



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

TESIS DE MAGÍSTER

Aspectos Geométricos en Dinámica Compleja

Autor:
Nicolás Alvarado

Supervisor:
Jan Kiwi

*Una tesis presentada en cumplimiento de los requisitos para el grado de Magíster en
Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile.*

Jurado: Jan Kiwi
Mario Ponce
Cristóbal Rivas

Agosto, 2020
Santiago, Chile

Índice general

1. Introducción	1
2. Dinámica Polinomial	4
2.1. Conjuntos de Julia	4
2.2. Polinomios postcríticamente finitos	7
2.3. Árboles de Hubbard	9
2.3.1. Árboles regulados	9
2.3.2. Condición de expansividad	15
2.3.3. Condición de ángulos	16
2.3.4. Teorema de Poirier	19
3. Polinomios Topológicos	20
3.1. Polinomios topológicos postcríticamente finitos	20
3.2. Ciclos de Levy	21
4. Complejos de Árboles	24
4.1. Espacio exterior y su topología	24
4.2. Complejos de árboles	28
5. Algoritmo de Levantamiento de Árboles	35
5.1. Método de Alexander	36
6. El problema del conejo retorcido	41
6.1. Giros de Dehn	42
6.2. El problema del conejo retorcido	46
6.3. El problema del conejo retorcido generalizado	53
6.4. Algoritmo de levantamiento de árboles en $z^2 + i$	59

Capítulo 1

Introducción

En dinámica compleja, la familia cuadrática $f_c(z) = z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$, ha sido objeto de mucho estudio. El punto crítico de f_c es $z = 0$ y si este punto crítico tiene periodo 3 podemos obtener tres polinomios complejos muy especiales pertenecientes a la familia cuadrática. Estos polinomios son los que tienen como constante una solución no trivial de la ecuación $(c^2 + c)^2 + c = 0$, es decir

$$R(z) \approx z^2 - 0,1225611 + 0,7448617i$$

$$C(z) \approx z^2 - 0,1225611 - 0,7448617i$$

$$A(z) \approx z^2 - 1,7548776.$$

Llamaremos a estos polinomios *el conejo*, *el conejo conjugado* y *el aeroplano*, respectivamente. Sus nombres vienen por la forma que presentan sus conjuntos de Julia (Figura 1.1).

Si postcomponemos R con un homeomorfismo h de \mathbb{C} que fije al conjunto de puntos postcríticos P_R puntualmente, obtendremos un polinomio topológico hR con la misma dinámica (en P_R) que R . Por el Teorema de Berstein-Levy (Teorema 3.2.1), el polinomio topológico hR no puede tener un ciclo de Levy. Otros dos polinomios con la misma acción en puntos postcríticos son el conejo conjugado y el aeroplano. De hecho, hR es Thurston equivalente a R , a C o a A .

A principios de la década de los 80, John Hubbard planteó el siguiente problema: determine la clase de equivalencia de Thurston de $T_x^m R$ como una función de m . Aquí, $m \in \mathbb{Z}$ y T_x es un giro de Dehn izquierdo alrededor de la curva x dada en la Figura 6.1. Este problema es equivalente a mostrar que el polinomio topológico $T_x^m R$ es Thurston equivalente a R , a C o a A .

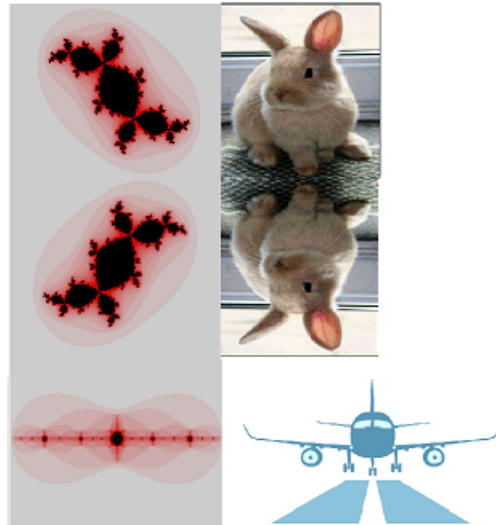


FIGURA 1.1: El conejo, el conejo conjugado y el aeroplano

Se conoce a este problema como el problema del conejo retorcido de Hubbard. Los primeros en resolverlo (en 2006) fueron Bartholdi y Nekrashevych [BN]. La solución que dieron se basó en un objeto algebraico asociado a un polinomio topológico el cual se llama grupo iterado de monodromía.

En el año 2019, Belk, Lanier, Magalit y Winarski introdujeron un algoritmo de levantamiento de árboles para resolver el problema del conejo retorcido de Hubbard. Este algoritmo también se puede aplicar cuando los polinomios topológicos son obstruidos (tiene ciclo de Levy asociado) y cuando no (tiene árbol de Hubbard asociado). En términos de la solución del problema del conejo retorcido, el algoritmo se trabaja en el complejo simplicial localmente finito de árboles \mathcal{T}_n que definiremos en el Capítulo 4. Los vértices de \mathcal{T}_n son clases de isotopía de árboles y para cada polinomio topológico podemos definir una función simplicial de levantamiento $\lambda_f: \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$.

El siguiente teorema es el resultado principal de [BLMW].

Teorema 1.0.1. [B-L-M-W]([BLMW, Teorema 1.1]) Sea f un polinomio topológico PCF con $|P_f| = n$, y sea $\lambda_f: \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ la función de levantamiento.

1. Si f no es obstruido, entonces la 2-vecindad de H_f es un núcleo para λ_f .
2. Si f es obstruido, entonces la 1-vecindad de L_f es un núcleo para λ_f .

El conjunto H_f representa al árbol topológico de Hubbard de f , el cual es un vértice fijo de \mathcal{T}_n bajo λ_f . Lo llamaremos *vértice de Hubbard*. Además, el conjunto L_f representa al conjunto de Levy, el cual está definido en el Capítulo 6.

Este teorema resume lo trabajado en [BLMW] ya que aporta resultados para cuando los polinomios topológicos son obstruidos y cuando no lo son. De hecho, aplicando la primera parte del teorema (junto a otros resultados fundamentales) es posible resolver el problema del conejo retorcido. La solución de este problema es el objetivo central de esta tesis.

A continuación presentamos una estructura de lo que desarrollaremos a lo largo de la tesis:

- En el Capítulo 2 presentaremos propiedades básicas de la dinámica polinomial con el objetivo de estudiar árboles de Hubbard y la caracterización de Poirier.
- En el Capítulo 3 estudiaremos polinomios topológicos postcríticamente finitos y ciclos de Levy. Además, mostraremos el Teorema de Berstein-Levy.
- En el Capítulo 4 introduciremos los complejos de árboles al estudiar el espacio exterior y su topología. Esto nos permitirá entender el espacio donde aplicaremos el algoritmo de levantamiento de árboles.
- En el Capítulo 5 definiremos el algoritmo de levantamiento de árboles y presentaremos un resultado fundamental en la solución del problema del conejo retorcido. Este resultado es el método de Alexander (Proposición 5.2). Además, mostraremos la primera parte del Teorema 1.0.1.
- En el Capítulo 6 aplicaremos el algoritmo para resolver el problema del conejo retorcido, su generalización y para estudiar un caso obstruido. Además, mostraremos la segunda parte del Teorema de 1.0.1.

Capítulo 2

Dinámica Polinomial

El área de la dinámica compleja ha pasado por dos periodos cortos de crecimiento. Comienza en su origen entre el final del siglo XIX y el principio del siglo XX. El interés principal era el estudio del comportamiento local de la iteración de funciones complejas. Entre los años 1918 y 1920, un cambio dramático ocurrió gracias a los esfuerzos de tres matemáticos franceses, Gaston Julia, Pierre Fatou y Paul Montel. En vez de considerar sólo el comportamiento local de la dinámica, Julia y Fatou estudiaron un punto de vista más global. Cuando se estudiaba el comportamiento dinámico, los resultados de las iteraciones eran bastante estables pero a veces también eran caóticos.

El segundo periodo de mayor actividad comenzó en los años 80 después de que Benoit Mandelbrot usara la computación para explorar la dinámica compleja. Durante este tiempo, Douady y Hubbard impusieron una nueva visión en el área al considerar el espacio parámetro para los polinomios cuadráticos. Ellos desarrollaron una técnica que les permitió clasificar casi completamente todos los posibles tipos de dinámicas cuadráticas. En ese entonces, solo tenían el obstáculo de la conexidad local del conjunto de Mandelbrot.

En este capítulo daremos una introducción a la dinámica de polinomios $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ junto con resultados fundamentales que nos permitirán estudiar el problema central de esta tesis.

2.1. Conjuntos de Julia

Para comenzar a estudiar la dinámica polinomial necesitamos algunas definiciones básicas del área para entender sus propiedades y de esta forma darle un desarrollo más profundo a las ideas que veremos en capítulos posteriores. Consideremos $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un

polinomio. Definimos la *órbita* (futura) de z bajo f como la sucesión $\{f^k(z)\}_{k \geq 0}$. Si para algún $n \geq 1$ se tiene que $f^n(z) = z$, llamaremos a la órbita de z bajo f *órbita periódica*. Por ejemplo, supongamos que $f(z) = z^2 + 1$ y calculemos la órbita de $z = 0$. Es claro que obtendremos la sucesión

$$\{0, 1, 2, 5, 26, \dots\}.$$

Esta órbita no es periódica, pero si calculamos la órbita de $z = 0$ bajo el polinomio $z^2 - 1$ tenemos la órbita periódica dada por

$$\{-1, 0, -1, 0, -1, \dots\}.$$

Uno de los objetos fundamentales de estudio en la dinámica compleja es el conjunto de Julia. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio de grado $d \geq 2$. Definimos el *conjunto lleno de Julia* de f como el conjunto de todos los números $z \in \mathbb{C}$ con órbita acotada, es decir, el conjunto $\{z \in \mathbb{C}: f^n(z) \not\rightarrow \infty\}$ el cual denotaremos como $K(f)$. Definimos también la *cuenca de atracción* de f como el conjunto $A_\infty(f) := \{z \in \mathbb{C}: f^n(z) \rightarrow \infty\}$ y el *conjunto de Julia* de f como $J(f) := \partial K(f) = \partial A_\infty(f)$. Es claro que para todo $n \geq 1$ se tiene que $J(f) = J(f^n)$.

Al complemento de $J(f)$ lo llamaremos conjunto de Fatou, el cual denotamos por $F(f)$. El plano complejo, visto desde una perspectiva dinámica, se descompone de forma complementaria en el conjunto de Fatou (el cual tiene una dinámica estable) y el conjunto de Julia (el cual tiene una dinámica caótica).

Veamos algunos ejemplos de conjuntos llenos de Julia y conjuntos de Julia. Sea $f(z) = z^2 - 1$. En la Figura 2.1 podemos ver en negro el conjunto lleno de Julia $K(f)$ mientras que los colores indican el número mínimo de iteraciones n de f tal que $|f^n(z_0)| > R$ para un R suficientemente grande fijado a priori. (el número z_0 representa al primer punto de la órbita bajo el polinomio f). Esto da una buena visualización del sistema dinámico. El conjunto de Julia, por su definición, es la frontera entre la región negra y la de colores. Otro ejemplo se ve en la Figura 2.2, específicamente para el polinomio $f(z) \approx z^3 - 3(-0,5)^2 z - 0,10555 + 0,59512i$.

Una propiedad importante sobre los conjuntos $K(f)$ y $J(f)$ es que son subconjuntos compactos de \mathbb{C} . Para ver esto, consideremos

$$f(z) = a_d z^d + a_{d-1} z^{d-1} + \dots + a_0$$

donde $a_d \neq 0$ y sea $A = \max\{|a_{d-1}| + \dots + |a_0|, 1\}$. Sea $R = \max\{(2 + A)/|a_d|, 1\}$. Si $|z| \geq R$ tenemos que

$$|f(z)| \geq |a_d| |z|^d - A |z|^{d-1} \geq 2|z|.$$

Entonces, el conjunto lleno de Julia $K(f)$ está contenido en el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}.$$

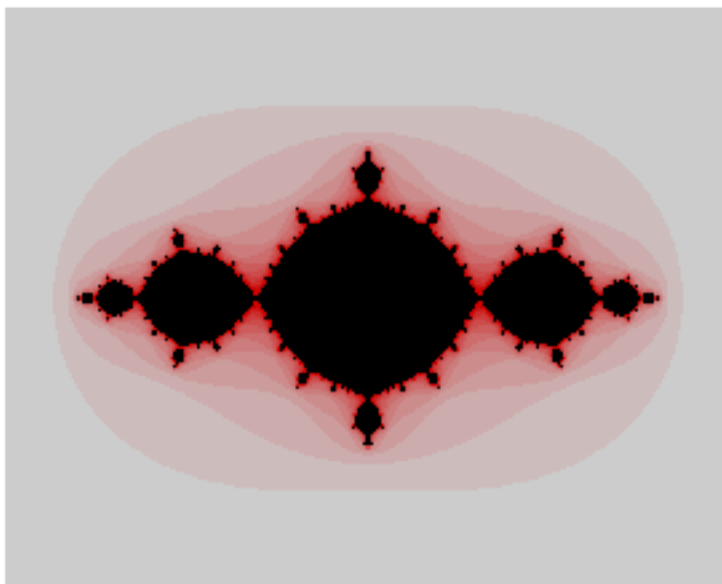


FIGURA 2.1: La dinámica de $f(z) = z^2 - 1$.

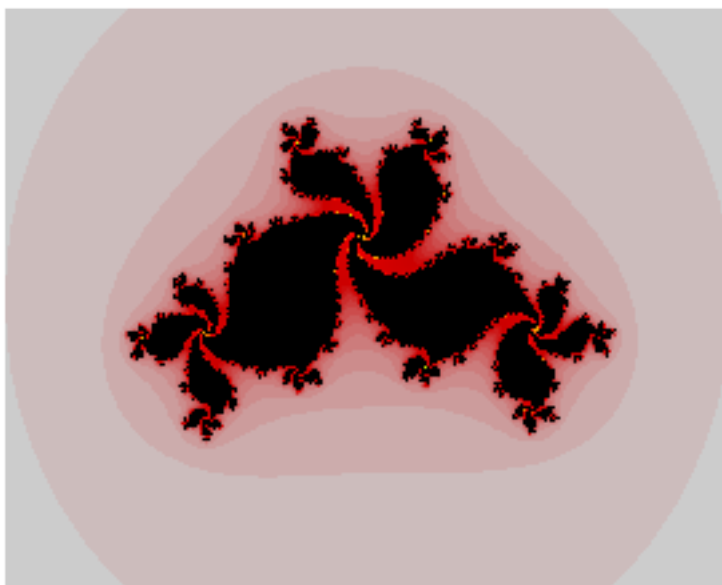


FIGURA 2.2: La dinámica de $f(z) \approx z^3 - 3(-0,5)^2z - 0,10555 + 0,59512i$.

Por otra parte, podemos escribir a $K(f)$ como

$$K(f) = \bigcap_{n \geq 1} f^{-n}(\overline{B}_R(0)),$$

donde $\overline{B}_R(0)$ es la bola cerrada de radio R centrada en 0. Como $K(f)$ es una intersección de conjuntos cerrados, se tiene que es cerrado también y como es acotado entonces es compacto. Además, $J(f)$ es compacto por ser la frontera de un conjunto compacto.

De lo anterior notamos que el conjunto $F(f)$ es abierto en \mathbb{C} .

Otra propiedad importante sobre el conjunto de Julia y el conjunto lleno de Julia es que son totalmente invariantes, es decir:

$$\begin{aligned} f(J(f)) &= J(f), & f^{-1}(J(f)) &= J(f), \\ f(K(f)) &= K(f), & f^{-1}(K(f)) &= K(f). \end{aligned}$$

Un punto $z \in \mathbb{C}$ tiene órbita acotada si y sólo si $f(z)$ la tiene, y esto pasa si y sólo si, para cada $w \in f^{-1}(z)$, la órbita de w es acotada. Así, podemos concluir la afirmación anterior.

2.2. Polinomios postcríticamente finitos

En esta corta pero importante sección, estudiaremos las propiedades básicas de los polinomios postcríticamente finitos (PCF). Es importante conocer las nociones básicas sobre estos tipos de polinomios pues, como veremos más adelante, serán fundamentales para el estudio de los árboles de Hubbard y para los polinomios topológicos postcríticamente finitos.

Comencemos entonces considerando $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio. Diremos que el punto $w \in \mathbb{C}$ es un *punto crítico* si $f'(w) = 0$. Definimos el conjunto de los puntos críticos del polinomio f como $\text{Crit}_f := \{z \in \mathbb{C}: f'(z) = 0\}$.

A continuación enunciaremos un teorema importante de Fatou sobre la relación entre el conjunto de los puntos críticos y la topología del conjunto lleno de Julia para un polinomio f . La demostración se puede ver en detalle en [M, Teorema 17.3].

Teorema 2.2.1. Sea f un polinomio de grado $d \geq 2$, entonces:

1. $\text{Crit}_f \subset K(f)$ si y sólo si $K(f)$ es conexo.

2. Si $\text{Crit}_f \cap K(f) = \emptyset$, se tiene que $K(f)$ es un conjunto de Cantor, y f restringido a $K(f)$ es conjugado al shift unilateral de d símbolos.

Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ polinomio de grado $d \geq 2$. Dado el conjunto de los puntos críticos de f definimos su *conjunto postcrítico* P_f como

$$P_f := \bigcup_{n>0} f^n(\text{Crit}_f).$$

En la definición anterior hay que enfatizar que n es positivo. Además, los puntos críticos son postcríticos sólo si están en la órbita de un punto crítico. Entonces si $|P_f| < \infty$, diremos que el polinomio f es *postcríticamente finito*.

El siguiente teorema nos permite dar una discusión importante sobre la topología del conjunto lleno de Julia.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Böttcher). Supongamos que $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$, donde $n \geq 2$ y $a_n \neq 0$. Entonces existe un cambio de coordenadas local y holomorfo $w = \phi(z)$ que conjugue a f con la función $w \mapsto w^n$ en alguna vecindad de $\phi(0) = 0$. Además, ϕ es único salvo multiplicación por una raíz $(n-1)$ -ésima de la unidad.

Entonces, cerca de cualquier punto crítico fijo, f es conjugado a una función de la forma

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1}: w \mapsto w^n.$$

Este teorema es útil para las funciones polinomiales, pues si consideramos $f(z)$ un polinomio de grado ≥ 2 entonces infinito es un punto fijo *superatractor*.

Las líneas $|\phi(z)| = r$ (donde r es una constante positiva) tienen trayectorias ortogonales dadas por las imágenes bajo ϕ^{-1} de líneas radiales que se extienden desde el disco unitario hacia infinito. Estas trayectorias ortogonales se llaman *rayos externos* de f . Bajo las mismas condiciones del Teorema 2.2.1 se tiene que si $K(f) \supset \text{Crit}_f$, entonces la función de Böttcher (dada en el Teorema 2.2.2) cerca de infinito se extiende a un isomorfismo conforme

$$\phi: \mathbb{C} \setminus K(f) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$

Además, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. El conjunto $J(f)$ es localmente conexo.
2. El conjunto $K(f)$ es localmente conexo.

3. El conjunto $K(f)$ es conexo y la función de Riemman inversa

$$\psi: \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus K(f)$$

se extiende continuamente en la frontera, resultando una función continua de \mathbb{D} a $J(f)$ tal que $f(\psi(w)) = \psi(w^n)$.

Dado lo anterior, llamaremos a la curva $\phi^{-1}(\{te^{i\theta\pi} : 0 \leq t < 1\})$ un *segmento radial*.

Para finalizar la sección, enunciaremos una propiedad importante sobre los polinomios PCF, la cual fue probada por Douady y Hubbard. Su demostración puede ser encontrada en [M, Teorema 17.5].

Teorema 2.2.3. Si f es PCF, entonces $K(f)$ es localmente conexo.

2.3. Árboles de Hubbard

De [DH] sabemos que dado un polinomio f de grado $n \geq 2$ PCF, para todo $z \in K(f)$, el conjunto $K(f) \setminus \{z\}$ consiste en un número finito de componentes conexas. De esta forma, el conjunto lleno de Julia puede ser pensado como un árbol. Sea M un conjunto invariante bajo f y finito tal que contiene a todos los puntos críticos de f . Dentro de $K(f)$ conectamos M por arcos sujetos a la condición adicional de que cuando se intersecta a una componente de Fatou, entonces esta intersección consiste de segmentos radiales en la coordenada asociada.

Esta sección está dividida en cuatro partes. En la primera parte introduciremos algunas definiciones que nos permitirán entender la estructura (topológica) de los árboles de Hubbard. En las dos partes siguientes estudiaremos un par de condiciones fundamentales para reconocer cuando un árbol es de Hubbard o no. En la cuarta y última parte enunciaremos un teorema fundamental de Poirier que nos permite caracterizar a los árboles Hubbard. Es importante mencionar también que todo polinomio PCF tiene un árbol de Hubbard asociado.

2.3.1. Árboles regulados

Para comenzar a estudiar las propiedades de los árboles de Hubbard, trabajaremos primero con un tipo especial de arcos. Estos son los arcos regulados. Este tipo de caminos son compatibles con la dinámica en el sentido de que sus imágenes y preimágenes bajo f son regulados a trozos. Una vez que descubramos la fuente del problema que existe

alrededor de los puntos críticos, encontraremos dentro de $K(f)$ la clausura convexa regulada generada por la órbita crítica. Cuando nos restringimos a este árbol invariante obtenemos una idea de la dinámica de nuestro polinomio PCF.

Sea f un polinomio PCF. Dos puntos en la clausura de una componente acotada de Fatou de f pueden ser unidos por un único arco formado por a lo más dos segmentos radiales. Llamaremos a estos arcos, *arcos regulados*.

A continuación denotaremos f como un polinomio PCF a menos que se diga lo contrario. Además exhibiremos un resultado importante sobre los arcos regulados y daremos una idea de la demostración.

Lema 2.1. Dos puntos en el conjunto $K(f)$ pueden ser unidos por un único arco regulado.

Idea de la demostración. Revisaremos la existencia y la unicidad del arco regulado. Sabemos que como f es un polinomio PCF entonces $K(f)$ es localmente conexo. Entonces, para la existencia podemos tomar $\gamma: I = [0, 1] \rightarrow K(f)$ un arco y denotar como U_1, U_2, \dots a las componentes acotadas de Fatou de f . Consideraremos solo los casos en que el arco intersecta a la clausura de alguna componente acotada de Fatou de f . Supongamos que $\gamma(I) \cap \bar{U}_i \neq \emptyset$. Sea t_0 el primer punto cuando $\gamma(t_0) \in \bar{U}_i$ y sea t_1 el último punto (distinto a t_0). Podemos suponer que $t_0 < t_1$ y modificar γ dentro de $[t_0, t_1]$ de tal forma que una a $\gamma(t_0)$ con $\gamma(t_1)$ en forma regulada. Así, se redefine γ de forma continua.

