PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA
DE CHILE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

MULTIPLICIDAD DE SOLUCIONES DE TIPO BOUND STATE PARA UNA ECUACIÓN CUASILINEAL

por

JOSÉ IGNACIO HARISMENDY FUENZALIDA

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, para optar al grado académico de Magíster en Matemática.

Profesor Guía:
Marta García-Huidobro C.

Comisión Informante:
María del Carmen Cortázar S.
Pilar Herreros C.

Octubre, 2017.

Santiago, Chile.

Dedicado a Mónica Achondo,

siempre en mi corazón

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quisiera agradecer a Marta García-Huidobro, quien fue mi guía y apoyo. Por su gran paciencia y dedicación, que me estuvieron acompañando en todo momento en la construcción de este trabajo. Agradecer también a mis padres, que me apoyaron en los momentos más difíciles, entendieron mi frustración y me hicieron seguir adelante. A mis amigos queridos, quienes fueron una pieza clave en el día a día, brindándome todo su apoyo y motivación. Por último, a toda la Facultad de Matemáticas, un gran cariño a todos los profesores y funcionarios, quienes formaron parte de mi formación como profesional y como persona. Muchas gracias a todos!

Índice

1. Resumen

En este trabajo estudiaremos la existencia de al menos dos soluciones radiales con una cantidad determinada de regiones nodales para el problema

$$\Delta_p u + f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, N \geq p > 1$$
$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0,$$

donde $\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p > 1$, $u(0) > 0$ y f es una función que satisface ciertas propiedades que detallaremos más adelante.

La tesis se estructura de la siguiente manera: en el capítulo 2 se definirán las hipótesis que satisface la función f y se enunciarán los resultados obtenidos. Luego, en el capítulo 3, se mencionarán algunas propiedades básicas de las soluciones del problema junto a algunos lemas que serán cruciales para la demostración de los teoremas expuestos en el capítulo anterior. Por último, en el capítulo 4 se procederá a la demostración de estos resultados.

Los resultados obtenidos en esta investigación son una generalización del trabajo de Carmen Cortázar, Marta García Huidobro y Pilar Herreros, [15].

2. Introducción y Resultados Principales

2.1. Introducción

En este trabajo se establecerán condiciones para la función f de modo que el problema

$$\begin{gathered}\Delta_p u + f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, N \geq p > 1 \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0,\end{gathered} \tag{2.1}$$

tenga al menos dos soluciones con $u(0) > 0$ y con una cantidad determinada de regiones nodales, donde $\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p > 1$.

Para ello vamos a considerar la forma radial de (2.1), esto es

$$\begin{gathered}(\phi_p(u'))' + \frac{N-1}{r}\phi_p(u') + f(u) = 0, \quad r > 0, N \geq p > 1, \\ u'(0) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0,\end{gathered} \tag{2.2}$$

donde $\phi_p(x) = |x|^{p-2}x$, $p > 1$, $x \neq 0$ y $\phi_p(0) = 0$.

Cualquier solución no constante de (2.1) se llama solución de tipo bound state. Cuando esta solución es estrictamente positiva en todo su dominio, se llama primer bound state o ground state.

La existencia de soluciones para (2.1) ha sido estudiada por varios autores bajo diferentes hipótesis sobre la función f. Para la existencia de soluciones de tipo ground state ver por ejemplo [5, 18, 19, 20]. La existencia de infinitas soluciones radiales de tipo bound state fue estudiada en [6]. Pero la existencia de soluciones con un número determinado de ceros, fue una pregunta que no fue resuelta sino varios años después. Véase por ejemplo [14, 16, 17], quienes probaron la existencia de al menos una solución de (2.2) con un número determinado de ceros y $u(0) > 0$. Para el caso no autónomo ver [3, 11] y para el caso no radial ver [4, 8].

La unicidad de soluciones también ha sido un tema ampliamente estudiado por varios autores, por ejemplo ver [19, 21]. Más recientemente, en [12, 13] las autoras estudian la unicidad de soluciones de tipo higher bound states.
Por último, en cuanto la multiplicidad de soluciones, se ha estudiado el problema no autónomo

$$-\Delta u = f(x,u), \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

para un cierto tipo de función f estrictamente no autónoma, véase por ejemplo [1, 2, 7, 9]. Nosotros estudiaremos el caso autónomo. La idea es entregar condiciones a la función f, de modo que el problema (2.2) tenga al menos dos soluciones con un número determinado de ceros, tal que $u(0)$ pertenezca a un cierto intervalo de $(0,\infty)$.

2.2. Características de f y algunas definiciones

En primer lugar, comenzaremos mencionando las hipótesis generales sobre f:

(f_1) f es continua definida en $[-\gamma_*, \gamma_*]$, impar, tal que $f(\gamma_*) = 0$ y existen tres reales b_1, b_2, γ con $\gamma_* > b_2 > \gamma > b_1 > 0$ tales que $f(s) < 0$ para $s \in (0, b_1) \cup (\gamma, b_2)$ y $f(s) > 0$ para $s \in (b_1, \gamma) \cup (b_2, \gamma_*)$, y f es localmente Lipschitz en $(0, \gamma_*)$.

(f_2) Definimos $F(s) := \int_0^s f(t)dt$, para la cual se cumple que $F(\gamma) > 0$ y $F(s) < F(\gamma_*)$ para todo $s \in (\gamma_*^-, \gamma_*)$.

(f_3) $\displaystyle\int_\gamma \frac{du}{|F(\gamma) - F(u)|^{1/p}} = \infty.$

Además, definiremos algunas constantes que utilizaremos a lo largo de este trabajo:

(i) Definimos β como el punto más grande en $(0, \gamma)$ tal que $F(\beta) = 0$. Del mismo modo, definimos β_* como el mayor punto en (γ, γ_*) tal que $F(\beta_*) = F(\gamma)$.

(ii) Se define una constante $\bar{\beta} > \beta_*$ que satisface $F(\bar{\beta}) > F(\beta_*)$.

De este modo, gráficamente f y F se ven de la siguiente manera:

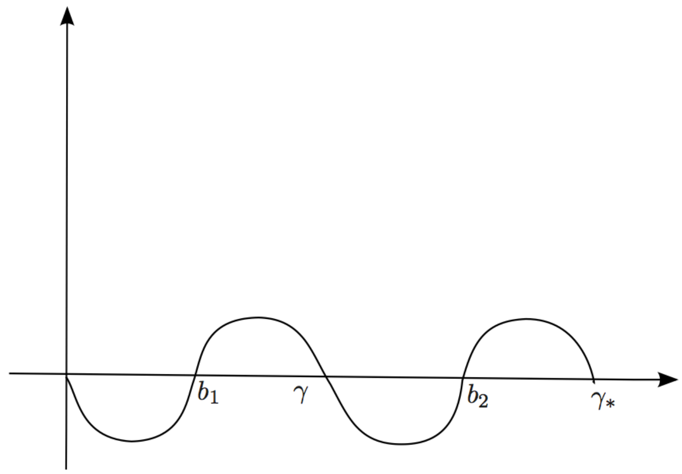

Figura 1: La función f

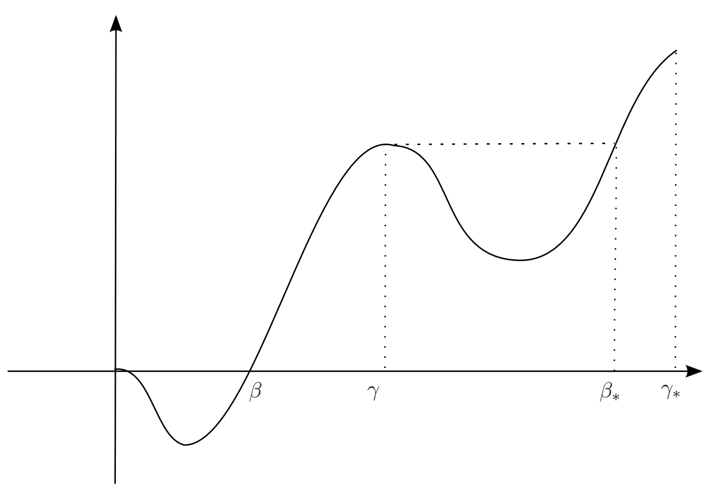

Figura 2: La función F

2.3. Resultados Principales

El objetivo de esta sección es mostrar los resultados principales de este trabajo junto a una breve explicación de cómo vamos a proceder para su obtención.

Teorema 2.2.1 Si f satisface las condiciones (f_1), (f_2) y (f_3), entonces existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, existen al menos dos soluciones de (2.2) con valor inicial en (β_*, γ_*) y que tienen k cambios de signo en $(0, \infty)$.

El siguiente resultado muestra que las soluciones de tipo bound state con valor inicial en el intervalo (β_*, γ_*) no necesariamente existen para cualquier valor de $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

Teorema 2.2.2 Si f satisface (f_1), (f_2) y (f_3) y se tiene que

$$-\min_{s\in[-\beta_*,\beta_*]} F(s) < \frac{(\beta_* - \gamma)}{p'(N-1)(k+1)}\frac{F(\gamma)}{2\gamma} - F(\gamma_*) \tag{2.3}$$

entonces no existen soluciones u de (2.2) con valor inicial en (β_*, γ_*) que tienen j cambios de signo en $(0, \infty)$ para cualquier $j = 0, .., k$.

En el último resultado que se obtuvo, mostramos una condición suficiente para que $k_0 = 1$ en el Teorema 2.2.1. Para ello se definen las siguientes constantes:

$$\bar{F} = -\min_{s\in[0,\beta]} F(s), \qquad \hat{F} = -\min_{s\in[\beta,\beta_*]} F(s),$$

$$A = \frac{\beta_* - \beta}{\left(\frac{p'}{2}(F(\bar{\beta}) - F(\gamma))\right)^{1/p}} + \frac{(p'(\bar{\beta} - \beta_*))^{1/p'}}{\left(\frac{\min_{s\in[\beta_*,\bar{\beta}]} f(s)}{N}\right)^{1/p}},$$

$$\bar{I} = F(\gamma_*),$$

$$\bar{C} = 2(N-1)\frac{\bar{\beta} - \beta}{F(\bar{\beta}) - F(\gamma)}(p'(F(\bar{\beta}) - \hat{F}))^{1/p}$$

De este modo, se tiene

Teorema 2.2.3 Si f satisface (f_1), (f_2) y (f_3) y

$$(\bar{C}+A)\bar{I} < \frac{p'(N-1)}{\sqrt[p]{p'(\bar{I}+\bar{F})}} \int_0^{\beta} |F(s)|ds, \tag{2.4}$$

entonces para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existen al menos dos soluciones u de (2.2), con valor inicial en el intervalo (β_*, γ_*) y que tienen exactamente k cambios de signo en $(0, \infty)$.

