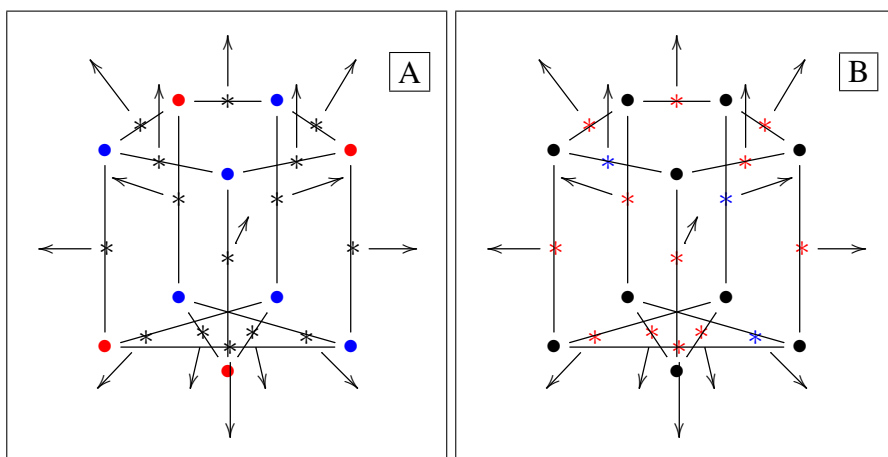


Figura 4.36: Órbitas de los vértices de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{F}(K)$, asociado a $N = t^2 + t + 1$.

$$\text{orb}(v_1) = \{v_1, v_2, v_4, v_8, v_9, v_{10}\},$$

$$\text{orb}(v_3) = \{v_3, v_5, v_6, v_7\},$$

$$\text{orb}(w_1) = \{w_1, w_{10}, w_{14}\},$$

$$\text{orb}(w_2) = \{w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{15}\}.$$

Las cardinalidades de las órbitas de los vértices de tipo 0 de $\tau_{\Gamma_N} \backslash \mathfrak{F}(K)$ se muestran en la Figura 4.36.A donde dichos vértices están pintados de de color rojo o azul dependiendo del caso. La Figuras 4.36.B muestra las cardinalidades de las órbitas de los vértices de tipo 1. El grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \backslash \mathfrak{F}(K)$ viene dado por la Figura 4.37, donde los vértices A_1, A_2, A_3 y A_4 son:

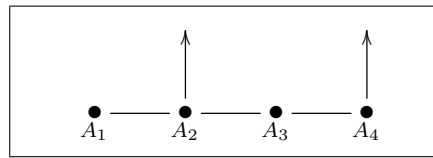


Figura 4.37: Grafo cociente $\tau_{\mathfrak{E}(V)^*} \setminus \mathfrak{I}(K)$, asociado a $N = t^2 + t + 1$.

$$A_1 = \Phi_N.v_6,$$

$$A_2 = \Phi_N.w_{11},$$

$$A_3 = \Phi_N.v_1,$$

$$A_4 = \Phi_N.w_1.$$

REFERENCIAS

- [1] ARENAS-CARMONA, L. Eichler orders, trees and representation fields. *International Journal of Number Theory* 9, 07 (2013), 1725–1741.
- [2] ARENAS-CARMONA, L. Computing quaternion quotient graphs via representations of orders. *Journal of Algebra* 402 (2014), 258–279.
- [3] ARENAS-CARMONA, L. Simultaneous diagonalization of vector bundles. *arXiv preprint arXiv:1610.07716* (2016).
- [4] ARENAS-CARMONA, M., AND ARENAS-CARMONA, L. Branches on division algebras. *arXiv preprint arXiv:1712.03629* (2017).
- [5] ARENAS-CARMONA, M., ARENAS-CARMONA, L., AND CONTRERAS, J. On optimal embeddings and trees. *arXiv preprint arXiv:1606.06396* (2016).
- [6] BRAVO, C. Cálculo de la rama asociada a dos cuaterniones puros. Master's thesis, Universidad de Chile, 2018.
- [7] DUMMIT, D., AND FOOTE, R. *Abstract algebra*, vol. 3. Wiley Hoboken, 2004.
- [8] HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics*, vol. 52. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [9] HATCHER, A. *Algebraic topology*. Cornell University, New York, 2002.
- [10] MILNE, J. S. Algebraic number theory, (v3.06), 2014. Available at <http://www.jmilne.org/math/>.

- [11] O'MEARA, O. T. *Introduction to quadratic forms*, vol. 117. Springer, 2013.
- [12] PAPIKIAN, M. On generators of arithmetic groups over function fields. *International Journal of Number Theory* 7, 06 (2011), 1573–1587.
- [13] PAPIKIAN, M. An overview of the theory of drinfeld modules, 2017. Available at <http://personal.psu.edu/mup17/Research/research.html>.
- [14] SERRE, J. P. *Trees*. Springer, 1980.