Para la unicidad consideremos dos arcos regulados γ_1 y γ_2 tales que coinciden en sus puntos iniciales y finales y que $\gamma_1(I) \cup \gamma_2(I)$ encierra al menos un abierto no vacío y conexo V , el cual está completamente contenido en $K(f)$. Como los abiertos conexos no triviales de $K(f)$ son subconjuntos de una componente de Fatou U , las porciones de γ_1 y γ_2 que rodean a V están en \bar{U} . Esta es una contradicción pues dos puntos en \bar{U} son unidos por un único arco regulado. ■

Un subconjunto $X \subset K(f)$ es *regulado convexo* (o sólo *regulado*) si dados $z, w \in X$ se tiene que el arco regulado que une a tales puntos está completamente contenido en X . Definimos la *clausura regulada* $[X]$ de $X \subset K(f)$ como el subconjunto regulado minimal de $K(f)$ que contiene a X .

En adelante, usaremos la notación referida en [P] para los arcos regulados, es decir $[z, w]$ es el arco regulado que une a los puntos z, w .

Algunas propiedades básicas (pero importantes) de los arcos regulados son las siguientes:

1. Todo subarco de un arco regulado es regulado.
2. La intersección de dos arcos regulados es regulada. Podemos notar entonces que la clausura regulada esta bien definida.
3. Dados $z_1, z_2, z_3 \in K(f)$, existe un único punto $w \in K(f)$ tal que

$$[z_1, z_2] \cap [z_2, z_3] = [z_2, w].$$

En este caso se tiene que $z_2 = w$ si y sólo si $[z_1, z_2] \cup [z_2, z_3]$ es regulado.

Otra propiedad importante es que dos conjuntos regulados con intersección no vacía tienen unión regulada. Para ver esto consideremos X, Y conjuntos regulados y sea $q \in X \cap Y$. Dados dos puntos z, w en cualquiera de los dos conjuntos, sabemos que estos pueden ser conectados a q por definición. Además, existe un punto p tal que

$$[p, q] = [z, p] \cap [q, w]$$

donde la unión de estos arcos es regulada.

Sea M un conjunto finito e invariante (bajo un polinomio PCF f de grado ≥ 2) tal que contiene a los puntos críticos de f . Definimos el *árbol topológico finito* T en (\mathbb{C}, M) como la clausura regulada de M . Aquí (\mathbb{C}, M) denota el plano complejo con puntos marcados en el conjunto M .

Los siguientes resultados nos permiten producir nuevos arcos regulados a partir de viejos arcos regulados.

Lema 2.2. Sea $[z, w]$ un arco regulado sin puntos críticos de f , exceptuando posiblemente a los puntos finales. Entonces f es inyectivo cuando está restringido a $[z, w]$, y $f([z, w]) = [f(z), f(w)]$ es regulado.

Idea de la demostración. Sea $\gamma: I \rightarrow K(f)$ la función inyectiva que define al arco regulado $[z, w]$. Daremos una idea a continuación de como mostrar que la composición $f \circ \gamma$ es inyectiva. Supongamos que $f \circ \gamma$ que es localmente inyectiva en todo punto (la inyectividad local es automática en t_0 cuando $\gamma(t_0)$ no es punto crítico). En este caso, el conjunto

$$\Delta = \{(t_1, t_2): t_1 < t_2, f(\gamma(t_1)) = f(\gamma(t_2))\}$$

es compacto. Entonces, si $\Delta \neq \emptyset$, existe $(t_1, t_2) \in \Delta$ tal que $t_2 - t_1 > 0$ es minimal. Por definición, para todos s, t tales que $0 < t - s < t_2 - t_1$, la restricción de $f \circ \gamma$ en $[s, t]$ es un arco regulado. Ahora, si consideramos $t \in (t_1, t_2)$, las restricciones de $f \circ \gamma$ en $[t_1, t]$ y

$[t, t_2]$ son diferentes arcos regulados entre $f(\gamma(t))$ y $f(\gamma(t_1)) = f(\gamma(t_2))$. Esto contradice al Lema 2.1.

Supongamos ahora que $\gamma(0)$ es un punto crítico. Como γ es inyectiva y f analítica, el conjunto $\{t \in [0, 1]: f(\gamma(t)) = f(\gamma(0))\}$ es discreto. Por lo tanto podemos considerar $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que $t \in (0, \varepsilon)$ implica que $f(\gamma(t)) \neq f(\gamma(0))$. Si $f \circ \gamma$ no es inyectiva cerca de 0 podemos encontrar $t_1 < t_2 < \varepsilon$ tales que $f(\gamma(t_1)) = f(\gamma(t_2))$. Como no hay punto crítico en $[\gamma(t_1), \gamma(t_2)]$, la restricción de f a este arco regulado es inyectiva aplicando el mismo argumento que el párrafo anterior. ■

Si $\gamma(I)$ es un arco regulado sin valores críticos, excepto quizás en los puntos finales, entonces cualquier levantamiento bajo f es un arco regulado.

El siguiente resultado tiene importancia para estudiar la invarianza de los árboles.

Lema 2.3. Para todo $z, w \in K(f)$ tenemos que

$$[f(z), f(w)] \subset f([z, w]) \subset [f(z), f(w), f(\text{Crit}_f)].$$

Demostración. Sea $\gamma: I \rightarrow K(f)$ la función que define al arco regulado $[z, w]$. Sean

$$0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 1$$

los instantes donde el punto $z_{t_i} = \gamma(t_i)$ es un punto crítico de f y escribamos $z_{t_0} = z$, $z_{t_{k+1}} = w$. Escribamos el arco regulado $[z, w]$ como $\bigcup_{i=0}^k [z_{t_i}, z_{t_{i+1}}]$. Por el Lema 2.2 se tiene que

$$\begin{aligned} f([z, w]) &= f([z_{t_0}, z_{t_1}]) \cup \dots \cup f([z_{t_k}, z_{t_{k+1}}]) \\ &= [f(z_{t_0}), f(z_{t_1})] \cup \dots \cup [f(z_{t_k}), f(z_{t_{k+1}})]. \end{aligned}$$

La unión de arcos regulados es un conjunto regulado, y como $f(z), f(w) \in f([z, w])$ tenemos que

$$[f(z), f(w)] \subset f([z, w]).$$

Ahora, notemos que $z_{t_i} \in \{z, w, \text{Crit}_f\}$ para todo i . Por lo tanto

$$f(z_{t_i}), f(z_{t_{i+1}}) \in [f(z), f(w), f(\text{Crit}_f)]$$

lo que implica que

$$f([z, w]) \subset [f(z), f(w), f(\text{Crit}_f)].$$

■

Notemos que del lema anterior podemos concluir que la imagen de un conjunto regulado es regulada y que para $X \subset K(f)$ se tiene que

$$[f(X)] \subset f([X]) \subset [f(X \cup \text{Crit}_f)].$$

Es claro que si X contiene al conjunto de los puntos críticos de f entonces $[f(X)] = f([X])$.

Sea P_f el conjunto postcrítico de f , donde f es un polinomio PCF de grado ≥ 2 . Definimos el *árbol de Hubbard* H_f de f como el árbol topológico finito generado por P_f . Es decir $H_f = [P_f]$.

Veamos algunos ejemplos. Cuando un árbol de Hubbard tiene un sólo vértice, este punto es enviado a si mismo con multiplicidad n . De hecho, el único polinomio mónico que tiene este árbol de Hubbard es $f(z) = z^n$. El conjunto lleno de Julia es el disco unitario cerrado.

Consideremos ahora $f(z) \approx z^2 - 0,1225611 + 0,7448617i$. El punto crítico (de color celeste) se mueve alrededor de un punto fijo (de color blanco) en una órbita de periodo tres como se ve en la Figura 2.3. Los puntos rojos representan a los otros puntos del conjunto postcrítico.

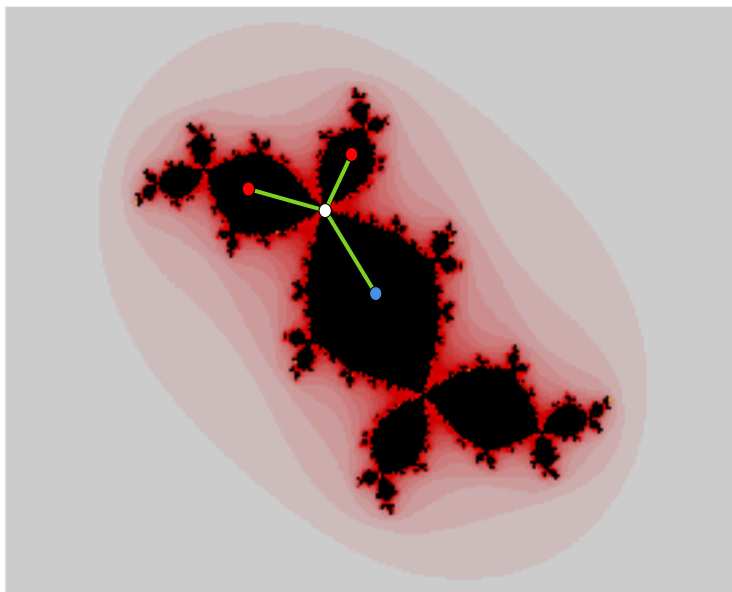


FIGURA 2.3: El árbol de Hubbard asociado a f .

En la Figura 2.4 tenemos al conjunto lleno de Julia de

$$f(z) \approx 0,25z^4 + (1,24312 - 0,43488i)z^3 + (1,38313 - 1,00226i)z^2$$

junto con el árbol de Hubbard asociado. En este ejemplo también tenemos que los puntos celestes representan a los puntos críticos, los puntos rojos al resto de los puntos del conjunto postcrítico y el punto blanco representa un punto fijo.

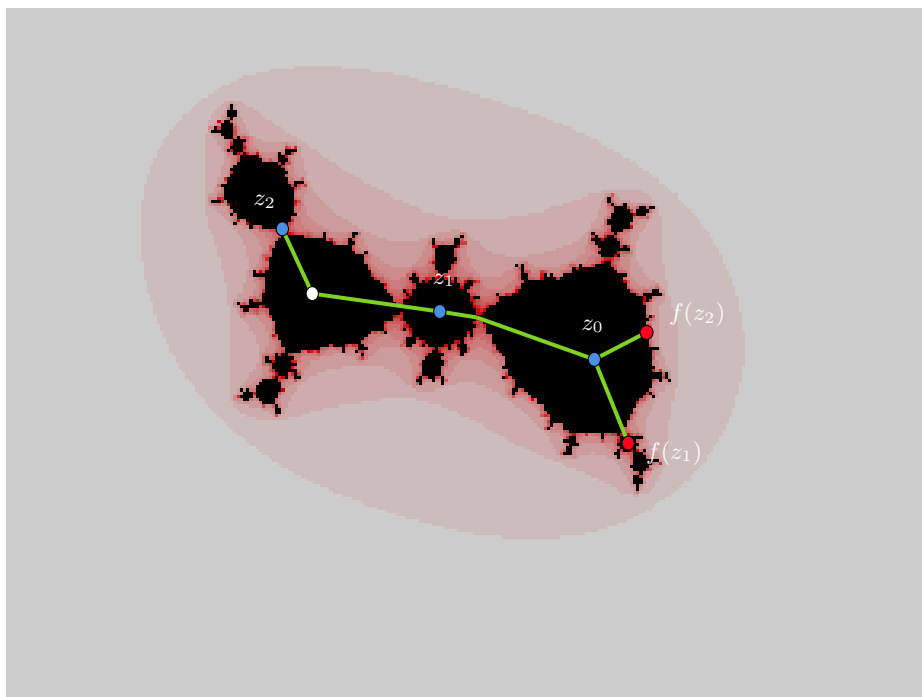


FIGURA 2.4: Otro árbol de Hubbard

Los puntos críticos de f están dados por

$$z_0 = 0$$

$$z_1 \approx -1,24565 + 0,33936i$$

$$z_2 \approx -2,48372 + 0,965301i.$$

Podemos notar que los puntos z_0, z_1 tienen una órbita periódica de periodos 1 y 2 respectivamente. Por otra parte, el punto z_2 es preperiódico.

Si tenemos cualquier conjunto invariante M que contenga a Crit_f entonces el árbol topológico finito $T = [M]$ satisface $f(T) = [f(M)] \subset T$. La primera igualdad es clara.

Ahora, como M es invariante se tiene que $f(M) \subset M \subset [M] = T$, lo que nos permite concluir la afirmación.

2.3.2. Condición de expansividad

Como mencionamos al final de la introducción de la sección, la discusión de los árboles de Hubbard está dividida en tres partes. En esta segunda parte discutiremos condición que nos permite (junto con una otra condición que introduciremos en la próxima subsección) reconocer cuando un árbol es o no de Hubbard. La llamaremos *condición de expansividad*.

Necesitamos entender la dinámica dentro de un árbol de Hubbard y para esto, es importante detectar las partes donde el polinomio f es inyectivo. Dado un conjunto M finito e invariante que contenga a los puntos críticos de f denotaremos \tilde{T} como la familia de las clausuras de las componentes de $T \setminus \text{Crit}_f$. El polinomio f induce una función continua de T en si mismo donde f restringida a cada miembro de \tilde{T} es inyectivo. En lo que sigue supondremos que $T = [M]$ (donde M es un conjunto finito e invariante que contiene a los puntos críticos de f) a menos que indiquemos lo contrario.

Dado $z \in T$, definimos $\nu_T(z)$ la *incidencia* de T en z como el número de componentes de $T \setminus \{z\}$ (la cantidad de ramas de z). La incidencia $\nu_T(z)$ puede ser diferente del número de componentes de $K(f) \setminus \{z\}$ (el número de incidencia de z para f). Si consideramos el punto z_2 de la Figura 2.4 notamos que el número de componentes de $K \setminus \{z_2\}$ es dos y que $\nu_T(z_2) = 1$, donde T es el árbol de Hubbard asociado al polinomio dado en ese ejemplo.

Sea $z \in T$. Diremos que este punto es de *ramificación* de T si $\nu_T(z) > 2$ y un *fin* si $\nu_T(z) = 1$. El *conjunto principal* de T es un conjunto finito dado por

$$V_T = M \cup \{z \in T : \nu_T(z) > 2\}.$$

Una propiedad rápida de verificar sobre el conjunto principal de T es que $[V_T] = T$. Para ver esto notemos que

$$\begin{aligned} M \subset V_T \subset T &= [M] \\ [M] \subset [V_T] &\subset T. \end{aligned}$$

Como $[V_T] = T$, si los conjuntos $M, N \supset \text{Crit}_f$ son finitos e invariantes y $T = [M]$ y $T' = [N]$, entonces si $V_T = V_{T'}$ implica que $T = T'$.

La siguiente proposición es fundamental, pues nos explica la condición de expansividad de la que se habló al principio de la subsección y que enunciaremos luego de dar una idea de la demostración de la proposición. Esta propiedad es característica de los árboles que están asociados a polinomios PCF.

Proposición 2.4. Sean $v, w \in J(f) \cap T$ periódicos. Si para todo $n \geq 0$, $f^n(v)$ y $f^n(w)$ pertenecen al mismo miembro de \tilde{T} , entonces $v = w$.

Idea de la demostración. Notemos que para todo n , los arcos regulados $[f^n(v), f^n(w)]$ no contienen puntos críticos en sus interiores. Además, por el Lema 2.2, todos estos arcos son homeomorfos a pares. Si suponemos que $v \neq w$, entonces el arco $[v, w]$ evita todas las componentes de Fatou, ya que de otra forma algún iterado eventualmente alcanzará un punto crítico de Fatou (un punto es de Fatou, si la órbita futura de tal punto contiene a un punto crítico periódico de f).

Ahora, sea m el múltiplo común más grande de periodos de v y w . Por la unicidad de los arcos regulados, f^m envía al arco regulado $[v, w]$ en si mismo. Restringiéndonos a este arco podemos suponer que no hay puntos periódicos de periodo m en $[v, w]$. Pero v, w son repulsores bajo f^m , lo que implica que es topológicamente imposible que no exista un tercer punto fijo bajo f^m en $[v, w]$. Por lo tanto $v = w$. ■

Definimos la distancia para dos elementos $v, w \in V_T$ como la cantidad de aristas entre v y w en $[v, w]$. La denotaremos como $\rho(v, w)$.

Teorema 2.3.1 (Condición de expansividad). Si $v, w \in V_T \cap J(f)$ son tales que $\rho(v, w) = 1$, entonces la $\rho(f^n(v), f^n(w)) > 1$ para algún $n \geq 1$.

Demostración. Si la distancia entre los iterados sucesivos de v, w es 1, entonces ellos están en el mismo miembro de \tilde{T} . Por la proposición anterior, esto deja de ser cierto a una distancia mayor a 1. ■

2.3.3. Condición de ángulos

Existen dos características recurrentes en la teoría de los árboles de Hubbard. Estas son, la capacidad de asignar coordenadas de Böttcher alrededor de puntos de Fatou, y la presencia de la condición de expansividad para elementos de Julia adyacentes. Para asignar coordenadas de Böttcher necesitamos introducir la noción de ángulo entre aristas de un árbol. En el centro de una componente de Fatou, el ángulo entre aristas es medido usando la carta local inducida por las coordenadas de Böttcher. Cerca de los vértices de Julia donde se intersectan m componentes de $K(f)$ (con *vértice de Julia*

nos referimos a que el vértice nunca es un ciclo crítico) este ángulo es naturalmente definido como un múltiplo de $1/m$.

Un *árbol angulado* H es un árbol simplicial finito dotado de una función

$$\begin{aligned} \angle_v: H \times H &\rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ (e, e') &\mapsto \angle_v(e, e') \end{aligned}$$

que asigna un racional módulo 1 a cada par de aristas e, e' incidentes en un vértice v . El ángulo $\angle_v(e, e')$ debe cumplir lo siguiente:

1. $\angle_v(e, e') = 0$ si y sólo si $e = e'$.
2. $\angle_v(e, e'') = \angle_v(e, e') + \angle_v(e', e'')$ cuando e, e' y e'' son aristas consecutivas. Esto significa que $H \subset \mathbb{C}$.

Sea V el conjunto de vértices de H . Especificamos una dinámica de vértices $f: V \rightarrow V$ sujeta a $f(v) \neq f(w)$ cuando v, w son contiguos a través de una arista. Sea $d: V \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ la función que determina el grado local de un vértice v , diremos que un vértice v es *crítico* si $d(v) = 1$.

Relacionaremos a f y a d de la siguiente forma. Podemos extender f a una función $f: H \rightarrow H$ tal que cada arista es enviada de forma homeomorfa al camino más corto que une las imágenes de los puntos finales de la arista. Entonces, si e, e' son aristas incidentes en un vértice v , necesitaremos que

$$\angle_{f(v)}(f(e), f(e')) = d(v)\angle_v(e, e'). \quad (2.1)$$

Un vértice v es *periódico* si $f^n(v) = v$ para algún $n \geq 1$. Además, es de Fatou si alguna iteración bajo f es un punto crítico. En caso contrario, el vértice es de Julia. Dados dos vértices v, w en H , el número $\rho(v, w)$ representa la cantidad de aristas en el camino más corto que une a v con w .

Si tenemos m aristas e_1, \dots, e_m tales que son incidentes en un vértice periódico de Julia v , entonces cada $\angle_v(e_i, e_j)$ es un múltiplo de $1/m$. Un árbol angulado que satisface esta condición en todo vértice periódico de Julia se dice *normalizado*. Un *árbol de Hubbard abstracto* es un árbol angulado normalizado que satisface la condición de expansividad y que está dotado de una función dinámica (la extensión anteriormente mencionada) y una función de grado d que satisface la igualdad 2.1.

Simplificaremos el modelo local alrededor de puntos de Fatou. Cuando $\{v_0, v_1, \dots, v_m = v_0\}$ es un ciclo crítico de periodo m , su *grado global* es el producto $d(v_0) \cdots d(v_{m-1})$ de los grados locales.

Una *coordenada de Böttcher* a lo largo de un ciclo crítico es una asignación $\psi_v(e) \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ tal que

1. $\angle_v(e_1, e_2) = \psi_v(e_1) - \psi_v(e_2)$ y
2. $\psi_{f(v)}(f(e)) = d(v)\psi_v(e)$.

La elección de tal coordenada es única salvo rotación por $1/(k-1)$ vueltas.

La definición abstracta de árbol de Hubbard tiene la esencia de la definición de árbol de Hubbard asociado a un polinomio PCF. De hecho, las propiedades básicas de árboles abstractos son similares.

Lema 2.5. Sea $[z, w] \subset H$ un segmento sin puntos críticos de f , exceptuando posiblemente a los puntos finales. Entonces f es inyectivo cuando está restringido a $[z, w]$, y $f([z, w]) = [f(z), f(w)]$.

Denotemos Crit_H al conjunto crítico del árbol abstracto H . Para $W \subset V$ un subconjunto de vértices sea $[W]$ el subarbol más pequeño que contiene a W . Es claro que $H = [V]$. Entonces

$$[f(W)] \subset f([W]) \subset [f(W \cup \text{Crit}_H)].$$

Además, si $M \subset V$ es invariante y contiene al conjunto Crit_H , entonces

$$f([M]) = [f(M)] \subset [M].$$

Nuevamente nos restringiremos a los pedazos de H donde f es inyectiva. Escribamos entonces \tilde{H} para la familia cuyos miembros son clausuras de los componentes de $H \setminus \text{Crit}_H$. Como antes, la dinámica de f induce una función continua en H cuya restricción a todo miembro de \tilde{H} es inyectiva.

Un árbol se *expande* si para toda arista e cuyos puntos finales v, w son vértices de Julia, existe $n \geq 1$ tal que $\rho(f^n(v), f^n(w)) > 1$.

Para cerrar este capítulo enunciaremos y mostraremos una proposición que nos permite relacionar a los árboles angulados y a la condición de expansividad.

Proposición 2.6. Un árbol angulado se expande si y sólo si, dados dos vértices de Julia v, w , existe $n \geq 0$ tal que $f^n(v)$ y $f^n(w)$ no están en el mismo miembro de la familia \tilde{H} .

Demostración. Supongamos que el árbol angulado H no se expande. Entonces existen vértices de Julia contiguos con distancia igual a 1 para todo $n \geq 0$. Claramente existe un miembro de \tilde{H} donde podemos encontrar ese par de vértices juntos.