Obtendremos nuestros resultados analizando el problema de valor inicial

$$\begin{gathered}(\phi_p(u'))' + \frac{N-1}{r}\phi_p(u') + f(u) = 0, \quad r > 0, N \geq p > 1, \\ u(0) = \alpha, \qquad u'(0) = 0,\end{gathered} \tag{2.5}$$

para $\alpha \in (\beta_*, \gamma_*)$. Entenderemos una solución de (2.5) como una función $u \in C^1$ tal que $\phi_p(u')$ también es C^1 en su dominio y denotaremos tal solución como $u(\cdot, \alpha)$.

A grandes rasgos, la idea es definir un conjunto Q_1 como el conjunto de los valores iniciales $\alpha \in (\beta_*, \gamma_*)$ tales que la correspondiente solución $u(\cdot, \alpha)$ de (2.5) es positiva e $\inf_{r>0} u(r, \alpha) \in (0, \beta)$. Similarmente, extendemos esta definición a los conjuntos Q_k, donde la solución tiene exactamente $k-1$ ceros. Demostraremos que, por dependencia continua en los valores iniciales, Q_k es un conjunto abierto. Luego definimos los conjuntos G_k como los valores iniciales $\alpha \in (\beta_*, \gamma_*)$ para los cuales la respectiva solución $u(\cdot, \alpha)$ es solución de (2.5) con exactamente $k-1$ ceros simples en el intervalo $(0, \infty)$.

La existencia de algún maximo local para la función F garantizará que si Q_k es no vacío, entonces $\inf(Q_k \cup G_k)$ y $\sup(Q_k \cup G_k)$ son distintos y ambos están en G_k. De este modo, el teorema 2.2.1 será demostrado una vez que probemos que Q_k es no vacío para algún valor de k. Los teoremas 2.2.2 y 2.2.3 hacen referencia a si el conjunto Q_1 es o no es vacío.

3. Propiedades de las soluciones del Problema de Valores Iniciales

En esta sección se establecerán algunas propiedades que satisfacen las soluciones de (2.5). Observemos que, definiendo $v = |u'|^{p-2}u'$, el problema puede ser escrito de la siguiente manera

$$\begin{cases} v' & = & -\dfrac{N-1}{r}v - f(u) \\ u' & = & |v|^{p'-2}v \\ u(0) = \alpha & , & v(0) = 0 \end{cases} , \tag{3.1}$$

con $\alpha \in (\beta_*, \gamma_*)$ y donde p y p' son los conjugados de Hölder. Dado que f es continua, existe solución para todo $p > 1$, pero puede no ser única, ya que aunque f es localmente Lispchitz en $(0, \gamma_*)$, la función $v \to |v|^{p'-2}v$ no lo es en $v = 0$ si $p > 2$. Observemos que la unicidad se puede perder solo si $f(u(r_0)) = 0$ o $u'(r_0) = 0$, para algún $r_0 > 0$.

Teorema 3.1.

i) Hay unicidad local en una vecindad de cero para el problema (3.1), es decir, existe una única solución definida en $[0, r_0)$, para $r_0 > 0$ lo suficientemente pequeño.

ii) Esta solución definida en $(0, r_0)$ se puede extender de forma única en los siguientes casos

ii.1) Si $u'(r_0) = 0$ y $f(u(r_0)) \neq 0$.

ii.2) Si $u'(r_0) = 0$ y $u(r_0) \in \pm\{b_1, b_2\}$.

ii.3) Si $u'(r_0) = 0$ y $u(r_0) = \pm\gamma$.

Demostración.

i) Sea $T[u](r) = \alpha - \int_0^r \left(\int_0^s \frac{t^{N-1}}{s^{N-1}} f(u(t))dt \right)^{1/(p-1)} ds$. Sea $C[0, r_0]$, $r_0 > 0$, el espacio de Banach de las funciones continuas reales definidas en el intervalo $[0, r_0]$, con la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$ definido de modo que $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subset (\beta_*, \gamma_*)$ y definamos

$$C = \{u \in C[0, r_0] \ : \ \|u - \alpha\|_\infty \leq \varepsilon\}.$$

Sabemos que

$$m = \min_{[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]} f(u) \leq \max_{[\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon]} f(u) = M,$$

donde m y M son finitos.

Demostremos, en primer lugar, que $T : C \to C$ y es compacto para r_0 lo suficientemente pequeño, definido de modo que

$$r_0^{p'} M^{1/p-1} \leq \varepsilon.$$

Dado $u \in C$, se tiene

$$\|T[u] - \alpha\|_\infty \leq \int_0^{r_0} \left(\int_0^s \frac{t^{N-1}}{s^{N-1}} f(u(t))dt \right)^{1/(p-1)} ds \leq \frac{1}{p'} r_0^{p'} M^{1/p-1} \leq \varepsilon$$

y por lo tanto $T[u] \in C$. De este modo, se tiene que $T(C) \subset C$. Sea ahora $(u_k)_k$ una sucesión en C y sean t, s dos puntos en $[0, r_0]$. Podemos ver que

$$|T[u_k](t) - T[u_k](s)| \leq \frac{2}{p'} \bar{t}^{p'} M^{1/p-1} |t - s|,$$

con $\bar{t}$ un valor entre t y s. De este modo, por el teorema de Ascoli-Arzelà el operador T mapea sucesiones acotadas en sucesiones relativamente compactas con puntos límites en C, pues C es cerrado.

Por último, observemos que T es continuo, pues si $u \in C$ y $(u_k)_k$ es una sucesión en C tal que $\|u_k - u\|_\infty \to 0$ cuando $k \to \infty$, entonces el límite puede pasar dentro de las dos integrales en T por el teorema de convergencia dominada, de modo que $T[u_k] \to T[u]$ puntualmente cuando $k \to \infty$ en $[0, r_0]$. Así, $\|T[u_k] - T[u]\|_\infty \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Por lo tanto, utilizando el teorema del punto fijo de Schauder, T tiene al menos un punto fijo $u \in C$. Claramente, $u \in C[0, r_0] \cap C^1[0, r_0)$ y satisface que $u(0) = \alpha$. Además

$$
\begin{aligned}
u'(r) &= -\left(\int_0^r \frac{t^{N-1}}{r^{N-1}} f(u(t))dt\right)^{1/p-1} \\
-(r^{N-1}(u')^{p-1})' &= r^{N-1} f(u).
\end{aligned}
$$

Con esto demostramos la existencia de una solución en una vecindad de cero para el problema (3.1).

Para ver la unicidad, supongamos por contradicción que existen u_1 y u_2 dos soluciones distintas de (3.1), con $u_1(0) = u_2(0) = \alpha \in (\beta_*, \gamma_*)$. Definamos las soluciones u_i en un intervalo $[0, r_0]$ tan pequeño de modo que $u_i' < 0$ en ese intervalo. Llamemos $\rho_i = -u_i'$. Sea $\omega(t) = \rho_1^{p-1}(t) - \rho_2^{p-1}(t)$. Observemos que $\omega(0) = 0$ y que puede ser escrito de la siguiente manera

$$
\omega(t) = \frac{1}{t^{N-1}} \int_0^t s^{N-1}[f(u_1(s)) - f(u_2(s))]ds, \quad 0 \le t \le r_0.
$$

Se tiene que

$$
|\omega(t)| \le t \max_{[0,t]} |f(u_1(s)) - f(u_2(s))|. \tag{3.2}
$$

Además, escogemos r_0 más pequeño de ser necesario de modo que

$$
\min_{i=1,2} \min_{[0,r_0]} f(u_i(s)) \ge \frac{1}{2} f(\alpha) \ge 0 \tag{3.3}
$$

y también $\max_{i=1,2}\max_{[0,r_0]}\rho_i(s)\leq 1$. Por otra parte, se tiene que

$$|f(u_1(s))-f(u_2(s))|\leq K|u_1(s)-u_2(s)|\leq K\int_0^s|\rho_1(t)-\rho_2(t)|dt, \qquad (3.4)$$

donde K es la constante Lipschitz para f. Por el teorema del valor medio,

$$|\omega(s)|=\left|\int_{\rho_1(s)}^{\rho_2(s)}(p-1)\rho^{p-2}d\rho\right|=(p-1)\bar{\rho}^{p-2}|\rho_1(s)-\rho_2(s)|, \qquad (3.5)$$

donde $\bar{\rho}$ es un valor apropiado entre $\rho_1(s)$ y $\rho_2(s)$. Utilizando (3.2), (3.4) y (3.5) llegamos a que

$$|\omega(t)|\leq Kt(p-1)\int_0^t\frac{|\omega(s)|}{\bar{\rho}^{p-2}}ds, \quad 0\leq t\leq r_0. \qquad (3.6)$$

Sea $p>2$. Si en algún $s\in(0,r_0]$ se tiene que $\rho_1(s)\geq\rho_2(s)$, por (3.3) vemos que

$$\bar{\rho}^{p-2}\geq\rho_2^{p-2}(s)\geq\rho_2^{p-1}(s)=\frac{1}{s^{N-1}}\int_0^s t^{N-1}f(u_2(t))dt\geq\frac{f(\alpha)}{2s^{N-1}}\int_0^s t^{N-1}dt,$$

y, del mismo modo, si $\rho_2(s)\geq\rho_1(s)$ en algún $s\in(0,r_0]$, se tiene nuevamente que

$$\bar{\rho}^{p-2}\geq\frac{f(\alpha)}{2s^{N-1}}\int_0^s t^{N-1}dt.$$

Podemos aplicar el mismo argumento si $1<p<2$ intercambiando ρ_1 y ρ_2, de modo que por (3.6) obtenemos que

$$\frac{|\omega(t)|}{t}\leq\frac{2NK(p-1)}{f(\alpha)}\int_0^t\frac{|\omega(s)|}{s}ds, \quad 0\leq t\leq r_0.$$

Por el lema de Gronwall, para todo $0<s_0<t<t_0$ se tiene que

$$0\leq\frac{|\omega(t)|}{t}\leq Ce^{C(t-s_0)}\int_0^{s_0}\frac{|\omega(s)|}{s}ds,$$

donde $C = \dfrac{2NK(p-1)}{f(\alpha)}$. Por último, como $\dfrac{|\omega(s)|}{s}$ está acotado en $(0, r_0)$ por (3.2), haciendo tender $s_0 \to 0^+$ vemos que $|\omega(t)| = 0$ en $(0, r_0)$, por lo que $\rho_1 \equiv \ \rho_2$ en $(0, r_0)$. Como $u_1(0) = u_2(0) = \alpha$, entonces $u_1 \equiv u_2$ en el intervalo, de lo que se concluye la unicidad de la solución en una vecindad de cero.

ii) Observemos que, en primer lugar, si $p \leq 2$ la solución puede ser únicamente extendida salvo hasta un doble cero, pues el lado derecho de (3.1) es Lipschitz. Por lo tanto, en todos los argumentos siguientes se asumirá $p > 2$.

