FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

# Cocientes Suaves de Superficies Abelianas por Grupos Finitos.

ALUMNO:

**Pablo Quezada Mora**

DIRECTOR DEL TRABAJO:
Robert Auffarth
Giancarlo Lucchini Arteche

Santiago, Chile
22 de Enero de 2019

# Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi familia por todo. Por su apoyo incondicional, su comprensión y todo el cariño que me han dado durante estos años. Sin ellos no hubiera sido posible. También agradezco a mi gata Meme por acompañarme en esas tardes y noches escribiendo esta tesis.

Agradezco a mis tutores Robert Auffarth y Giancarlo Lucchini Arteche. A ambos por su paciencia con mis preguntas y errores, su excelente voluntad en ayudarme siempre, sus infinitas correcciones, sus consejos y su confianza. Gracias por guiarme en escribir esta tesis. Ha sido un privilegio ser estudiante de ustedes dos. Agradezco también a Giancarlo Urzúa y Natalia García-Fritz por ser parte de la comisión de la defensa de tesis.

También agradezco a mis amigos de Buin, de pregrado, postgrado, etc. por todo el apoyo que me han dado. En particular, agradezco a mis compañeros de Magíster de la M25 por todas esas tardes de estudio, de estrés, de alegrías y de distracciones, y por todo el apoyo que nos hemos dado durante este magíster.

Agradezco a la Pontificia Universidad Católica por recibirme y permitirme estudiar este programa y por su apoyo económico sin el cual simplemente no hubiera podido estudiar. Finalmente agradezco al proyecto Anillo ACT 1415 PIA-CONICYT.

# Índice general


**Introducción** **4**

**1. Preliminares** **8**
1.1. Variedades abelianas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
1.2. Grupos de reflexiones complejas finitos . . . . . . . . . . . . . . 11

**2. Estrategia de la Demostración** **13**

**3. Ejemplos** **16**
3.1. $C$ actuando en $E$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
3.2. $C^n \rtimes S_n$ actuando en $E^n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
3.3. $S_{n+1}$ actuando en $E^n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17

**4. Cocientes por Grupos de Reflexiones Complejas Finitos** **18**
4.1. El caso $G(m, m)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
4.1.1. El caso $G = G(3, 3)$: La representación estándar de $S_3$. 21
4.1.2. El caso $G = G(6, 6)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 23
4.2. El caso $G(m, p)$, con $m \geq 2$ y $p < m$. . . . . . . . . . . . . . . . 25
4.2.1. El caso $G = G(2, 1)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28
4.2.2. El caso $G = G(4, 2)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30
4.2.3. El caso $G = G(4, 1)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32
4.2.4. El caso $G = G(3, 1)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
4.2.5. El caso $G = G(6, 2)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
4.2.6. El caso $G = G(6, 3)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34
4.3. Resumen de lo ya realizado . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

**5. Un caso excepcional de un cociente suave en dimensión 2.** **36**

# Introducción

En 1993, Ekehahl y Serre exhibieron en [ES93] varios ejemplos de curvas sobre $\mathbb{C}$ de géneros hasta 1297 en que su variedad jacobiana es completamente reducible, o sea, es isógena a un producto de curvas elípticas. También plantearon la pregunta:

¿Para qué géneros podemos encontrar una curva de tal género tal que su variedad jacobiana sea completamente reducible?

Desde entonces, el tema de variedades jacobianas completamente reducibles ha generado un gran interés y en particular, ha sido fructífero utilizar acciones de grupos en variedades abelianas para estudiar y encontrar variedades jacobianas completamente reducibles.

En [LR04] Lange y Rencillas encontraron que, si $G$ es un grupo actuando en una variedad abeliana $A$, entonces la descomposición del álgebra de grupo $\mathbb{Q}[G]$ en subálgebras simples induce una descomposición de la variedad abeliana $A$ en subvariedades de (posiblemente) menor dimensión, y luego descomponen variedades jacobianas usando este método.

En [Pau08], [Pau13] y [PR16] las autoras descomponen variedades jacobianas usando acciones de grupos y logran encontrar curvas con variedades jacobianas completamente reducibles de géneros en que no habían ejemplos conocidos. Otros trabajos usando acciones de grupos son [Roj07], [CR06] y [CGAR06].

En [Auf17], Auffarth demostró que si $G$ es un grupo actuando en una variedad abeliana $A$ con representación analítica irreducible, fijando el origen y tal que $A/G \simeq \mathbb{P}^n$, entonces $A$ es isógeno al auto producto de curvas elípticas. Por lo que es natural preguntarse si caracterizando los posibles cocientes de variedades abelianas suaves e isomorfos a $\mathbb{P}^n$ se podrá obtener nuevos ejemplos de variedades jacobianas completamente reducibles. Además, Auffarth exhibió dos ejemplos de cocientes suaves de variedades abelianas por acciones de grupos finitos que fijan el origen y donde su representación analítica es irreducible. En ambos ejemplos, la variedad abeliana era isomorfa al auto producto de una curva elíptica y el cociente era isomorfo a $\mathbb{P}^n$, por lo que si uno quiere clasificar las variedades abelianas con acciones de grupos tal que el cociente sea suave, nacen las siguientes preguntas:

- ¿Existen más casos de grupos actuando en una variedad abeliana de forma irreducible y fijando el origen tal que el cociente sea suave?
- Si existen más casos posibles, ¿Los cocientes son todos isomorfos a $\mathbb{P}^n$?
- Y si $G$ es un grupo que actúa en una variedad abeliana $A$ de manera irreducible, fijando el origen y tal que $A/G \simeq \mathbb{P}^n$, ¿es $A$ isomorfo al auto producto de una curva elíptica?

Auffarth y Lucchini Arteche trabajaron estas preguntas en [ALA18], donde demostraron que para variedades abelianas de dimensión mayor a 2 con acción de un grupo finito $G$ que fija el origen se tiene que, cuando la representación analítica de $G$ es irreducible, los dos ejemplos encontrados en [Auf17] son los únicos casos posibles. Así, aunque no encontraron nuevos ejemplos de variedades jacobianas totalmente reducibles, obtuvieron una clasificación de las variedades abelianas de dimensión mayor a 2 con una acción de un grupo que fija el 0, con representación analítica irreducible y tal que el cociente sea suave.

Por otro lado, si uno tiene una acción de un grupo $G$ en una variedad abeliana $A$, entonces obtenemos una acción de $G$ en $T_0(A) \simeq \mathbb{C}^n$ que preserva el reticulado $\Lambda$ que define a $A$. En [TY82], Tokunaga y Yoshida clasificaron los grupos de reflexiones complejas cristalográficos de dimensión 2, que no son más que extensiones de un grupo de reflexiones complejas finito $G$ por un reticulado $\Lambda$ $G$-invariante en $\mathbb{C}^2$, y luego calcularon su variedad cociente $\mathbb{C}^2/(G \rtimes \Lambda)$ respectiva, que es equivalente a calcular el cociente de la superficie abeliana $\mathbb{C}^2/\Lambda$ por el grupo $G$. Los autores encontraron que, aparte de los dos ejemplos exhibidos en [Auf17], existe un caso excepcional más de un grupo actuando en una superficie abeliana fijando el origen, con representación analítica irreducible y tal que el cociente sea suave e isomorfo a $\mathbb{P}^2$. Sin embargo, este trabajo no cubre todos los posibles reticulados $G$-invariantes y por ende, no considera todas las acciones posibles de grupos en una superficie abeliana. Además, notando la clasificación de estos mismos grupos hecha por Popov en [Pop82] también se puede notar que existen acciones de grupos que no fueron estudiadas.

La idea de esta tesis es dar una clasificación completa de todos los cocientes suaves de superficies abelianas por grupos finitos que fijan el origen usando técnicas similares a [ALA18], y así terminar la clasificación empezada por mis tutores. Logramos obtener el siguiente teorema:

**Teorema 1.** Sea $A$ una superficie abeliana y sea $G$ un grupo finito de automorfismos de $A$ que fijan el origen. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $A/G$ es suave y la representación analítica de $G$ es irreducible.

(2) $A/G \simeq \mathbb{P}^2$.

(3) Existen curvas elípticas $E$ tal que $A \simeq E^2$ y $(A, G)$ satisface exactamente uno de los siguientes casos:

   (a) $G \simeq C^2 \rtimes S_2$ donde $C$ es un subgrupo cíclico no trivial de los automorfismos de $E$ que fijan el origen; Aquí la acción de $C^2$ es por coordenadas mientras que $S_2$ permuta las coordenadas.

   (b) $G \simeq S_3$ y actúa en
   $$A \simeq \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$
   por permutaciones.

   (c) $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ y $G$ es un subgrupo de orden 16 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ generado por:
   $$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & i-1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i-1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$
   actuando en $A \simeq E^2$ de forma obvia.

Note que el tercer caso posible es el mismo encontrado en [TY82].

**Remark 1.** Si la acción del grupo $G$ en la superficie abeliana $A$ no fija el origen pero el cociente si es suave, se tiene que $A/G$ no es necesariamente isomorfo a $\mathbb{P}^2$, y una familia que sirve de ejemplo para mostrar este hecho son las superficies bielípticas. Una superficie se denota bielíptica si es isomorfa al cociente suave $(E \times F)/G$, donde $E$ y $F$ son curvas elípticas y $G$ es un grupo finito de traslaciones de $E$ actuando en $F$ de tal forma que $F/G \simeq \mathbb{P}^1$. Por la clasificación de Enriques de superficies complejas algebraicas (que uno puede revisar en [Bea96]) las superficies bielípticas no son isomorfas a $\mathbb{P}^2$.

**Remark 2.** Si la representación analítica de $G$ no es irreducible tenemos que existen 2 casos posibles: cuando la dimensión de los puntos fijos $\dim(A^G)$ es 0, y cuando es 1. En el primer caso, por el Teorema [ALA18, Teo. 2.7] tenemos que $A \simeq E_1 \times E_2$ con $E_1$ y $E_2$ curvas elípticas y $A/G \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, mientras que en el segundo caso por la Proposición [ALA18, Prop. 2.9] tenemos que $A$ es isógeno al producto de curvas elípticas $E_1 \times E_2$, $G$ solo actúa en $E_2$ con $E_2/G \simeq \mathbb{P}^1$ y por ende $A/G$ es una superficie bielíptica.

La tesis está estructurada de la siguiente forma: El primer capítulo da una introducción sencilla sobre los prerrequisitos del tema, mientras que en el segundo capítulo se explica de forma más detallada como será la demostración del Teorema 1 y además se demuestra la dirección (2) $\Rightarrow$ (1). En el Capítulo 3 se dan ejemplos de cocientes suaves de superficies abelianas y se demuestran dos de los tres casos de la dirección (3) $\Rightarrow$ (2). El Capítulo 4 está dedicado completamente a la dirección (1) $\Rightarrow$ (3) y finalmente, el Capítulo 5 se trata del último caso que falta de la dirección (3) $\Rightarrow$ (2).

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1. Variedades abelianas

En este capítulo introduciremos de manera breve la noción de variedad abeliana, junto con algunas propiedades que usaremos de ellas. La mayoría de la teoría y definiciones usadas en este capítulo aparecen en la monografía "Introducción a las Variedades Abelianas y grupos Kleinianos" de Rubí Rodríguez y Rubén Hidalgo [HR05].

**Definición 1.1.** Un toro complejo $T$ de dimensión $g$ es el grupo cociente $T = V/L$ donde $V$ es un espacio vectorial complejo de dimensión $g$ y $L$ es un reticulado en $V$ de rango $2g$. La estructura compleja es la heredada a través del morfismo cociente $V \to V/L$.

**Ejemplo 1.2.** Sean $z_1$ y $z_2$ dos vectores en $\mathbb{C}$ linealmente independientes y consideremos $L = \{mz_1 + nz_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $T = \mathbb{C}/L$ es un toro complejo de dimensión 1, es decir una superficie de Riemann. Más general aún, toda superficie de Riemann de genero 1 es un toro complejo.