Por otra parte, consideremos H un árbol angulado que se expande y supongamos que existen diferentes vértices de Julia v, w cuyos iterados sucesivos están en el mismo miembro de \tilde{H} . Entre tales pares, escojamos uno con distancia maximal $\rho(v, w)$. Ahora, para todo $n \geq 0$, el arco $[f^n(v), f^n(w)]$ está contenido completamente dentro de una componente de \tilde{H} . Por el Lema 2.5 y la maximalidad tenemos que todos los arcos que cumplen lo anterior son naturalmente homeomorfos entre sí. Consideremos $u \in [v, w] \cap V$ tal que $\rho(v, u) = 1$. Como f envía vértices a vértices, tenemos que $\rho(f^n(v), f^n(u)) = 1$, para todo n . Como el árbol H se expande y v es un vértice de Julia, necesariamente u es un vértice de Fatou. En particular, $u \neq w$, pero esto es una contradicción. ■

2.3.4. Teorema de Poirier

Hagamos un resumen de lo que hemos hecho en esta importante sección. En principio estudiamos las propiedades básicas de los árboles de Hubbard, esto nos permitió dar paso a la discusión de la condición de expansividad y a la propiedad de ángulos para poder definir de manera abstracta los árboles de Hubbard.

Teorema 2.3.2. Un árbol de Hubbard abstracto puede ser realizado como el árbol asociado a un polinomio PCF si y sólo si se expande.

La demostración de este teorema se escapa de los objetivos de esta tesis. Sin embargo, se ocupa en forma esencial el teorema de caracterización de Thurston:

Teorema 2.3.3. ([H, Teorema 10.1.14]) Sea $f: (\mathbb{S}^2, P_f) \rightarrow (\mathbb{S}^2, P_f)$ un cubrimiento ramificado de grado $d \geq 2$ con conjunto postcrítico P_f finito y con *orbifold* hiperbólico ([H, Definición 10.1.9]). Entonces f es equivalente (en el sentido de Thurston) a una función racional, si y sólo si, para toda multicurva Γ f -estable en (\mathbb{S}^2, P_f) el valor propio de Thurston λ_Γ satisface $\lambda_\lambda < 1$.

Este teorema nos dice que un cubrimiento ramificado f de grado $d \geq 2$ es equivalente a una función racional siempre y cuando no tenga una obstrucción de Thurston.

De ahora en adelante, cuando hablemos de árboles de Hubbard asociados a un polinomio PCF nos referiremos a la caracterización hecha por Poirier.

Capítulo 3

Polinomios Topológicos

Lo que hemos hecho hasta el momento ha sido discutir la dinámica polinomial para poder introducir, definir y dar ejemplos de árboles de Hubbard asociados a polinomios postcríticamente finitos. En este capítulo estudiaremos polinomios topológicos con el fin de poder aplicar, en un capítulo posterior, el algoritmo de levantamiento de árboles introducido por Belk, Lanier, Margalit y Winarski en [BLMW]. Queremos estudiar dos casos sobre la aplicación de este algoritmo. Primero un caso *no obstruido* y segundo un caso *obstruido*. Daremos más detalles de estos casos más adelante. Ahora nos enfocaremos en definir polinomios topológicos postcríticamente finitos y todo lo que conlleva para la solución del problema del conejo retorcido de Hubbard (ver Capítulo 6).

3.1. Polinomios topológicos postcríticamente finitos

Sea $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función de continua y sobreyectiva. Diremos que f es un *cubrimiento ramificado* si es que dado $z \in \overline{\mathbb{C}}$ existen $U, V \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ con $z \in U$ y $w = f(z) \in V$, y dos homeomorfismos $h_1: U \rightarrow \mathbb{D}$ y $h_2: V \rightarrow \mathbb{D}$ tales que $(h_2 \circ f \circ h_1^{-1})(z) = z^m$. Al número m lo llamaremos el *grado local* de f en z y lo denotaremos como $\deg_z f = m$. Definimos también el *grado* de un cubrimiento ramificado como $\deg f := \sum_{z \in f^{-1}(w)} \deg_z f$, donde w es un elemento en V .

Un *polinomio topológico* de grado $d \geq 2$ es un cubrimiento ramificado $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grado d que preserva orientación. Un primer ejemplo de polinomio topológico es cualquier polinomio complejo de grado mayor a 1 de una variable en \mathbb{C} .

Sea $\text{Crit}_f := \{z \in \mathbb{C}: \deg_z f > 1\}$ el conjunto de los puntos críticos de f . Diremos que el polinomio topológico f es *postcríticamente finito* (PCF) si su conjunto post crítico

$P_f = \bigcup_{n \geq 0} f^n(\text{Crit}_f)$ es finito. Si f es un polinomio topológico PCF de grado d , entonces f^k tiene grado d^k . Dado esto, uno esperaría que el conjunto P_{f^k} creciera pues aumentan la cantidad de puntos críticos, pero para todo $k \geq 1$ se tiene que $P_f = P_{f^k}$.

La notación (\mathbb{C}, P_f) indica el plano complejo con conjunto de puntos marcados P_f .

Dos polinomios topológicos PCF f y g son *Thurston equivalentes* si existen homeomorfismos $\phi, \psi: (\mathbb{C}, P_f) \rightarrow (\mathbb{C}, P_g)$ que preservan orientación, isotópicos relativos a P_f y tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, P_f) & \xrightarrow{\psi} & (\mathbb{C}, P_g) \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ (\mathbb{C}, P_f) & \xrightarrow{\phi} & (\mathbb{C}, P_g) \end{array}$$

conmuta. Lo denotamos como $f \simeq g$. Notemos que lo anterior es equivalente a que exista un camino $t \mapsto \phi_t$ (con $t \in [0, 1]$) de cubrimientos ramificados PCF que une a f con g .

Si un polinomio topológico f es equivalente a un polinomio, entonces tiene asociado un árbol de Hubbard.

3.2. Ciclos de Levy

Mencionamos anteriormente que el algoritmo de levantamiento de árboles tiene aplicaciones para dos casos, el no obstruido y el obstruido. En esta sección estudiaremos los preliminares para entender el caso obstruido. Un polinomio topológico se dice *obstruido* cuando tiene una obstrucción de Thurston (una multicurva invariante que satisface ciertas propiedades, para más detalles ver [H, Definición 10.1.15]). Nuestro objetivo es mostrar el siguiente teorema

Teorema 3.2.1 (Berstein-Levy). Si f es un polinomio topológico PCF tal que todos los elementos de P_f tienen puntos críticos en sus órbitas futuras, entonces f no tiene obstrucción de Thurston.

Estamos interesados en estudiar un tipo particular de obstrucción de Thurston llamada ciclo de Levy pues, de [L], sabemos que si un polinomio topológico f tiene una obstrucción de Thurston, entonces tiene un ciclo de Levy contenido en ella.

Para hablar de ciclos de Levy necesitamos saber que es una curva cerrada simple esencial y una multicurva en (\mathbb{C}, P_f) .

Una curva cerrada simple es *esencial* si no es homotópica a una vecindad de un punto marcado o a una vecindad de infinito. De forma equivalente, una curva es esencial si tiene al menos dos puntos marcados en su interior, y al menos un punto marcado en su exterior. Una *multicurva* es colección no vacía de curvas cerradas simples y esenciales, disjuntas a pares y no homotópicas a pares. Las multicurvas pueden ser encajonadas o no encajonadas (para lo último basta que dos curvas de la multicurva no sean encajonadas).

Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio topológico. Un *ciclo de Levy* es una colección no vacía y disjunta de curvas esenciales simples y cerradas $\{\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k = \gamma_0\} \subset (\mathbb{C}, P_f)$ tal que para cada $i = 0, \dots, k-1$, γ_i es homotópica rel P_f a una una componente γ' de la pre-imagen $f^{-1}(\gamma_{i+1})$ y tal que $f: \gamma' \rightarrow \gamma_{i+1}$ de f es una función de grado 1.

En la siguiente figura se ve representado una parte de un ciclo de Levy para cierta función f . Los puntos rojos representan a los puntos de P_f .

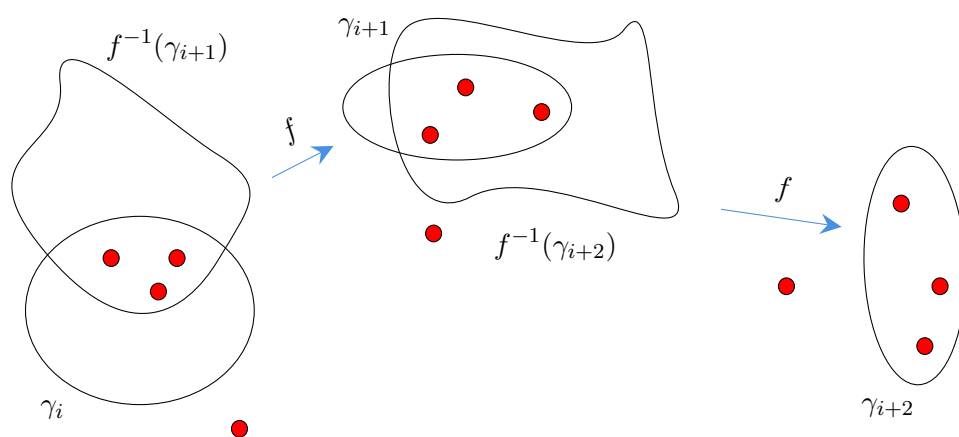


FIGURA 3.1: Parte de un ciclo de Levy

El siguiente teorema asegura que para polinomios topológicos, la existencia del ciclo de Levy implica obstrucción en la equivalencia de Thurston. Su demostración se puede ver en detalle en [BFH, Teorema 5.4].

Teorema 3.2.2. Si f es una función racional, entonces f no puede tener un ciclo de Levy.

Otro teorema fundamental en esta teoría es el siguiente:

Teorema 3.2.3. Si el polinomio topológico f tiene una obstrucción de Thurston Γ , entonces tiene un ciclo de Levy $\Lambda \subset \Gamma$. Es decir, todo ciclo de Levy es una obstrucción de Thurston.

La demostración de este teorema es extensa y escapa de los objetivos de la sección. Un par de buenas referencias para verla en detalle son [BFH, Teorema 5.5] y [H, Teorema 10.3.8].

Sea η una curva cerrada simple que no contenga a infinito. Denotaremos D_η como la componente de $\mathbb{S}^2 \setminus \eta$ que no contiene a infinito. Si consideramos $\Lambda = \{\gamma_0, \dots, \gamma_k = \gamma_0\}$ un ciclo de Levy y γ'_i la componente de $f^{-1}(\gamma_{i+1})$ homotópica rel P_f a γ_i , entonces $f: D_{\gamma'_i} \rightarrow D_{\gamma_{i+1}}$ es un homeomorfismo y en particular $D_{\gamma'_i}$ no tiene puntos críticos.

Proposición 3.1. Sea $\Lambda = \{\gamma_0, \dots, \gamma_k = \gamma_0\}$ un ciclo de Levy donde cada curva cumple la propiedad de que D_{γ_i} no contiene curvas esenciales en λ . Entonces D_{γ_i} contiene solo puntos postcríticos periódicos de f .

Idea de la demostración. Como f es postcríticamente finito, todo punto crítico es iterado a un ciclo periódico. Si $x \in P_f$ está en D_{γ_i} , entonces $f(x) \in D_{\gamma_{i+1}}$. Entonces $\bigcup_{i=0}^k D_{\gamma_i}$ contiene a los iterados de x . Supongamos que y no es periódico pero $z = f(y)$ lo es. Si $\gamma \in \Lambda$, $f^{-1}(D_\gamma)$ consiste en componentes homeomorfas a discos donde una de ellas tiene frontera γ' homotópica rel P_f a una curva en Λ . Como ningún D_{γ_i} contiene curvas esenciales, entonces solo una curva contiene a la imagen inversa periódica de z y esta curva es homotópica a γ' . Pero $y \notin \gamma'$ ya que $f: D_{\gamma'} \rightarrow D_\gamma$ es uno a uno.

Como $y \notin D_{\gamma'}$ se tiene que $y \notin \bigcup_{i=0}^k D_{\gamma_i}$. Entonces, ningún punto postcrítico preperiódico está en $\bigcup_{i=0}^k D_{\gamma_i}$. ■

Cerraremos el capítulo con la demostración del teorema 3.2.1:

Supongamos que existe una obstrucción de Thurston. Como todo ciclo periódico tiene un punto crítico y como los discos asociados a las curvas del ciclo de Levy contienen solo puntos periódicos, existe γ_{j+1} tal que la componente de $f^{-1}(\gamma_{j+1})$ homotópica a γ_j contiene un punto crítico. Una contradicción.

Capítulo 4

Complejos de Árboles

4.1. Espacio exterior y su topología

El espacio exterior \mathcal{X}_n fue introducido a mediados de los años 80 como una analogía para $\text{Out}(F_n)$ de un espacio simétrico o un espacio de Teichmüller. Recordemos que el grupo de automorfismos $\text{Out}(F_n)$ está dado por $\text{Out}(F_n) = \text{Aut}(F_n)/\text{Inn}(F_n)$, donde $\text{Inn}(F_n)$ es el grupo de automorfismos que vienen de las conjugaciones.

El espacio \mathcal{X}_n puede ser pensado como un espacio de grafos. Para introducirlo vamos a trabajar con la acción de elementos de $\text{Out}(F_n)$ en grafos finitos. Un candidato natural sería un grafo finito y conexo G como el de la Figura 4.1, para el cual $\pi_1(G) \cong F_4$.

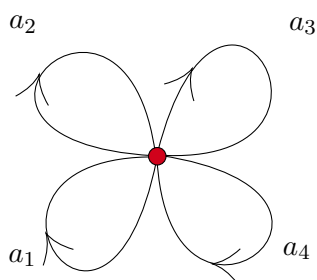


FIGURA 4.1: Un grafo G

Empecemos entonces a construir \mathcal{X}_n describiéndolo en función de grafos métricos. Un *grafo métrico* G es un grafo finito conexo con una función que asigna a cada arista largos de aristas positivos. Esta función es una métrica inducida por los largos de los intervalos. Cada arista del grafo podemos identificarla isométricamente con un intervalo en \mathbb{R}

del mismo largo. Fijemos un modelo de rosa R_n (es decir, un grafo de un vértice y n aristas) e identifiquemos los pétalos (aristas) de R_n con los generadores del grupo libre F_n . Una *marcación* de un grafo métrico G es una *equivalencia homotópica* $g: R_n \rightarrow G$. La marcación identifica el grupo fundamental de G con F_n . Al par (g, G) lo llamaremos *grafo métrico marcado*.

Abusando del lenguaje diremos que dos grafos métricos marcados (g, G) y (g', G') son los mismos si es que existe una isometría $f: G' \rightarrow G$ tal que $f \circ g'$ es homotópico a g . Además, asumiremos que la suma de los largos de las aristas es 1.

Una vez que tenemos identificados a los puntos del espacio \mathcal{X}_n es importante dotarlo de una topología. Para esto, notemos que cada grafo marcado (g, G) determina un símplice abierto $\sigma(g, G)$ obtenido al variar el largo de las aristas, manteniendo siempre que la suma de los largos sea igual a 1 como en la Figura 4.2

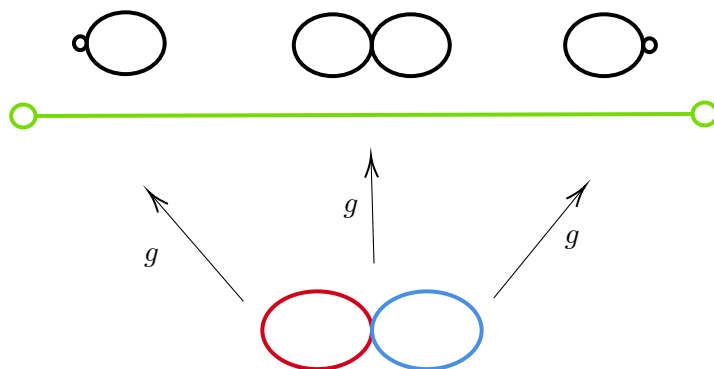


FIGURA 4.2: Variación de largos

El símplice $\sigma(g', G')$ es una *cara* de $\sigma(g, G)$ si (g', G') se obtiene de (g, G) colapsando algunas aristas a puntos. Algunas caras de un símplice son símplices también, como se muestra en la Figura 4.3. Además, al variar los largos de los grafos que están en las aristas del símplice, podemos encontrar otro símplice con la misma cara y obtener lo que se muestra en la Figura 4.4.

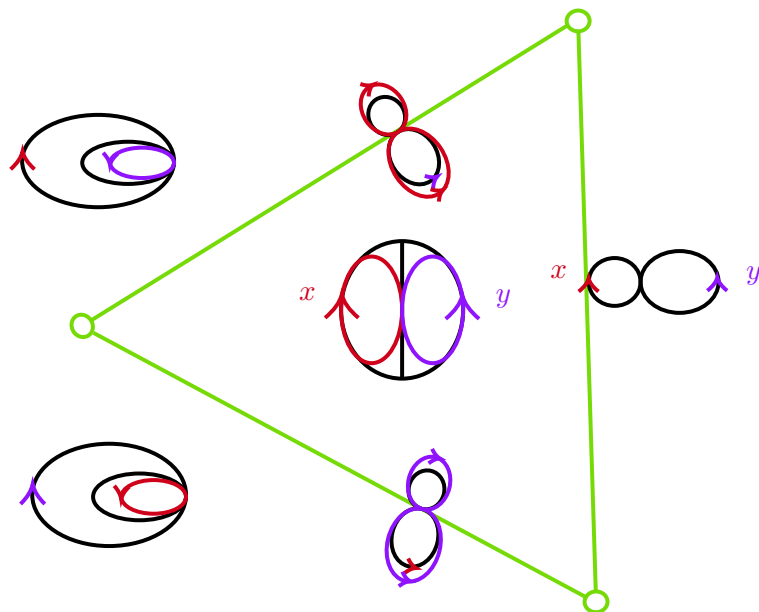
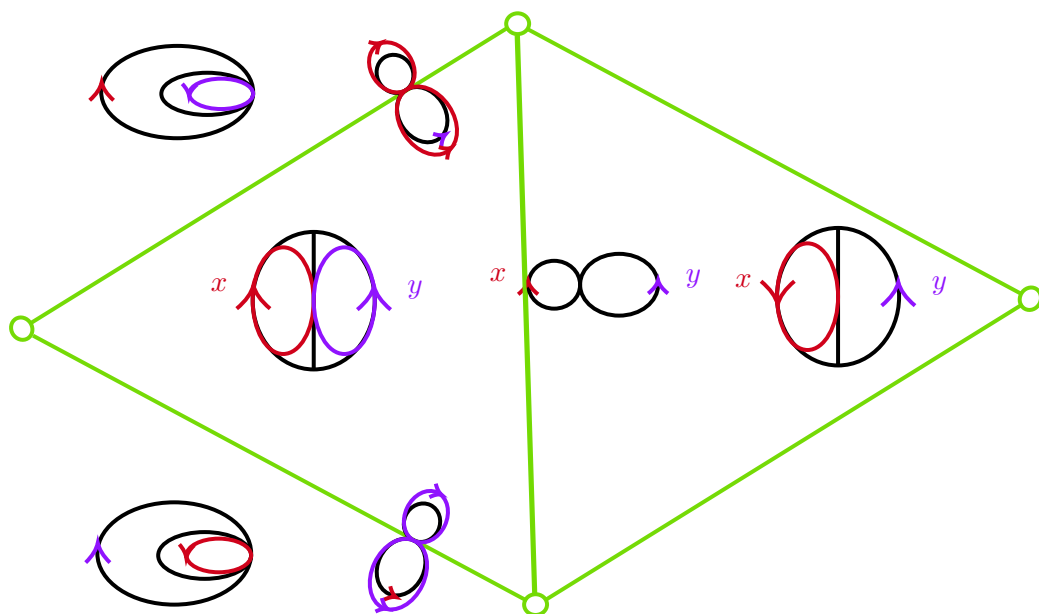
FIGURA 4.3: Construcción de \mathcal{X}_2 

FIGURA 4.4: Identificación de caras

Repitiendo la misma idea podemos encontrar otro símplice y pegarlo como vemos en la Figura 4.5

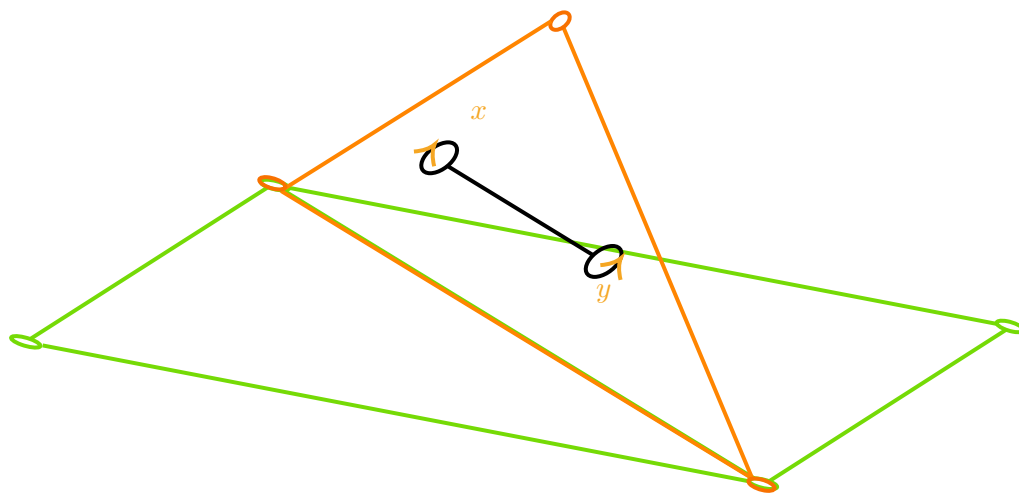


FIGURA 4.5: Otra identificación de caras

De esta forma podemos construir el espacio \mathcal{X}_2 :

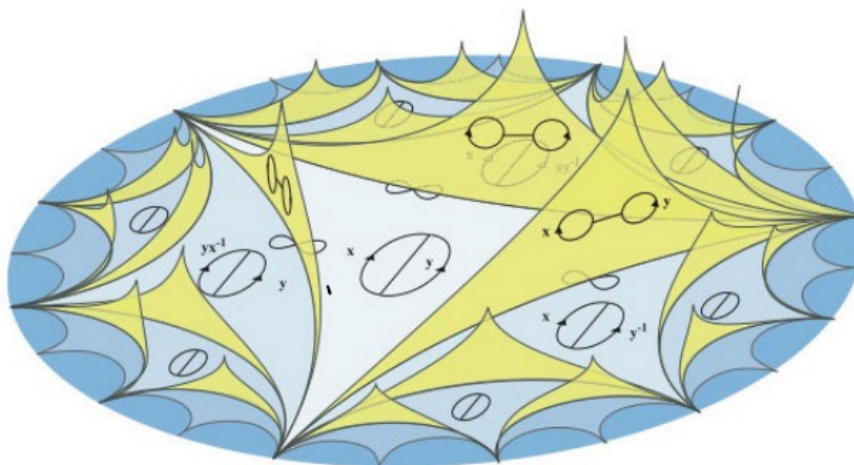


FIGURA 4.6: El espacio \mathcal{X}_2 (ver [V]).