Veamos primero que si $f(u(r_0)) \neq 0$ y $u'(r_0) = 0$ la unicidad no se pierde. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(u(r_0)) < 0$. Como $v(r_0) = 0$, observemos que

$$v'(r) = -\frac{N-1}{r}v(r) - f(u) \geq \frac{1}{2}|f(u(r_0))| \quad \text{si} \quad |r - r_0| < \delta,$$

con δ lo suficientemente pequeño, por lo que

$$|v(r)| \geq |f(u(r_0))|\frac{|r - r_0|}{2}$$

si $r \in (r_0 - \delta, r_0 + \delta)$.

Supongamos que (u_1, v_1) y (u_2, v_2) son soluciones de (3.1). Entonces, por el teorema del valor medio y utilizando el hecho de que $p' < 2$, para $r > r_0$ se tiene

$$\begin{aligned} |u_1'(r) - u_2'(r)| &= |\phi_{p'}(u_1(r)) - \phi_{p'}(u_2(r))| \\ &= (p'-1)|\eta|^{p'-2}|v_1(r) - v_2(r)| \\ &\leq C(r - r_0)^{p'-2}|v_1(r) - v_2(r)|, \end{aligned}$$

para alguna constante $C > 0$ y un valor η adecuado. De este modo, vemos que

$$|u_1(r) - u_2(r)| \leq C(r - r_0)^{p'-1} \sup_{[r_0-\delta, r_0+\delta]} |v_1(r) - v_2(r)|.$$

Además, de la primera ecuación de (3.1) vemos que

$$\begin{aligned} |v_1(r)-v_2(r)| &\leq \int_{r_0}^{r} |v_1'(s)-v_2'(s)|ds \\ &\leq \left(C \sup_{[r_0-\delta, r_0+\delta]} (v_1(r)-v_2(r)) + K \sup_{[r_0-\delta, r_0+\delta]} (u_1(r)-u_2(r)) \right)(r-r_0), \end{aligned}$$

donde K es la constante Lipschitz de f. Juntando estas últimas dos desigualdades llegamos a que

$$(1-k\delta) \sup_{[r_0-\delta, r_0+\delta]} (u_1(r)-u_2(r)) + (1-C(\delta^{p-1}+\delta)) \sup_{[r_0-\delta, r_0+\delta]} (v_1(r)-v_2(r)) \leq 0,$$

de donde se deduce que $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$ haciendo tender δ a cero, lo que demuestra extendibilidad única en el caso $ii.1$).

Para el segundo caso es mucho más simple. Supongamos que $u'(r_0) = 0$ y supongamos que $u(r_0) \in \pm\{b_1, b_2\}$. Observamos que $I(r_0) = F(u(r_0))$ y por lo tanto la unicidad no puede perderse, pues b_i son mínimos para la función F y el funcional de la energía es decreciente.

Para el último caso, si $u'(r_0) = 0$ y $u(r_0) = \pm\gamma$ la demostración es similar a la de la proposición 1.3.2 en [19]. ■

El teorema anterior garantiza una única solución al problema (3.1) salvo un doble cero. Se define entonces el dominio D de definición de u como el dominio de extendibilidad única, es decir, si $D = (0, D_\alpha)$ con $D_\alpha < \infty$, entonces D_α es un doble cero de u.

A continuación se definirá el funcional de la energía que tendrá un rol clave en el problema

$$I(r,\alpha) = \frac{|u'(r,\alpha)|^p}{p'} + F(u(r,\alpha)),$$

Es fácil ver que

$$I'(r,\alpha) = -\frac{N-1}{r}|u'(r)|^p, \tag{3.7}$$

donde podemos ver que $I(r,\alpha)$ es decreciente en r.

Proposición 3.2. Supongamos que f satisface (f_1), (f_2) y (f_3) y sea $u(\cdot,\alpha)$ una solución de (2.5).

i) Existe C tal que $|u(r,\alpha)| + |u'(r,\alpha)| \leq C$.

ii) $\lim_{r\to\infty} I(r,\alpha)$ existe y es igual a $F(m)$, donde m es un cero de f.

iii) Si $u(\cdot,\alpha)$ está definida en $[0,\infty)$ y $\lim_{r\to\infty} u(r,\alpha) = m$, entonces

$$\lim_{r\to\infty} u'(r,\alpha) = 0 \qquad \text{y} \qquad \text{m es un cero de f.}$$

iv) $u(\cdot,\alpha)$ tiene a lo más un número finito de cambios de signo.

Demostración.

i) Sea $\check{F} = -\min_{s\in[-\gamma_*,\gamma_*]} F(s)$. Sea $u(r) = u(r,\alpha)$ una solución de (2.5). Se tiene que

$$\text{-}\check{F} < F(u(r)) \leq F(\gamma_*),$$

pues $\alpha \in (\beta_*,\gamma_*)$ e $I(r,\alpha)$ es decreciente, de lo que se tiene que u y u' son acotadas.

ii) Sabemos que I es decreciente y acotada, por lo que su límite es finito, llamémoslo Ψ. Sea $T > 0$ arbitrario, pero fijo. Entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
I(k_0T) - \Psi = \int_{k_0T}^{\infty} \frac{N-1}{r}|u'(r)|^p dr &= \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{N-1}{r}|u'(r)|^p dr \\
&= (N-1) \sum_{k=k_0}^{\infty} \int_0^T \frac{|u'(r+kT)|^p}{r+kT} dr \\
&\geq (N-1) \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)T} \int_0^T |u'(r+kT)|^p dr
\end{aligned}
$$

Como el lado izquierdo de la desigualdad es finito, entonces se debe tener que $\liminf_{k\to\infty} \int_0^T |u'(r+kT)|^p dr = 0$, por lo que hay una subsucesión $\{n_k\}$ de números naturales tales que $\liminf_{k\to\infty} \int_0^T |u'(r+n_kT)|^p dr = 0$. Por la proposición 3.3 en [16] sabemos que $u_k := u(r+n_kT)$ tiene una subsucesión, denotada del mismo modo, tal que

$$
\lim_{k\to\infty} u_k(r) = u_\infty \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} u_k'(r) = u_\infty'
$$

uniformemente en compactos, donde u_∞ es solución de

$$
(\phi_p(u_\infty'))' + f(u_\infty) = 0.
$$

Dado que $\int_0^T |u_\infty'(s)|^p ds = 0$ se tiene que u_∞ es constante, digamos $u_\infty = \bar{u}$ y $f(\bar{u}) = 0$. Por otra parte,

$$
\frac{1}{p'}|u_k'(r)|^p + F(u_k(r)) = \frac{1}{p'}|u'(r+n_kT)|^p + F(u(r+n_kT)) = I(r+n_kT) \to \Psi
$$

cuando $k \to \infty$ y, por lo tanto,

$$
\Psi = F(\bar{u}).
$$

iii) Supongamos que $\lim_{r\to\infty} u(r,\alpha) = m$. Observamos por i) que m debe ser finito y, como $\lim_{r\to\infty} I(\cdot,\alpha)$ existe pues I está acotada y es decreciente, entonces $\lim_{r\to\infty} u'(r,\alpha)$ existe. De este modo, como u' es integrable, se tiene que $\lim_{r\to\infty} u'(r,\alpha) = 0$. Así,

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{r\to\infty} \frac{u(r)-m}{r^{p'}} &= -\lim_{r\to\infty} \frac{r^{\frac{N-1}{p-1}}|u'(r)|}{p' r^{p'-1} r^{\frac{N-1}{p-1}}} \\ &= -\frac{1}{p'} \lim_{r\to\infty} \left(\frac{|u'(r)|^{p-1} r^{N-1}}{r^N} \right)^{p'-1} \end{aligned}$$

Observemos que podemos reescribir (2.2) como:

$$(r^{N-1}|u'|^{p-1})' = r^{N-1} f(u)$$

Aplicando esto último y L'Hôpital nuevamente, se obtiene que

$$0 = -\frac{1}{p'} \lim_{r\to\infty} \left(\frac{r^{N-1} f(u(r))}{N r^{N-1}} \right)^{p'-1} = -\frac{1}{p'} \lim_{r\to\infty} \left(\frac{f(m)}{N} \right)^{p'-1}$$

iv) Supongamos por contradicción que existe una sucesión infinita $\{z_n\}$ de ceros simples de u tales que $z_n \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Denotamos por $\{z_n^+\}$ aquellos ceros para los cuales $u'(z_n^+) > 0$ y por $\{z_n^-\}$ aquellos que satisfacen $u'(z_n^-) < 0$. Se tiene de este modo

$$0 < z_1^- < z_1^+ < z_2^- < z_2^+ < \cdots < z_n^+ < z_{n+1}^- < \cdots$$

Así, entre z_n^- y z_n^+ existe un mínimo r_n^m con $u(r_n^m) < 0$, y entre z_n^+ y z_{n+1}^- existe un máximo r_n^M con $u(r_n^M) > 0$. Se tiene por 3.2(ii) que las sucesiones $\{F(u(r_n^m))\}$ y $\{F(u(r_n^M))\}$ convergen a $F(m)$, donde m es un cero de f y se tiene que $F(m) \geq 0$. Sean η^- y η^+ los únicos puntos $\eta^- < 0 < \eta^+$ tales que $f(\eta^-) \neq 0$, $f(\eta^+) \neq 0$, $F(\eta^-) = F(\eta^+) = F(m)$ y $F(s) \leq F(m)$ si $s \in (\eta^-, \eta^+)$. Sea $\{u(r_{k_n}^M)\}$ una subsucesión convergente de $\{u(r_n^M)\}$ y sea $\bar{u}$ su límite.