**Definición 1.3.** Sean $T_1 = V_1/L_1$ y $T_2 = V_2/L_2$ dos toros complejos.

(I) Un homomorfismo de $T_1$ a $T_2$ es una función analítica $f : T_1 \to T_2$ compatible con la estructura de grupo.

(II) Para $z_0 \in T$ se define la traslación por $z_0$ como la función analítica $t_{z_0} : T \to T$ dada por $t_{z_0}(z) = z + z_0$.

**Proposición 1.4.** *Sean $T_1$ y $T_2$ como antes, y sea $h : T_1 \to T_2$ una función analítica. Entonces:*

(I) *Existe un único homomorfismo $f : T_1 \to T_2$ tal que:*

$$h = t_{h(0)} \circ f,$$

*o sea, $h(z) = f(z) + h(0)$ para todo $z \in T_1$.*

(II) *Existe una única función $\mathbb{C}$-lineal $F : V_1 \to V_2$ con $F(L_1) \subset L_2$ que induce el homomorfismo $f$.*

Con la suma punto a punto, el conjunto de homomorfismos de $T_1$ a $T_2$ forman un grupo abeliano, denotado por $\mathrm{Hom}(T_1, T_2)$. La proposición anterior nos da un homomorfismo inyectivo:

$$\rho_a : \mathrm{Hom}(T_1, T_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$$

dado por $\rho_a(f) = F$. Se llama a $\rho_a(f)$ la *representación analítica* de $f$. Note que esto es equivalente a ver la acción de $f$ en el plano tangente $T_0(A)$ de $A$ en el origen.

Por otro lado, la restricción $F_{L_1} : L_1 \to L_2$ de $F$ al reticulado $L_1$ es $\mathbb{Z}$-lineal y determina completamente a $F$ y $f$. Así, nuevamente obtenemos un homomorfismo inyectivo:

$$\rho_r : \mathrm{Hom}(T_1, T_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_1, L_2)$$

dado por $\rho_r(f) = F|_L$. Se llama a $\rho_r(f)$ la *representación racional* de $f$.

**Remark 1.5.** Si $f \in \mathrm{End}(T)$ fija un punto $x \in T$, podemos definir de forma análoga a la construcción anterior (considerando $x$ en vez de 0) su representación analítica en el plano tangente $T_x(A)$ de $A$ en $x$ como $\rho_{a,x}(f) \in \mathrm{End}(T_x(A))$.

**Ejemplo 1.6.** Para todo toro $T = V/L$ y para todo entero $n$ se tiene el endomorfismo $n_T : T \to T$ inducido por $F : V \to V$ dado por $F(z) = nz$.

**Definición 1.7.** Sea $T = V/L$ un toro. Un subconjunto $S \subset T$ se dice subtoro complejo si existe un subespacio vectorial $W$ de $V$ y un reticulado $M$ en $W$ tal que $M = W \cap L$ y $S = W/M$.

**Proposición 1.8.** *Sea $f : T_1 \to T_2$ un homomorfismo de toros complejos. Entonces:*

(I) $\mathrm{im} f$ *es un subtoro complejo de $T_2$.*

(II) $\ker f$ *es un subgrupo compacto de $T_1$. La componente conexa* $(\ker f)^0$ *que contiene al 0 es un subtoro de $T_1$.*

**Definición 1.9.** Una isogenia de un toro complejo $T_1$ a un toro complejo $T_2$ es un un homomorfismo $T_1 \to T_2$ sobreyectivo y con núcleo finito. Note que un morfismo $T_1 \to T_2$ es una isogenia si y sólo si es sobreyectivo y $\dim V_1 = \dim V_2$.

Note que la representación analítica de una isogenia es un isomorfismo de espacios vectoriales. Para una isogenia $f$ se define el grado de $f$, $\mathrm{gr} f$, como la cardinalidad del núcleo y se define el exponente de $f$, $e_f$, como el exponente del grupo $\ker f$: el menor natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx = 0$ para todo $x \in \ker f$.

**Proposición 1.10.** *Sea $f : T_1 \to T_2$ una isogenia y denotemos por $e = e_f$ su exponente. Entonces existe una única isogenia $g : T_2 \to T_2$ tal que $g \circ f = e_{T_1}$ y $f \circ g = e_{T_2}$.*

**Proposición 1.11.** *Sea $V$ un espacio vectorial complejo. Existe una biyección entre:*

1. *Las formas $E$ reales, bilineales y antisimétricas en $V$ que satisfacen $E(iv, iw) = E(v, w)$ para todo $v, w \in V$.*

2. *Las formas Hermitianas $H$ en $V$.*

*Demostración.* Si tenemos $E$ como en 1., se define $H$ como

$$H(v, w) = E(iv, w) + iE(v, w),$$

y dada $H$, podemos definir $E$ como

$$E = \Im(H).$$

$\square$

Con esto ya podemos definir una variedad abeliana:

**Definición 1.12.** Un toro $T = V/L$ es una *variedad abeliana* si existe una forma hermitiana $H$ en $V$ no degenerada tal que $\Im H(L \times L) \subset \mathbb{Z}$. $H$ se dice una *polarización* de $T$ y el par $(T, H)$ se llama una variedad abeliana polarizada. Una variedad abeliana de dimensión 2 se dice *superficie abeliana.*

Una variedad abeliana también puede ser definida con una forma real, bilineal y antisimetrica.

Note que si tenemos un grupo finito $G$ actuando en una variedad abeliana, siempre podemos considerar una polarización $G$-invariante:

**Proposición 1.13.** *Sea $A$ una superficie abeliana y sea $G$ un grupo finito actuando en $A$. Luego, siempre existe una polarización $G$-invariante en $A$.*

*Demostración.* Sea $H$ una polarización de $A$, entonces

$$\mathcal{H}(v, w) = \sum_{g \in G} H(g \cdot v, g \cdot w)$$

será una polarización $G$-invariante de $A$. □

El siguiente teorema nos da información sobre las estructuras de las subvariedades abelianas:

**Teorema 1.14.** *(Reducibilidad de Poincaré). Sea $(T, H)$ una variedad abeliana y sea $S$ un subtoro de $T$. Entonces existe un subtoro $R$ de $T$ tal que $T = S + R$ y $S \cap R$ es finito.*

Si $S = W/M$ con $W$ subespacio vectorial de $V$ y $M \subset W \cap L$, entonces el subespacio vectorial que define a $R$ es el complemento ortogonal de $W$ bajo $H$.

$R$ se llama la subvariedad abeliana *complementaria* de $S$ con respecto a $H$.

**Definición 1.15.** Una variedad abeliana se dice *simple* si las únicas subvariedades abelianas son ella misma y el cero.

El próximo teorema nos da información sobre la descomposición completa en variedades abelianas simples:

**Teorema 1.16.** *(Reducibilidad completa de Poincaré). Dada una variedad abeliana $A$, existe una isogenia $A \to A_1^{n_1} \times \cdots \times A_r^{n_r}$, donde cada $A_i$ es una variedad abeliana simple. Más aún, los $A_i$ y $n_i$ son únicos módulo isogenia y permutaciones.*

## 1.2. Grupos de reflexiones complejas finitos

Sea $A$ una superficie abeliana y sea $G$ un grupo finito actuando en $A$ de forma irreducible y fijando el 0. Esta sección esta destinada a caracterizar los posibles grupos $G$ que pueden actuar en $A$ tal que $A/G$ sea suave.

**Definición 1.17.** Sea $V$ un espacio vectorial. Una *pseudoreflexión* es un elemento de $GL(V)$ de orden finito que fija un subespacio vectorial de codimensión 1.

**Definición 1.18.** Un grupo de reflexiones complejas es un grupo generado por pseudoreflexiones.

El siguiente Teorema de Chevalley [Che55] aplicado a superficies abelianas nos caracteriza los posibles grupos $G$ que podrían actuar en una superficie abeliana $A$ tal que el cociente $A/G$ sea suave:

**Teorema 1.19.** *(Chevalley) Sea $G$ un grupo finito actuando en una superficie abeliana $A$, sea $A/G$ la variedad cociente de $A$ por $G$ y sea $\pi : A \to A/G$ la proyección. Luego son equivalentes:*

*(a) $A/G$ es suave en $\pi(x) \in A/G$.*

*(b) La representación analítica de $\mathrm{Stab}_G(x)$ en $T_x(A)$, denotada por $\rho_{a,x}(\mathrm{Stab}_G(x))$, es un grupo de reflexiones complejas.*

Particularmente, una pseudoreflexión en nuestro contexto es un elemento que fija un divisor puntualmente tal que el divisor pase por $x$. Note que esto nos dice que $\rho_{a,x}(\mathrm{Stab}_G(x))$ está bien definido.

En 1954, los grupos de reflexiones complejas finitos fueron clasificados por Shephard y Todd en [ST54]. Para el caso de dimensión 2, ellos encontraron que si $G$ es un grupo de reflexiones complejas finito, entonces $G$ es isomorfo a uno de 19 posibles grupos esporádicos, o es isomorfo al producto semidirecto $G(m,p) = H(m,p) \rtimes S_2$, donde

$$H = H(m,p) = \{(\zeta_m^{a_1}, \zeta_m^{a_2}) \mid a_1 + a_2 \equiv 0 \pmod{p}\} \subset \mu_m^2$$

con $\zeta_m$ una raíz primitiva m-ésima de 1, $m \geq 2$, $p \mid m$, la acción de $S_2$ en $H$ es la obvia y la acción de $G$ en $\mathbb{C}^2$ esta dada como sigue: $H$ actúa en $\mathbb{C}^2$ por coordenadas mientras que $S_2$ permuta las coordenadas. [1]

[1] Si uno ve la clasificación hecha en [ST54] uno puede notar que $S_3$ actuando de manera estándar en un espacio vectorial de dimensión 2 es uno de los grupos posibles, pero el grupo $G(3,3)$ es isomorfo a $S_3$ actuando de esta forma, por lo que sí está siendo considerado.

# Capítulo 2

# Estrategia de la Demostración

En este capítulo daremos una breve explicación de como está estructurada la demostración del teorema principal en la tesis, y una breve idea de como se demostrará cada implicación.

La mayor parte de esta tesis, que es el Capítulo 4, se trata de demostrar la dirección (1) $\Rightarrow$ (3) de nuestro teorema principal. Para esto, sea $G$ actuando en una variedad abeliana $A$ fijando el 0. Por lo visto en el capítulo anterior, sabemos que $G$ es isomorfo a uno de 19 grupos esporádicos, o es isomorfo a un grupo de la forma

$$G(m,p) = H(m,p) \rtimes S_2,$$

donde

$$H = H(m,p) = \{(\zeta_m^{a_1}, \zeta_m^{a_2}) \mid a_1 + a_2 \equiv 0 \pmod{p}\} \subset \mu_m^2,$$

con $\zeta_m$ una raíz primitiva m-ésima de 1, $m \geq 2$ y $p \mid m$. Los casos esporádicos no serán tratados en ésta tesis, pues ya fueron tratados en [ALA18, Thm. 3.11] obteniendo que la acción de ningún grupo esporádico da un cociente suave, por lo que el Capítulo 4 se basará completamente en el estudio de los grupos de la forma $G(m,p)$.

Lo primero que haremos en el Capítulo 4 será acotar los posibles $(m,p) \in \mathbb{N}^2$ tal que $G(m,p)$ realmente actúe sobre una superficie abeliana, y con esto obtendremos una lista finita de casos que tendremos que analizar. Luego, la estrategia de la demostración será construirnos una isogenia $G$-equivariante entre nuestra superficie abeliana $A$ y una superficie abeliana *conocida* donde sepamos como es la acción de $G$. Usando el Teorema de Chevalley, en los casos en que $A/G$ no sea suave, exhibiremos un elemento tal que su estabilizador no esté generado por pseudoreflexiones, mientras que en los casos en que $A/G$ sí sea suave, demostraremos que es isomorfo a uno de los 3 casos de nuestro teorema principal.

En el Capítulo 3 probaremos dos de los tres casos de la implicación (3) $\Rightarrow$ (2) de nuestro teorema principal usando resultados sobre superficies de Riemann, mientras que el último caso lo probaremos en el capitulo 5 usando un resultado de Pardini demostrado en [Par91] que caracteriza los $G$-cubrimientos de $\mathbb{P}^2$ con su lugar de ramificación.