Entonces, \mathcal{X}_n es el espacio cociente obtenido de la unión disjunta de símlices abiertos $\sigma(g, G)$ bajo identificación de caras. Podemos notar que no todas las caras del símplex abierto $\sigma(g, G)$ están en \mathcal{X}_n . Por ejemplo, un vértice de $\sigma(g, G)$ que corresponde a un grafo con exactamente una arista no nula no está en \mathcal{X}_n , ya que este grafo no tiene grupo fundamental F_n . Si reemplazamos $\sigma(g, G)$ por $\bar{\sigma}(g, G)$, un símplex cerrado, y tomamos

la unión disjunta módulo identificación de caras, el espacio resultante lo denotamos por \mathcal{X}_n^* , el cual es la clausura simplicial del espacio exterior \mathcal{X}_n .

Un aspecto importante sobre el espacio \mathcal{X}_n es que $\text{Out}(F_n)$ actúa en el cambiando la marcación. Precisamente, dado un automorfismo φ que es realizado por una equivalencia homotópica $f: R_n \rightarrow R_n$, la acción de φ en (g, G) está dada por $(g, G)\varphi = (g \circ f, G)$.

Dado (g, G) , la métrica en G se levanta a una métrica en el cubrimiento universal \tilde{G} tal que $\pi_1(G)$ actúa en \tilde{G} por isometrías. La marcación g identifica $\pi_1(G)$ con F_n , entonces a cada punto de \mathcal{X}_n le podemos asociar una acción libre e isométrica de F_n en un árbol métrico. Esta acción es *minimal*, es decir que no existen sub-árboles invariantes. Por otra parte, dada una acción minimal de F_n por isometrías en un árbol simplicial métrico, el cociente de T por la acción es un grafo junto con una marcación determinada por las imágenes de los caminos de un punto arbitrario de T a su traducido por los generadores de F_n .

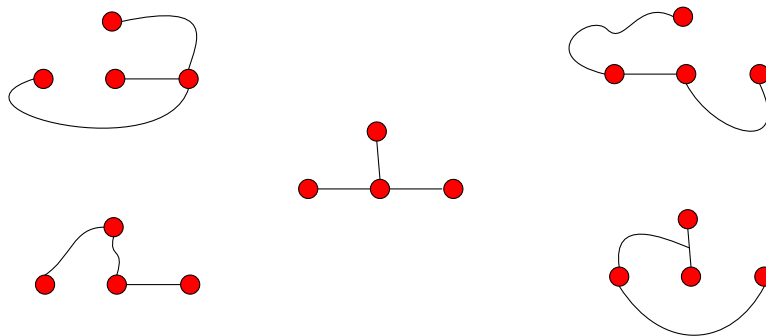
4.2. Complejos de árboles

En esta sección y en adelante consideraremos $P \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto con n elementos (a menos que indiquemos lo contrario) al cual llamaremos conjunto de puntos marcados. Necesitamos introducir el concepto de árbol en (\mathbb{C}, P) , pues todo el trabajo que desarrollaremos a continuación involucrará árboles en (\mathbb{C}, P) y el espacio de todos estos arboles es análogo al espacio exterior construido en la sección anterior.

Nos referiremos a un *árbol* en (\mathbb{C}, P) como a una incrustación φ de un árbol (definido en la sección de los árboles de Hubbard 2.3) T_0 en \mathbb{C} con las siguientes propiedades:

1. $P \subseteq \varphi(T_0)$,
2. el conjunto $\varphi^{-1}(P)$ está contenido en el conjunto de vértices de T_0 , y
3. el conjunto de vértices de T_0 con valencia a lo más 2 está contenido en $\varphi^{-1}(P)$.

A continuación, en la Figura 4.7 podemos ver cinco ejemplos de árboles en (\mathbb{C}, P) donde $P = \{-1, 0, 1, i\}$. Los puntos en rojo representan los puntos marcados.

FIGURA 4.7: Árboles en (\mathbb{C}, P)

Diremos que dos árboles en (\mathbb{C}, P) son *isotópicos* si existe una isotopía a través de árboles en (\mathbb{C}, P) .

Consideremos T un árbol en (\mathbb{C}, P) y sea F un sub-bosque (es decir, un sub-grafo de T posiblemente no conexo) de T con la propiedad de que cada componente de F contiene a lo más un punto de P . Diremos que tal bosque es *colapsable* si podemos formar un nuevo árbol $T' = T/F$ en (\mathbb{C}, P) colapsando cada componente de F a un punto. Entonces decimos que T' es obtenido de T por *colapso de un bosque*. De forma equivalente podemos decir que T es obtenido de T' por *expansión de un bosque*. Estas operaciones están bien definidas para clases de isotopías de árboles. Notemos que esta es una analogía con los símlices $\sigma(g, G)$ y la definición de una cara del símlice de la sección anterior.

Existe una forma alternativa para describir un árbol en (\mathbb{C}, P) , en términos de sistemas de arcos pero para esto necesitamos considerar algunas definiciones:

1. Un *arco basado en infinito* es la imagen de una incrustación propia y simple de $(0, 1)$ en \mathbb{C} que evita a P (equivalentemente, un arco que conecta a infinito consigo mismo evitando a P).
2. Un arco basado en infinito es *esencial* si no es isotópico a infinito a través de arcos basados en infinito.
3. Un *sistema de arcos* en (\mathbb{C}, P) es una colección de arcos esenciales basados en infinito disjuntos a pares y no isotópicos entre si.
4. Un sistema de arcos en (\mathbb{C}, P) *rellena* si cada región complementaria es un disco con a lo más un punto marcado.

Existe una biyección natural entre el conjunto de clases de isotopía de árboles en (\mathbb{C}, P) y el conjunto de clases de isotopía de sistemas de arcos que rellenan. Dado un árbol

T en (\mathbb{C}, P) , un sistema de arcos correspondiente tiene un arco α para cada arista e de T ; específicamente, α es un arco que intersecta a e en un punto y es disjunto del resto de T . Colapsar un bosque en un árbol T corresponde a borrar los arcos en el sistema de arcos correspondiente. La Figura 4.8 muestra que el árbol de la derecha es obtenido contrayendo la arista del medio del árbol izquierdo.

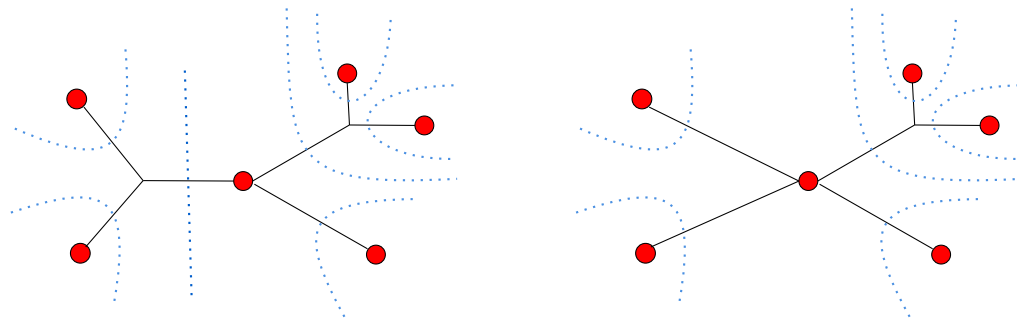


FIGURA 4.8: Arcos duales

Dada esta correspondencia, pasamos a una de las definiciones principales del capítulo.

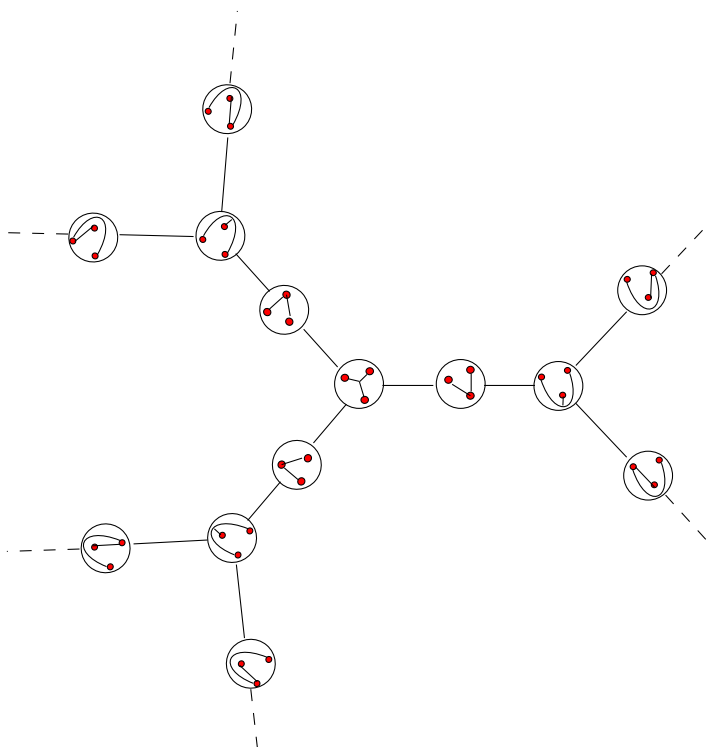
Definición 4.1 (El complejo de árboles \mathcal{T}_n). Consideremos el siguiente complejo simplicial: los vértices de \mathcal{T}_n son clases de isotopía de árboles en (\mathbb{C}, P) . Un conjunto de vértices $\{T_0, \dots, T_j\}$ genera un j -simplex si para cada i positivo, el vértice T_i es obtenido de T_{i-1} por colapso de un bosque (de forma equivalente para $i < j$ el vértice T_j se obtiene de T_i por expansión de bosque).

La Figura 4.9 muestra una porción del árbol infinito 3-regular, el cual corresponde a la realización geométrica del complejo de árboles \mathcal{T}_3 (son homeomorfos).

Notemos que el complejo \mathcal{T}_n depende de la elección de P , pero si P' es otro subconjunto de \mathbb{C} con la misma cardinalidad de P , entonces un homeomorfismo $(\mathbb{C}, P) \rightarrow (\mathbb{C}, P')$ induce un isomorfismo entre los complejos de árboles correspondientes.

Por otra parte como cada árbol que representa un vértice de \mathcal{T}_n tiene finitos vértices y aristas, se tiene que \mathcal{T}_n es localmente finito.

Sea $P \subseteq \mathbb{C}$ el conjunto de puntos marcados para un árbol T . Una *métrica* en T es una función del conjunto de aristas de T a $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Tiene sentido definir una métrica en una clase de isotopía de árboles, ya que una isotopía entre árboles induce una biyección a el conjunto de aristas. Si existe un camino de aristas con largo 0 conectando puntos diferentes de P , diremos que la métrica es *degenerada*.

FIGURA 4.9: Una porción de \mathcal{T}_3

Para cada vértice T de \mathcal{T}_n consideramos el conjunto de métricas no degeneradas de T donde la suma total de los largos sea 1. Este conjunto de métricas es un subconjunto del símplice estándar en \mathbb{R}^m , donde m es el número de aristas de T . Al subconjunto resultante del símplice estándar lo llamaremos *celda*. Una cara de una celda es la celda correspondiente al árbol T' obtenido de T al colapsar algunas aristas de T . Definimos el complejo \mathcal{Y}_n como la unión disjunta de las celdas asociadas a los vértices de \mathcal{T}_n . Identificamos una cara de la celda para un árbol T con la celda que corresponde del árbol colapsado T' .

En el párrafo anterior podemos encontrar otra analogía con la sección del espacio exterior. De hecho, podemos pensar que trabajar en \mathcal{X}_n es equivalente a hacerlo en \mathcal{Y}_n (vía sistema de arcos).

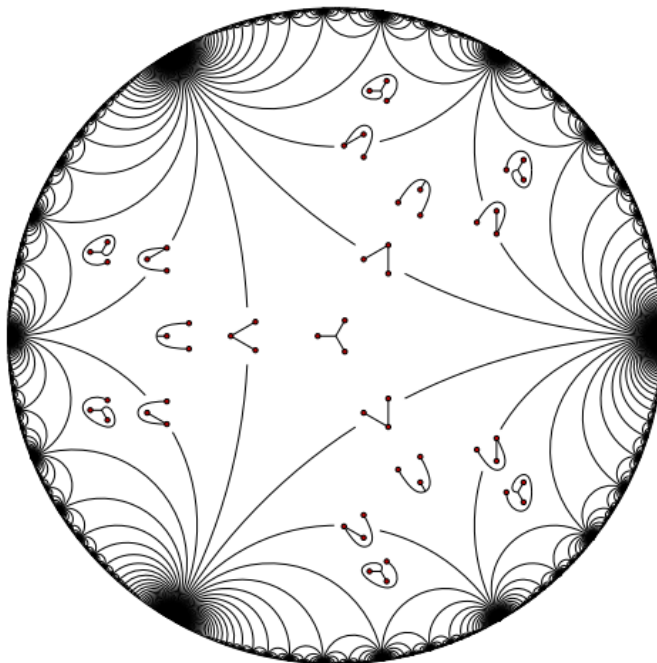


FIGURA 4.10: El complejo \mathcal{Y}_3 (ver [BLMW]).

Podemos pensar que \mathcal{T}_n es la espina (la subdivisión baricéntrica) de \mathcal{Y}_n como en la Figura 4.11. Específicamente, \mathcal{T}_n es el subconjunto de \mathcal{Y}_n de las clases de isotopía de árboles métricos con la propiedad de que si se escala la métrica de un árbol tal que el largo más grande de alguna arista es 1, entonces el conjunto de aristas con largo estrictamente menor a 1 forma un sub-bosque donde cada componente contiene a lo más un punto de P .

En esta parte del capítulo consideraremos un complejo simplicial $\hat{\mathcal{T}}_n$ que contiene a \mathcal{T}_n como subcomplejo. A los elementos que están en $\hat{\mathcal{T}}_n$ y no en \mathcal{T}_n los llamaremos árboles burbuja.

Dada una multicurva no encajonada M en (\mathbb{C}, P) , podemos obtener una nueva superficie (\mathbb{C}, \bar{P}) a partir de (\mathbb{C}, P) colapsando cada disco acotado por una componente de M a un punto marcado. El conjunto nuevo de puntos marcados \bar{P} tiene un elemento por cada componente de M y un elemento por cada elemento de P no contenido en el interior de la multicurva M . Tomemos un par (M, T_E) donde M es una multicurva no encajonada y T_E es el árbol en la superficie que se obtiene al colapsar los discos acotados por las componentes de M a puntos. Bajo isotopía, existe un único árbol burbuja B con M como multicurva y T_E como imagen. Esta definición se puede ver en el lado derecho de la Figura 4.12.

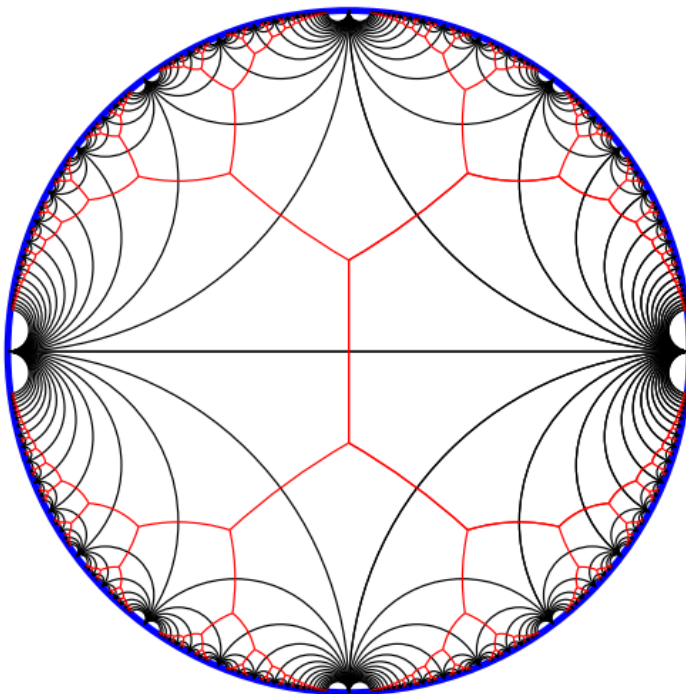


FIGURA 4.11: Subdivisión baricéntrica (ver [B]).

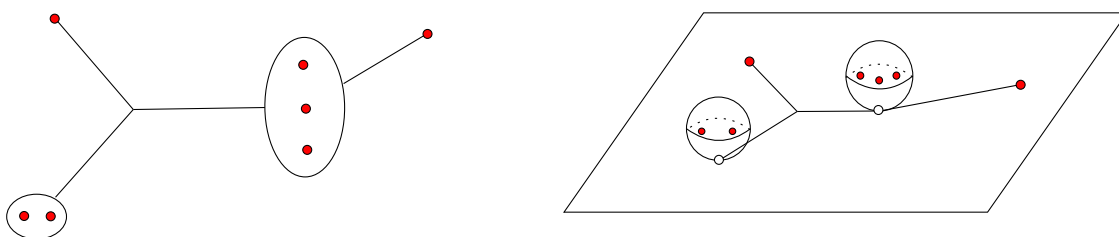


FIGURA 4.12: Dos formas de ver un árbol burbuja.

Específicamente un *árbol burbuja* en (\mathbb{C}, P) es un grafo B en \mathbb{C} con las siguientes propiedades:

1. El grafo B es la unión de la multicurva no encajonada M en (\mathbb{C}, P) junto con un bosque $B_E \in \mathbb{C}$.
2. Las hojas de B_E pertenecen a $M \cup P$.
3. La intersección $B_E \cap M$ está contenida en el conjunto de las hojas de B_E .
4. El bosque B_E es disjunto de los interiores de los discos acotados por M .
5. La imagen de B_E en la superficie (\mathbb{C}, \bar{P}) es un árbol en (\mathbb{C}, \bar{P}) .

En la Figura 4.13 podemos ver un grafo B y ejemplos de árboles en el bosque de la definición anterior. Existe un árbol representado por el grafo negro y otro por el grafo naranja. Las hojas de los bosques están dadas por las curvas que encierran a algunos puntos de P .

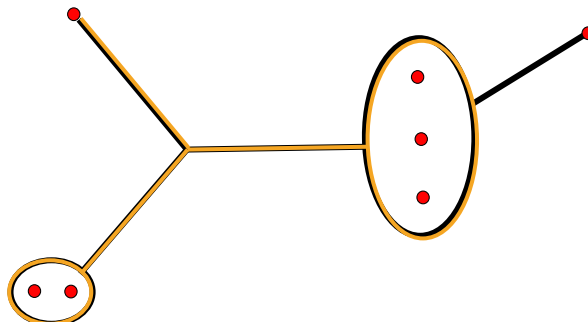


FIGURA 4.13: Ejemplos de bosques B_E

Podemos describir los símplexes de $\hat{\mathcal{T}}_n$ en términos de los árboles burbuja. Para ver como es una arista de $\hat{\mathcal{T}}_n$ consideremos lo siguiente. Tomemos un árbol burbuja B con una multicurva M . Podemos colapsar algunas aristas de B que no estén contenidas en M , y si colapsamos una arista que conecte un punto marcado con una componente de M , entonces agrandaremos esa componente incluyendo al punto marcado colapsado en su interior.

Finalmente tenemos los complejos de árboles necesarios para pasar al siguiente capítulo, en el cual trabajaremos con el algoritmo de levantamiento de árboles sobre estos complejos.

Capítulo 5

Algoritmo de Levantamiento de Árboles

En este capítulo describiremos el algoritmo de levantamiento de árboles, construido por Belk, Lanier, Margalit y Winarski en [BLMW] y el cual nos permitirá resolver el problema del conejo retorcido en el Capítulo 6.

Consideremos f un polinomio topológico PCF con $|P_f| = n$. Sea T un árbol en (\mathbb{C}, P_f) . La preimagen de T bajo f es un árbol en $(\mathbb{C}, f^{-1}(P_f))$ ya que si $f^{-1}(T)$ tiene un loop, entonces su complemento tendrá varias componentes conexas, cada una de las cuales tendrían por imagen el complemento de T , pero ∞ tiene una sola preimagen (para más detalles ver [BLMW, Sección 2.4]).

Podemos obtener un árbol en (\mathbb{C}, P_f) de $f^{-1}(T)$ tomando la clausura convexa de P_f en $f^{-1}(T)$. Es decir, unir los caminos simples de $f^{-1}(T)$ que conectan dos puntos de P . De esta forma conseguimos un árbol $\lambda_f(T)$ en (\mathbb{C}, P_f) . Podemos ver un ejemplo de este procedimiento en la siguiente figura

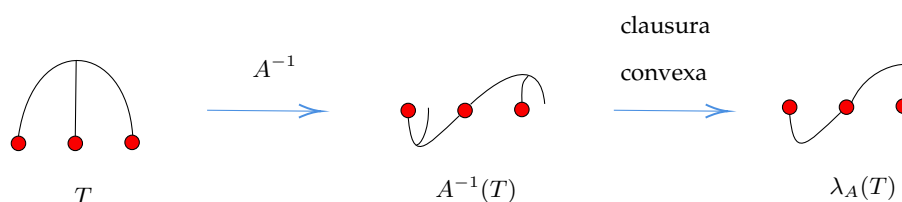


FIGURA 5.1: En el lado izquierdo T representa un árbol en (\mathbb{C}, P_A) donde A es el polinomio del aeroplano. El resultado es isotópico al árbol de Hubbard del aeroplano.

El procedimiento anterior está bien definido para clases de isotopía de árboles. De esta forma obtenemos la función $\lambda_f: \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$. Ahora, como cualquier colapso de un bosque

en algún árbol T se levanta a un colapso de un bosque en el árbol $f^{-1}(T)$, tenemos que la función λ_f es simplicial. Diremos que un árbol T es *invariante* en (\mathbb{C}, P_f) bajo f si T es isotópico a $\lambda_f(T)$.

Podemos definir también la función de levantamiento λ_f en el complejo $\hat{\mathcal{T}}_n$ usando la correspondencia entre los árboles burbuja y las multicurvas, el cual estará dado por levantamiento de sistemas de arcos a través de f .