Entonces se tiene que $F(\bar{u}) = F(m)$. Como u es oscilatoria, se tiene para cualquier valor de n que $F(s) \leq F(u(r_{k_n}^M))$, si $s \in [u(r_{k_{n+1}}^m), u(r_{k_n}^M)]$. En particular, $\bar{u}$ no puede ser un mínimo local de F. Por el lema 3.3(ii) que veremos más adelante, $\bar{u}$ tampoco puede ser un máximo local para F. Como $F(s) \leq F(\bar{u})$, si $0 \leq s \leq \bar{u}$, entonces $\bar{u} = \eta^+$. Del mismo modo, se concluye que cualquier subsucesión convergente de $\{u(r_n^M)\}$ converge a η^+. De forma similar se demuestra que $\{u(r_n^m)\}$ converge a η^-.

Como $I(r_n^m)$, $I(r_n^M) \geq F(m)$, se debe tener que $u(r_n^m) < \eta$ y $u(r_n^M) > \eta^+$. Como $f(\eta^+) > 0$, existe $\nu > 0$ tal que $f(s) > 0$ si $s \in [\eta^+ - \nu, \eta^+ + \nu]$ y $f(s) < 0$ si $s \in [\eta^- - \nu, \eta^- + \nu]$. Definimos

$$\bar{f} = \min_{s \in [\eta^+ - \nu, \eta^+ + \nu]} f(s) \qquad \bar{\bar{f}} = \min_{s \in [\eta^- - \nu, \eta^- + \nu]} f(s).$$

Definimos también los siguientes puntos

$$r_{1,n} \in (z_n^+, r_n^M), \;\; r_{2,n} \in (r_n^M, z_{n+1}^-), \;\; s_{1,n},\; \bar{s}_{1,n} \in (r_{2,n}, z_{n+1}^-), \;\; t_{1,n} \in (z_{n+1}^-, r_{n+1}^m)$$

que satisfacen

$$u(r_{1,n}) = u(r_{2,n}) = \eta^+ - \nu, \;\; u(s_{1,n}) = \delta/2, \; u(\bar{s}_{1,n}) = \delta/4, \; u(t_{1,n}) = \eta^- + \nu,$$

donde $\delta > 0$ es escogido de modo que $F(s) < 0$ para $0 < s < \delta$.

Por lo tanto se tiene

$$z_n^+ < r_{1,n} < r_n^M < r_{2,n} < s_{1,n} < \bar{s}_{1,n} < z_{n+1}^- < t_{1,n} < r_{n+1}^m.$$

Para $r \in (r_{2,n}, t_{1,n})$, $\eta^- < u(r) < \eta^+$, por lo que $F(u(r)) \leq F(m)$. Además, para $r \in (s_{1,n}, \bar{s}_{1,n})$ se tiene que $|F(u(r)) - F(m)| \geq k_0$, algún $k_0 > 0$ independiente de n. Más aún, aplicando teorema del valor medio y la parte i) de la proposición, se tiene que existe un $k_1 > 0$ independiente de n tal que $\bar{s}_{1,n} - s_{1,n} \geq k_1$.

De (2.5) se tiene que

$$|(\phi_p(u'(r))'| = \left|\frac{N-1}{r}\phi_p(u'(r)) + f(u(r))\right| \geq \bar{f} - \frac{N-1}{r}\bar{C}(\alpha)$$

para $r \in [r_{1,n}, r_{2,n}]$, donde $\bar{C}(\alpha) = (C(\alpha))^{p-1}$.

Si además $r \geq \bar{r} := 2(N-1)\bar{C}(\alpha)/\bar{f}$, escogiendo n_0 tal que $z_n^+ \geq \bar{r}$ para todo $n \geq n_0$, se tiene que $|(\phi_p(u'(r)))'| \geq \bar{f}/2$ en el intervalo $r \in [r_{1,n}, r_{2,n}]$.
Utilizando nuevamente el teorema del valor medio y la parte i) de la proposición se obtiene

$$2\bar{C}(\alpha) \geq |\phi_p(u'(r_{2,n})) - \phi_p(u'(r_{1,n}))| = |(\phi_p(u'(\theta)))'|(r_{2,n} - r_{1,n}) \geq \frac{\bar{f}}{2}(r_{2,n} - r_{1,n}),$$

donde $\theta \in (r_{1,n}, r_{2,n})$. De este modo, se obtiene que

$$r_{2,n} - r_{1,n} \leq \frac{4\bar{C}(\alpha)}{\bar{f}}$$

Definamos ahora la función $\tilde{H}$ como

$$\tilde{H}(r,\alpha) = r^{p'(N-1)}(I(r,\alpha) - F(m)).$$

Observamos que

$$\tilde{H}'(r,\alpha) = p'(N-1)r^{p'(N-1)-1}(F(u(r,\alpha)) - F(m)).$$

De este modo se obtienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
&\frac{\tilde{H}(t_{1,n})-\tilde{H}(r_{1,n})}{p'(N-1)}\\
= &\int_{r_{1,n}}^{r_{2,n}} r^{p'(N-1)-1}(F(u)-F(m))dr + \int_{r_{2,n}}^{t_{1,n}} r^{p'(N-1)-1}(F(u)-F(m))dr\\
= &\int_{r_{1,n}}^{r_{2,n}} r^{p'(N-1)-1}(F(u)-F(m))dr - \int_{r_{2,n}}^{t_{1,n}} r^{p'(N-1)-1}|F(u)-F(m)|dr\\
\leq &\int_{r_{1,n}}^{r_{2,n}} r^{p'(N-1)-1}(F(u)-F(m))dr - \int_{s_{1,n}}^{\bar{s}_{1,n}} r^{p'(N-1)-1}|F(u)-F(m)|dr\\
\leq &\frac{4\bar{C}(\alpha)}{\bar{f}}(F(u(r_n^M))-F(m))r_{2,n}^{p'(N-1)-1} - k_0k_1r_{2,n}^{p'(N-1)-1}
\end{aligned}$$

Ahora, como $\lim\limits_{n\to\infty} F(u(r_n^M)) = F(m)$, podemos elegir n_0 lo suficientemente grande de modo que

$$\frac{4\bar{C}(\alpha)}{\bar{f}}(F(u(r_n^M))-F(m)) - k_0k_1 < -\frac{1}{2}k_0k_1$$

para todo $n \geq n_0$ y por lo tanto

$$\tilde{H}(t_{1,n})-\tilde{H}(r_{1,n}) \leq -(N-1)k_0k_1r_{2,n}^{p'(N-1)-1}$$

Procediendo de manera similar en el intervalo $(t_{1,n}, r_{1,n+1})$ se prueba que

$$\tilde{H}(r_{1,n_0+j})-\tilde{H}(r_{1,n_0}) \leq -(N-1)k_0k_1\sum_{i=0}^{j-1}(r_{2,n_0+i}^{p'(N-1)-1}+t_{2,n_0+i}^{p'(N-1)-1}),$$

donde $t_{2,n} \in (r_{n+1}^m, z_{n+1}^+)$ es un punto que está definido de manera única por la condición $u(t_{2,n}) = \eta^+ + \nu$. Tomando $j\to\infty$ se obtiene

$$\lim_{j\to\infty} \tilde{H}(r_{1,n_0+j}) = -\infty,$$

deduciéndose que $I(r_{1,n_0+j}) < F(m)$ para algún j lo suficientemente grande, lo cual es una contradicción. ■

A continuación se definirán los conjuntos N_i, G_i y P_i, que serán cruciales a lo largo de este trabajo. Para ello, vamos a definir el siguiente número real extendido:

$$Z_1(\alpha) = \sup\{r \in (0, \infty) \mid u(s, \alpha) > 0 \text{ y } u'(s, \alpha) < 0 \, \forall \, s \in (0, r)\}$$

Dado que $Z_1(\alpha)$ puede ser infinito, denotaremos:

$$u(Z_1(\alpha), \alpha) = \lim_{r \uparrow Z_1(\alpha)} u(r, \alpha) \quad \text{y} \quad u'(Z_1(\alpha), \alpha) = \lim_{r \uparrow Z_1(\alpha)} u'(r, \alpha)$$

Notemos que, como vimos anteriormente en 3.2(iii), este último límite existe.

Definimos entonces los conjuntos para $i = 1$:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \{\alpha \in [\beta_*, \gamma_*) : u(Z_1(\alpha), \alpha) = 0 \text{ y } u'(Z_1(\alpha), \alpha) < 0\} \\
G_1 &= \{\alpha \in [\beta_*, \gamma_*) : u(Z_1(\alpha), \alpha) = 0 \text{ y } u'(Z_1(\alpha), \alpha) = 0\} \\
P_1 &= \{\alpha \in [\beta_*, \gamma_*) : u(Z_1(\alpha), \alpha) > 0\}.
\end{aligned}$$

Vamos a extender estos conjuntos por inducción para $k \geq 2$. Si $N_{k-1} \neq \emptyset$, definimos

$$F_k = \{\alpha \in N_{k-1} : (-1)^k u'(r, \alpha) \leq 0 \quad \text{para todo} \quad r > Z_{k-1}(\alpha)\}$$

Para aquellos $\alpha \in N_{k-1} \setminus F_k$ definimos

$$T_{k-1}(\alpha) = \sup\{r \in (Z_{k-1}(\alpha), D_\alpha) \mid (-1)^k u'(r, \alpha) \leq 0\},$$

y para $\alpha \in F_k$, definimos $T_{k-1}(\alpha) = \infty$.

Además, para $\alpha \in N_{k-1} \setminus F_k$ definimos el siguiente número real extendido

$$Z_k(\alpha) = \sup\{r > T_{k-1}(\alpha) \mid (-1)^k u(s, \alpha) < 0 \text{ y } (-1)^k u'(s, \alpha) > 0 \, \forall \, s \in (T_{k-1}(\alpha), r)\},$$

y nuevamente, si $\alpha \in F_k$, definimos $Z_k(\alpha) = \infty$.