Finalmente, la dirección (2) $\Rightarrow$ (1) la demostraremos inmediatamente.

**Proposición 2.1.** *Sea $A$ una superficie abeliana y sea $G$ un grupo finito actuando en $A$ que fija el 0 tal que $A/G \simeq \mathbb{P}^2$. Luego $A/G$ es suave y la representación analítica de $G$ es irreducible.*

*Demostración.* Como $\mathbb{P}^2$ es suave, entonces claramente $A/G$ también lo es y además gracias al Teorema de Chevalley se tiene que la representación analítica de $G$ es un grupo de reflexiones complejas finito. Asumamos que la representación analítica de $G$ no es irreducible, luego existen $G_1$ y $G_2$ subgrupos finitos, $V_1$ y $V_2$ espacios vectoriales de dimensión 1 tal que $G = G_1 \times G_2$, $T_0(A) = V_1 \oplus V_2$, $G_i$ actúa en $V_i$ linealmente y si $i \neq j$ entonces $G_i$ actúa en $V_j$ de forma trivial. Por el Lema [ALA18, Lem. 2.6] tenemos que los $V_i$ inducen subvariedades abelianas $A_i$ $G$-estables de $A$ tal que $G_j$ actúa trivialmente en $A_i$ si $i \neq j$ y además $A_i/G \simeq A_i/G_i \simeq \mathbb{P}^1$ como veremos en el ejemplo 3.1.

Sea $A^G$ los puntos fijos de $A$ por todos los elementos de $G$ y asumamos que $\dim(A^G) = 0$, por el Teorema [ALA18, Thm. 2.7] tenemos que

$$\mathbb{P}^2 \simeq A/G \simeq A_1/G_1 \times A_2/G_2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

Pero $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ no es isomorfo a $\mathbb{P}^2$, y una forma de verlo es que todo morfismo $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ es constante, mientras que claramente la proyección en la primera coordenada $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ no lo es. En efecto, si $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ es un morfismo no constante, entonces su imagen es irreducible y de dimensión mayor a 0, por lo que es densa en $\mathbb{P}^1$. Ahora, en $\mathbb{P}^1$, podemos tomar elementos $a$ y $b$ con $a \neq b$ y ver sus preimagenes a través de $f$. Obtenemos así 2 curvas en $\mathbb{P}^2$ que no se intersectan lo que no puede suceder por el Teorema de Bézout.

Ahora si $\dim(A^G) = 1$, denote por $A_0$ la componente conexa de $A^G$ que contiene al 0 y $P_G$ su subvariedad abeliana complementaria con respecto a una polarización $G$-invariante. Note que tanto $A_0$ como $P_G$ son curvas elípticas. Por la Proposición [ALA18, Prop. 2.9] tenemos que existe una fibración $A/G \to A_0/(A_0 \cap P_G)$ con fibras isomorfas a $P_G/G$, donde $A_0/(A_0 \cap P_G)$ es una curva elíptica (pues la acción de $A_0 \cap P_G$ en $A_0$ es por traslaciones) y $P_G/G \simeq \mathbb{P}^1$ por el Ejemplo 3.2.

Pero esto no es posible pues todo morfismo de $\mathbb{P}^2$ a una curva elíptica $E$ es constante, pues todo morfismo de $\mathbb{P}^1$ a $E$ lo es. Esto pues si $\pi : \mathbb{P}^1 \to E$ es un morfismo no constante de $\mathbb{P}^1$ a una curva elíptica $E$, entonces $\deg(\pi) > 0$ y por la fórmula de Riemann-Hurwitz se tiene que:

$$2g(\mathbb{P}^1) - 2 = \deg(\pi)(2g(E) - 2) + R,$$

pero $g(E) = 1$ y $g(\mathbb{P}^1) = 0$, por lo que $R = -2$ lo cual no es posible. Así, todo morfismo $\pi : \mathbb{P}^1 \to E$ es constante y como $\mathbb{P}^2$ tiene un cubrimiento por $\mathbb{P}^1$ con intersecciones no vacías, se tiene que todo morfismo $\mathbb{P}^2 \to E$ es constante. $\square$

# Capítulo 3

# Ejemplos

En esta sección analizaremos tres ejemplos de grupos actuando en el auto producto de curvas elípticas de tal forma que el cociente sea isomorfo a $\mathbb{P}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Todos los ejemplos usan resultados de superficies de Riemann y una excelente referencia para quien quiera estudiar sobre este tema es el libro [Mir95].

Estos ejemplos serán fundamentales para luego caracterizar los posibles cocientes suaves. En lo que sigue, $E$ es una curva elíptica y $C$ es un subgrupo no trivial de $\mathrm{Aut}(E)$ que fija el 0. Recordemos que esto nos dice que $C$ es un grupo cíclico de orden 2, 3, 4 o 6 por [Mir95, Prop. 1.12, Cap.3].

Los ejemplos 2 y 3 fueron exhibidos en [Auf17].

## 3.1. $C$ actuando en $E$

Consideremos $C$ actuando en $E$ fijando el 0. Como todo elemento de $C$ es una pseudoreflexión, tenemos que $E/C$ es suave, y como $E$ es compacto, $E/C$ lo será. Calculemos su genero $g(E/C)$ para poder caracterizar realmente que es el cociente.

Recordemos que el género $g(E)$ de la curva elíptica $E$ es 1. Por la fórmula de Riemann-Hurwitz se tiene que:

$$2g(E) - 2 = \deg(\pi)(2g(E/C) - 2) + R,$$

donde $R$ es la ramificación de la proyección $\pi : E \to E/C$. Como $\pi$ es no constante tenemos que $\deg(\pi) > 0$, y como existen elementos de $C$ no nulos que fijan elementos de $E$ tenemos que $R > 0$. Por ende:

$$0 = \deg(\pi)(2g(E/C) - 2) + R > \deg(\pi)(2g(E/C) - 2).$$

Así, como $\deg(\pi) > 0$, el único caso posible es que $g(E/C) = 0$ y como $\mathbb{P}^1$ es la única superficie de Riemann compacta y suave de género 0 se concluye que $E/C \simeq \mathbb{P}^1$.

## 3.2. $C^n \rtimes S_n$ actuando en $E^n$

Consideremos $G = C^n \rtimes S_n$ actuando en $E^n$ de la siguiente forma: $C^n$ actúa por coordenadas mientras que $S_n$ permuta las coordenadas. Entonces:

$$E^n/G \simeq (E/C)^n/S_n \simeq (\mathbb{P}^1)^n/S_n \simeq \mathrm{Sym}^n(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{P}^n.$$

Donde el último isomorfismo está en [Sha74, Ex. 2, Sec. 4, Chap. IX]. El cociente $E/C \simeq \mathbb{P}^1$ fue calculado en el ejemplo anterior. Por lo tanto, el cociente es suave y $E^n/G \simeq \mathbb{P}^n$.

## 3.3. $S_{n+1}$ actuando en $E^n$

Consideremos la variedad abeliana:

$$A = \{(x_0, \dots, x_n) \in E^{n+1} : x_0 + \cdots + x_n = 0 \text{ en } E\} \simeq E^n,$$

con $S_{n+1}$ actuando de manera usual. Recordando que los divisores en $E$ son sumas formales enteras de puntos de $E$, tenemos que:

$$\begin{aligned} A/S_{n+1} &\simeq \{x_0 + \cdots + x_n \in \mathrm{Sym}^{n+1}(E) : x_0 + \cdots + x_n = 0 \text{ en } E\} \\ &\simeq \{D \in \mathrm{Div}(E) : D \geq 0, \deg(D) = n+1 \text{ y } \mathcal{A}(D) = 0\} \end{aligned}$$

donde $\mathcal{A}$ es la función de Abel $\mathcal{A} : Div(E) \to E$ que lleva un divisor $\sum_{i=0}^n a_i[x_i]$ en la suma $\sum_{i=0}^n a_i x_i \in E$. Por el Teorema de Abel para curvas elípticas [Mir95, Thm. 2.8, Cap.5] tenemos que lo anterior será isomorfo a:

$$\begin{aligned} A/S_{n+1} &\simeq \{D \in \mathrm{Div}(E) : D \geq 0, D \sim_{\mathrm{lin}} (n+1)[0]\} \\ &\simeq |(n+1)[0]| \simeq \mathbb{P}^n \end{aligned}$$

donde $|(n+1)[0]|$ es el sistema lineal asociado al divisor $(n+1)[0] \in \mathrm{Div}(E)$.

Note que los Ejemplos 3.2 y 3.3 son los casos $(b)$ y $(c)$ del ítem (3) de nuestro Teorema 1 y por ende, hemos probado 2 casos de los 3 de la dirección (3) $\Rightarrow$ (2).

# Capítulo 4

# Cocientes por Grupos de Reflexiones Complejas Finitos

Sea $A$ una superficie abeliana y sea $G$ un grupo de automorfismos de $A$ que fijan el origen, tal que la variedad cociente $A/G$ sea suave. Por la sección 1.2 sabemos que $G$ es isomorfo a un grupo de la familia infinita $G(m,p)$, o es uno de los 19 posibles casos esporádicos, que como mencionamos en el capítulo 2 ya fueron tratados en [ALA18] obteniendo que la acción de ningún grupo esporádico da un cociente suave, y por ende no serán tratados en esta tesis. Así, asumiremos que $G = G(m,p)$.

La idea de este capítulo será describir cuál de estos grupos $G(m,p)$ realmente actúan en una superficie abeliana de forma irreducible y tal que la variedad cociente $A/G$ sea suave. Lo primero que necesitamos es acotar la cantidad de grupos posibles que debemos analizar, y el lema siguiente nos da exactamente esa información:

**Lema 4.1.** *Sea $G = G(m,p)$ actuando en una superficie abeliana $A$. Luego $m \in \{2,3,4,6\}$.*

*Demostración.* Sea $E$ la imagen de $\mathbb{C}(e_1+e_2)$ en $A$ bajo la proyección usual. Demostraremos que es una curva elíptica. Consideremos los elementos $\rho_1 = (\zeta_m, \zeta_m^{-1})$, $\rho_2 = (\zeta_m^{-1}, \zeta_m)$ y $\sigma = (12)$ en $G$. Claramente $\operatorname{im}(1+\sigma) = \mathbb{C}(e_1+e_2)$ y por ende $E = (1+\sigma)(A)$ es una curva elíptica. El elemento $\rho_1+\rho_2 \in \operatorname{End}(A)$ induce un automorfismo en $E$ por multiplicación en cada coordenada por $(\zeta_m + \zeta_m^{-1}) \in \mathbb{R}$. Como los únicos automorfismos reales de las curvas elípticas son multiplicaciones por números enteros, tenemos que $(\zeta_m + \zeta_m^{-1}) \in \mathbb{Z}$, lo que sólo sucede cuando $m \in \{2,3,4,6\}$. $\square$

Habiendo probado ya este resultado, podemos ver que hay una lista finita de casos a ser analizados, esto es:

$$(m,p) \in \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,6)\}.$$

El caso $(2,2)$ no lo consideraremos pues la representación analítica de $G(2,2)$ no es irreducible.

Por otro lado, claramente los grupos $G(4,4)$ y $G(2,1)$ son isomorfos entre ellos al ser ambos isomorfos al dihedral $D_4$. Además, sus acciones son equivalentes, pues por un teorema de teoría de representaciones, sabemos que la suma de los cuadrados de los grados de las representaciones irreducibles es igual al orden del grupo, por lo que como siempre existe la representación trivial, la representación irreducible de grado 2 del dihedral $D_4$ debe ser única módulo cambio de base. También existe un isomorfismo excepcional entre los grupos de reflexión compleja $G(3,3)$ y $S_3$ actuando de forma estándar y el argumento es el mismo que antes, y finalmente también existe un isomorfismo entre el grupo $G(6,6)$ y $\mu_2 \times G(3,3)$.