Finalmente, definimos λ_f en \mathcal{Y}_n de la misma forma que en \mathcal{T}_n salvo que en este caso el árbol T es métrico, entonces $f^{-1}(T)$ hereda una métrica. De hecho, cada arista de la preimagen bajo f de T es la unión de preimágenes de aristas de T , y entonces el largo de una arista dada es la suma de los largos de las aristas correspondientes de T , contando multiplicidad. La clausura convexa también hereda una métrica de la métrica del árbol $f^{-1}(T)$. Podemos escalar la métrica en la clausura convexa de tal forma que la suma de los largos de las aristas sea 1, y así obtenemos el punto $\lambda_f(T)$ de \mathcal{Y}_n .

5.1. Método de Alexander

En esta sección nos preocuparemos de reconocer los polinomios topológicos y comenzaremos por definir los polinomios topológicos marcados, ya que estos nos servirán para entender el método de Alexander.

Un *polinomio topológico marcado* es un par (f, A) , donde f es un polinomio topológico PCF y $A \subset \mathbb{C}$ es un subconjunto finito que contiene a P_f y satisface $f(A) \subseteq A$. Dos polinomios topológicos marcados (f, A) y (g, B) son *Thurston equivalentes* si existen dos homeomorfismos $\phi, \psi: (\mathbb{C}, A) \rightarrow (\mathbb{C}, B)$ isotópicos relativos a A tales que $\phi f = g\psi$.

Un polinomio topológico marcado (f, A) es un *polinomio marcado* si f es un polinomio. El árbol de Hubbard para un polinomio marcado (f, A) es el árbol en (\mathbb{C}, A) obtenido de la unión de arcos regulados en el conjunto lleno de Julia de f , $K(f)$, entre pares de puntos en A .

Si (f, A) es un polinomio topológico marcado que es Thurston equivalente a un polinomio marcado (g, B) bajo los homeomorfismos ϕ, ψ , entonces el *árbol topológico de Hubbard* para (f, A) es la preimagen del árbol de Hubbard para (g, B) bajo ϕ (equivalentemente bajo ψ).

Si (f, A) es un polinomio topológico marcado y T es un árbol en (\mathbb{C}, A) , su levantamiento es la clausura convexa en $f^{-1}(T)$ de los puntos en A .

Ejemplo 5.1. En la Figura 5.2, a la izquierda se ve el árbol topológico de Hubbard H_f (el cual está dotado del conjunto postcrítico de f como conjunto de puntos marcados) para

el polinomio $f(z) = z^3 - \frac{3}{4}z + i\frac{\sqrt{7}}{4}$. Al medio, un árbol invariante T bajo f , obtenido al expandir el árbol H_f . Finalmente, a la derecha, encontramos un árbol T' invariante bajo f , que se obtiene al contraer T a lo largo de dos aristas.

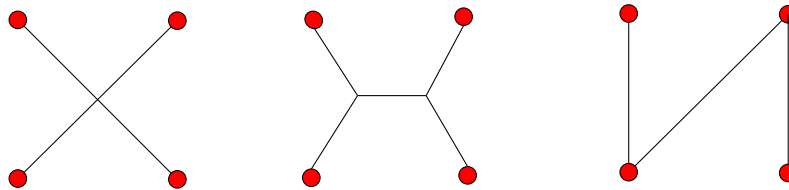


FIGURA 5.2: Un árbol de Hubbard

Proposición 5.2 (Método de Alexander). [BLMW, Proposición 3.1] Sean (f, A) y (g, B) polinomios topológicos marcados, sea T_f un árbol en (\mathbb{C}, A) y T_g un árbol en (\mathbb{C}, B) , y supongamos que existe un homeomorfismo $h: (\mathbb{C}, f^{-1}(A)) \rightarrow (\mathbb{C}, g^{-1}(A))$ tal que cumple las siguientes propiedades:

1. $h(T_f)$ es isotópico a T_g en (\mathbb{C}, B) ,
2. hf y gh coinciden en $f^{-1}(A)$, y
3. $h(f^{-1}(T_f))$ es isotópico a $g^{-1}(T_g)$ en $(\mathbb{C}, g^{-1}(B))$.

Entonces f y g son Thurston equivalentes (donde h da la equivalencia). Cuando $A = B$; h es isotópico a la identidad relativo a $f^{-1}(A)$; y f, g y h satisfacen las tres condiciones anteriores, podemos concluir que f es isotópico a g relativo a $f^{-1}(A)$.

Una idea de la demostración sería la siguiente. Por la propiedad 1, existe un homeomorfismo h_0 homotópico a h relativo a A tal que $h_0(T_f) = T_g$. Similarmente, por la propiedad 3 existe un homeomorfismo h_1 isotópico a h relativo a $f^{-1}(A)$ tal que $h_1(f^{-1}(T_f)) = g^{-1}(T_g)$. Por la segunda propiedad, gh_1 restringido al conjunto de vértices del árbol $f^{-1}(T_f)$ coincide con h_0f restringido en el mismo conjunto. Por lo tanto podemos modificar h_1 por isotopía relativa a $f^{-1}(A)$ de tal forma que gh_1 y h_0f coincidan en todo \mathbb{C} .

Para finalizar este capítulo, recordaremos el enunciado y daremos una idea de como mostrar el resultado que nos permite encontrar los núcleos de los polinomios topológicos para el caso no obstruido, además de describir el algoritmo de levantamiento de árboles.

Dado un subcomplejo N de \mathcal{T}_n , diremos que N es un *núcleo* para λ_f si para todo vértice T de \mathcal{T}_n la sucesión de vértices $\lambda_f^k(T)$ está en N para todo k suficientemente grande.

Sea f un polinomio topológico PCF con $|P_f| = n$, y sea $\lambda_f: \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ la función de levantamiento. Si f no es obstruido, entonces la 2-vecindad de H_f es un núcleo para λ_f .

Idea de la demostración. Sabemos que la acción de λ_f es simplicial, entonces nunca aumenta la distancia entre dos vértices. En particular, como el vértice de Hubbard H_f es fijo bajo λ_f , la bola de cualquier radio finito, centrada en H_f , se tiene a si misma como imagen bajo λ_f . Por otra parte, como \mathcal{T}_n es localmente finito, esta bola tiene finitos vértices. Así, la órbita de cualquier vértice T de \mathcal{T}_n bajo λ_f se repetirá eventualmente. Esto implica que todo vértice T de \mathcal{T}_n es periódico o preperiódico bajo la acción de λ_f . Es decir, que existen $m, r \geq 0$ tales que $\lambda_f^m(T) = \lambda_f^{m+r}(T)$. Ahora, dado un vértice T de \mathcal{T}_n , tenemos que $T' = \lambda_f^m(T)$ es fijo bajo λ_f^r y T' es invariante bajo f^r . Dado un árbol T' invariante bajo un polinomio topológico PCF, existe un árbol invariante bajo el mismo polinomio topológico PCF que se encuentra por expansión de un bosque y que satisface la condición de ángulo. Entonces, es posible encontrar un árbol T'' que está a distancia a lo más 1 de T' y que satisface la condición de ángulo para f^r . Además, el vértice de Hubbard de f^r está a distancia a lo más 1 de T'' y como $H_{f^r} = H_f$ podemos concluir el resultado.

Para más detalles de la demostración ver [BLMW]. ■

Del teorema tenemos que si f es no obstruido, entonces λ_f tiene núcleo finito. Incluso existe un núcleo minimal contenido en la 2-vecindad de H_f (podemos ver un ejemplo en la Figura 5.3). Este núcleo minimal consiste en todos los vértices de \mathcal{T}_n que son periódicos bajo λ_f .

Para entender un poco más como funciona el núcleo de λ_f consideremos el siguiente ejemplo. Bajo equivalencia de Thurston, existen exactamente tres polinomios cuadráticos donde el punto crítico tiene periodo 3. Estos son el conejo, el conejo conjugado y el aeroplano (sus nombres vienen de la forma de sus conjuntos de Julia). Recordemos que estos polinomios son de la forma $z^2 + c$, donde c es una solución no trivial de la ecuación $(c^2 + c)^2 + c = 0$. Aproximadamente tenemos

$$R(z) \approx z^2 - 0,1225611 + 0,7448617i$$

$$C(z) \approx z^2 - 0,1225611 - 0,7448617i$$

$$A(z) \approx z^2 - 1,7548776.$$

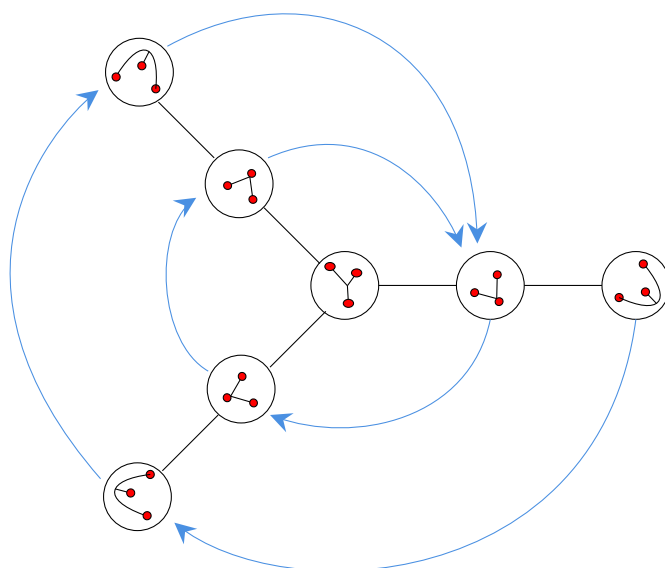


FIGURA 5.3: La 2-vecindad del vértice de Hubbard para el polinomio del conejo.

En la Figura 5.4 podemos ver los núcleos minimales de R , A y C respectivamente. En los casos del conejo y el conejo conjugado, el vértice central es invariante y los otros tres vértices son permutados de forma cíclica en la dirección de las flechas. Esta permutación es via levantamiento.

Para los polinomios del conejo y del conejo conjugado, el núcleo minimal es igual a la 1-vecindad del vértice de Hubbard, y para el aeroplano el núcleo es el mismo vértice de Hubbard, es decir H_A . En particular, en estos tres casos, el núcleo minimal es estrictamente mas pequeño que la 2-vecindad del vértice de Hubbard.

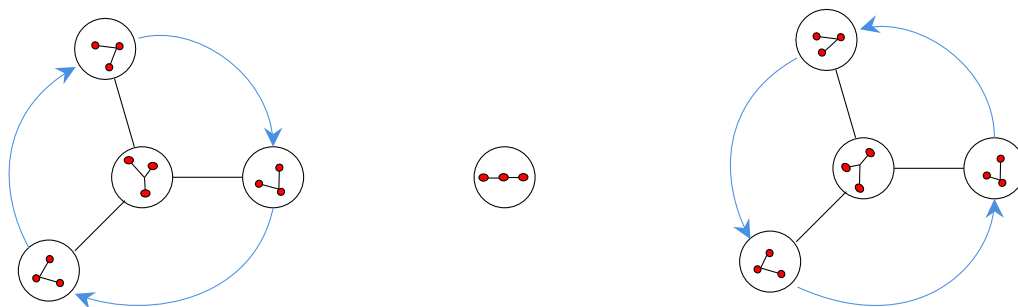


FIGURA 5.4: Núcleos minimales

El algoritmo de levantamiento de árboles permite determinar cuando un polinomio topológico es equivalente a un polinomio o no y tiene como resultado, o un árbol topológico de Hubbard, o un ciclo de Levy. Este algoritmo está basado en el teorema anterior y lo describiremos a continuación.

Supongamos que tenemos un polinomio topológico PCF f donde $|P_f| = n$. Entonces el algoritmo sigue los siguientes pasos:

1. Escoger algún vértice T de \mathcal{T}_n .
2. Verificar si algún elemento de la 2-vecindad de T es el árbol topológico de Hubbard para f chequeando si es invariante y satisface las condiciones de Poirier. Si coincide, el algoritmo termina.
3. Verificar si algún árbol de la 1-vecindad de T tiene un sub-árbol cuya frontera es una curva en un ciclo de Levy. Si coincide, el algoritmo termina.
4. Reemplazar T por $\lambda_f(T)$ y volver al paso 2.

Capítulo 6

El problema del conejo retorcido

A principios de los años 80, Hubbard planteó el problema del conejo retorcido. Si post-componemos el polinomio del conejo R con un homeomorfismo h de \mathbb{C} fijando a P_R puntualmente, obtendremos un polinomio topológico nuevo hR con la misma dinámica en P_R . Este polinomio topológico no puede tener un ciclo de Levy (por Teorema 3.2.1) y por lo tanto hR es equivalente en el sentido de Thurston a R , C o A . Sea T_x el giro de Dehn izquierdo alrededor de la curva x dada en la Figura 6.1 y sea $m \in \mathbb{Z}$. El problema propuesto por Hubbard es el siguiente: determine la clase de equivalencia de Thurston de $T_x^m R$ como una función de m . Es decir, determine la función correspondiente $\mathbb{Z} \rightarrow \{R, A, C\}$

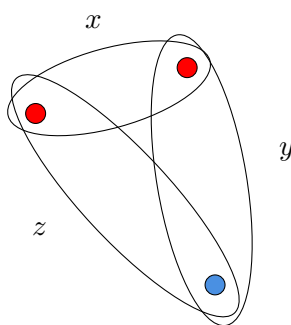


FIGURA 6.1: Las curvas x, y y z en (\mathbb{C}, P_R) . El punto celeste representa al punto crítico de R y los rojos el resto de puntos de P_R .

En la primera sección de este capítulo estudiaremos los preliminares necesarios sobre grupos de clases de isotopía y su relación con los giros de Dehn. Luego, en la segunda

sección del capítulo, daremos una solución del problema del conejo retorcido. Bartholdi y Nekrashevych resolvieron en el año 2006 este problema usando grupos de monodromía iterados (para detalles ver [BN]). La solución que mostraremos aquí está basada en el algoritmo de levantamiento de árboles, la cual fue propuesta por Belk, Lanier, Margalit y Winarski en [BLMW] en el año 2019.

En la tercera sección estudiaremos una generalización del problema del conejo retorcido. Específicamente, cuando consideramos que el conjunto post-crítico tiene n puntos, donde $n > 3$.

Finalmente, en la última sección, estudiaremos una aplicación del algoritmo de levantamiento de árboles para un polinomio topológico obstruido.

6.1. Giros de Dehn

Es importante para la solución del problema tener clara la idea geométrica del giro de Dehn, además de su relación con los grupos de clases de isotopía. Entonces, para empezar, consideremos $S = S_{g,n}$ una superficie orientable de género g y con n perforaciones. Definimos el grupo de clases de isotopía de S , denotado por $\text{Mod}(S)$, como el grupo

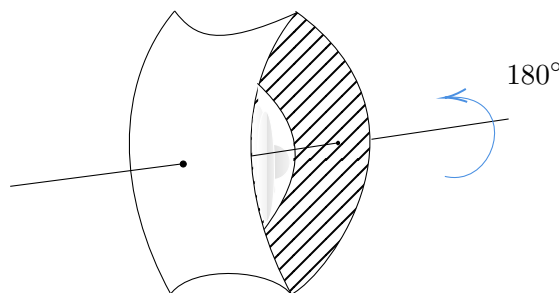
$$\text{Mod}(S) = \text{Homeo}^+(S) / \text{Homeo}_0(S).$$

Es decir, el grupo de los homeomorfismos que preservan orientación módulo relación de isotopía (o el grupo de las clases de isotopía de elementos de $\text{Homeo}^+(S)$).

Una propiedad importante sobre $\text{Mod}(S)$ es que si S es cerrada (i.e. $n = 0$), entonces la función $\text{Mod}(S) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S))$ es un isomorfismo (para la demostración ver [FM, Teorema 8.1]).

Veamos ahora algunos ejemplos explícitos de grupos de clases de isotopía. Si consideramos D como el disco unitario cerrado es posible ver que $\text{Mod}(D)$ es trivial. Este resultado es conocido como el Lema de Alexander ([FM, Lema 2.1]).

Ahora, sea $S = S_{0,2}$ un anillo. En la siguiente figura podemos ver que $\text{Mod}(S) = \langle \iota, \tau \rangle$, donde ι es la identidad y τ es la rotación a través del eje horizontal.

FIGURA 6.2: Rotación en el anillo S .

Así, podemos concluir que $\text{Mod}(S) = \mathbb{Z}_2$ (para más detalles de este ejemplo y para más ejemplos ver [Mi]).

Antes de definir lo que es un giro de Dehn necesitamos saber que es un giro. Consideremos entonces el anillo $A = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ y para orientar al anillo A incrustémoslo en el plano (θ, r) vía la función $(\theta, t) \mapsto (\theta, t + 1)$ tomando la orientación inducida por la orientación estándar del plano. Definimos $T: A \rightarrow A$, un giro de A , como $T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$ (podemos verlo gráficamente en la Figura 6.3).

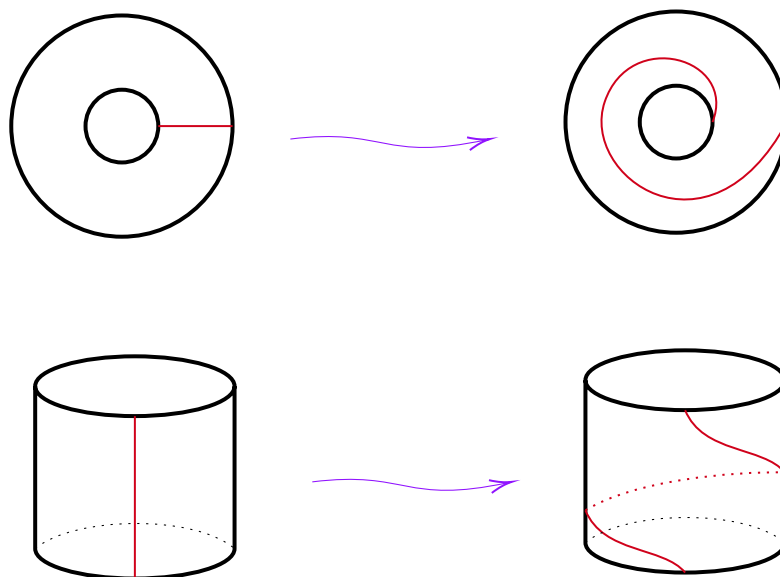


FIGURA 6.3: Dos descripciones gráficas de un giro.

Notemos que la función T es un homeomorfismo que preserva orientación y además fija al conjunto ∂A puntualmente. Por otra parte, la elección de $\theta + 2\pi t$ implica que tenemos un giro izquierdo (si hubiésemos escogido $\theta - 2\pi t$ el giro hubiese sido derecho).

Pasemos entonces la definición más importante de la sección

Definición 6.1 (Giro de Dehn). Sea S una superficie arbitraria, orientable y α una curva simple, cerrada y orientable en S . Sea N una vecindad regular de α y consideremos $\phi: A \rightarrow N$ un homeomorfismo que preserve orientación. Entonces, podemos definir la función $T_\alpha: S \rightarrow S$ como sigue

$$T_\alpha(x) = \begin{cases} \phi \circ T \circ \phi^{-1}(x), & x \in N \\ x, & x \in S \setminus N \end{cases}$$

(aquí, T es el giro de A definido anteriormente). A la función T_α la llamaremos el giro de Dehn alrededor de α .

Podemos entender la definición anterior como aplicar el giro T en el anillo N y fijar todo punto fuera de N .

Si a denota la clase de isotopía de α , T_a está bien definido como elemento de $\text{Mod}(S)$. Una figura ilustrativa del comportamiento del giro de Dehn T_a es la siguiente:

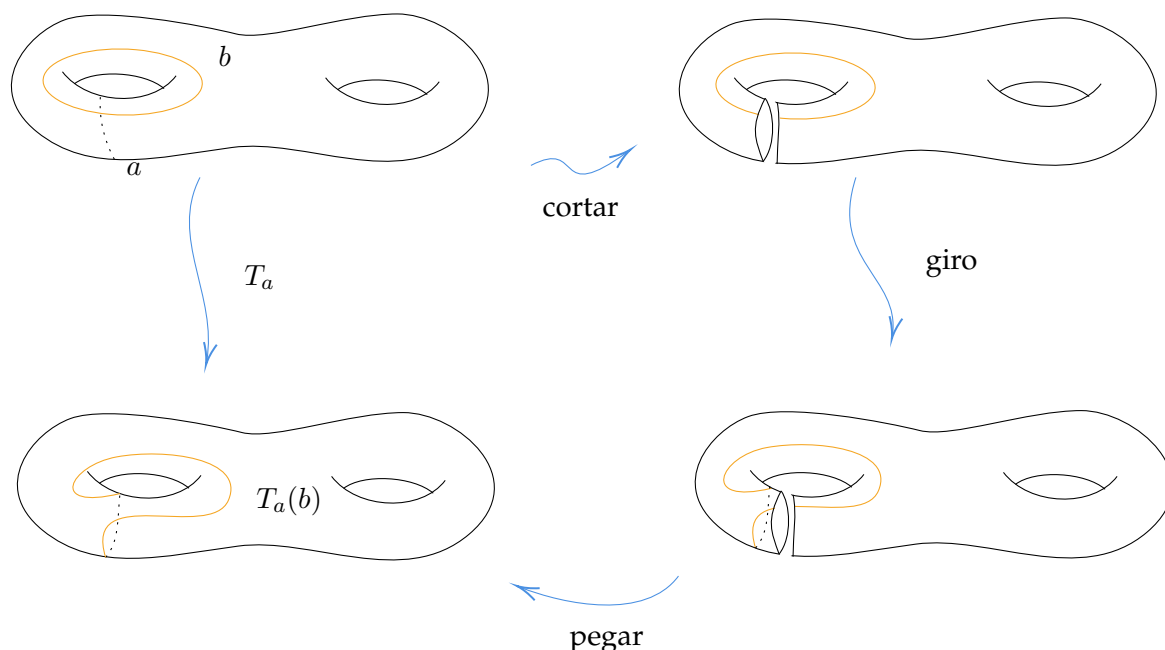


FIGURA 6.4: Giro de Dehn.

Sea a la clase de isotopía de una curva cerrada simple α en una superficie S . Si α no es homotópica a un punto, o a una perforación de S , entonces el giro de Dehn T_a es un elemento no trivial de $\text{Mod}(S)$ ([FM, Proposición 3.1]).

A continuación presentaremos algunas propiedades básicas sobre los giros de Dehn. La importancia de estas propiedades es que usaremos algunas cuando trabajemos la

solución del problema del conejo retorcido y el resto sirven para comprender más a cabalidad el giro de Dehn.