Definamos entonces ahora los conjuntos N_k, G_k y P_k:

$$\begin{aligned}
N_k &= \{\alpha \in N_{k-1} \setminus F_k : u(Z_k(\alpha), \alpha) = 0 \text{ y } (-1)^k u'(Z_k(\alpha), \alpha) > 0\} \\
G_k &= \{\alpha \in N_{k-1} \setminus F_k : u(Z_k(\alpha), \alpha) = 0 \text{ y } u'(Z_k(\alpha), \alpha) = 0\} \\
P_k &= \{\alpha \in N_{k-1} : (-1)^k u(Z_k(\alpha), \alpha) < 0\}.
\end{aligned}$$

Por último, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ descomponemos P_k como

$$P_k = Q_k \cup S_k \cup \Upsilon_k,$$

donde

$$\begin{aligned}
Q_k &= \{\alpha \in P_k : -\gamma < u(Z_k(\alpha), \alpha) < 0 \text{ o } 0 < u(Z_k(\alpha), \alpha) < \gamma\} \\
S_k &= \{\alpha \in P_k : \gamma < u(Z_k(\alpha), \alpha) < \gamma_* \text{ o } -\gamma_* < u(Z_k(\alpha), \alpha) < -\gamma\} \\
\Upsilon_k &= \bigcup_{i=-2,\, i\neq 0}^{2} \{\alpha \in P_k : u(Z_k(\alpha), \alpha) = \gamma_i\}.
\end{aligned}$$

A continuación veamos un gráfico que muestra los conjuntos anteriormente expuestos

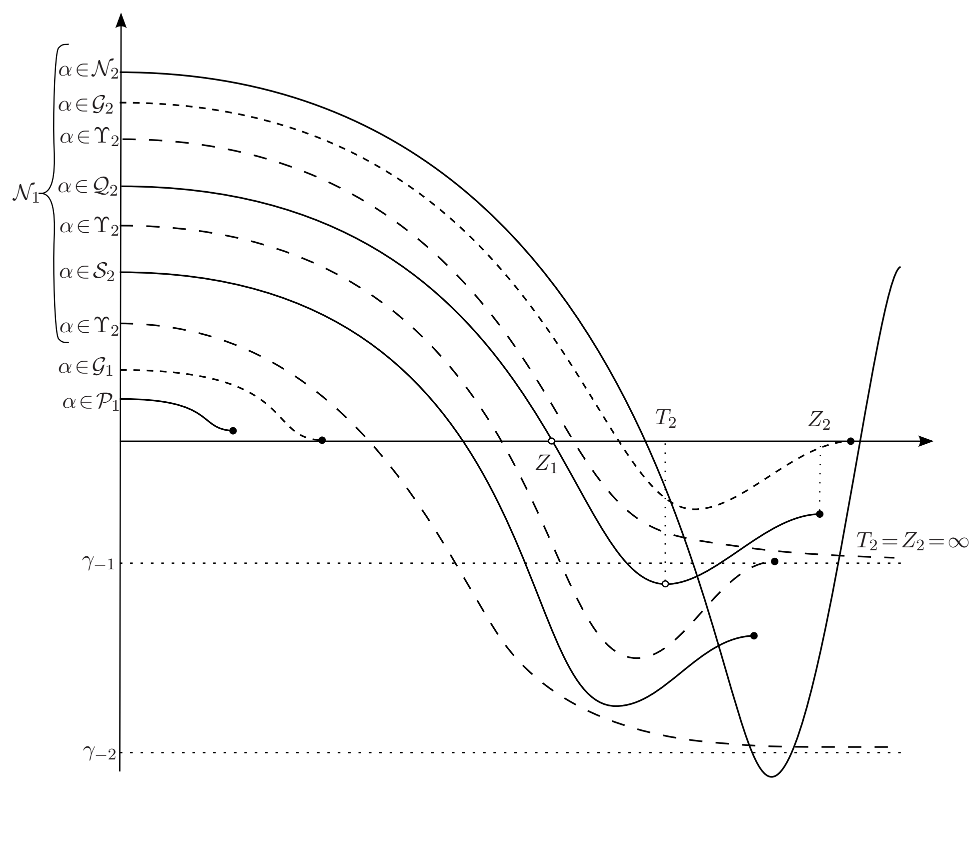

Figura 3: soluciones de (2.5) con condiciones iniciales en estos conjuntos

Lema 3.3. Supongamos que f satisface (f_1), (f_2) y (f_3) y sea $k \in \mathbb{N}$.

i) Si $\bar{\alpha} \in G_k$, entonces existe una vecindad V de $\bar{\alpha}$ tal que si $\alpha \in V \cap N_k$, entonces $\alpha \in Q_{k+1}$.

ii) Si $\bar{\alpha}$ es tal que $u(Z_k(\bar{\alpha})) = \gamma$, con γ un máximo local de F con $F(\gamma) \geq 0$, entonces existe una vecindad V de $\bar{\alpha}$ tal que si $\alpha \in V \cap N_k$, entonces $F(u(T_k(\alpha), \alpha)) < F(\gamma)$.

Demostración.

i) Sea $\bar{\alpha} \in G_k$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $u(\cdot, \bar{\alpha})$ es decreciente en $(T_{k-1}(\bar{\alpha}), Z_k(\bar{\alpha}))$. Veremos que existe una vecindad V tal que si $\alpha \in V \cap N_k$, entonces $u(T_k(\alpha), \alpha) > -\beta$. Supongamos por contradicción que existe $\{\alpha_i\}$ con $\alpha_i \to \bar{\alpha}$, $\alpha_i \in N_k$ y tal que

$$u(T_k(\alpha_i), \alpha_i) < -\beta. \tag{3.8}$$

Escogemos un δ fijo de modo que $F(s) < 0$ para $0 < |s| < \delta$. Observamos que $u(\cdot, \alpha_i)$ cruza el valor $-\delta$ con energía positiva.
Ahora, sea $\varepsilon \in (0, 1)$. Como $\bar{\alpha} \in G_k$, se tiene

$$\lim_{r \to Z_k(\bar{\alpha})} I(r, \bar{\alpha}) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{r \to Z_k(\bar{\alpha})} u(r, \bar{\alpha}) = 0.$$

De este modo, existe $r_0 > T_{k-1}(\bar{\alpha})$ tal que

$$I(r_0, \bar{\alpha}) < \varepsilon, \quad 0 < u(r_0, \bar{\alpha}) < \delta/2,$$

donde definimos $T_0 = 0$. Por la dependencia continua de las soluciones en los valores iniciales, para i lo suficientemente grande, se tiene que $0 < u(r_0, \alpha_i) < \delta$, $Z_k(\alpha_i) > r_0$, y

$$I(r_0, \alpha_i) < 2\varepsilon.$$

Dado que I es decreciente en r, se tiene que

$$I(r,\alpha_i) < 2\varepsilon \quad \text{para todo} \quad r \in (r_0, T_k(\alpha_i)),$$

y por lo tanto,

$$|u'(r,\alpha_i)| \le \sqrt{4 - 2 \min_{s\in[-\beta_*,\beta_*]} F(s)} := K \quad \text{para todo } r \in (r_0, T_k(\alpha_i)) \tag{3.9}$$

e i lo suficientemente grande. Denotemos por $r(\cdot,\alpha_i)$ la inversa de $u(\cdot,\alpha_i)$ en el intervalo $(T_{k-1}(\alpha_i), T_k(\alpha_i))$.
De (3.8), $[-\delta, 0] \subset [u(T_k(\alpha_i),\alpha_i), 0]$, y de (3.9), por el teorema del valor medio y la derivada de la función inversa, se obtiene que

$$r\Big(\frac{-\delta}{2},\alpha_i\Big) - r\Big(\frac{-\delta}{4},\alpha_i\Big) \ge \frac{\delta}{4K}. \tag{3.10}$$

Sea ahora
$$H(r,\alpha) = r^{2(N-1)} I(r,\alpha).$$

Luego
$$H'(r,\alpha) = 2(N-1) r^{2N-3} F(u(r,\alpha)),$$

por lo que para $\alpha = \bar{\alpha}$, $H'(r,\bar{\alpha}) < 0$ para todo $r \in (r_0, Z_k(\bar{\alpha}))$ y existe $L \ge 0$ tal que
$$\lim_{r\to Z_k(\bar{\alpha})} H(r,\bar{\alpha}) = L.$$

Además, escogiendo un r_0 más grande en caso de ser necesario, podemos asumir que $H(r_0,\bar{\alpha}) < L + \varepsilon$. Luego, por continuidad, se tiene que

$$H(r_0,\alpha_i) \le L + 2\varepsilon \quad \text{para } i \text{ lo suficientemente grande.}$$

Además, como $u(r,\alpha_i) < \delta$ para $r \in [r_0, Z_k(\alpha_i)]$, H es decreciente en $[r_0, Z_k(\alpha_i)]$

por lo que

$$H(Z_k(\alpha_i),\alpha_i) \leq L + 2\varepsilon \quad \text{para } i \text{ lo suficientemente grande.}$$