Ahora consideremos una nueva superficie abeliana $B$ equipada con una isogenia $G$-equivariante hacia $A$, que llamaremos $G$-isogenia desde ahora. Sea $\Lambda_A$ el reticulado en $\mathbb{C}^2$ tal que $A = \mathbb{C}^2/\Lambda_A$. Sea $\Lambda_B \subseteq \Lambda_A$ un subreticulado $G$-invariante de rango máximo, y sea $B := \mathbb{C}^2/\Lambda_B$ la superficie abeliana inducida, junto con la $G$-isogenia

$$\pi : B \to A,$$

cuya representación analítica es la identidad. Note que esto implica que $\sigma \in G$ es una pseudoreflexión de $B$ si y solo si es una pseudoreflexión de $A$. Sea $\Delta = \ker(\pi)$, como $\pi$ es $G$-equivariante, $G$ actúa en $\Delta$ y por ende podemos considerar el grupo $\Delta \rtimes G$. Este grupo actúa en $B$ en la forma obvia: $\Delta$ actúa por translaciones y $G$ por automorfismos. En particular, podemos notar que el cociente $B/(\Delta \rtimes G)$ es isomorfo a $A/G$.

**Definición 4.2.** Sea $\pi : B \to A$ una $G$-isogenia entre superficies abelianas y sea $\sigma$ una pseudoreflexión de $G$ de orden $r$. Para $A$ definimos:

$$\begin{aligned}
D_{\sigma,A} &:= \mathrm{im}(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{r-1}),\\
E_{\sigma,A} &:= \mathrm{im}(1 - \sigma),\\
F_{\sigma,A} &:= D_\sigma \cap E_\sigma.
\end{aligned}$$

Haremos lo mismo para $B$. Note que por definición, $\pi$ envía $E_{\sigma,B}$ a $E_{\sigma,A}$ y $D_{\sigma,B}$ a $D_{\sigma,A}$, por lo que envía $F_{\sigma,B}$ a $F_{\sigma,A}$. Si estamos trabajando en una superficie abeliana fija, omitiremos el "$A$" (resp. "$B$").

Demostremos un resultado que nos permite caracterizar las pseudoreflexiones en $\Delta \rtimes G$ perteneciente a [ALA18].

**Lema 4.3.** *Sea $\sigma \in \Delta \rtimes G$ una pseudoreflexión. Tenemos que $\sigma = (t, \tau)$ con $\tau \in G$ una pseudoreflexión y $t \in \Delta \cap E_{\tau,B}$.*

*Demostración.* Sea $t \in \Delta$ y sea $\tau \in G$ tal que $\sigma = (t, \tau) \in \Delta \rtimes G$. Notemos que $(t, \tau)$ actúa de la forma $(t, \tau)(x) = \tau(x) + t$. Como $\sigma$ es una pseudoreflexión debe fijar una curva elíptica E, o sea, $\forall x \in E$ tenemos que $\sigma(x) = \tau(x) + t = x$, que es equivalente a que $x \in (1-\tau)^{-1}(t)$. Pero como $(1-\tau) \in \mathrm{End}(B)$, tenemos que $E$ es una traslación de $\ker(1-\tau)^0$, que es un divisor si y sólo si $\tau$ es una pseudoreflexión y $t \in (1-\tau)(B) = E_{\tau,B}$. □

## 4.1. El caso $G(m, m)$

Para el caso $G(3, 3)$ usaremos la demostración hecha en la sección 3.1 de [ALA18], mientras que para el caso $G(6, 6)$ utilizaremos la misma técnica. En lo que sigue, sea $\mathcal{H}$ una polarización $G$-invariante en $A$ (existe gracias a la Proposición 1.13) y para $\sigma$ una pseudoreflexión de orden $r$, consideremos $D_\sigma$, $E_\sigma$ y $F_\sigma$ definidas en la página 19.

El siguiente lema junto a su demostración pertenece a [ALA18, Lem. 2.1]:

**Lema 4.4.** *Tenemos lo siguiente:*

1. *$D_\sigma$ es la componente conexa de $\ker(1-\sigma)$ que contiene al 0 y $E_\sigma$ es la subvariedad abeliana complementaria de $D_\sigma$ con respecto a $\mathcal{H}$. En particular, $D_\sigma$ y $E_\sigma$ son curvas elípticas.*
2. *$\sigma$ actúa en $E_\sigma$ y por ende $r \in \{2, 3, 4, 6\}$.*
3. *$F_\sigma = D_\sigma \cap E_\sigma$ consiste de puntos de 2-torsión para $r = 2$.*

*Demostración.* Para (1), teniendo en cuenta que:

$$(1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots + \sigma^{r-1})(1 - \sigma) = 1 - \sigma^r = 0,$$

obtenemos que $\mathrm{im}(1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots + \sigma^{r-1}) = D_\sigma \subset \ker(1 - \sigma)$.
Ahora bien, $D_\sigma$ contiene al 0 y es irreducible al ser la imagen de un irreducible, y si $x \in \ker(1 - \sigma)$, entonces

$$rx = 1 + \sigma(x) + \cdots + \sigma^{r-1}(x) = (1 + \sigma + \cdots + \sigma^{r-1})(x) \in D_\sigma.$$

Por lo que, notando que los puntos de $r$-torsión son discretos, tenemos que la dimensión de $\ker(1 - \sigma)$ y $D_\sigma$ es la misma, y por ser $D_\sigma$ irreducible, $D_\sigma$

corresponde a la componente conexa del 0.
Ahora bien, como $\mathcal{H}$ es $G$-invariante, en $T_0(A)$ ocurre que:

$$\Big(\sum_{i=0}^{r-1}\sigma^i\Big)^t\mathcal{H}(I_n-\sigma)=\mathcal{H}\Big(\sum_{i=0}^{r-1}\sigma^i\Big)(I_n-\sigma)=0,$$

por lo que los espacios vectoriales que inducen a $D_\sigma$ y $E_\sigma$ son ortogonales, o sea, las variedades abelianas son complementarias. Particularmente, $D_\sigma$ y $E_\sigma$ son curvas elípticas.

Asumamos que $r=2$. Como $D_\sigma\subset\ker(1-\sigma)$ y análogamente $E_\sigma\subset ker(1+\sigma)$, tenemos que para $x\in F_\sigma=D_\sigma\cap E_\sigma$ se tiene que $\sigma(x)=x$ y por ende:

$$2x=x-\sigma(x)+x+\sigma(x)=(1-\sigma)(x)+(1+\sigma)(x)=0,$$

por lo que $D_\sigma\cap E_\sigma$ consiste de puntos de 2-torsión para $r=2$. $\square$

### 4.1.1 El caso $G=G(3,3)$: La representación estándar de $S_3$.

Sea $S_3$ actuando en una superficie abeliana A de tal forma que su acción en $T_0(A)$ es la estándar. Sea $\sigma=(12)$, $E=E_\sigma$ inducido por la línea $L_\sigma\subset T_0(A)$ y definamos el reticulado:

$$\Lambda_B:=\sum_{\tau\in S_3}\tau(L_\sigma\cap\Lambda_A).$$

Esto nos da un subreticulado $G$-invariante de $\Lambda_A$, y por ende obtenemos una isogenia $G$-equivariante $\pi:B\to A$ con núcleo $\Delta$. Aplicando esta construcción a nuestro Ejemplo 3.3 podemos ver que obtenemos el reticulado completo y por ende corresponde al mismo ejemplo. Así, podemos ver $B$ como:

$$B=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=0\}\simeq E^2,$$

con $S_3$ actuando de manera natural.

**Proposición 4.5.** *Sea $\pi:B\to A$ la $G$-isogenia recién construida. Luego $\Delta$ está contenido en los puntos fijos de todas las transposiciones, o sea, sus elementos son de la forma $(x,x,x)$ con $3x=0$.*

*Demostración.* Usando las notaciones del Lema 4.4, por construcción del reticulado se tiene que $\pi|_{E_{\sigma,B}}$ es inyectivo. Además,

$$F_{\sigma,B}=E_{\sigma,B}[2]=\{(x,x,0)\mid x\in E[2]\}\simeq E[2],$$

y por ende, como la función $\pi|_{E_{\sigma,B}}$ es inyectiva tenemos que la función $\pi|_{F\sigma,B}$ : $F_{\sigma,B} \to F_{\sigma,A}$ es biyectiva, ya que por el Lema 4.4 tenemos que $F_{\sigma,A} \subset E_{\sigma,A}[2] \simeq E[2]$ y así ambos conjuntos tienen el mismo cardinal.

Ahora, como $\pi|_{E_{\sigma,B}}$ es inyectivo, tenemos que elementos de la forma $(x, -x, 0)$ (e imágenes bajos permutaciones) no pueden pertenecer a $\Delta$. Además, se tiene que $E_{\sigma,B}$ y $D_{\sigma,B}$ generan $B$, así que para $\bar{x} + \bar{y} \in \Delta$ con $\bar{x} \in E_{\sigma,B}, \bar{y} \in D_{\sigma,B}$ se tiene que $\pi(\bar{x} + \bar{y}) = \pi(\bar{x}) + \pi(\bar{y}) = 0$, por lo que $\pi(\bar{x}) = -\pi(\bar{y}) \in D_{\sigma,A}$ y así $\pi(\bar{x}) \in F_{\sigma,A}$. Como $\pi|_{F\sigma,B} : F_{\sigma,B} \to F_{\sigma,A}$ es sobreyectiva, tenemos que $\bar{x} \in E_{\sigma,B} \cap \pi^{-1}(F_{\sigma,A}) = F_{\sigma,B}$, o sea, $\bar{x} = (x, x, 0)$ con $x \in E[2]$.

Ahora, los elementos de $D_{\sigma,B}$ son de la forma $(y, y, -2y)$ con $y \in E$, por lo que los elementos de $\Delta$ son de la forma $(y, y, -2y)+(x, x, 0) = (x+y, x+y, -2y)$ con $y \in E, x \in E[2]$. Así, como $\Delta$ es un grupo aditivo $G$-estable podemos construirnos en $\Delta$ el elemento

$$\bar{z} := (x + y, -2y, x + y) - (-2y, x + y, x + y) = (x + 3y, -x - 3y, 0).$$

Pero como $\pi|_{E_{\sigma,B}} : E_{\sigma,B} \to E_{\sigma,A}$ es inyectiva, la única forma de que $\bar{z}$ pertenezca a $\Delta$ es que $x + 3y = 0$. Así, los elementos de $\Delta$ son de la forma $(z, z, z)$ con $z \in E$ y por como está construido $B$ tendremos que $3z = 0$. □

Antes de poder demostrar que el cociente no puede ser suave si $\Delta$ es no trivial, necesitamos el siguiente lema demostrado en [ALA18, Lem. 2.8]:

**Lema 4.6.** *Sea $G$ un grupo de reflexión compleja finito actuando de manera irreducible en $\mathbb{C}^n$. Entonces, existe un elemento $\tau \in G$ tal que $(1 - \tau)$ es sobreyectivo.*

**Proposición 4.7.** *Si $S_3$ actúa en $A$ de tal forma que su representación analítica es la estándar y $A/G$ es suave, entonces $A \simeq E^2$ y $S_3$ actúa como en el Ejemplo 3.3.*

*Demostración.* Sea $\pi : B \to A$ la $G$-isogenia definida arriba. Tenemos que probar que $\Delta = \{0\}$. Sea $\bar{t} = (t, t, t) \in \Delta$ un elemento no trivial y sea $\sigma \in G$ un elemento tal que $(1 - \sigma)$ es sobreyectivo (podemos escoger un tal elemento por el Lema 4.6). Luego, existe un elemento $z \in B$ tal que $z - \sigma(z) = \bar{t}$ y así el estabilizador de $z$ contiene al elemento $(\bar{t}, \sigma) \in \Delta \times G$.