1. Sean a, b clases de isotopías de curvas cerradas simples en S , entonces (abusando de notación) $T_a = T_b$ si y sólo si $a = b$.
2. Para todo $f \in \text{Mod}(S)$ y toda clase de isotopía a de curvas cerradas simples en S se tiene que $T_{f(a)} = fT_af^{-1}$.
3. Para todo $f \in \text{Mod}(S)$ y toda clase de isotopía a de curvas cerradas simples en S , tenemos que f conmuta con T_a si y sólo si $f(a) = a$ pues

$$fT_a = T_af \iff fT_af^{-1} = T_a.$$

4. La cantidad de intersecciones entre dos clases de isotopía a, b de curvas cerradas simples es nula si y sólo si $T_a(b) = b$, si y sólo si $T_aT_b = T_bT_a$.
5. **La relación de la linterna:** La existencia de la relación de la linterna tiene un número importante de implicaciones para la estructura de un grupo de clases de isotopía. Un ejemplo es que esta relación permite mostrar que $\text{Mod}(S)$ tiene abelinización trivial para la mayoría de las superficies S . La relación fue descubierta por Dennis Johnson en 1979 ([J]).

La forma general de la relación de la linterna involucra siete giros de Dehn en el grupo de clases de isotopía de un disco con tres agujeros.

Sean x, y, z, a, b, c , y d curvas cerradas simples en una superficie S como en la siguiente figura:

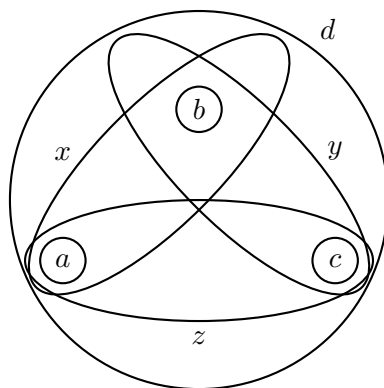


FIGURA 6.5: La relación de la linterna.

Entonces $T_xT_yT_z = T_aT_bT_cT_d$.

6.2. El problema del conejo retorcido

Volvamos a recordar que el polinomio del conejo está dado por

$$R(z) \approx z^2 - 0,1225611 + 0,7448617i.$$

Sea P_R el conjunto post-crítico de R y sea x la curva de la Figura 6.1. Denotemos T_x el giro de Dehn alrededor de x . El problema del conejo retorcido de Hubbard es el siguiente: Dado $m \in \mathbb{Z}$, ¿a cuál polinomio $T_x^m R$ es Thurston equivalente? De (la referencia de Bartholdi, Nekrashevych) sabemos que

$$T_x^m R \simeq \begin{cases} A & \text{si la expansión 4-ádica de } m \text{ contiene un 1 o un 2,} \\ R & \text{si } m \geq 0 \text{ y la expansión 4-ádica de } m \text{ contiene solo 0 y 3,} \\ C & \text{si } m < 0 \text{ y la expansión 4-ádica de } m \text{ contiene solo 0 y 3.} \end{cases}$$

Para estudiar la solución del problema dada en [BLMW] necesitamos algunos preliminares.

Sea f un polinomio topológico con su conjunto post-crítico dado por P . El grupo de clases de isotopía puro de (\mathbb{C}, P) , denotado por $\text{PMod}(\mathbb{C}, P)$, es el subgrupo de $\text{Mod}(\mathbb{C}, P)$ que consiste en los elementos de $\text{Mod}(\mathbb{C}, P)$ que fijan a cada punto de P . Existe una relación de equivalencia en $\text{PMod}(\mathbb{C}, P)$ definida como sigue: $g \sim h$ si $gf \simeq hf$.

Sea $h: (\mathbb{C}, P) \rightarrow (\mathbb{C}, P)$ un homeomorfismo que fija a P puntualmente. Decimos que h es levantable a través de f si existe un homeomorfismo $\tilde{h}: (\mathbb{C}, P) \rightarrow (\mathbb{C}, P)$ tal que fija a P puntualmente y satisface $f\tilde{h} = hf$. El grupo de clases de isotopía levantable, $\text{LMod}(\mathbb{C}, P)$, es el subgrupo de $\text{PMod}(\mathbb{C}, P)$ que consiste en los elementos de $\text{PMod}(\mathbb{C}, P)$ con representantes que son levantables a través de f .

Es importante destacar que $\text{LMod}(\mathbb{C}, P)$ depende solo de f y antes de usarlo dejaremos claro para que polinomio topológico se está usando. El levantamiento induce un homomorfismo $\psi: \text{LMod}(\mathbb{C}, P) \rightarrow \text{PMod}(\mathbb{C}, P)$.

Al momento de trabajar en la solución del problema será importante considerar las propiedades que mencionamos al final de la Sección 6.1 sobre grupos de clases de isotopía, además de un par de resultados fundamentales. Uno es el siguiente:

Lema 6.2. Sea f un polinomio topológico PCF. Sea $g \in \text{PMod}(\mathbb{C}, P)$ y sea $h \in \text{PMod}(\mathbb{C}, P)$ un elemento tal que $h^{-1}g \in \text{LMod}(\mathbb{C}, P)$. Entonces $g \sim \psi(h^{-1}g)h$.

Demostración. Como $h^{-1}g \in \text{LMod}(\mathbb{C}, P)$, y por definición de levantamiento, se tiene que $h^{-1}gf = f\psi(h^{-1}g)$. Componiendo por h la igualdad anterior tenemos que

$$h^{-1}gf h = f\psi(h^{-1}g)h.$$

Sabemos que la conjugación por elementos de $\text{PMod}(\mathbb{C}, P)$ preserva la clase de equivalencia de Thurston, entonces al conjugar el lado derecho de la igualdad anterior por $\psi(h^{-1}g)h$ y el izquierdo por h , tenemos que $gf \simeq \psi(h^{-1}g)hf$, lo que implica que

$$g \sim \psi(h^{-1}g)h.$$

■

Notemos que si $g \in \text{LMod}(\mathbb{C}, P)$ podemos tomar h como la identidad y obtenemos, gracias al lema anterior, que $g \sim \psi(g)$. Es decir, que g es equivalente a su levantamiento.

Usaremos ahora el método de Alexander (Proposición 5.2) para dar una descripción combinatorial de un polinomio topológico que es homotópico al polinomio del conejo. Es importante usar este polinomio topológico porque facilita los cálculos en los levantamientos de las curvas en la solución del problema.

Sea R el polinomio del conejo y P su conjunto post-crítico. Consideremos $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ el triángulo que forman sus vértices con P como en la Figura 6.6. Consideremos $\text{Sq}: (\mathbb{C}, P) \rightarrow (\mathbb{C}, P)$ un cubrimiento doble ramificado que preserva orientación, es decir ramificado en 0 y que fija a Δ puntualmente. Cualquier función Sq como la descrita anteriormente fija la clase de isotopía de todo árbol contenido en Δ . Entonces, por el método de Alexander, todas estas funciones son homotópicas relativas a P , esto implica que no hay ambigüedad en el uso de ellas. Consideremos ahora Rot un homeomorfismo de (\mathbb{C}, P) que rota los puntos de P en sentido anti-horario y preserva a Δ como conjunto. Usando un argumento similar al anterior podemos concluir que todas las funciones Rot son homotópicas relativas a P .

Podemos ver que Rot Sq es homotópico R relativo a P si aplicamos el método de Alexander a las funciones Rot Sq y R usando el trípode de la Figura 6.6 como árbol.

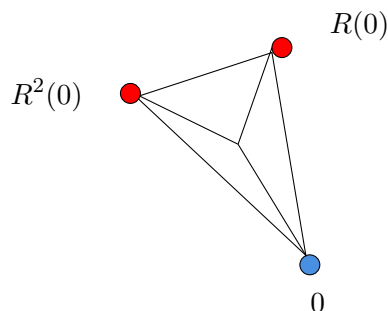


FIGURA 6.6: El triángulo Δ y un árbol contenido.

Volvamos a las propiedades básicas de grupos de clases de isotopía. Necesitamos una condición necesaria y suficiente para que una potencia de un giro de Dehn esté en $\text{LMod}(\mathbb{C}, P)$ para un polinomio topológico de grado 2. Describamos los levantamientos de los giros de Dehn de la siguiente forma:

1. T_c se levanta si y sólo si $f^{-1}(c)$ tiene dos componentes c_1, c_2 ; en este caso $\psi(T_c) = T_{c_1}T_{c_2}$.
2. T_c^2 se levanta si $f^{-1}(c)$ tiene una componente \tilde{c} ; en este caso $\psi(T_c^2) = T_{\tilde{c}}$.

Usaremos también una versión particular de la relación de la linterna (5), cuando las curvas a, b, c y d son periféricas. Esta versión está dada por la siguiente igualdad:

$$T_x T_y T_z = \text{id}. \quad (6.1)$$

Desde ahora y hasta terminar esta sección nos enfocaremos netamente en la solución del problema del conejo retorcido. Consideremos f un polinomio topológico y $\text{LMod}(\mathbb{C}, P)$ el grupo de clases de isotopía levantables a través de f . Sea ψ el homomorfismo dado por levantamiento asociado a $\text{LMod}(\mathbb{C}, P)$. Denotaremos $g_1 \overset{h}{\rightsquigarrow} g_2$ para referirnos a que $g_2 = \psi(h^{-1}g_1)h$, donde h es el mismo del Lema 6.2 (notemos que gracias a este lema se tiene que si $g_1 \overset{h}{\rightsquigarrow} g_2$, entonces $g_1 \sim g_2$).

Si h es la identidad, como $\psi \in \text{LMod}(\mathbb{C}, P)$, se tiene que si $g_1 \rightsquigarrow g_2$ entonces $g_1^k \rightsquigarrow g_2^k$ para todo $k \geq 1$. La notación $g_1 \rightsquigarrow g_2$ indica que $g_2 = \psi(g_1)$.

Pasemos ahora a mostrar las siguientes fórmulas de reducción:

$$T_x^m R \simeq \begin{cases} T_x^k R & m = 4k, \\ T_x R & m = 4k + 1, \\ T_x R & m = 4k + 2, \\ T_x^k R & m = 4k + 3. \end{cases}$$

Notemos que en la Figura 6.7 la curva z tiene dos curvas en su preimagen bajo el polinomio R , y la única esencial es homotópica a la curva x .

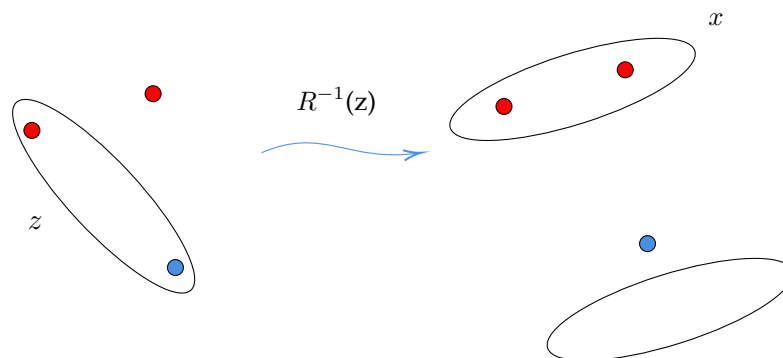


FIGURA 6.7: T_z se levanta a T_x

Lo anterior implica que $T_z \in \text{LMod}(\mathbb{C}, P)$ y que $\psi(T_z) = T_x$, por lo tanto $T_z \rightsquigarrow T_x$.

Ahora, podemos ver en la Figura 6.8 que la preimagen bajo R de la curva x tiene solo una componente, la cual es isotópica a la curva y .

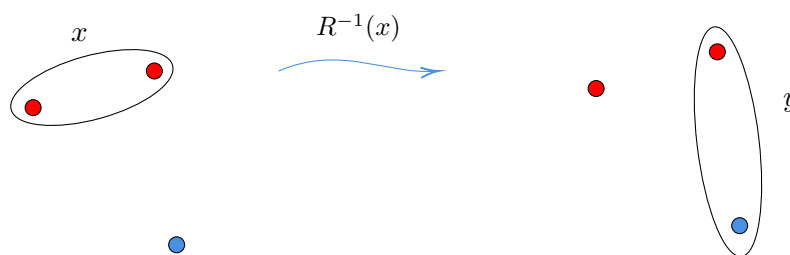


FIGURA 6.8: T_x^2 se levanta a T_y

Por lo tanto, por las propiedades básicas de grupos de clases de isotopía, tenemos que $T_x \notin \text{LMod}(\mathbb{C}, P)$, pero $\psi(T_x^2) = T_y$, lo que implica que $T_x^2 \rightsquigarrow T_y$. De forma análoga se tiene que $T_y^2 \rightsquigarrow T_z$.

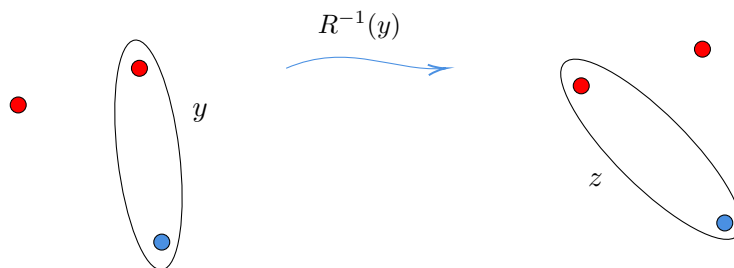


FIGURA 6.9: T_y^2 se levanta a T_z

En la solución del problema retorcido (y para la versión más general) usaremos un resultado que nos dice cuando una potencia de un giro de Dehn se levanta a través de un polinomio a la clase de isotopía trivial. Ese resultado es el siguiente lema y su demostración puede ser encontrada en [BLMW, Lema 5.2].

Lema 6.3. Sea f un polinomio topológico de grado 2 y b un corte especial ramificado, es decir, un arco en (\mathbb{C}, P_f) que conecta al valor crítico de f con ∞ y tal que los puntos de P_f están a un lado de su preimagen bajo f . Supongamos que c es una curva en (\mathbb{C}, P_f) que rodea exactamente a dos puntos de P_f , donde ninguno es el valor crítico de f . Sea a un arco de definición para c , es decir, un arco que conecta a los dos puntos rodeados por c . Si a corta a b en un número impar de puntos, entonces el levantamiento de T_c es trivial.

En la Figura 6.10 podemos ver de forma gráfica la situación del lema anterior.

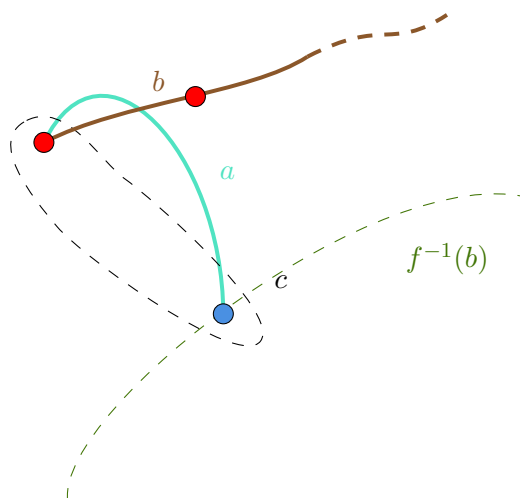


FIGURA 6.10: Curvas del Lema 6.3

Gracias al resultado anterior tenemos que $T_{T_x^{-1}(z)} \rightsquigarrow \text{id}$. Podemos ver esto usando al rayo que parte desde el valor crítico hasta infinito y que evita el interior del triángulo

determinado por los puntos de P , como en la Figura 6.11. Este rayo es nuestro corte especial ramificado.

Volvamos a la demostración de las fórmulas de reducción.

Sea $m = 4k$. Entonces $T_x^{4k} \rightsquigarrow T_y^{2k} \rightsquigarrow T_z^k \rightsquigarrow T_x^k$, lo que implica que $T_x^{4k} \sim T_x^k$ y por lo tanto $T_x^{4k} R \simeq T_x^k R$.

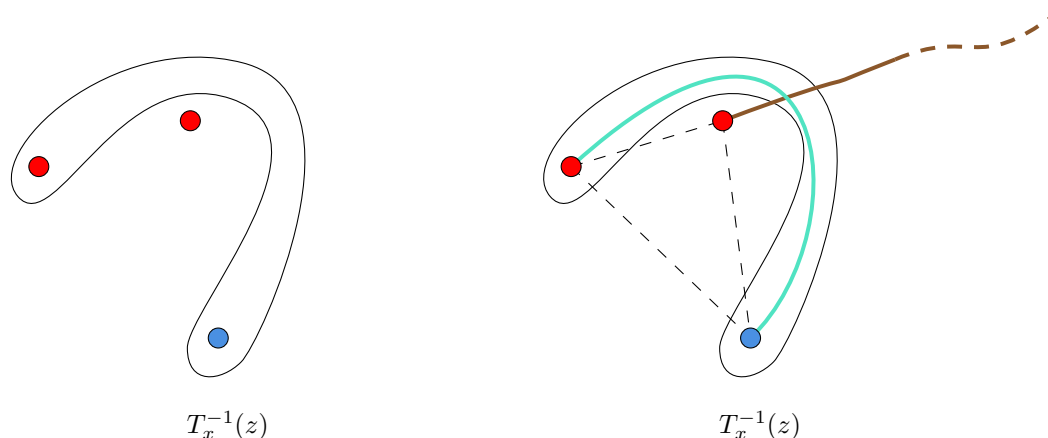


FIGURA 6.11: La curva $T_x^{-1}(z)$ y una aplicación del Lema 6.3

Antes de ver el segundo caso veamos en la Figura 6.12 que la curva $R^{-1}(T_x^{-1}(y))$ tiene una componente, a saber z . Esto implica que $T_{T_x^{-1}(y)}^2 \rightsquigarrow T_z$

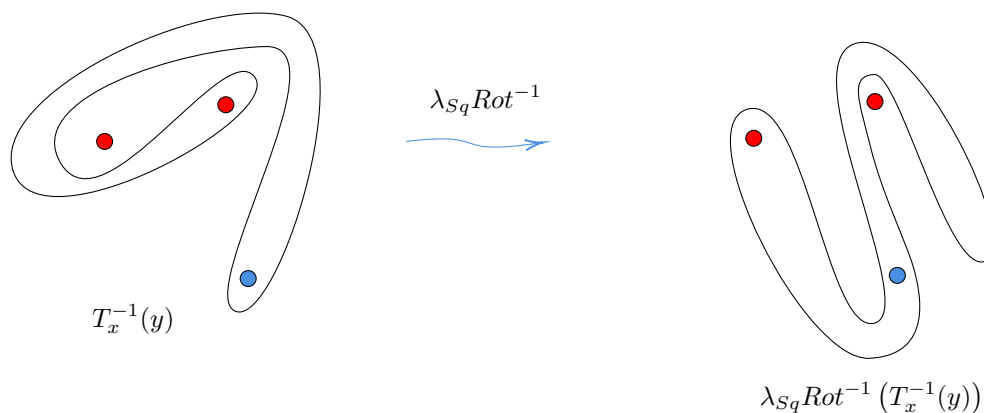


FIGURA 6.12: Levantando T_x^{-1} .

Ahora, si $m = 4k + 1$ tenemos que $T_x^{4k+1} \xrightarrow{T_x} T_y^{2k} T_x \xrightarrow{T_x} T_z^k T_x \xrightarrow{T_x} T_x$. Lo que implica que $T_x^{4k+1} R \simeq T_x R$.

Vamos al caso cuando $m = 4k + 2$. Es fácil ver que

$$T_x^{4k+2} \rightsquigarrow T_y^{2k+1} \xrightarrow{T_y^{-1}} T_z^{k+1} T_y^{-1} \underbrace{=}_{6,1} T_z^{k+2} T_x \xrightarrow{T_x} T_x.$$

Por lo tanto podemos concluir que $T_x^{4k+2} R \simeq T_x R$.

Finalmente, si $m = 4k + 3$ tenemos

$$T_x^{4k+3} \xrightarrow{T_x} T_y^{2k+1} T_x \underbrace{=}_{6,1} T_y^{2k} T_x^{-1} T_z^{-1} T_x = T_y^{2k} T_{T_x^{-1}(z)}^{-1} \rightsquigarrow T_z^k \rightsquigarrow T_x^k.$$

Luego, podemos concluir que $T_x^{4k+3} R \simeq T_x^k R$.

Para finalizar la solución del problema debemos mostrar que

$$T_x R \simeq A \quad \text{y} \quad T_x^{-1} R \simeq C,$$

donde A y C son los polinomios del Avión y del Conejo Conjugado respectivamente.

Reemplacemos $T_x R$ por $T_x \text{ Rot Sq}$. Podemos notar en la Figura 6.13 que el árbol izquierdo es invariante bajo la función $\lambda_{\text{Sq}} \text{ Rot}^{-1} T_x^{-1}$ (recordemos que usar $\lambda_{\text{Sq}} \text{ Rot}^{-1} T_x^{-1}$ es equivalente a levantar $T_x R$).

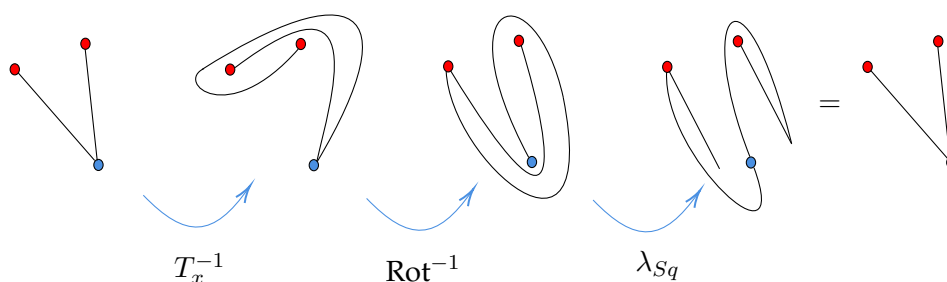


FIGURA 6.13: Árbol invariante bajo $T_x R$

Ahora, vimos anteriormente (Figura 5.4) que en los núcleos de R y C que no hay un árbol invariante de dos aristas bajo λ_R o λ_C . Esto porque el vértice central es el invariante, y los otros vértices son permutados de forma cíclica en la dirección de las flechas bajo levantamiento. Dado esto, tenemos que necesariamente $T_x R \simeq A$.

Por otra parte, si $m = -1$ veamos en la Figura 6.14 que el árbol izquierdo es invariante bajo la función $\lambda_{\text{Sq}} \text{ Rot}^{-1} T_x$. Además, como el núcleo de A no contiene trípodes y el

árbol invariante de R es rotado en sentido antihorario por R podemos concluir que $T_x^{-1}R \simeq C$ (notemos que la acción de $T_x^{-1} \text{Rot Sq}$ en el árbol de la Figura 6.14 es una rotación en sentido horario).