Integrando $H'(\cdot,\alpha_i)$ sobre el intervalo $(Z_k(\alpha_i), r(\frac{-\delta}{2},\alpha_i))$, se obtiene

$$H(r\Big(\frac{-\delta}{2},\alpha_i\Big),\alpha_i) - H(z_1(\alpha_i),\alpha_i) = -2(N-1)\int_{Z_k(\alpha_i)}^{r(\frac{-\delta}{2},\alpha_i)} t^{2N-3}|F(u(t,\alpha_i))|dt$$

y entonces, dado que $N \geq 2$, se tiene que $2N-3>0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
H(r\Big(\frac{-\delta}{2},\alpha_i\Big),\alpha_i) &\leq L + 2\varepsilon - 2(N-1)(Z_k(\alpha_i))^{2N-3}\int_{Z_k(\alpha_i)}^{r(\frac{-\delta}{2},\alpha_i)} |F(u(t,\alpha_i))|dt \\
&\leq L + 2\varepsilon - 2(N-1)(Z_k(\alpha_i))^{2N-3}\int_{r(\frac{-\delta}{4},\alpha_i)}^{r(\frac{-\delta}{2},\alpha_i)} |F(u(t,\alpha_i))|dt \\
&\leq L + 2\varepsilon - 2(N-1)(Z_k(\alpha_i))^{2N-3}(r\Big(\frac{-\delta}{2},\alpha_i\Big) - r\Big(\frac{-\delta}{4},\alpha_i\Big))C \\
&\leq L + 2\varepsilon - 2(N-1)(Z_k(\alpha_i))^{2N-3}\frac{\delta}{4K}C,
\end{aligned}$$

donde $C := \text{ínf}\{|F(s)|,\ s \in [\frac{-\delta}{2},\frac{-\delta}{4}]\}$. Si $Z_k(\bar{\alpha}) = \infty$, tomando i más grande si es necesario, se deduce que $H(r(\frac{-\delta}{2},\alpha_i),\alpha_i) < 0$, lo que es una contradicción pues I es decreciente. Ahora, si $Z_k(\bar{\alpha}) < \infty$, llegamos a la misma conclusión observando que $L = 0$ y $Z_k(\alpha_i)$ está acotado por debajo por una constante positiva $r_1/2$, donde r_1 es el primer valor de $r > 0$ donde $u(\cdot,\bar{\alpha})$ toma el valor δ.

ii) La demostración de esta parte es similar a la parte anterior, pero ahora vamos a considerar la función $\tilde{H}$ como sigue

$$\tilde{H}(r,\alpha) = r^{2(N-1)}(I(r,\alpha) - F(\gamma)).$$

Entonces se tiene

$$\tilde{H}'(r,\alpha) = 2(N-1)r^{2N-3}(F(u(r,\alpha)) - F(\gamma)).$$

Supongamos nuevamente que $u(\cdot,\bar{\alpha})$ es decreciente en $(T_{k-1}(\bar{\alpha}), Z_k(\bar{\alpha}))$ y que $\{\alpha_i\}$ contiene una subsucesión denotada de la misma forma, tal que

$$F(u(T_k(\alpha_i),\alpha_i)) \geq F(\gamma),$$

donde $\alpha_i \to \bar{\alpha}$, $\alpha_i \in N_k$. De este modo, escogiendo un $\delta > 0$ fijo del mismo modo que en la parte anterior, vemos que $u(\cdot,\alpha_i)$ cruza el valor $-\delta$ con energía mayor que $F(\gamma)$. Siguiendo el mismo razonamiento de la parte anterior, vemos que $[-\delta, 0] \subset [u(T_k(\alpha_i),\alpha_i), 0]$, y por el teorema del valor medio se tiene

$$r\Big(\frac{-\delta}{2},\alpha_i\Big) - r\Big(\frac{-\delta}{4},\alpha_i\Big) \geq \frac{\delta}{4K}, \tag{3.11}$$

donde ahora $K = \sqrt{2(F(\gamma) + 2 - 2\min\limits_{s\in[-\beta_*,\beta_*]} F(s))}$. Definiendo ahora la constante $C_0 := \inf\{|F(s) - F(\gamma)|,\ s \in [\frac{-\delta}{2}, \frac{-\delta}{4}]\}$ y $0 \leq L = \lim\limits_{r\to Z_k(\bar{\alpha})} \tilde{H}(r,\bar{\alpha})$ se obtiene

$$\tilde{H}(r\Big(\frac{-\delta}{2},\alpha_i\Big),\alpha_i) \leq L + 2\varepsilon - 2(N-1)(Z_k(\alpha_i))^{2N-3}\frac{\delta}{4K}C_0.$$

El mismo razonamiento anterior permite concluir que para i lo suficientemente grande se tiene

$$I(r\Big(\frac{-\delta}{2},\alpha_i\Big),\alpha_i) < F(\gamma),$$

pero I es decreciente, por lo que se tiene una contradicción. ■

Para el siguiente lema, por comodidad vamos a denotar por $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = \gamma$ y $\gamma_2 = \gamma_*$. Además denotaremos por γ_{-i} a los opuestos de los γ_i respectivos.

Lema 3.4. Sea $\bar{\alpha}$ tal que $u(Z_j(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) = \gamma_i$, con $i \neq 0, -2$ y sea $k \geq j$. Entonces existe una vecindad V_k de $\bar{\alpha}$ tal que si $\alpha \in V_k$ y $u(Z_j(\alpha), \alpha) \neq \gamma_i$, entonces $\alpha \in N_k$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u(Z_j(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}) = \gamma_i > 0$. Sea $B_i = \{F(\gamma_l) \mid F(\gamma_l) < F(\gamma_i)\}$. Definamos

$$\varepsilon = \frac{F(\gamma_i) - B_i}{k+1}.$$

Sean D_1 y D_2 tales que

$$D_1 = \frac{2\gamma_i(N-1)\sqrt[p]{p'(F(\gamma_i) + \tilde{F})}}{\varepsilon}, \quad F(u(D_2, \bar{\alpha})) > F(\gamma_i) - \frac{\varepsilon}{2},$$

donde $-\tilde{F} = \min_{s \in [-\beta_*, \beta_*]} F(s)$. Sea $D = \max\{D_1, D_2\}$. Por la dependencia continua de las soluciones en los valores iniciales, se tiene que existe una vecindad V de $\bar{\alpha}$ tal que para $\alpha \in V$,

$$\sup_{r \in [0,D]} |F(u(r,\alpha)) - F(u(r,\bar{\alpha}))| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y por el Lema 3.3(ii), si $\alpha \in N_j$, entonces $F(u(T_j(\alpha), \alpha)) < F(\gamma_i)$. Sea ahora $\alpha \in V$ y supongamos que $u(Z_j(\alpha), \alpha) \neq \gamma_i$. Denotemos por $\bar{r}_\varepsilon$ el primer punto después de D tal que $F(u(\bar{r}_\varepsilon, \alpha)) = F(\gamma_i) - \varepsilon$ y denotemos por $r_0 = r_0(\alpha)$ el primer punto después de $\bar{r}_\varepsilon$ donde $u'(r_0, \alpha) = 0$. Integrando (3.7) sobre el intervalo $(\bar{r}_\varepsilon, r_0)$ se obtiene que

$$I(\bar{r}_\varepsilon, \alpha) - F(u(r_0, \alpha)) = (N-1) \int_{\bar{r}_\varepsilon}^{r_0} \frac{|u'(r,\alpha)|^p}{r} dr,$$

por lo tanto, utilizando el hecho de que

$$|u'(r,\alpha)| \leq \sqrt[p]{p'(I(\bar{r}_\varepsilon) + \tilde{F})} \quad \text{para todo r} > \bar{r}_\varepsilon$$

se obtiene

$$F(u(r_0,\alpha)) \geq I(\bar{r}_\varepsilon)\left(1 - \frac{2\gamma_i(N-1)}{\bar{r}_\varepsilon}\frac{\sqrt[p]{p'(I(\bar{r}_\varepsilon)+\tilde{F})}}{I(\bar{r}_\varepsilon)}\right).$$

Entonces, como $\sqrt[p]{p'(I+\tilde{F})}/I$ es decreciente en I, $I(\bar{r}_\varepsilon) \geq F(\gamma_i) - \varepsilon$, $\bar{r}_\varepsilon > D$ y $\varepsilon < F(\gamma_i)/(k+1)$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} F(u(r_0,\alpha)) & \geq & I(\bar{r}_\varepsilon)\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{\sqrt[p]{p'(F(\gamma_i)+\tilde{F})}}\dfrac{\sqrt[p]{p'(F(\gamma_i)-\varepsilon+\tilde{F})}}{F(\gamma_i)-\varepsilon}\right) \\ & \geq & F(\gamma_i) - 2\varepsilon. \end{array}$$

Por lo tanto,

$$F(\beta_i) \leq B_i \leq F(\gamma_i) - 2\varepsilon < F(u(r_0,\alpha)) < F(\gamma_i).$$

Ahora, como $f(s)$ es positiva para $s \in (\beta_i, \gamma_i)$, se deduce que $r_0 = T_j(\alpha)$. Repitiendo este proceso en $\bar{r}_{2\varepsilon}$, el primer punto después de $T_j(\alpha)$ donde $F(u(\bar{r}_{2\varepsilon},\alpha)) = F(\gamma_i) - 2\varepsilon$, se obtiene que $\alpha \in N_{j+1}$. Repetimos este proceso k veces para obtener que $\alpha \in N_k$. ■

Lema 3.5.

i) Los conjuntos N_k, Q_k y S_k son abiertos en $[\beta_*, \gamma_*]$.

ii) La frontera de $G_k \cup Q_k$ está contenida en $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} G_i$.

Demostración.

i) Sea $\bar{\alpha} \in N_k$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $u(r,\alpha)$ es decreciente en $(T_{k-1}(\bar{\alpha}), Z_k(\bar{\alpha}))$. Dado que $u'(Z_k(\bar{\alpha}),\bar{\alpha}) < 0$, podemos extender por continuidad la solución al intervalo $[T_{k-1}(\bar{\alpha}), Z_k(\bar{\alpha})+\varepsilon]$ y se tiene que $u'(r,\bar{\alpha}) < 0 \; \forall \; r \in (T_{k-1}(\bar{\alpha}), Z_k(\bar{\alpha})+\varepsilon]$. Tomando $r_1 \in (Z_k(\bar{\alpha}), Z_k(\bar{\alpha})+\varepsilon)$, se tiene que $u(r_1,\bar{\alpha}) < 0$

y $u'(r_1,\bar{\alpha}) < 0$. Por dependencia continua de las soluciones en los valores iniciales, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\alpha \in (\bar{\alpha}-\delta, \bar{\alpha}+\ \delta)$ se tiene que

$$\begin{aligned} u(r_1,\alpha) &< 0 \\ u'(r_1,\alpha) &< 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto N_k es abierto. Sea ahora $k \geq 1$ y $\bar{\alpha} \in Q_k$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $0 < u(Z_k(\bar{\alpha}),\bar{\alpha}) < \gamma_1$. Si $I(Z_k(\bar{\alpha}),\bar{\alpha}) < 0$, entonces existe un $r_1 > 0$ tal que $I(r_1,\bar{\alpha}) < 0$ y $0 < u(r_1,\bar{\alpha}) < \gamma_1$. Por dependencia continua de las soluciones en los valores iniciales existe $\delta > 0$ tal que si $\alpha \in (\bar{\alpha}-\delta, \bar{\alpha}+\ \delta)$, entonces $I(r_1,\alpha) < 0$ y $0 < u(r_1,\alpha) < \gamma_1$. Tomando δ más pequeño de ser necesario, se tiene que $u(\cdot,\alpha)$ tiene exactamente $k-1$ ceros en $[0,r_1]$, por lo tanto $(\bar{\alpha}-\delta,\bar{\alpha}+\ \delta) \subset Q_k$. El caso $I(Z_k(\bar{\alpha}),\bar{\alpha}) = 0$ no puede darse, pues $F(u(Z_k)) = 0$ por lo que $u(Z_k)$ tendría que ser β o $-\beta$, pero también debe cumplirse que $u'(Z_k) = 0$.
Se sigue el mismo argumento anterior para demostrar que S_k es un conjunto abierto.