Note que $\Delta \cap E_{\sigma,B} = \{0\}$ para toda pseudoreflexión de $\sigma \in G$. Así, por el Lema 4.3, las únicas pseudoreflexiones en $\Delta \times G$ son las trasposiciones en $G = S_3$, y por ende $\mathrm{Stab}_G(z)$ no puede ser generado por pseudoreflexiones. Así, si $\Delta \neq \{0\}$, $A/G$ no puede ser suave por el Teorema de Chevalley-Shephard-Todd. □

### 4.1.2 El caso $G = G(6,6)$

Note que $G(6,6)$ es isomorfo al producto directo $G(3,3) \times \{\pm 1\}$. Como la acción de $S_3$ y $\mu_2 = \{\pm 1\}$ conmutan, seguiremos la estrategia usada en el caso anterior, notando que los reticulados son naturalmente $\mu_2$-invariantes.

**Proposición 4.8.** *Sea $G(6,6) = S_3 \times \mu_2$ actuando en una superficie abeliana $A$ de tal forma que su acción en $T_0(A)$ es la estándar de $S_3$ y la acción de $\mu_2$ es la obvia. Luego $A/G$ no puede ser suave.*

*Demostración.* Sea $\sigma = (1\,2)$ y sea:

$$\Lambda_B := \sum_{\tau \in S_3} \tau(L_\sigma \cap \Lambda_A).$$

el mismo reticulado de la construcción anterior. Como claramente todos los reticulados son $\mu_2$-invariantes, nuevamente obtenemos una $G$-isogenia $\pi : B \to A$ donde $B$ es de la forma:

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

y $S_3$ y $\mu_2$ actúan de forma natural. Por la Proposición 4.5, $\Delta$ consiste de elementos de la forma $(x, x, x) \in E^3$ tal que $3x = 0$. En particular, $\Delta$ es isomorfo a un subgrupo de $E[3]$ y por ende de orden 1, 3 o 9.

Asuma que $\Delta$ es trivial, eso es, que $A = B$. Luego la acción de $G = S_3 \times \mu_2$ en $B \simeq E^2$ induce una acción de $\mu_2$ en $B/S_3 \simeq \mathbb{P}^2$ (Recuerde que la acción de $S_3$ en $B$ es la del ejemplo 3.3). Solo necesitamos probar entonces que cualquier cociente de $\mathbb{P}^2$ por una acción no trivial del grupo $\mu_2$ no es suave.

Sea $\hat{M}$ una matriz de orden 2 en $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$. Queremos demostrar que existe un levantamiento de $\hat{M}$ en $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ de orden 2. Sea $M$ algún levantamiento de $\hat{M}$, luego $M^2 = \alpha Id$. Si consideramos $N = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} M$, entonces $N$ también es un levantamiento de $\hat{M}$ y cumple que $N^2 = Id$.

Así, tenemos 2 casos posibles (módulo diagonalizar y permutar los valores propios) de matrices en $\mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ que nos dan una acción no trivial en $\mathbb{P}^2$:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que ambas matrices tienen la misma imagen en $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ y por ende sus acciones en $\mathbb{P}^2$ son iguales. Así, como $M$ fija a la recta $[0 : 1 : a]$ y al punto

$[1:0:0]$, pero no fija un divisor que pase por el punto $[1:0:0]$, no es una pseudoreflexión en $[1:0:0]$ y por ende el cociente no es suave.

Asuma ahora que $\Delta$ tiene orden 3 y sea $\bar{t} = (t,t,t) \in \Delta$ un elemento no trivial (por lo que $t \in E[3]$ y $\Delta = \{0, (t,t,t), (-t,-t,-t)\}$. Sea $x \in E[3]$ un elemento no trivial distinto de $\pm t$ y considere $\bar{x} = (x, x+t, x-t)$. Luego podemos ver que el elemento $(\bar{t}, (1\,2\,3)) \in \Delta \rtimes G$ fija $\bar{x}$ y que ningún elemento de $G$ lo fija, por lo que toda pseudoreflexión que fije a $\bar{x}$ debe estar afuera de $G$. Sea $(\bar{s}, \sigma)$ tal pseudoreflexión, con $\bar{s} = (s,s,s) \in \Delta$.

Usando el Lema 4.3, podemos ver que $\sigma \in \{-(1\,2), -(2\,3), -(1\,3)\}$, donde $-\tau$ denota $(\tau, -1) \in S_3 \times \mu_2 = G$. Ahora, para $\sigma = -(1\,2)$ tendremos que $(\bar{s}, \sigma)$ fijará a $\bar{x}$ si y solo si $s = 2x + t \neq \pm t$ lo que contradice que $\bar{s} \in \Delta$. Para $\sigma = -(2\,3)$ tendremos que $(\bar{s}, \sigma)$ fijará a $\bar{x}$ si solo si $s = 2x + 2t \neq \pm t$ lo que tampoco es posible, y finalmente para $\sigma = -(1\,3)$ tendremos que $(\bar{s}, \sigma)$ fijará a $\bar{x}$ si y solo si $s = 2x \neq \pm t$ que tampoco puede suceder. Así, podemos concluir que no existe pseudoreflexión de la forma $(\bar{s}, \sigma)$ que fije a $\bar{x}$ por lo que $\mathrm{Stab}_{\Delta \rtimes G}(\bar{x})$ no está generado por pseudoreflexiones y por ende $A/G$ no puede ser suave.

Asuma finalmente que $\Delta$ tiene orden 9. Afirmamos que en este caso el par $(A, G)$ es isomorfo al par $(B, G)$. Esto nos reducirá al caso con $\Delta$ trivial, que ya fue trabajado. Para probar esto, fijemos la base $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$ de $T_0(B) = T_0(A) \subset \mathbb{C}^3$. Luego la representación analítica de $G$ está dada por los siguientes valores en sus generadores:

$$\rho_a((1\,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_a(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \rho_a((1\,2\,3)) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, con esta base y este $\Delta$, la representación analítica de $B \to A$ está dada por la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En efecto, esta matriz corresponde al morfismo que envía $(x, y, -x-y) \in B \subset E^3$ a $(-x-2y, 2x+y, -x+y) \in A \subset E^3$ y por ende su núcleo es precisamente los elementos de la forma $(x,x,x) \in E[3]^3 \subset B$, o sea, $\Delta$. En orden de probar que los pares $(A, G)$ y $(B, G)$ son isomorfos es suficiente mostrar que la imagen de esta representación de $G$ bajo conjugación por $M$ es $G$ nuevamente. Un calculo directo nos da que:

$$\begin{aligned}
M\rho_a((1,-1))M^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \rho_a(-1), \\
M\rho_a((1,-1))M^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \rho_a(-1)\rho_a((1\,2)), \\
M\rho_a((1,-1))M^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho_a((1\,2\,3)),
\end{aligned}$$

Y estos claramente generan el mismo grupo $G$. □

## 4.2. El caso $G(m,p)$, con $m \geq 2$ y $p < m$.

Ahora estudiaremos el caso en que $G = G(m,p)$ con $m \geq 2$ y $p < m$ actúa en una superficie abeliana $A$. Recordemos que $G = H \rtimes S_2$, donde $H \subset \mu_m^2$ actúa por coordenadas mientras que $S_2$ permuta las coordenadas. Sea $E_k$ la imagen de $\mathbb{C}e_k$ en $A$ bajo la proyección. Demostraremos que es una curva elíptica. Consideremos los elementos $\rho = (\zeta_m^p, 1)$ (Distinto de $1 = (1,1)$ pues $p < m$) y $\sigma = (1\,2)$ en $G$, luego tenemos que $\operatorname{im}((1-\rho)\sigma^{k-1}) = \mathbb{C}e_k$. Esto nos dice que $E_k = \operatorname{im}((1-\rho)\sigma^{k-1})(A)$ es una curva elíptica.

Sea $\Lambda_A$ el reticulado de $A$ en $\mathbb{C}^2$. Luego $\mathbb{C}e_k \cap \Lambda_A$ corresponde al reticulado de $E_k$ en $\mathbb{C} = \mathbb{C}e_k$. Podemos definir el siguiente subreticulado $G$-estable de $\Lambda_A$:

$$\Lambda_B := (\mathbb{C}e_1 \cap \Lambda_A) \oplus (\mathbb{C}e_2 \cap \Lambda_A).$$

Esto nos define una $G$-isogenia $\pi : B \to A$ donde $B = \mathbb{C}^2/\Lambda_B$. Además, tenemos que $B \simeq E_1 \times E_2 \simeq E^2$ y $\pi|_{E_k}$ es inyectiva. Sea $\Delta$ el núcleo de $\pi$. Como en los casos anteriores, estudiaremos los posibles cocientes $A/G$ estudiando los posibles cocientes $B/(\Delta \rtimes G)$, y para esto estudiaremos $\Delta$.

**Lema 4.9.** *Si $G$ actúa en $A$ como arriba y $m \neq 2$, entonces las curvas elípticas $E_k$ tienen automorfismos no triviales.*

*Demostración.* El elemento $(\zeta_m, \zeta_m^{-1})$ induce un automorfismo de orden $m$ en $E_k$. Así, si $m \neq 2$, $E$ tiene automorfismos no triviales. $\square$

**Remark 4.10.** Note que para cada caso del lema anterior $E$ es una curva elíptica específica y además se tiene que:

- Si $m = 2, 4$, entonces $A$ tiene 3 elementos no triviales $\zeta_2$-invariantes y si $m = 4$ entonces solo uno de estos elementos de 2-torsión es $\zeta_4$-invariante.
- Si $m = 3, 6$, entonces $A$ tiene 2 elementos no triviales $\zeta_3$-invariantes y si $m = 6$ entonces estos mismos dos elementos de 3-torsión cumplen que $\zeta_6 t = -t$.

Ahora bien, necesitamos saber sobre la estructura de $\Delta$ para poder caracterizarlo y analizarlo, y el siguiente lema nos da información sobre eso:

**Lema 4.11.** *Sea $\Delta \neq \{0\}$. Las coordenadas de los elementos de $\Delta$ son $\zeta_m^p$-invariantes, por lo que particularmente tenemos que:*

- *Las coordenadas son de 2-torsión si $(m,p) \in \{(2,1),(4,1),(4,2),(6,3)\}$.*
- *Las coordenadas son de 3-torsión si $(m,p) \in \{(3,1),(6,2)\}$.*
- *$\Delta$ es trivial si $(m,p) = (6,1)$.*

*Demostración.* Sea $t = (t_1, t_2) \in \Delta$ y consideremos el elemento $\tau = (\zeta_m^p, 1)$. Luego:

$$(1-\tau)(t) = ((1-\zeta_m^p)t_i, 0).$$

Como $(x, 0) \notin \Delta$ para todo $x \in E$ con $x \neq 0$ por construcción, debe ocurrir que $t_i$ es $\zeta_m^p$-invariante. La afirmación de la torsión se sigue inmediatamente. $\square$

Aparte de saber como debe ser $\Delta$, también necesitamos saber como serán las pseudoreflexiones en $\Delta \rtimes G$. Para eso usaremos el Lema 4.3 sobre pseudoreflexiones para $\Delta \rtimes G$. Definamos los elementos:

$$\begin{aligned} \rho &:= (\zeta_m, \zeta_m^{-1}) \in H \subset G; \\ \sigma &:= (1\,2) \in S_2 \subset G; \\ \tau &:= (\zeta_m^p, 1) \in H \subset G. \end{aligned}$$

Luego, hay 2 tipos de pseudoreflexiones en G:

(I) Conjugados de $\rho^a\sigma$ para $0 \leq a < \frac{m}{p}$;

(II) Conjugados de potencias de $\tau$;

Y las curvas elípticas en B correspondientes son:

$$E_{\rho^a\sigma} = \{(x, -\zeta_m^a x) \mid x \in E\};$$
$$E_\tau = \{(x, 0) \mid x \in E\}.$$

Recordando ahora que los elementos de la forma $(x, 0)$ no están en $\Delta$ por construcción de la isogenia $\pi : B \to A$, usando el Lema 4.3 tenemos que:

**Lema 4.12.** *Toda pseudoreflexión de $\Delta \rtimes G$ que no está en $G$ es un conjugado de $(\bar{t}, \rho^a\sigma)$, donde $0 \leq a < \frac{m}{p}$, $\bar{t} = (t, -\zeta_m^a t) \in \Delta$ y $t$ es $\zeta_m^p$-invariante.*

Llamaremos a este tipo de pseudoreflexión de tipo (III).