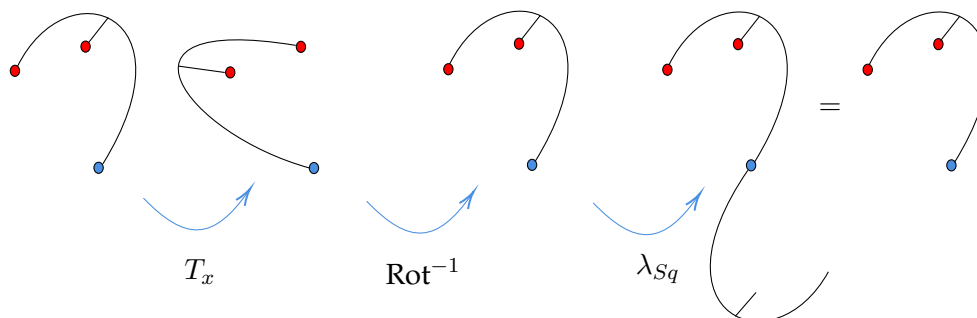


FIGURA 6.14: Árbol invariante bajo $T_x^{-1}R$

6.3. El problema del conejo retorcido generalizado

Esta sección tiene como objetivo plantear y resolver una generalización del problema del conejo retorcido de Hubbard. Para esto, consideraremos f un polinomio topológico PCF con $|P_f| > 3$. Sea $\mathcal{P}_n := \{p_c(z) = z^2 + c : z = 0 \text{ es } n\text{-periódico}\}$. Un ejemplo de este conjunto es uno que trabajamos en la sección anterior. Específicamente, si $n = 3$ se tiene que $\mathcal{P}_3 = \{R, C, A\}$. Los elementos del conjunto \mathcal{P}_n corresponden a soluciones de la ecuación $p_c^n(0) = 0$ que no satisfacen la misma igualdad con valores de n más pequeños.

Al igual que en el caso $n = 3$, por el Teorema 3.2.1, si componemos algún elemento f de \mathcal{P}_3 con cualquier elemento de $\text{PMod}(\mathbb{C}, P_f)$, el resultado será Thurston equivalente a un polinomio. En particular, a algún elemento de \mathcal{P}_n .

Para cada $n \geq 3$ consideraremos un polinomio R_n , llamado $1/n$ -conejo, el cual es de la forma $R_n(z) = z^2 + c$ y debe cumplir las siguientes propiedades:

1. El punto crítico 0 es n -periódico.
2. El conjunto P_{R_n} está contenido en el borde del polígono convexo Δ formado por los puntos del conjunto postcrítico de R_n .
3. El árbol de Hubbard H_{R_n} es un árbol con hojas en todos los puntos del conjunto postcrítico. Además, H_{R_n} tiene un vértice no marcado de valencia n . Este árbol está contenido en Δ .

4. La acción de R_n en el árbol de Hubbard H_{R_n} es una rotación antihoraria dada por $1/n$.

En la Figura 6.15 podemos ver en la primera fila los conjuntos de Julia llenos (en negro) de R_n junto con sus árboles de Hubbard para $n = 3$ y $n = 4$. En la segunda fila tenemos los casos para $n = 5$ y $n = 6$. Podemos notar que el $1/3$ -conejo es el polinomio R que trabajamos en la sección anterior. Además, cuando aumentamos n , las orejas de los conjuntos de Julia también aumentan.

Para cada $1/n$ -conejo R_n , definimos x_n como la curva en \mathbb{C} obtenida del borde de una vecindad regular del segmento de recta que une a los puntos $R_n(0)$ y $R_n^2(0)$. Dado $m \in \mathbb{Z}$ ¿a cuál polinomio es $T_{x_n}^m R_n$ Thurston equivalente?

Si $n = 3$ nos enfrentamos al problema original del conejo retorcido. Por lo tanto, consideraremos $n \geq 4$ de ahora en adelante.

Antes de enunciar y mostrar las fórmulas de reducción debemos describir los polinomios A_n, B_n y κ_n , los cuales están en \mathcal{P}_n . El polinomio A_n es el polinomio $z^2 + c$ con menor coeficiente real c en \mathcal{P}_n . Por ejemplo, si consideramos $n = 4$, tenemos la ecuación

$$((c^2 + c)^2 + c)^2 + c = c^8 + 4c^7 + 6c^6 + 6c^5 + 5c^4 + 2c^3 + c^2 + c = 0$$

la cual tiene cuatro soluciones reales y cuatro soluciones complejas. Por la definición nos interesa el punto más alejado de la cardioide principal del conjunto de Mandelbrot, es decir $c \approx -1,9407998$. Así, tenemos que $A_4(z) \approx z^2 - 1,9407998$.

El polinomio B_n es el polinomio $z^2 + c$ con el segundo menor coeficiente real c en \mathcal{P}_n . Si $n = 4$ tenemos que $B_4(z) \approx z^2 - 1,3107026$.

El polinomio $\kappa_4(z) \approx z^2 - 0,1565201 + 1,0322471i$ se llama polinomio Kokopelli. El polinomio κ_n está asociado a R_n y está dado por la sucesión $(1 \ 1 \ \dots \ 1 \ -1 \ *)$ donde el símbolo 1 aparece $n - 2$ veces. Esta sucesión se llama *sucesión de kneading* y la definimos como sigue: dado un ángulo θ dado por un rayo externo, asociamos a todo $\eta \in \mathbb{S}^1$ su itinerario $\nu_\theta(\eta) = \nu_1 \nu_2 \dots$ con $\nu_i \in \{-1, 1, *\}$ definiendo

$$\nu_i := \begin{cases} -1, & \text{si } (\theta + 1)/2 < 2^{i-1}\eta < \theta/2; \\ 1, & \text{si } \theta/2 < 2^{i-1}\eta < (\theta + 1)/2; \\ *, & \text{si } 2^{i-1}\eta \in \{\theta/2, (\theta + 1)/2\}, \end{cases}$$

donde las desigualdades se interpretan en orden cíclico.

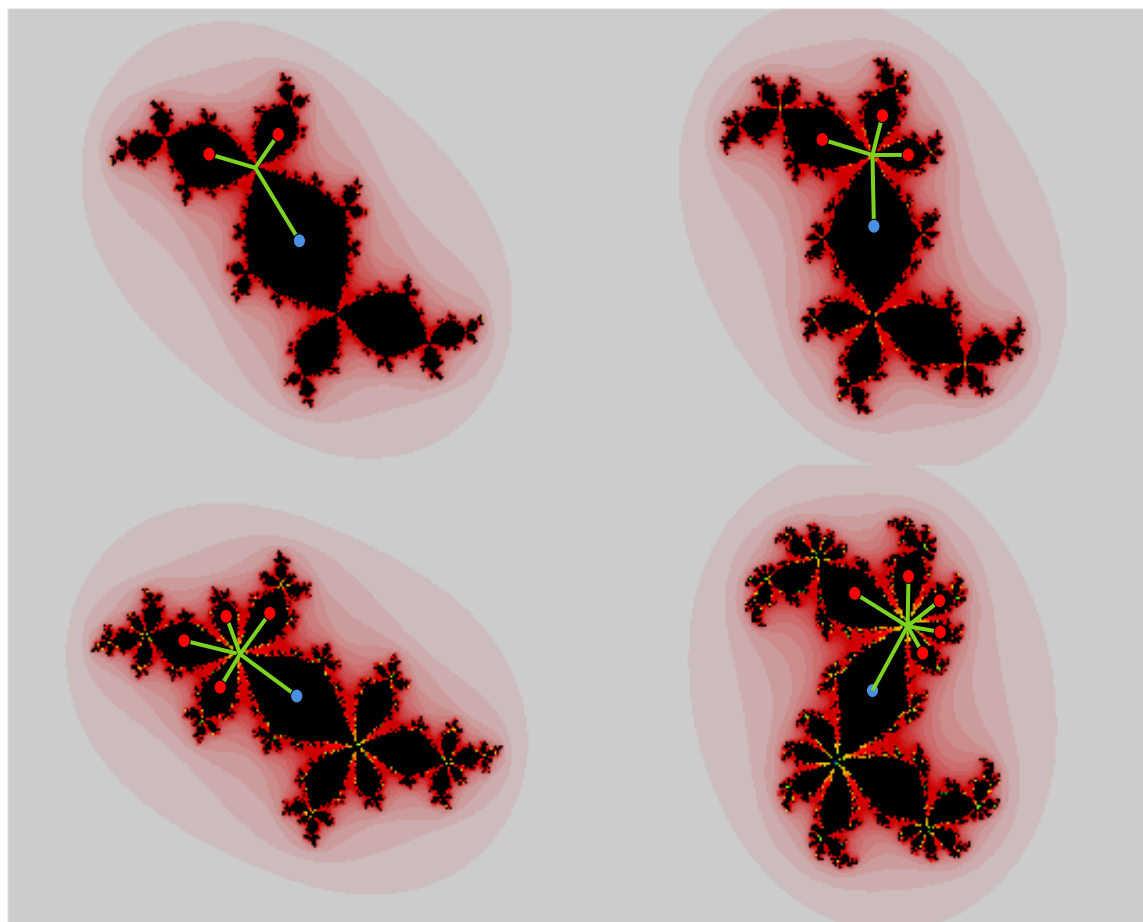


FIGURA 6.15: Los conjuntos $K(R_n)$ y $J(K_n)$ donde $n = 3, 4, 5$ y 6 .

Podemos ver los conjuntos lleno de Julia de A_4 , B_4 y κ_4 en la Figura 6.16.

Ahora que tenemos definidos los polinomios A_n , B_n y κ_n , necesitamos describir los árboles de Hubbard y las acciones correspondientes en los árboles de Hubbard de cada uno de estos polinomios. Esto está descrito en la Figura 6.17.

Recordemos que la curva x_n es la curva dada por el borde de la vecindad regular de la recta que une a los puntos $R_n(0)$ y $R_n^2(0)$. En la Figura 6.17 usamos $x = x_n$, además consideraremos a las curvas y y z las cuales son consecutivas de x en sentido horario (ver Figura 6.18).

Pasaremos entonces a enunciar y demostrar las fórmulas de reducción para, finalmente, mostrar los casos base para $n \geq 4$.

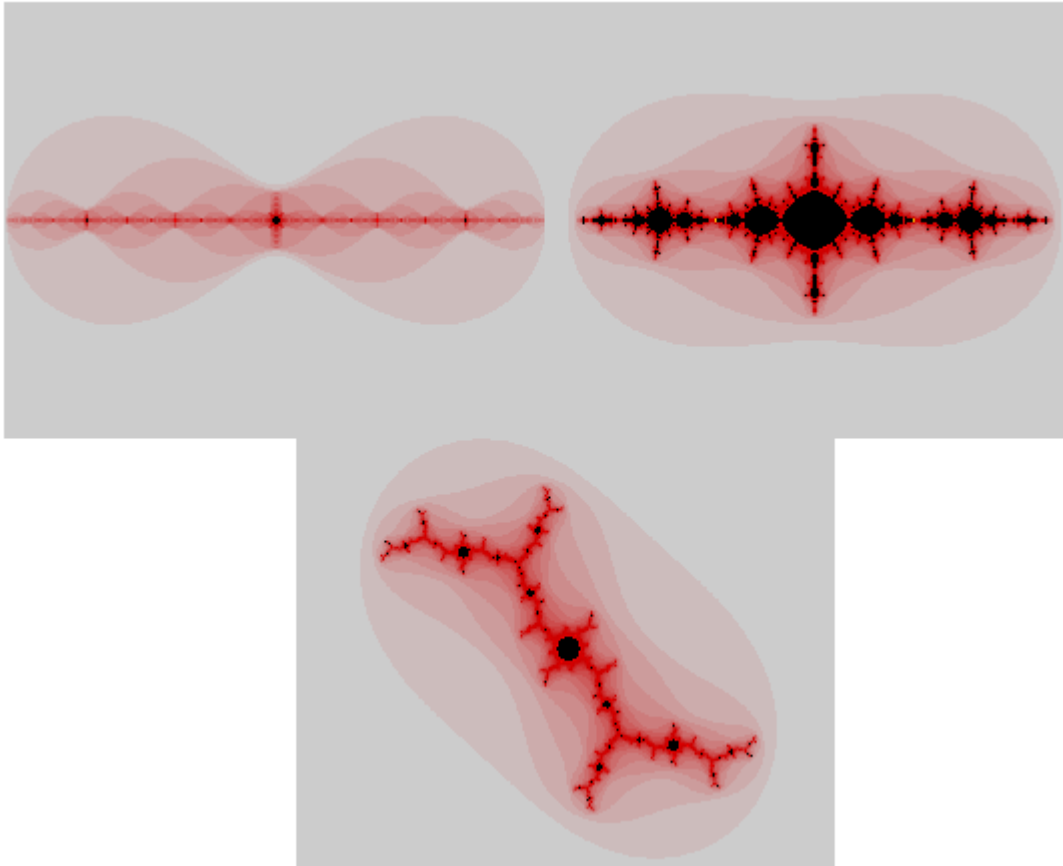


FIGURA 6.16: $K(A_4)$, $K(B_4)$ y $K(\kappa_4)$.

Lema 6.4. Sean $n \geq 4$, $x = x_n$ y $m \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$T_x^m R_n \simeq \begin{cases} T_x^k R_n & m = 4k, \\ T_x R_n & m = 4k + 1, \\ T_y R_n & m = 4k + 2, \\ T_x^{-1} R_n & m = 4k + 3. \end{cases}$$

Demostración. Sea $P_n = P_{R_n}$ el conjunto postcrítico del polinomio R_n y consideremos $\{c_0, \dots, c_{n-1}\}$ las curvas en (\mathbb{C}, P_n) obtenidas del borde de una vecindad regular de las rectas que unen pares consecutivos (en sentido horario) de puntos. Aquí $c_0 = x$, $c_1 = y$ y $c_2 = z$. Para la reducción de las fórmulas usaremos dos propiedades importantes dadas por

1. $T_x^2 \rightsquigarrow T_y$
2. $T_y^2 \rightsquigarrow T_z \rightsquigarrow T_{c_3} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow T_{c_{n-1}} \rightsquigarrow T_x$.

El primer caso es directo, ya que si $m = 4k$ se tiene que $T_x^{4k} \rightsquigarrow T_y^{2k} \rightsquigarrow T_z^k \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow T_x^k$, lo que implica que $T^{4k} R_n \simeq T_x^k R_n$.

Para mostrar el segundo caso necesitamos notar tres cosas. La primera es que en la Figura 6.19 podemos ver que $T_{T_x^{-1}(y)}^2 \rightsquigarrow T_z$. La segunda es que por el lema que nos asegura que el giro de Dehn se levanta a la identidad dadas ciertas condiciones (Lema 6.3) tenemos que $T_{T_x^{-1}(c_{n-1})} \rightsquigarrow \text{id}$. Esto es cierto ya que podemos usar el corte ramificado especial como el rayo que va desde el valor crítico a infinito y que evita a la clausura convexa de P_n . La tercera es que los giros de Dehn $T_z, T_{c_3}, \dots, T_{c_{n-2}}$ conmutan con T_x ya que la curva x no se intersecta con estas curvas. Ahora supongamos que $m = 4k + 1$. Entonces tenemos que

$$T_x^{4k+1} \rightsquigarrow T_y^{2k} T_x \rightsquigarrow T_z^k T_x \rightsquigarrow T_{c_3}^k T_k \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow T_{c_{n-1}}^k T_x \rightsquigarrow T_x,$$

lo que nos permite concluir que $T_x^{4k+1} R_n \simeq T_x R_n$.

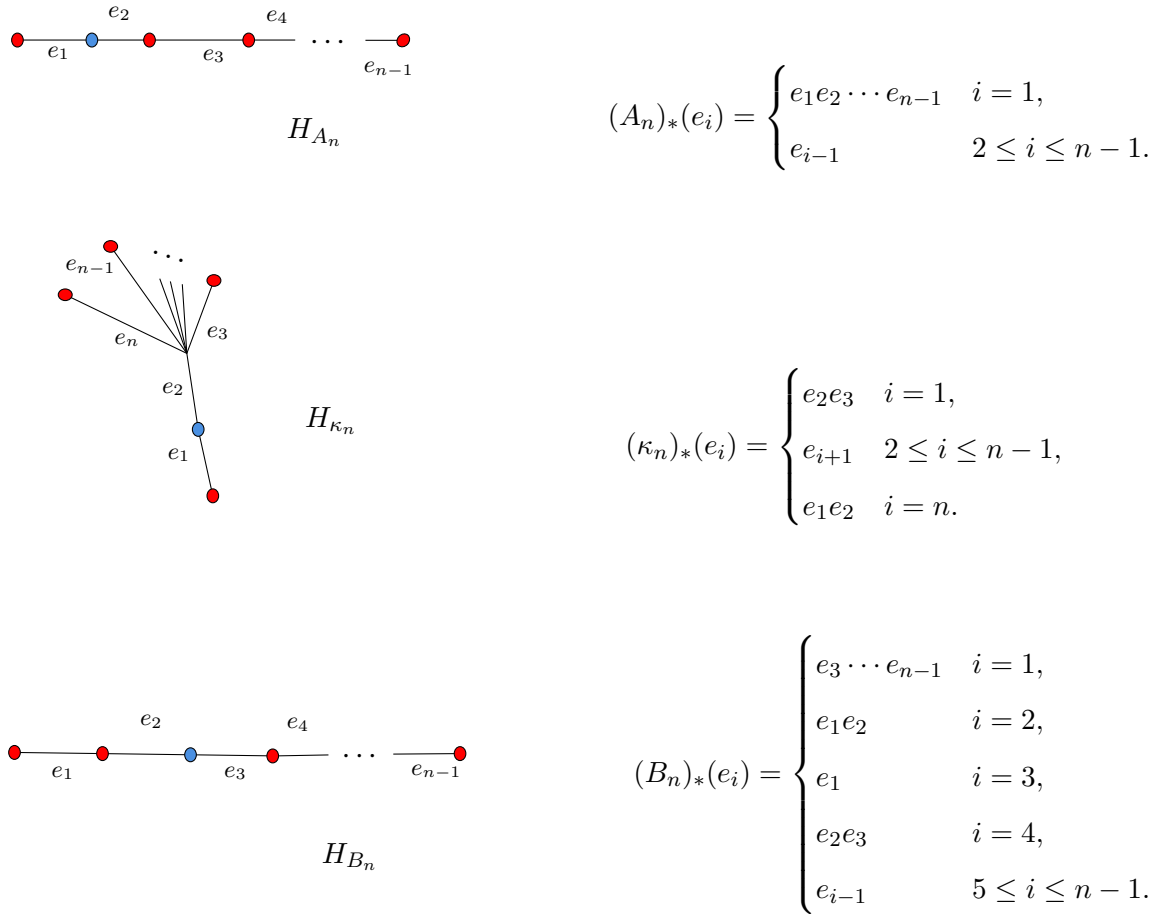


FIGURA 6.17: Árboles de Hubbard y acciones.

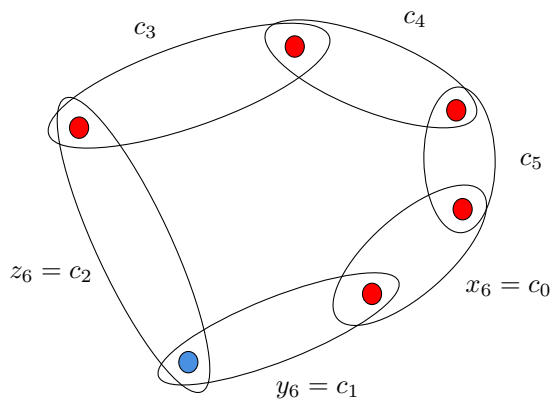


FIGURA 6.18: Las curvas de en (\mathbb{C}, P_{R_6}) .

En el tercer caso nuevamente usaremos el Lema 6.3 para afirmar que $T_{T_y^{-1}(z)} \rightsquigarrow \text{id}$. Entonces, suponiendo que $m = 4k + 2$ tenemos que $T_x^{4k+2} \rightsquigarrow T_y^{2k+1} \rightsquigarrow T_z^k T_y \rightsquigarrow T_y$. Por lo tanto $T_x^{4k+2} R_n \simeq T_y R_n$.

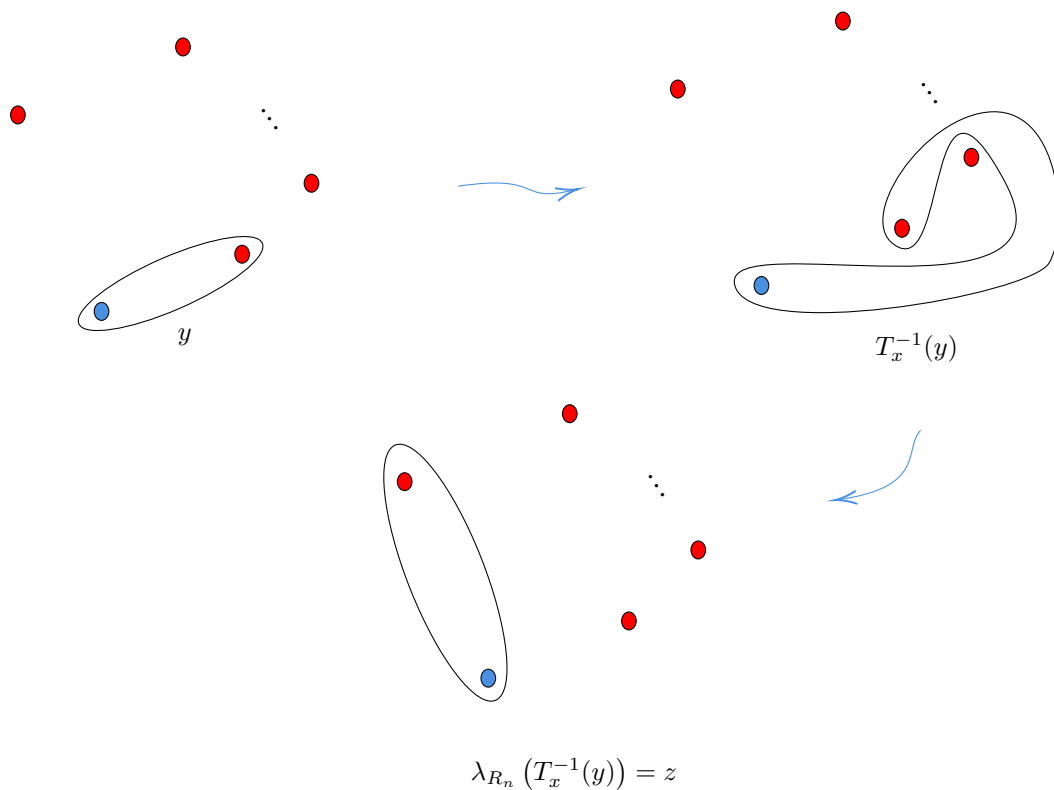


FIGURA 6.19: Levantamiento de $T_x^{-1}(y)$

Finalmente, para el último caso usaremos que $T_{T_x(y)} \rightsquigarrow T_{T_y(z)}$ y que

$$T_x T_y T_z T_y^{-1} T_x^{-1} = T_{T_x T_y(z)} \rightsquigarrow \text{id}.$$

Este último hecho está dado, nuevamente, por el Lema 6.3. Supongamos que $m = 4k + 3$, entonces $T_x^{4k+3} \xrightarrow{T_x^{-1}} T_y^{2k+2} T_x^{-1} \xrightarrow{T_x^{-1}} T_{T_y(z)}^{2k+2} T_x^{-1} = T_y^{-1} T_z^{2k+2} T_y T_x^{-1} \xrightarrow{T_x^{-1}} T_x^{-1}$. De esta forma, tenemos que $T_x^{4k+3} R_n \simeq T_x^{-1} R_n$. ■

Resta entonces mostrar los casos base, pero por las fórmulas de reducción recién mostradas, cuando $m \neq 0$ la función $T_x^m R_n$ es Thurston equivalente a $T_x R_n$ o $T_y R_n$ o $T_x^{-1} R_n$. Ahora, con el método de Alexander (Proposición 5.2) podemos mostrar que

$$\begin{aligned} T_x R_n &\simeq A_n, \\ T_y R_n &\simeq K_n, \\ T_x^{-1} R_n &\simeq B_n \end{aligned}$$

usando las acciones y los árboles de Hubbard descritos en la Figura 6.17.