ii) Como N_k es abierto y disjunto de $Q_k \cup G_k$, se tiene que $N_k \cap \overline{Q_k \cup G_k} \neq \emptyset$. Tomemos $\bar{\alpha}$ en la frontera de $Q_k \cup G_k$. Como Q_i y S_i son abiertos, se debe tener que $\bar{\alpha} \in \bigcup_{i=1}^{k} G_i \cup \Upsilon_i$. Por el Lema 3.3, si $\bar{\alpha} \in \bigcup_{i=1}^{k} \Upsilon_i$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $(\bar{\alpha}-\delta,\bar{\alpha}+\ \delta) \subset \Upsilon_j \cup N_k$, lo que implica que $(Q_k \cup G_k) \cap (\bar{\alpha}-\delta,\bar{\alpha}+\ \delta) = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\bar{\alpha} \in \bigcup_{i=1}^{k} G_i$. ■

4. Demostración de los Resultados Principales

El objetivo de esta sección es demostrar los teoremas expuestos en la primera sección. Para ello, necesitaremos el siguiente lema

Lema 4.1. Supongamos que f satisface (f_1), (f_2) y (f_3). Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_k \in (\beta_*, \gamma_*)$ tal que $[\alpha_k, \gamma_*) \subset N_k$.

Demostración. Aplicando el Lema 3.3 a $\alpha = \gamma_*$, $\gamma_i = \gamma_*$ y $j = 1$, se obtiene que existe $\alpha_k > 0$ tal que $[\alpha_k, \gamma_*) \subset N_k$. ■

Demostración del Teorema 2.2.1. En primer lugar, observemos $G_k \cup Q_k$ está acotado por α_{k+1} del Lema 4.1 para todo $k \in \mathbb{N}$. Se procederá a demostrar que existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $G_m \neq \emptyset$. Una vez hecho esto, denotamos por m_1 el primer valor de m tal que $G_m \neq \emptyset$. Sean

$$\alpha^{\#}_{m_1} = \text{ínf}(G_{m_1} \cup Q_{m_1}) \quad \text{y} \quad \alpha^*_{m_1} = \sup(G_{m_1} \cup Q_{m_1}).$$

Luego, por el Lema 3.5(ii) y la definición de m_1, $\alpha^{\#}_{m_1}$ y $\alpha^*_{m_1}$ están en G_{m_1}, pero no podemos garantizar que $\alpha^{\#}_{m_1} < \alpha^*_{m_1}$. Por dependencia continua de las soluciones en los valores iniciales, para $\bar{\alpha} \in G_{m_1}$ existe una vecindad de $\bar{\alpha}$ que está contenida en $G_{m_1} \cup Q_{m_1} \cup N_{m_1}$. Por la definición de $\alpha^{\#}_{m_1}$ y $\alpha^*_{m_1}$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
(\alpha^{\#}_{m_1} - \delta, \alpha^{\#}_{m_1}) &\subset N_{m_1} \\
(\alpha^*_{m_1}, \alpha^*_{m_1} + \delta) &\subset N_{m_1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, del Lema 3.3(i), tomando un $\delta > 0$ más pequeño de ser necesario, podemos asumir que $(\alpha^{\#}_{m_1} - \delta, \alpha^{\#}_{m_1}) \subset Q_{m_1+1}$ y $(\alpha^*_{m_1}, \alpha^*_{m_1} + \delta) \subset Q_{m_1+1}$.

Sean ahora

$$\alpha^{\#}_{m_1+1} = \text{ínf}(G_{m_1+1} \cup Q_{m_1+1}) \quad \text{y} \quad \alpha^{*}_{m_1+1} = \sup(G_{m_1+1} \cup Q_{m_1+1}).$$

Del Lema 3.5(i), $\alpha^{\#}_{m_1+1} < \alpha^{*}_{m_1+1}$, y del Lema 3.5(ii), se tiene que $\alpha^{\#}_{m_1+1}$ y $\alpha^{*}_{m_1+1}$ están en G_{m_1+1}. Procedemos entonces por inducción: en cada paso $k \geq m_1 + 1$, por el Lema 3.3(i) se tiene que $Q_k \neq \emptyset$, por lo que podemos definir

$$\alpha^{\#}_{k} = \text{ínf}(G_k \cup Q_k) \quad \text{y} \quad \alpha^{*}_{k} = \sup(G_k \cup Q_k)$$

para obtener la existencia de dos α's en G_k para cada $k \geq m_1 + 1$.
Demostremos entonces que existe un $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $G_m \neq \emptyset$. Por el Lema 4.1, podemos definir

$$\alpha^1 = \text{ínf}\{\alpha \geq \beta_* \mid (\alpha, \gamma_*) \subset N_1\}.$$

Entonces, por el Lema 3.5(i) se tiene que $\alpha^1 \in G_1$ o $\alpha^1 \in \Upsilon_1$. En los próximos argumentos, cuando estos dos casos sean posibles, vamos a asumir que los puntos límites están en Υ_k, ya que de lo contrario el teorema queda demostrado.
Supongamos entonces que $\alpha^1 \in \Upsilon_1$. Entonces se tiene que $u(Z_1(\alpha^1), \alpha^1) = \gamma$. Del Lema 3.4 y la definición de α^1, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\{\alpha \geq \beta_* \mid (\alpha^1, \alpha) \subset N_k\} \neq \emptyset.$$

Como $\alpha^1 < \gamma_*$, podemos elegir $\rho > 0$ tal que $\alpha^1 + \rho < \gamma_*$ y definir

$$\alpha^1_k = sup\{\alpha \in (\alpha^1, \alpha^1 + \rho) \,|\, (\alpha^1, \alpha) \subset N_k\}.$$

Observemos que $\{\alpha^1_k\}$ converge, ya que es monótona decreciente en k. Dado que (2.5) no tiene soluciones oscilatorias por la proposición 3.2(iv), se tiene que converge a α^1.

Por lo tanto, existe $k_1 > 0$ tal que

$$\alpha^1_{k_1} < \alpha^1_{k_1-1} < \alpha^1 + \rho \quad \text{y} \quad u(Z_{k_1}, \alpha^1_{k_1}) = \gamma_j,$$

con $F(\gamma_j) < F(\gamma)$ por el Lema 3.3(ii), por lo que $\gamma_j = 0$. ■

Demostración del Teorema 2.2.2. Supongamos por contraddicción que existe $\alpha > \beta_*$ en G_j, es decir, $u(\cdot, \alpha)$ tiene exactamente $j-1$ cambios de signo para algún $j = 1, ..., k+1$. Como u cruza γ en un punto r^1_γ, integrando la desigualdad $|u'(r)| \leq \sqrt[p]{p'(F(\gamma_*) + \tilde{F})}$ en $[0, r^1_\gamma]$, se tiene que para todo $r \leq r^1_\gamma$

$$r^1_\gamma \geq \frac{\beta_* - \gamma}{\sqrt[p]{p'(F(\gamma_*) + \tilde{F})}},$$

donde $\tilde{F}$ está definida en el lema 3.4. Sea $r_\gamma \geq r^1_\gamma$ el último punto donde $F(u(r_\gamma)) = F(\gamma)$, que podemos asumir que sucede después de T_i para algún $0 \leq i < j$. Utilizando el hecho de que $I(Z_j) = 0$ (pues $\alpha \in G_j$) se tiene que

$$\begin{aligned}
I(r_\gamma) &= (N-1)\int_{r_\gamma}^{Z_j} \frac{|u'(r)|^p}{r} dr \\
&\leq \frac{N-1}{r_\gamma}(p'(F(\gamma_*) + \tilde{F}))^{\frac{p-1}{p}} \int_{r_\gamma}^{Z_j} |u'(r)| dr \\
&\leq \frac{N-1}{r_\gamma}(p'(F(\gamma_*) + \tilde{F}))^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{r_\gamma}^{T_{i+1}} |u'(r)| dr + \int_{T_{i+1}}^{T_{i+2}} |u'(r)| dr + ... + \int_{T_{j-1}}^{Z_j} |u'(r)| dr \right) \\
&\leq \frac{(N-1)(p'(F(\gamma_*) + \tilde{F}))}{\beta_* - \gamma}(j-i)2\gamma.
\end{aligned}$$

Y con esto se tiene que

$$F(\gamma) \leq j(N-1)(p'(F(\gamma_*) + \tilde{F}))\frac{2\gamma}{\beta_* - \gamma}$$

lo que contradice (2.3). ■

Para probar el último resultado, se necesitará del siguiente lema

Lema 4.2. Supongamos que f satisface (f_1), (f_2) y (f_3). Sea $\alpha > \bar{\beta}$ y sea $r_{\bar{\beta}}$ el primer punto donde $u(r_{\bar{\beta}}, \alpha) = \bar{\beta}$. Si $r_{\bar{\beta}} \geq \bar{C}$, entonces existe un primer punto $r_\beta > r_{\bar{\beta}}$ tal que $u(r_\beta, \alpha) = \beta$, $u'(r_\beta, \alpha) < 0$ y

$$r_\beta - r_{\bar{\beta}} \leq A,$$

donde las constantes A y $\bar{C}$ están definidas en la introducción.