Finalmente, el siguiente lema lo utilizaremos para construirnos un elemento tal que su estabilizador no sea generado por pseudoreflexiones.

**Lema 4.13.** *Sea $\Gamma$ la imagen de $\Delta$ bajo la proyección $B \to E = E_1$. Entonces para $(x, y) \in B = E^2$ se tiene que:*

1. *Si las órbitas de $x$ e $y$ bajo la acción de $\mu_m$ sobre $E$ son distintas y de orden $m$, entonces ningún elemento no trivial de $G$ pertenecerá a $\mathrm{Stab}_{\Delta\rtimes G}(x, y)$.*

2. *Si las órbitas de $x$ e $y$ bajo la acción de $\Gamma \rtimes \mu_m$ sobre $E$ son distintas, entonces $\mathrm{Stab}_{\Delta\rtimes G}(x, y) \subset \Delta \rtimes H$.*

*Demostración.* Para demostrar el item 1., notemos que como las órbitas de $x$ e $y$ son distintas bajo la acción de $\mu_m$, el elemento $(x, y)$ no puede ser fijado si se permutan sus coordenadas. Además, como solo el elemento $1 \in \mu_m$ fija a $x$ e $y$ pues sus órbitas tienen orden $m$, se tiene que solo el elemento $(1, 1) \in \mu_m^2$ fija al elemento $(x, y)$. Para 2., como las órbitas de $x$ e $y$ son distintas bajo la acción de $\Gamma \rtimes \mu_m$, entonces no existe elemento de $\Delta \rtimes H$ que nos lleve $x$ en $y$. Así, un elemento afuera de $\Delta \rtimes H$ no podrá fijar a $(x, y)$. $\square$

Ahora podemos empezar un estudio caso por caso de los $\Delta$ posibles. Recordemos que nuestra herramienta principal será el Teorema de Chevalley-Shephard-Todd que nos dice que $A/G \simeq B/(\Delta \rtimes G)$ es suave si y sólo si los estabilizadores en $\Delta \rtimes G$ de cada punto en $B$ está generado por pseudoreflexiones.

### 4.2.1 El caso $G = G(2,1)$

Por el Lema 4.11 sabemos que $\Delta$ es un subgrupo de elementos 2-torsión y por construcción de la $G$-isogenia que no hay elementos de la forma $(t,0)$ con $t \in E$ y que $\Delta$ debe ser $G$-invariante. Con esto tenemos suficiente información para caracterizar $\Delta$.

Consideremos un elemento $(t,s) \in \Delta$ con $t,s \in E[2]$ y $t \neq s$, luego como $\Delta$ es $G$-invariante, debe ser invariante bajo la acción de $\sigma = (1\,2) \in S_2$ y por ende el elemento $(s,t)$ debe estar en $\Delta$ y como $\Delta$ es un grupo aditivo, $(t+s, s+t)$ también debe pertenecer. Así, como $E[2] = \{0, s, t, s+t\}$ no podemos agregar otro elemento sin obtener algo de la forma $(t,0)$, por lo tanto este caso está terminado.

Ahora, consideremos un elemento de la forma $(t,t) \in \Delta$ con $t \in E[2]$, podemos notar que $\Delta = \{0, (t,t)\}$ es un grupo aditivo $G$-invariante y por ende cumple con lo pedido. Si agregamos un elemento de la forma $(r,s)$ con $r \neq s, s \neq t, r \neq t, r,s \in E[2]$, caeremos el en caso anterior y por ende ya fue analizado, y si agregamos un elemento de la forma $(t,s)$ podremos crear un elemento de la forma $(0,s)$ que no está permitido. Así el único elemento posible que podría estar es $(s,s)$ con $s \in E[2], s \neq t$ y por ende también debe estar el elemento $(s+t, s+t)$. Es claro que este subgrupo es $G$-invariante (e incluso $G$ actúa trivialmente en él) y por ende es un caso posible. Con esto nuestro análisis está terminado y los posibles $\Delta$ son:

1. $\Delta = \{0\}$,
2. $\Delta = \langle (t,t) \rangle$ con $t \in E[2]$,
3. $\Delta = \{(t,t) \mid t \in E[2]\}$,
4. $\Delta = \{(0,0), (t_1,t_2), (t_2,t_1), (t_1+t_2, t_1+t_2)\}$ con $t_1, t_2 \in E[2]$, $t_1 \neq t_2$.

El caso (1) tenemos que corresponde al Caso (a) de nuestro teorema principal y sabemos que el cociente $A/G \simeq E^2/G$ es suave gracias al ejemplo 3.2.

Para el caso (2), denotemos por $\bar{t}$ el elemento $\bar{t} = (t,t)$ en $\Delta$. Como $E[2] \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ tenemos que existe un elemento $(s,s) \notin \Delta$ con $s$ un elemento de 2-torsión. Sea $t_1 \in E[4]$ tal que $2t_1 = t$ y sea $t_2 = t_1 + s \in E[4]$. Sea $\bar{x} = (t_1, t_2) \in E^2$. Podemos notar que $(\bar{t}, \rho) \in \Delta \rtimes G$ fija al elemento $\bar{x}$. Además, como las órbitas de $t_1$ y $t_2$ bajo la acción de $\mu_2$ son distintas (pues $t_1 \neq \pm t_2$) y de cardinal 2, por la parte 1 del Lema 4.13 podemos notar que ningún elemento de $G$ fija $\bar{x}$, por lo que las únicas pseudoreflexiones que pueden fijar a $\bar{x}$ deben ser de tipo (III), o sea $(\bar{t},\sigma)$ o $(\bar{t},\rho\sigma)$, pero como $t_1 \neq \pm t_2$ tenemos que ambas no fijan a $\bar{x}$.

Así, $\mathrm{Stab}_{\Delta\rtimes G}(\bar{x})$ no está generado por pseudoreflexiones y por el Teorema de Chevalley-Shephard-Todd, el cociente no puede ser suave.

En el caso (3), afirmamos que el par $(A,G)$ es isomorfo al par $(E^2,G)$. Esto nos reduce al caso con $\Delta$ trivial que ya trabajamos. Para probar la afirmación, consideremos la base canónica de $T_0(A)=T_0(B)=\mathbb{C}^2$. Luego la representación analítica de $G$ esta dada por los siguientes valores en sus generadores:

$$\rho_a((1,-1)) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \rho_a((1\,2)) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ahora, con esta base y este $\Delta$, podemos ver la G-isogenia $B\to A$ como el morfismo $E^2\to E^2$ dado por la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

En efecto, esta matriz corresponde al morfismo que envía $(x,y)\in B=E^2$ a $(x+y,x-y)\in A\simeq E^2$ y por ende su núcleo es precisamente los elementos de $\Delta$. En orden de probar que los pares $(A,G)$ y $(B,G)$ son isomorfos, basta probar que la imagen de esta representación de $G$ bajo conjugación por $M$ es $G$ nuevamente:

$$\begin{aligned}
M\rho_a((1,-1))M^{-1} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \rho_a((1\,2)),\\
M\rho_a((1\,2))M^{-1} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \rho_a((1,-1)),
\end{aligned}$$

Y estos claramente generan el mismo grupo $G$.

En el caso (4), consideremos el elemento $\bar{t}=(t_1',t_2')$ donde $2t_1'=t_1$ y $2t_2'=t_2$. Como las órbitas de $t_1$ y $t_2$ son distintas bajo la acción de $\mu_2$ y son de orden 2, por la parte 1 del Lema 4.13 tenemos que $G$ no puede fijar $\bar{t}$. Además, como también las órbitas de $t_1$ y $t_2$ son distintas bajo la acción de $\Gamma \rtimes \mu_2$, pues ambas orbitas son precisamente las preimágenes de elementos distintos de 2-torsión bajo el morfismo multiplicación por 2, entonces por la parte 2 del Lema 4.13 se tiene que $\mathrm{Stab}_{\Delta \rtimes G}(\bar{x}) \subset \Delta \rtimes H$. Así, revisando caso por caso podemos ver que el único elemento que fija a $\bar{t}$ es $((t_1, t_2), (-1, -1)) \in \Delta \rtimes G$, y como este estabilizador no esta generado por pseudoreflexiones podemos ver que $A/G$ no es suave.

### 4.2.2 El caso $G = G(4, 2)$

Como $G(4, 2)$ contiene $G(2, 1)$, empezaremos por la lista anterior de posibles $\Delta$. Sin embargo, estos también deben ser estables bajo la acción del nuevo elemento $(i, i) \in H(4, 2)$ (donde $i = \zeta_4$). Definiendo como $t_0$ el único elemento no trivial $i$-invariante en $E$, tenemos las siguientes posibilidades:

1. $\Delta = \{0\}$,
2. $\Delta = \langle (t_0, t_0) \rangle$,
3. $\Delta = \{(t, t) \mid t \in E[2]\}$,
4. $\Delta = \{(0, 0), (t, t + t_0), (t + t_0, t), (t_0, t_0)\}$ con $t \in E[2]$, $t \neq t_0$.

El caso (1) no da un cociente suave $A/G$ pues si consideramos el elemento $\bar{t} = (t_0, 0)$, entonces como las órbitas de $t_0$ y 0 son distintas bajo la acción de $\mu_4$, por la parte 2 del Lema 4.13 tenemos que $\mathrm{Stab}_G(\bar{t}) \subset H$, y analizando elemento por elemento, obtenemos que $\mathrm{Stab}_G(\bar{t}) = \langle (\zeta_4, \zeta_4), (-1, 1), (1, -1) \rangle$. Así, como el primer elemento no es una pseudoreflexión y no está generado por las otras dos pseudoreflexiones, tenemos que el cociente no es suave.

El caso (2) corresponde al Caso (c) de nuestro Teorema 1 (y el cociente $A/G$ será suave como probaremos en la Sección 5). En efecto, la $G$-isogenia $B \to A$ corresponde en este caso al morfismo $E^2 \to E^2$ con $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ dado por la matriz:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i - 1 \end{pmatrix},$$

y los generadores dados en el Caso (c) corresponden a los conjugados por esta matriz de las siguientes matrices:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

que son las expresiones matriciales de los generadores $(-1,1),(-i,i) \in H$ y $(1\,2) \in S_2$ de $G = H \rtimes S_2$. En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
N\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}N^{-1} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & i-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{-1-i}{2}\\ 0 & \frac{-1-i}{2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1 & 1+i\\ 0 & 1\end{pmatrix},\\
N\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}N^{-1} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & i-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{-1-i}{2}\\ 0 & \frac{-1-i}{2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-i & i-1\\ 0 & i\end{pmatrix},\\
N\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}N^{-1} &= \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & i-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{-1-i}{2}\\ 0 & \frac{-1-i}{2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-1 & 0\\ i-1 & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Obteniendo las matrices dadas en nuestro Caso $(c)$ de nuestro teorema.

En los casos (3) y (4), afirmamos que el par $(A,G)$ es isomorfo al par $(B,G)$. Esto nos reducirá ambos casos al caso con $\Delta$ trivial, que fue ya trabajado. Para probar esta afirmación, para el caso (3) considere como en $G = G(2,1)$ la base canónica de $T_0(A) = T_0(B) = \mathbb{C}^2$. Luego, la representación analítica de $G$ está dada por las siguientes matrices en sus generadores:

$$\rho_a((i,-i)) = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}, \quad \rho_a((-1,1)) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \rho_a((1\,2)) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ahora, con esta base y con el $\Delta$ del caso (2), nosotros ya sabemos que $B \to A$ se ve como $E^2 \to E^2$ con la matriz

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Correspondiente a la misma matriz del caso (4.2.1). Por lo que basta con mostrar que el nuevo generador $\rho_a((i,-i))$ cae en otro nuevo generador de $\rho_a(G)$ bajo conjugación por $M$. Y en efecto tenemos que:

$$\begin{aligned}
M\rho_a((1,-1))M^{-1} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix} = \rho_a((i,i))\rho_a((1\,2)).
\end{aligned}$$

Que claramente también ayuda a generar $G(4,2)$.