6.4. Algoritmo de levantamiento de árboles en $z^2 + i$

El objetivo de esta sección es aplicar el algoritmo de levantamiento de árboles al polinomio $f(z) = z^2 + i$ y mostrar que se tiene una fórmula de reducción similar a la de las secciones anteriores. Además daremos una descripción topológica de un polinomio topológico obstruido. Esta descripción tiene directa relación con los ciclos de Levy definidos en el Capítulo 3 y con un tipo especial de funciones inducidas por f que describiremos más adelante. Finalmente, daremos una idea de la demostración de la segunda parte del Teorema 1.0.1.

Para el polinomio f consideraremos $P_f = \{i, -1 + i, -i\}$ y las curvas mostradas en la Figura 6.20.

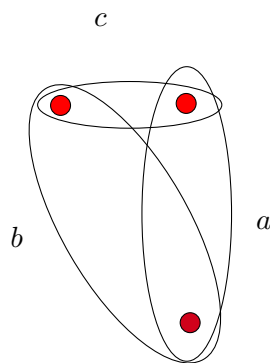


FIGURA 6.20: Las curvas en (\mathbb{C}, P_f)

La pregunta central es la siguiente: Dado $m \in \mathbb{Z}$, ¿a cuál polinomio topológico es $T_b^m f$ Thurston equivalente?

Usando métodos distintos, Bartholdi y Nekrashevych, y Belk, Lanier, Margalit y Winternarski obtuvieron los mismos resultados, a saber,

$$T_b^m f \simeq \begin{cases} f & m = 4k. \\ T_b^{-1} T_a^{-1} f & m = 4k + 1, \\ T_a^{-1} f & m = 4k + 2, \\ T_c^{-1} f & m = 4k + 3. \end{cases}$$

Para mostrar esta fórmula necesitaremos algunas propiedades importantes, las cuales escribimos en un listado a continuación.

1. $T_a^2 \rightsquigarrow \text{id}$.
2. $T_b \rightsquigarrow T_c$.
3. $T_c^2 \rightsquigarrow T_a$.
4. Dado que la curva $f^{-1}(T_c(a))$ es homotópica a un punto, se tiene que es una curva trivial.

Comencemos entonces a mostrar la formula de reducción dada por el giro de Dehn T_b .

Sea $k \in \mathbb{Z}$. Si $m = 4k$ tenemos que $T_b^{4k} \rightsquigarrow T_c^{4k} \rightsquigarrow T_a^{2k} \rightsquigarrow \text{id}$, lo que implica que $T_b^{4k} f \simeq f$. Ahora, supongamos que $m = 4k + 1$, entonces

$$T_b^{4k+1} \rightsquigarrow T_c^{4k+1} \xrightarrow{T_c^{-1}} T_a^{2k+1} T_c^{-1} \xrightarrow{T_a^{-1} T_c^{-1}} T_a^{-1} T_c^{-1} = T_b \rightsquigarrow T_c = T_b^{-1} T_a^{-1}.$$

Lo anterior implica que $T_b^{4k+1} f \simeq T_b^{-1} T_a^{-1} f$.

Si $m = 4k + 2$ se tiene que $T_b^{4k+2} \rightsquigarrow T_a^{2k+1} \xrightarrow{T_a^{-1}} T_a^{-1}$ y por lo tanto $T_b^{4k+2} f \simeq T_a^{-1} f$.

Finalmente, para $m = 4k + 3$ tenemos que $T_b^{4k+3} \rightsquigarrow T_c^{4k+3} \xrightarrow{T_c^{-1}} T_a^{2k+2} T_c^{-1} \rightsquigarrow T_c^{-1}$, lo que implica que $T_b^{4k+3} f \simeq T_c^{-1} f$ y por lo tanto se obtiene la fórmula de reducción.

De una manera análoga podemos concluir que

$$T_a^m f \simeq \begin{cases} f, & m = 4k \\ T_a^{-1} f, & m = 4k + 1 \\ f, & m = 4k + 2 \\ T_a^{-1} f, & m = 4k + 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad T_c^m f \simeq \begin{cases} f, & m = 4k \\ T_b^{-1} \bar{f}, & m = 4k + 1 \\ T_a^{-1} f, & m = 4k + 2 \\ T_c^{-1} f, & m = 4k + 3 \end{cases}$$

Para concluir la solución del problema resta mostrar los casos base. Es decir, que $T_c^{-1} f \simeq \bar{f}$ (donde $\bar{f} = z^2 - i$) y que $T_a^{-1} f$ y $T_b^{-1} T_a^{-1} f$ son obstruidos. En la Figura 6.21 vemos al árbol de Hubbard de f y su pre-imagen. Podemos notar que H_f es un trípode en el cual definimos la función dinámica f_* dada por

$$f_*: H_f \rightarrow H_f$$

$$e_i \mapsto \begin{cases} e_{i+1}, & 1 \leq i \leq 2 \\ e_1 e_1 e_2, & i = 3. \end{cases}$$

El polinomio f rota dos aristas de H_f en sentido anti-horario y su tercer arista se estira sobre tres aristas. Por otra parte, el árbol de Hubbard del polinomio \bar{f} es una reflexión sobre el eje real de H_f . Entonces podemos inferir que \bar{f} rota dos aristas de $H_{\bar{f}}$ en sentido horario, y la arista restante se estira sobre tres aristas.

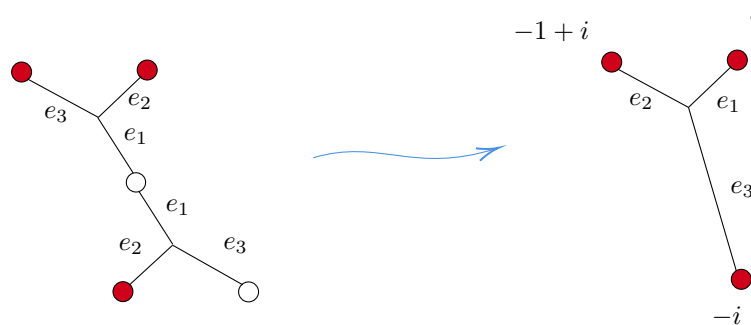


FIGURA 6.21: El árbol H_f y su pre-imagen bajo f .

Ahora, el árbol topológico de Hubbard de $T_c^{-1} f$ aparece en la Figura 6.22 a la derecha. Este árbol está en la misma $\text{Mod}(\mathbb{C}, P_f)$ -órbita que los árboles de Hubbard de f y \bar{f} .

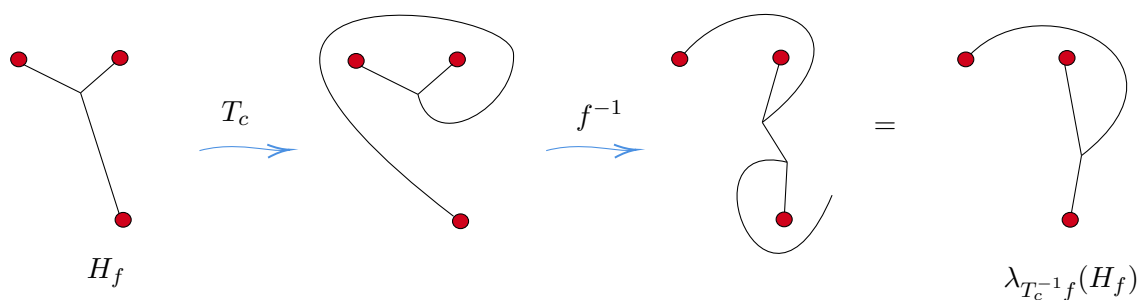


FIGURA 6.22: El árbol H_f y su levantamiento bajo $T_c^{-1}f$

Como $(T_c^{-1}f)_*$ rota dos aristas en dirección horaria, tenemos que $T_c^{-1}f \simeq \bar{f}$.

Para el resto de los casos base necesitamos definir la forma canónica de un polinomio topológico obstruido. La forma canónica es bastante útil pues nos da una descripción topológica del árbol burbuja de Hubbard de un polinomio topológico obstruido.

Sea g un polinomio topológico obstruido con conjunto postcrítico $P = P_g$ y sea $B = B_g$ el árbol burbuja de Hubbard de g . Definamos a Δ como la unión de los discos cerrados cuyas fronteras son las curvas del ciclo de Levy Λ definido en el Capítulo 3. Denotemos B_E como el bosque exterior de B y consideremos Q_Δ el conjunto de los puntos marcados en el interior de Δ . Sean $Q_\partial = \partial\Delta \cap B_E$ y $Q = Q_\Delta \cup Q_\partial$ el conjunto de puntos marcados de Δ .

Consideremos $\tilde{\Delta} = g^{-1}(\Delta)$, y $\tilde{Q} = g^{-1}(Q)$. La función g se restringe a una *función interior*

$$g_I: (\tilde{\Delta}, \tilde{Q}) \rightarrow (\Delta, Q).$$

Por otra parte, si consideramos a $\tilde{B}_E = g^{-1}(B_E)$, el método de Alexander implica que la función inducida $\tilde{B}_E \rightarrow B_E$ determina bajo homotopía la restricción de g en el complemento del conjunto cerrado $\tilde{\Delta}$. Denotaremos a esta función como g_E y la llamaremos *función exterior* de g .

Aplicamos las definiciones recientes para nuestros casos obstruidos, es decir $T_a^{-1}f$ y $T_b^{-1}T_a^{-1}f$.

En la Figura 6.23, a la izquierda, podemos ver el árbol burbuja de Hubbard de $T_a^{-1}f$ (que calza con el árbol burbuja de Hubbard de $T_b^{-1}T_a^{-1}f$).

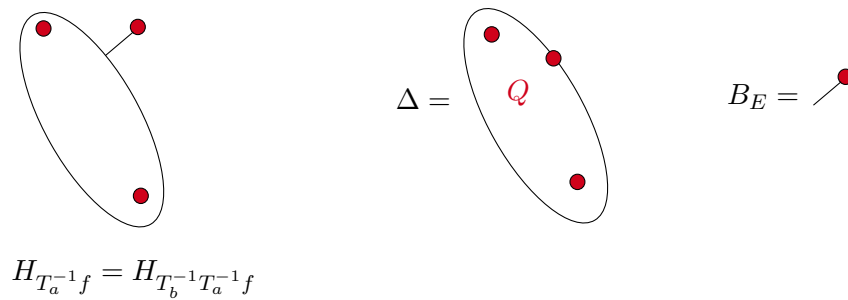


FIGURA 6.23: Descripción de objetos para función exterior e interior

El conjunto Δ definido anteriormente, está dado por la curva b de la Figura 6.20. También podemos ver el bosque exterior B_E a la derecha en la Figura 6.23. El conjunto de puntos marcados de Δ , Q , está dado por los puntos $-i$, $-1 + i$ y por el punto de intersección entre el bosque exterior B_E y b (todos en rojo en la figura del medio). Para cada árbol burbuja de Hubbard, la curva b es el ciclo de Levy; existe un punto marcado en el borde del disco cerrado de Levy acotado por b donde el bosque exterior intersecta a b .

La función exterior en ambos casos es Thurston equivalente a $z^2 - 2$, el único polinomio con el retrato requerido. El árbol de Hubbard de $z^2 - 2$ es una arista entre dos vértices.

Resta entonces describir las funciones interiores para los polinomios topológicos obstruidos $T_a^{-1}f$ y $T_b^{-1}T_a^{-1}f$. Para $T_a^{-1}f$, la función interior en el disco de Levy cerrado y acotado por b es un giro medio izquierdo (ver Figura 6.24). Además, podemos ver el levantamiento de H_f bajo $T_a^{-1}f$ en la Figura 6.25.

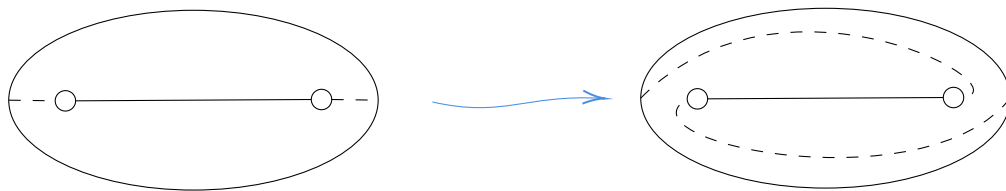


FIGURA 6.24: Un giro medio

Ahora, para $T_b^{-1}T_a^{-1}f$, la función interior en el disco de Levy cerrado y acotado por b es un giro medio derecho pues es la función interior inducida por $T_a^{-1}f$ postcompuesta por T_b^{-1} .

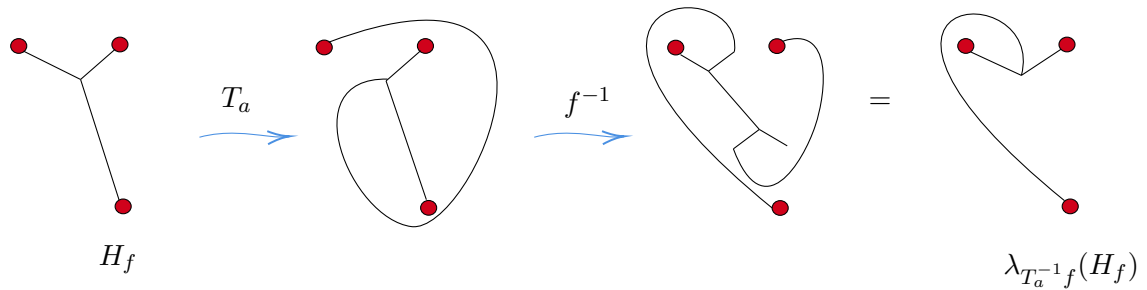


FIGURA 6.25: El árbol H_f y su levantamiento bajo $T_a^{-1}f$

En el caso de los polinomios topológicos obstruidos existe un subconjunto de los vértices de \mathcal{T}_n llamado el *conjunto de Levy* L_f . Este conjunto codifica la información del ciclo de Levy. Específicamente, L_f es el conjunto de vértices de \mathcal{T}_n con la propiedad de que el ciclo de Levy asociado es el borde de una vecindad de un sub-bosque del árbol correspondiente.

El conjunto de Levy $L_{T_a^{-1}f}$ consiste en todos los árboles compatibles con b ; estos son exactamente los árboles que aparecen en la Figura 6.26. Un núcleo para $T_a^{-1}f$ es este conjunto de Levy $L_{T_a^{-1}f}$, y la acción de $\lambda_{T_a^{-1}f}$ en este núcleo es una traslación hacia la izquierda. Esta traslación consiste en moverse dos posiciones. Como en casos anteriores, podemos verificar que efectivamente es un núcleo considerando la acción de la función de levantamiento en la 1-vecindad del conjunto de Levy.

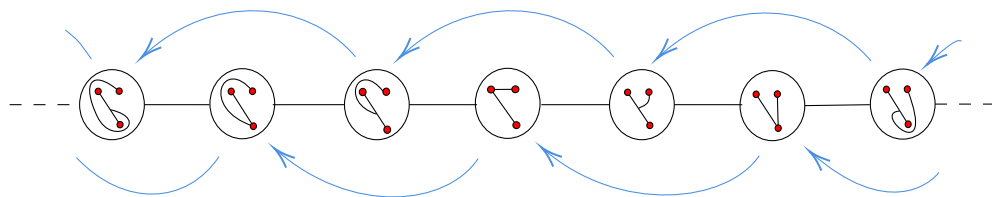


FIGURA 6.26: Un segmento de un núcleo en \mathcal{T}_3 para $T_a^{-1}f$

Cerraremos el capítulo recordando y dando una idea de la demostración de la segunda parte del Teorema 1.0.1.

Sea f un polinomio topológico PCF con $|P_f| = n$, y sea $\lambda_f: \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ la función de levantamiento. Si f es obstruido, entonces la 1-vecindad de L_f es un núcleo para λ_f .

Para dar una idea de la demostración necesitamos introducir una última definición y enunciaremos una proposición que asumiremos. Para detalles de la demostración de la proposición ver [BLMW, Proposición 4.10].

Sea G_f el estabilizador del vértice de Hubbard H_f en $\text{PMod}(\mathbb{C}, P_f)$. Diremos que un vértice T de \mathcal{T}_n es *invariante módulo G_f* bajo una función $\psi: \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ si existe $g \in G_f$ tal que $\psi(T) = g \cdot T$.

Proposición 6.5. Sea f un polinomio topológico PCF obstruido, sea $n = |P_f|$, y T un vértice en \mathcal{T}_n que es invariante módulo G_f bajo λ_f . Entonces existe un vértice del conjunto de Levy $L_f \subseteq \mathcal{T}_n$ que es obtenido de T por expansión de un bosque.

Idea de la demostración del Teorema 1.0.1, parte 2. Sabemos que la función de levantamiento $\lambda_f: \hat{\mathcal{T}}_n \rightarrow \hat{\mathcal{T}}_n$ fija al vértice de Hubbard H_f , entonces λ_f induce una función simplicial en $\mathcal{T}_n^* \subseteq \hat{\mathcal{T}}_n$, el subcomplejo generado por $\mathcal{T}_n \cup H_f$.

Como G_f fija a H_f , se tiene que G_f actúa en \mathcal{T}_n^* . El cociente \mathcal{T}_n^*/G_f es un complejo localmente finito. En efecto, el único vértice de \mathcal{T}_n^* que no es localmente finito es H_f , y la acción de G_f en el conjunto de aristas incidentes a H_f es cofinita. Esto porque el cociente de $\hat{\mathcal{T}}_n$ por $\text{PMod}(\mathbb{C}, P_f)$ es finito, y porque dos vértices incidentes a H_f están en la misma órbita bajo G_f si y sólo si están en la misma órbita bajo $\text{PMod}(\mathbb{C}, P_f)$.

Sea $\pi: \mathcal{T}_n^* \rightarrow \mathcal{T}_n^*/G_f$ la función cociente. Consideremos una sucesión de vértices $T_i = \lambda_f^i(T_0)$ y la sucesión correspondiente $\pi(T_i)$ en \mathcal{T}_n^*/G_f . Como en la idea de la demostración de la primera parte del Teorema 1.0.1, podemos usar la finitud local de \mathcal{T}_n^*/G_f , el hecho de que \mathcal{T}_n^* es conexo, y el hecho de que λ_f es una función simplicial para concluir que la sucesión $\pi(T_i)$ es o periódica o preperiódica. Así, existen $m, r \geq 0$ tales que

$$\pi(\lambda_f^m(T_0)) = \pi(\lambda_f^{m+r}(T_0)).$$

Sea $T = \lambda_f^m(T_0)$. La igualdad anterior es equivalente a decir que existe $g \in G_f$ tal que

$$\lambda_{f^r}(T) = g \cdot T.$$

Entonces $g^{-1} \cdot \lambda_{f^r}(T) = T$, lo que significa que $\lambda_{f^r g}(T) = T$. Por la Proposición 6.5, existe un vértice de $L_{f^r g}$ que se obtiene de T por expansión de un bosque. Como el árbol burbuja de Hubbard de cualquier iterado de f es el mismo que el árbol burbuja de Hubbard de f , y como g preserva a L_f tenemos que $L_{f^r g} = L_f$. ■

Bibliografía

[B] Bestvina, M. *Outer space and the work of Karen Vogtmann*. <http://www.math.utah.edu/vogtmannfest/slides/bestvina.pdf>

[BLMW] Belk, J.; Lanier, J.; Margalit, D.; Winarski, R. *Recognizing topological polynomials by lifting trees*. arXiv:1906.07680, 2019.

[BN] Bartholdi, L.; Nekrashevych, V. *Thurston equivalence of topological polynomials*. Acta Math., 197(1):1–51, 2006.

[BFH] Bielefeld, B.; Fisher, Y.; Hubbard, J. *The classification of critically preperiodic polynomials as dynamical systems*. J. Amer. Math. Soc., 5(4):721–762, 1992.

[CV] Culler, M.; Vogtmann, K. *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*. Invent. Math., 84(1):91–119, 1986.

[DH] Douady, A.; Hubbard, J. *Etude dynamique des polynômes complexes. Partie I*, volume 84 of Publications Mathématiques d’Orsay [Mathematical Publications of Orsay]. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1984.

[FM] Farb, B.; Margalit, D. *A primer on mapping class groups*. Princeton University Press, 2011

[CG] Carleson, L.; Gamelin, T. *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1992.

[H] Hubbard, J. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 2*. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2016. Surface homeomorphisms and rational functions.

[J] Johnson, D. *Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology*. Proc. Amer. Math. Soc., 75(1):119–125, 1979

[L] Levy, S. *Critically finite rational maps*, Ph.D. Thesis, Princeton Univ., 1985.

[M] Milnor, J. *Dynamics in one complex variable*, volume 160. Princeton: Princeton University Press, 2006.

- [Mi] Minsky, Y. *A brief introduction to mapping class groups*. <https://users.math.yale.edu/~yhm3//research/PCMI.pdf>
- [P] Poirier, A. *Hubbard trees*. *Fund. Math.*, 208(3):193–248, 2010.
- [Pi] Pilgrim, K. *An algebraic formulation of Thurston’s combinatorial equivalence*. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(11):3527–3534, 2003
- [V] Vogtmann, K. *What is Outer space?* <http://pi.math.cornell.edu/~vogtmann/papers/WhatIs/KVWhatIs.pdf>