Demostración. Como toda solución $\alpha > \beta_*$ debe cruzar β_* en un primer punto que denotaremos por r_{β_*}, integrando (3.7) sobre $[r_{\bar{\beta}}, r]$, con $r > r_{\beta_*}$ se obtiene

$$I(r) = I(r_{\bar{\beta}}) - (N-1)\int_{r_{\bar{\beta}}}^{r} \frac{|u'(t)|^p}{p'} dt.$$

Dado que $|u'(r)| \leq \sqrt[p]{p'(I(r_{\bar{\beta}}) + \hat{F})}$ si $u(r) \geq \beta$, se obtiene que

$$I(r) \geq I(r_{\bar{\beta}}) \left(1 - \frac{(N-1)(\bar{\beta} - u(r))}{r_{\bar{\beta}}} \frac{\sqrt[p]{p'(I(r_{\bar{\beta}}) + \hat{F})}}{I(r_{\bar{\beta}})} \right).$$

Ahora, como $\sqrt[p]{p'(I + \hat{F})}/I$ es decreciente en I, $I(r_{\bar{\beta}}) \geq F(\bar{\beta})$ y $r_{\bar{\beta}} \geq \bar{C}$, se tiene que

$$\begin{aligned} I(r) &\geq I(r_{\bar{\beta}}) \left(1 - \frac{F(\bar{\beta}) - F(\gamma)}{2F(\bar{\beta})} \right) \\ &\geq \frac{F(\bar{\beta}) + F(\gamma)}{2} \\ &\geq F(u(r)) + \frac{F(\bar{\beta}) - F(\gamma)}{2}, \end{aligned}$$

lo que implica que mientras $\beta \leq u(r) \leq \beta_*$,

$$|u'(r)| \geq \left(\frac{p'}{2} (F(\bar{\beta}) - F(\gamma)) \right)^{1/p}.$$

Por lo tanto, $u(Z_1) < \beta$, pues si $u(Z_1) > \beta$ se tendría que $u'(Z_1) = 0$ lo que contradeciría la desigualdad anterior, de la que se deduce que $u'(Z_1) > 0$. Además, se tiene que

$$\beta_* - \beta \geq \left(\frac{p'}{2} (F(\bar{\beta}) - F(\gamma)) \right)^{1/p} (r_\beta - r_{\beta_*}).$$

Finalmente, integrando (2.5) sobre $[r_{\bar{\beta}}, r]$, con $r < r_{\beta_*}$ se tiene que

$$r^{N-1} |u'(r)|^{p-1} \geq \int_{r_{\bar{\beta}}}^{r} t^{N-1} f(u(t)) dt \geq \min_{s \in [\beta_*, \bar{\beta}]} f(s) \frac{r^N - r_{\bar{\beta}}^N}{N},$$

por lo que

$$|u'(r)|^{p-1} \geq \min_{s \in [\beta_*, \bar{\beta}]} f(s) \left(\frac{r - r_{\bar{\beta}}}{N} \right),$$

lo que implica que

$$p'(\bar{\beta} - \beta_*) \geq \left(\frac{\min\limits_{s \in [\beta_*, \bar{\beta}]} f(s)}{N} \right)^{p'/p} (r_{\beta_*} - r_{\bar{\beta}})^{p'},$$

obteniéndose el resultado. ■

Demostración del Teorema 2.2.3. Para demostrar este teorema solo necesitaremos probar que $Q_1 \neq \emptyset$, pues, de este modo, al definir

$$\alpha_1^{\#} = \inf(G_1 \cup Q_1) \quad \text{y} \quad \alpha_1^* = \sup(G_1 \cup Q_1),$$

se tiene que $\alpha_1^{\#} < \alpha_1^*$ por el lema 3.5(i) y la demostración se sigue como se hizo en el teorema 2.2.1.

Sea entonces $\alpha^* < \beta_*$ tal que $u(\cdot, \alpha)$ (que denotaremos por $u(\cdot)$) cruza el valor β. Para simplificar las notaciones, vamos a escribir $Z_1 = Z_1(\alpha^*)$, $I(Z_1) = I(Z_1, \alpha^*)$ e $I(r_\beta) = I(r_\beta, \alpha^*)$. Como $|u'(r)| \leq \sqrt[p]{p'(I(r_\beta) + \bar{F})}$ (donde $\bar{F}$ está definido en la introducción) para $r \in (r_\beta, Z_1)$, integrando (3.7) se tiene que

$$\begin{aligned}
(Z_1)^{p'(N-1)} I(Z_1) &= r_\beta^{p'(N-1)} I(r_\beta) - p'(N-1) \int_{r_\beta}^{Z_1} r^{p'(N-1)-1} |F(u(r))| dr \\
&\leq r_\beta^{p'(N-1)} I(r_\beta) - p'(N-1) r_\beta^{p'(N-1)-1} \int_{r_\beta}^{Z_1} |F(u(r))| dr \\
&\leq r_\beta^{p'(N-1)} I(r_\beta) - \frac{p'(N-1) r_\beta^{p'(N-1)-1}}{\sqrt[p]{p'(I(r_\beta) + \bar{F})}} \int_{r_\beta}^{Z_1} |u'(r) F(u(r))| dr \\
&\leq r_\beta^{p'(N-1)-1} \left(r_\beta I(r_\beta) - \frac{p'(N-1)}{\sqrt[p]{p'(I(r_\beta) + \bar{F})}} \int_0^\beta |F(s)| ds \right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si

$$r_\beta I(r_\beta) < \frac{p'(N-1)}{\sqrt[p]{p'(I(r_\beta) + \bar{F})}} \int_0^\beta |F(s)| ds,$$

entonces $\alpha^* \in Q_1$. De este modo, para demostrar el teorema, lo que haremos es encontrar α^* tal que $u(\cdot, \alpha^*)$ cruce β y se satisfaga la desigualdad anterior.

Sabemos que la solución constante $u \equiv \gamma_*$ es solución del problema, por lo tanto, por dependencia continua en los valores iniciales, se tiene que $r_{\bar{\beta}}(\alpha) \to \infty$ cuando $\alpha \to \gamma_*$. Así, podemos escoger $\alpha^* > \beta_*$ de modo que $r_{\bar{\beta}}(\alpha^*) = \bar{C}$, donde $\bar{C}$ es el definido en la introducción. Usando ahora el hecho de que $I(r) \leq F(\gamma_*)$, vemos de (2.4) que $\alpha^* \in Q_1$.

■

Referencias

[1] ADACHI, S., TANAKA, K., Four positive solutions for the semilinear elliptic equation $-\Delta u + u = a(x)u^p + f(x)$ in $\mathbb{R}^N$. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **11** (2000), no. 1, 63-95.

[2] AO, W., WEI, J., Infinitely many positive solutions for nonlinear equations with nonsymmetric potential, preprint. cf. MR3268870

[3] BARTSCH, T., WILLEM, M., Infinitely many radial solutions of a semilinear elliptic problem on $\mathbb{R}^N$. *Arch. Rational Mech. Anal.* **124** (1993), no. 3, 261-276.

[4] BARTSCH, T., WILLEM, M., Infinitely many nonradial solutions of a Euclidean scalar field equation. *J. Funct. Anal.* **117** (1993), no. 2, 44-460.

[5] BERESTYCKI, H., LIONS, P. L., Nonlinear scalar field equations I, Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (1983), no. 4, 313?345.

[6] BERESTYCKI, H., LIONS, P. L., Nonlinear scalar field equations II, Existence of infinitely many solutions. *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (1983), no. 4, 347?375.

[7] CAO, D-M., ZHOU, H., Multiple positive solutions of nonhomogeneous semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **126** (1996), no. 2, 443-463.

[8] CERAMI, G., DEVILLANOVA, G., SOLIMINI, S., Infinitely many bound states for some nonlinear scalar field equations. *Calc. Var. Partial Differential Equations* **23** (2005), no. 2, 139-168.

[9] CERAMI, G., PASSASEO, D., SOLIMINI, S., Infinitely many positive solutions to some scalar field equations with nonsymmetric coefficients. *Comm. Pure Appl. Math.* **66** (2013), no. 3, 372-413.

[10] CODDINGTON, E. A., LEVINSON, N. Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Book Co., 1955.

[11] CONTI, M., MERIZZI, L., TERRACINI, S., Radial solutions of a superlinear equations on $\mathbb{R}^N$. I. A global variational approach. *Arch. Rational Mech. Anal.* **153** (2000), no. 4, 291-316.

[12] CORTÁZAR, C., GARCÍA-HUIDOBRO, M., YARUR, C., On the uniqueness of the second bound state solution of a semilinear equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Linéaire* **26** (2009), no. 6, 2091-2110.

[13] CORTÁZAR, C., GARCÍA-HUIDOBRO, M., YARUR, C., On the uniqueness of sign changing bound state solutions of a semilinear equation. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non. Linéaire* **28** (2011), no. 4, 599-621.

[14] CORTÁZAR, C., GARCÍA-HUIDOBRO, M., YARUR, C., On the existence of sign changing bound state solutions of a quasilinear equation. *J. Differential Equations* **254** (2013), no. 6, 2605-2625.

[15] CORTÁZAR, C., GARCÍA-HUIDOBRO, M., HERREROS, P., Multiplicity results for sign changing bound state solutions of a semilinear equation. *J. Differential Equations* **259** (2015), no. 12, 7108-7134.

[16] CORTÁZAR, C., DOLBEAULT, J., GARCÍA-HUIDOBRO, M., MANÁSEVICH, R., Existence of sign changing solutions for an equation with a weighted p-Laplace operator. *Nonlinear Anal* **110** (2014), 1-22.

[17] Dolbeault, J., García-Huidobro, M., Manásevich, R., Qualitative properties and existence of sign changing solutions with compact support for an equation with a p-Laplace operator. *Adv. Nonlinear Stud.* **13** (2013), no. 1, 149-178.

[18] Ferrero, A., Gazzola, F., On subcritically assumptions for the existence of ground states of quasilinear elliptic equations. *Advances in Diff. Equat.* **8** (2003), no. 9, 1081-1106.

[19] Franchi, B., Lanconelli, E. and Serrin, J., Existence and Uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in $\mathbb{R}^N$. *Advances in mathematics* **118** (1996), 177-243.

[20] Gazzola, F., Serrin, J. and Tang, M., Existence of ground states and free boundary value problems for quasilinear elliptic operators. *Advances in Diff. Equat.* **5** (2000), no. 1-3, 1-30.

[21] McLeod, K, Serrin, J., Uniquenessof positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^N$. *Arch. Rational Mech. Anal.* **99** (1987), 115-145.