Con el $\Delta$ del caso (4), la matriz correspondiente de $B \to A$ es:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Y nuevamente, un calculo directo nos da que:

$$\begin{aligned}
N\rho_a((1,-1))N^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho_a((-1,1))\rho_a((1\,2)), \\
N\rho_a((i,-i))N^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \rho_a((1\,2))\rho_a((-i,i)), \\
N\rho_a((1\,2))N^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho_a((1\,2)).
\end{aligned}$$

Y estos claramente generan el mismo grupo $G$.

### 4.2.3 El caso $G = G(4,1)$

Como $G(4,1)$ contiene a $G(4,2)$, empezaremos con la lista anterior de $\Delta$. Por el Lema 4.11 tenemos que las coordenadas de los elementos deben ser invariantes bajo multiplicación por $i$, por lo que los casos posibles son:

1. $\Delta = \{0\}$,
2. $\Delta = \langle (t_0, t_0) \rangle$.

El caso (1) claramente corresponde al Caso $(a)$ de nuestro teorema 1 y sabemos que es suave por el Ejemplo 3.2.

Asumamos entonces que $\Delta$ es no trivial y consideremos el elemento $\bar{t} = (s,t) \in B$ con $s \in E[2]$, $s$ *no* $i$-invariante, y $2t = t_0$. Como $s$ y $t$ tienen distinto orden, tienen distintas órbitas bajo la acción de $\Gamma \rtimes \mu_4$ y por ende por la parte 2 del Lema 4.13 tenemos que $\mathrm{Stab}_{\Delta \rtimes G}(\bar{t}) \subset \Delta \times H$. Así, revisando elemento por elemento el estabilizador de $(s,t)$ será $\langle((t_0,t_0),(i,-1))\rangle$ y como por el Lema 4.12 sabemos que el generador no es una pseudoreflexión, tenemos que $A/G$ no es suave.

### 4.2.4 El caso $G = G(3,1)$

Por el Lema 4.11 sabemos que las coordenadas de los elementos de $\Delta$ serán $\zeta_3$-invariantes. Ahora, como mencionamos en 4.10 sólo existen 2 tales elementos no nulos que denotaremos por $s_0$ y $-s_0$. Recordando también que no existen elementos de la forma $(s,0)$ en $\Delta$, por lo que claramente no pueden convivir elementos de la forma $(s_0,s_0)$ y $(s_0,-s_0)$, tenemos que los posibles $\Delta$ serán:

1. $\Delta = \{0\}$,
2. $\Delta = \langle(s_0,s_0)\rangle$,
3. $\Delta = \langle(s_0,-s_0)\rangle$.

El caso (1) claramente corresponde al Ejemplo 3.2 y por ende es suave, además de ser el caso (a) del teorema 1.

En el caso (2) el Lema 4.12 y el estudio de las pseudoreflexiones y sus curvas elípticas correspondientes hecho en la página 26 nos dice que las únicas pseudoreflexiones en $\Delta \rtimes G$ son las que provienen de $G$. En particular, con tal de probar que $A/G$ no puede ser suave, es suficiente con exhibir un elemento en $B$ tal que su estabilizador en $\Delta \rtimes G$ tiene elementos que no están en $G$. Ahora, por el Lema 4.6 sabemos que existirá un elemento $\tau \in G$ tal que $1-\tau$ es sobreyectiva. Luego, existe un elemento $z \in B$ tal que $z - \tau(z) = (s_0,s_0)$. Esto implica que $((s_0,s_0),\tau) \in \Delta \rtimes G$ estabiliza $z$, probando así que $A/G$ es no suave en este caso.

En el caso (3), considere el elemento $\bar{t} = (s,-s) \in B$ con $s \in E[3]$ y $s$ no $\zeta_3$-invariante. Note que $\langle s_0\rangle \times \mu_3$ actúa en $E[3]$ y particularmente, si $s \in E[3]$ *no* es $\zeta_3$-invariante, entonces $\langle s_0\rangle$ y $\mu_3$ actúan de la *misma forma* (tienen las mismas órbitas). Así la orbita de $s$ será $\{s, s+s_0, s-s_0\}$. En particular, podemos ver que $s$ y $-s$ caen en órbitas distintas por esta acción y así por la parte 2 del Lema 4.13 el estabilizador de $\bar{s}$ debe estar contenido en $\Delta \times H$. Luego, el estabilizador de $\bar{s}$ será $\langle((s_0,-s_0),(\zeta_3,\zeta_3))\rangle$ ó $\langle((s_0,-s_0),(\zeta_3^2,\zeta_3^2))\rangle$ dependiendo de la elección de $s$. Como estos estabilizadores no están generados por pseudoreflexiones, nuevamente tenemos que $A/G$ no es suave.

### 4.2.5 El caso $G = G(6,2)$

Como $G(6,2)$ contiene a $G(3,1)$, empezaremos de los posibles $\Delta$ de ese caso. Note que todos esos posibles $\Delta$ son subgrupos de 3-torsión. Si $\bar{x} \in B$ denota un elemento con coordenadas de 2-torsión, podemos ver que su estabilizador en $\Delta \rtimes G$ solo puede contener elementos en $G$ pues debe preservarse el orden de las coordenadas. Así, considere el elemento $\bar{t} = (t, 0)$ donde $t$ es un elemento de 2-torsión no trivial. Como las órbitas de $t$ y 0 son distintas bajo la acción de $\mu_6$, por la parte 2 del Lema 4.13 tenemos que $\mathrm{Stab}_G(\bar{t}) \subset H$ y analizando elemento por elemento obtenemos que $\mathrm{Stab}_G(\bar{t}) = \langle(-1,-1),(1,\zeta_3)\rangle$. Como el primer elemento no es una pseudoreflexión y no está generado por el otro generador, tenemos que $A/G = B/(\Delta \rtimes G)$ no puede ser suave sin importar la elección de $\Delta$.

### 4.2.6 El caso $G = G(6,3)$

Como $G(6,3)$ contiene $G(2,1)$, empezaremos con los posibles $\Delta$ para ese caso. Note que estos son subgrupos de 2-torsión. Así, como notamos en el caso anterior, si $\bar{x} \in B$ denota un elemento con coordenadas de 3-torsión, su estabilizador en $\Delta \rtimes G$ solo contiene elementos en $G$. Considere el elemento $\bar{s} = (s_0, 0)$ donde $s_0$ es un elemento $\zeta_3$-invariante (y por ende 3-torsión). Como las órbitas de $s_0$ y 0 son distintas bajo la acción de $\mu_6$, por la parte 2 del Lema 4.13 tenemos que $\mathrm{Stab}_G(\bar{t}) \subset H$ y nuevamente analizando elemento por elemento obtenemos que $\mathrm{Stab}_G(\bar{t}) = \langle(\zeta_3, \zeta_3^{-1}),(1,-1)\rangle$. Como el primer elemento no es una pseudoreflexión y no está generado por el otro generador, tenemos que $A/G = B/(\Delta \rtimes G)$ no puede ser suave sin importar la elección de $\Delta$.

## 4.3. Resumen de lo ya realizado

Realicemos un resumen de lo ya demostrado. Recuerde que nuestro teorema principal es:

**Teorema 4.14.** *Sea $A$ una superficie abeliana y sea $G$ un grupo finito de automorfismos de $A$ que fijan el origen. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

*(1) $A/G$ es suave y la representación analítica de $G$ es irreducible.*

*(2) $A/G \simeq \mathbb{P}^2$.*

*(3) Existen curvas elípticas $E$ tal que $A \simeq E^2$ y $(A, G)$ satisface exactamente uno de los siguientes casos:*

*(a) $G \simeq C^2 \rtimes S_2$ donde $C$ es un subgrupo cíclico no trivial de los automorfismos de $E$ que fijan el origen; Aquí la acción de $C^2$ es por coordenadas mientras que $S_2$ permuta las coordenadas.*

*(b) $G \simeq S_3$ y actúa en*

$$A \simeq \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

*por permutaciones.*

*(c) $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$ y $G$ es un subgrupo de orden 16 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$ generado por:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & i-1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i-1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

*actuando en $A \simeq E^2$ de forma obvia.*

En la Proposición 2.1 demostramos la dirección (2) $\Rightarrow$ (1) del teorema, mientras que en transcurso del Capítulo 4 demostramos la dirección (1) $\Rightarrow$ (3), usando el Teorema de Chevalley para obtener que $G$ debe ser un grupo de reflexión compleja y luego demostrando que es isomorfo a uno de los casos de (3), o simplemente que el cociente no es suave.

Para la dirección (3) $\Rightarrow$ (2), ya sabemos que los Casos (a) y (b) darán un cociente suave e isomorfo a $\mathbb{P}^2$ por los Ejemplos 3.2 y 3.3 del Capítulo 3, por lo que lo único que nos falta en esta implicación es demostrar que el Caso (c) de nuestro teorema sí dará un cociente suave e isomorfo a $\mathbb{P}^2$. De esto se trata el siguiente capítulo.

# Capítulo 5

# Un caso excepcional de un cociente suave en dimensión 2.

Recordemos que en la sección 4.2.2 mostramos que el caso $(c)$ del Teorema 1 se obtiene de la siguiente forma:

Sea $G = G(4,2)$ y sea $B = E^2$ con $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$. Denotemos por $t_0$ el único elemento $i$-invariante en $E$ y por $\Delta$ al conjunto $\Delta = \langle (t_0, t_0) \rangle \in E^2$. Notemos que $A \simeq E^2 \simeq E^2/\Delta$ pues podemos identificar el morfismo $\pi$ que construimos en la sección 4.2.2 con la isogenia $E^2 \to E^2 : (x,y) \to (x-y, (i-1)y)$ que claramente tiene núcleo $\Delta$. El grupo $G$ del enunciado de nuestro Teorema 1 no es más que la conjugación de los generadores de $G(4,2)$ por la matriz que define a la isogenia anteriormente dada.

Sea $G_1 = G(4,1)$. Notando que $\Delta = \langle (t_0, t_0) \rangle$ es invariante por $G_1$, podemos extender la $G$-isogenia $\pi : B \to A$ a una $G_1$-isogenia. Denotemos por $\Delta^*$ el núcleo de la isogenia $\pi^*$ que cumple que la composición $\pi^* \circ \pi : B \to B$ corresponde a $(q_0 \times q_0)$, donde $q_0$ es el morfismo cociente $E \to E/\langle t_0 \rangle \simeq E$. Note que $\Delta^*$ es un subgrupo de orden 2 de $A$ y por ende $G_1$ actúa trivialmente en él. También se tiene que como $G$ es un subgrupo de índice 2 de $G_1$ entonces es normal en él. En particular, las acciones de $G_1$ y $\Delta^*$ en $A$ conmutan y por ende tenemos un diagrama conmutativo de cubrimientos de Galois

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\Delta"'] \arrow[rr, bend left, "\langle t_0\rangle^2"] & A \arrow[r, "\Delta^*"'] \arrow[d, "G"] \arrow[dd, bend right, "G_1"'] & B \arrow[d, "G"'] \arrow[dd, bend left, "G_1"] \\
 & A/G \arrow[r] \arrow[d] & B/G \arrow[d] \\
 & A/G_1 \arrow[r] & \mathbb{P}^2,
\end{tikzcd}$$

donde líneas paralelas tienen el mismo grupo de Galois. Como el cociente $A/(\Delta^* \times G_1) \simeq B/G_1$ es isomorfo a $\mathbb{P}^2$ por el Ejemplo 3.2, tenemos que $A/G$ es un $(G_1/G) \times \Delta^*$-cubrimiento de $\mathbb{P}^2$, o sea, un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$-cubrimiento.

**Proposición 5.1.** *El cociente $A/G$ es isomorfo a $\mathbb{P}^2$.*

Esta proposición finaliza la demostración de (3) $\Rightarrow$ (2) en nuestro Teorema. 1.

*Demostración.* Como $A/G$ es normal y $A/G \to B/G_1$ es un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$-cubrimiento de $\mathbb{P}^2$, usaremos los resultados de [Par91] para mostrar que debe ser $\mathbb{P}^2$. Primero estudiaremos las ramificaciones de este cubrimiento.

Afirmamos que el cubrimiento está ramificado en 3 líneas en posición general. En efecto, denotemos por $s$ el elemento no trivial de $G_1/G$, y por $t_0^*$ el elemento no trivial de $\Delta^*$. Para un elemento $\bar{x} \in A$, escribamos $\bar{x} = \pi(a, b)$ con $(a, b) \in B = E^2$ y denotemos por $[\bar{x}]$ su imagen en $A/G$. Como la acción de $\Delta^*$ es por traslaciones, tenemos que $t_0^* \cdot [\bar{x}] = [\pi(a, b) + t_0^*] = [\pi(a + t_0, b)]$, mientras que la acción de $s$ está dada por $s \cdot [\bar{x}] = [\pi(ia, b)]$ pues $(i, 1) \in H(4, 1) \subset G(4, 1)$ es un levantamiento de $s$. Así, el conjunto de puntos fijos en $A/G$ por $s$, $t_0^*$ y $st_0^*$ es respectivamente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fix}_{A/G}(s) &= \bigcup_{\tau \in G} \{[\pi(a, b)] \mid \tau \cdot \pi(a, b) = \pi(ia, b)\}, \\
\mathrm{Fix}_{A/G}(t_0^*) &= \bigcup_{\tau \in G} \{[\pi(a, b)] \mid \tau \cdot \pi(a, b) = \pi(a + t_0, b)\}, \\
\mathrm{Fix}_{A/G}(st_0^*) &= \bigcup_{\tau \in G} \{[\pi(a, b)] \mid \tau \cdot \pi(a, b) = \pi(ia + t_0, b)\}.
\end{aligned}$$

Note que podemos calcular la preimagen de los conjuntos que componen a estas uniones en $B = E^2$ simplemente remplazando $[\pi(a, b)]$ por $\pi(a, b)$. En particular, para cada $\tau \in G$ fijo denotaremos como $D_s(\tau)$, $D_{t_0^*}(\tau)$ y $D_{st_0^*}(\tau)$ a la imagen bajo el morfismo $(q_0 \times q_0)$ de las preimagenes de estos conjuntos:

1. $D_s(\tau) = (q_0 \times q_0)(\{\pi(a,b) \mid \tau \cdot \pi(a,b) = \pi(ia,b)\})$,
2. $D_{t_0^*}(\tau) = (q_0 \times q_0)(\{\pi(a,b) \mid \tau \cdot \pi(a,b) = \pi(a+t_0,b)\})$,
3. $D_{st_0^*}(\tau) = (q_0 \times q_0)(\{\pi(a,b) \mid \tau \cdot \pi(a,b) = \pi(ia+t_0,b)\})$

Por ejemplo, sea $\tau = (i,i) \in G$ y calculemos $D_s(\tau)$. Necesitamos encontrar los puntos que cumplen que:

$$\{(a,b) \mid \pi(ia,ib) = \pi(ia,b)\},$$

o sea, los puntos que:

$$\{(a,b) \mid \pi(0,ib-b) = \pi(0,0)\}.$$

Así, $(0,ib-b) \in \Delta$ y como $\Delta = \{(0,0),(t_0,t_0)\}$ tenemos que la única opción es que $ib-b=0$. Luego $b=0$ ó $b=t_0$ y tenemos que

$$\{(a,b) \mid \pi(ia,ib) = \pi(ia,b)\} = E \times \{0,t_0\}.$$

Ahora, como el morfismo $q_0$ es sobreyectivo y $q_0(t_0)=0$ por definición, tenemos que su imagen bajo el morfismo $q_0 \times q_0 : B \to A \to B$ (que denotamos $D_s(\tau)$) es

$$D_s(\tau) = E \times \{0\}.$$

Note que también este conjunto puede ser discreto. Por ejemplo, sea $\tau = (i,-i)$ y calculemos $D_{t_0^*}(\tau)$. Queremos los puntos que cumplen que:

$$\{(a,b) \mid \pi(x+t_0-ix, y+iy) = \pi(0,0)\},$$

por lo que tenemos 2 casos. Primero, si $x+t_0-ix=0$ e $y+iy=0$, entonces $q_0(x)=t_0$ y $q_0(y)=0$, por lo que obtenemos como imagen el punto $(t_0,0)$. En el caso en que $x-ix+t_0=t_0$ e $y+iy=t_0$, tenemos que $q_0(x)=0$ y $q_0(y)=t_0$, y obtenemos el punto $(0,t_0)$, por lo que $D_{t_0^*}(\tau) = \{(t_0,0),(0,t_0)\}$.

Sean $D_s$, $D_{t_0^*}$ y $D_{st_0^*}$ los conjuntos:

$$D_s := \bigcup_{\tau \in G} D_s(\tau), \qquad D_{t_0^*} := \bigcup_{\tau \in G} D_{t_0^*}(\tau) \qquad \text{y} \qquad D_{st_0^*} := \bigcup_{\tau \in G} D_{st_0^*}(\tau),$$

y sea $E[2] = \{0,t_0,t_1,t_2\}$ donde $t_0$ es el único elemento $i$-invariante no trivial de $E$. Luego tenemos que:

- $D_s = (E \times \{0\}) \cup (\{0\} \times E) \cup \{(t_0,t_1),(t_0,t_2),(t_1,t_0),(t_2,t_0)\}$;
- $D_{t_0^*} = (E \times \{t_1\}) \cup (E \times \{t_2\}) \cup (\{t_1\} \times E) \cup (\{t_2\} \times E) \cup \{(0,t_0),(t_0,0)\}$;

- $D_{st_0^*} = (E \times \{t_0\}) \cup (\{t_0\} \times E) \cup \{(0, t_1), (0, t_2), (t_1, 0), (t_2, 0)\}$.

El lugar de ramificación de $A/G \to B/G_1 \simeq \mathbb{P}^2$ corresponde entonces a la imagen de las componentes de dimensión 1 de estos conjuntos por el morfismo cociente $B \to B/G_1$.

Consideremos por ejemplo el conjunto $D_1 = E \times \{0\} \subset D_s$. Como $(1\,2) \in G_1$ claramente permuta este conjunto con la otra componente de dimensión 1 de $D_s$, podemos ver que la imagen de los divisores de $D_s$ en $\mathbb{P}^2$ corresponden a la imagen de $D_1$. Luego, es fácil ver que la imagen de $D_1$ en $B/H_1 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ es $\mathbb{P}^1 \times \{P\}$ para cierto punto $P = [a_0 : b_0] \in \mathbb{P}^1$ (gracias al Ejemplo 3.2). Para ver ahora que la imagen corresponde a una línea, consideremos el morfismo entre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y $\mathbb{P}^2$ dado por:

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2,$$

$$([u_1 : v_1], [u_2, v_2]) \to [v_1 v_2 : -v_1 u_2 - u_1 v_2 : u_1 u_2].$$

Tenemos que la imagen de $\mathbb{P}^1 \times \{[a_0 : b_0]\}$ bajo el morfismo anterior es el conjunto:

$$\varphi(\mathbb{P}^1 \times \{[a_0 : b_0]\}) = \{[b_0 y : -a_0 y - b_0 x : a_0 x] : x, y \in \mathbb{C}, x \neq 0 \text{ ó } y \neq 0\}$$

que claramente es una línea en $\mathbb{P}^2$. Notando ahora que las cuatro componentes irreducibles de $D_{t_0^*}$ llegan al mismo divisor, podemos ver que el mismo argumento funciona para $D_{t_0^*}$, y claramente funciona también para $D_{st_0^*}$. Además, la intersección de dos de estos 3 divisores es 0-dimensional, y por ende su imagen es también 0-dimensional y se reduce a un punto. Como la triple intersección de estos 3 divisores es vacía, deducimos que el divisor de ramificación es exactamente tres líneas en posición general.

Ahora usaremos el resultado principal de [Par91] en el caso particular considerado en [Par91, 2.1.iii]. En este caso, y como $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2)$ es libre de torsión, cualquier $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$-cubrimiento normal de $\mathbb{P}^2$ está completamente determinado por las componentes de su lugar de ramificación. Consideremos ahora el morfismo

$$\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2 : [x : y : z] \mapsto [x^2 : y^2 : z^2],$$

que da $\mathbb{P}^2$ como el cociente de $\mathbb{P}^2$ por la acción de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ actuando de forma en que cada elemento no trivial multiplica por -1 en una coordenada distinta. Veamos donde ramifica este morfismo. Queremos los puntos fijos por la acción de un elemento de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, digamos multiplicación por -1 en la tercera coordenada, por lo que queremos los puntos que cumplen que:

$$[x : y : z] = [x : y : -z].$$

Así, la recta $z = 0$ está fija por la acción. De manera análoga podemos calcular que las rectas $x = 0$ e $y = 0$ están fijas respecto a los otros elementos de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Concluimos que por la unicidad del cubrimiento asociado al divisor de ramificación, tenemos que $A/G \simeq \mathbb{P}^2$. $\square$

# Bibliografía


[Auf17] R. Auffarth. *A note on Galois embeddings of abelian varieties.* Manuscripta Math. 154(3-4), pp. 279–284, 2017.

[ALA18] R. Auffarth, G. Lucchini Arteche. *Smooth quotients of abelian varieties by finite groups.* Preprint, Disponible en `https://arxiv.org/abs/1801.00028`, 2018.

[Bea96] C. Beauville. *Complex Algebraic Surfaces.* (London Mathematical Society Student Texts). Cambridge: Cambridge University Press. 1996.

[CGAR06] A. Carocca, V. González-Aguilera, R. Rodríguez. *Weyl groups and abelian varieties.* Journal of Group Theory, 9(2):265-–282, 2006.

[CR06] A. Carocca, R. Rodríguez. *Jacobians with group actions and rational idem-potents.* Journal of Algebra, 306(2):322–343, 2006.

[Che55] C. Chevalley. *Invariants of Finite Groups Generated by Reflections.* American Journal of Mathematics, Vol. 77, pp. 778–782, 1955.

[ES93] T. Ekedahl, J-P. Serre. *Exemples de courbes algébriques à jacobienne complètement décomposable.* Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique 317.5, pp. 509–513, 1993.

[HR05] R. Hidalgo, R. Rodríguez. *Introducción a las variedades abelianas y grupos Kleinianos.* Disponible en `http://dme.ufro.cl/rhidalgo/files/varf4.pdf`, 2005.

[LR04] H. Lange, S. Recillas. *Abelian varieties with group action.* Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik 575, pp. 135–156, 2004.

[Mir95] R. Miranda. *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* Graduate Text in Mathematics, Vol.5, 1995.

[Par91] R. Pardini. *Abelian covers of algebraic varieties.*. J. Reine Angew. Math. 417, pp. 191-213, 1991.

[Pau08] J. Paulhus. *Decomposing Jacobians of curves with extra automorphisms.* Acta Arith 132.3, pp. 231–244, 2008.

[Pau13] J. Paulhus. *Elliptic factors in Jacobians of hyperelliptic curves with certain automorphism groups.*The Open Book Series 1.1, pp. 487–505, 2013.

[Pop82] V. Popov. *Discrete complex reflection groups.*. Communications of the Mathematical Institute, Rijksuniversiteit Utrecht, 15. *Rijksuniversiteit Utrecht, Mathematical Institute, Utrecht*, 89 pp, 1982.

[PR16] J. Paulhus, A. Rojas. *Completely decompos- able Jacobian varieties in new genera.* Experimental Mathematics 26, no. 4, 430–445, 2016.

[Roj07] A. Rojas. *Group actions on Jacobian varieties.* Rev. Mat. Iberoamericana, 23(2):397–420, 2007.

[Sha74] I. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry.* A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol.213, 1974.

[ST54] G. Shephard, J. Todd. *Finite unitary reflection groups.* Canadian J. Math. 6, pp. 274–304, 1954.

[TY82] S.Tokunaga, M. Yoshida. Complex crystallographic groups. I. J. Math. Soc. Japan 34(4), pp. 581–593, 1982.

[Yos16] H. Yoshihara *Smooth quotients of bi-elliptic surfaces.* Beitr Algebra Geom 57: 765, 2016.