FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Decaimiento de la solución en ecuación tipo Timoshenko usando conmutadores

por

Francisco Riveros Miranda

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica para optar al grado de Magíster en Matemáticas

TUTOR DE TESIS:
Dr. Claudio Fernández
CO-TUTOR DE TESIS:
Dra. Verónica Poblete

Santiago, Diciembre 2018

Agradecimientos

Agradezco a mi hermano Nico y a mi hermana Carolina, a mis compañeros y amigos del magíster Pablo G., Manuel y Pablo Q., a lxs amigxs de siempre, a mi pareja María Paz por su compañía y apoyo durante este proceso, y principalmente a mis padres Elsa y Fernando quienes han sido los que me han brindado todo lo necesario desde siempre para poder desarrollarme en mis estudios.

No puedo dejar de agradecer a la música que me ha brindado la energía e inspiración necesaria para seguir, en particular en este proceso a artistas como Jorge González, Miranda!, Alex Andwanter y Cancioneros del Aire.

En el ámbito académico agradezco a mis tutores de tesis Verónica Poblete y Claudio Fernández, por su apoyo, guía y entrega de conocimientos. Agradezco también a la Facultad de Matemáticas de la PUC por las becas que se me otorgaron y a Fondecyt por el financiamiento en mi segundo año de magíster.

Índice general

1. Introducción **5**

2. Preliminares **7**
2.1. Espacios de Hilbert 7
2.2. Operadores no acotados en espacios de Hilbert 8
2.2.1. Operadores simétricos y autoadjuntos 11
2.3. Conmutadores de operadores 12
2.4. Transformada de Föurier 14

3. Decaimiento de soluciones en ecuación de Schrödinger usando conmutadores **19**

4. Decaimiento en ecuación de Timoshenko **24**
4.1. Ecuación de Timoshenko: caso M=0 24
4.2. Ecuación de Timoshenko: caso $M = 1$ 27

5. Conclusiones **32**

Resumen

Utilizando un procedimiento con conmutadores de operadores no acotados, vamos a probar el decaimiento de la solución u de una ecuación de Timoshenko del tipo $u_{tt} + \Delta^2 u = g(t)\Delta u$ con cierta condición inicial y $g(t) = c$ constante. Para esto, primero veremos que u es la parte real de la solución ω de una ecuación de Schrödinger de la forma $i\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = H\omega$, donde H es un operador autoadjunto. Luego, a partir de encontrar dos operadores A y Q, simétrico y positivo respectivamente, que verifiquen una relación de conmutación del estilo $i[H, A] = Q$ con H, vamos a poder probar que ω decae como t^{-1} de forma débil, y con esto, encontraremos el decaimiento para u.

1

Introducción

A lo largo de los años, han existido diversos estudios del decaimiento temporal de las soluciones de ecuaciones diferenciales. En particular en la ecuación de Schrödinger, por sus variadas aplicaciones en diversas áreas tales como la mecánica clásica, mecánica cuántica, teoría de probabilidades, etc. En esta tesis trabajaremos sobre las propiedades de conmutación de los operadores involucadros en el sistema para determinar distintos tipos de decaimiento. Este tipo de propiedades han sido trabajadas previamente por varios autores y será importante tener presentes algunos de sus principales resultados.

Trabajando sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, Miyamoto en [2] consideró un operador autoadjunto H y un operador tiempo T para H, esto es, un operador con el cual H verifique la relación canónica de conmutación, es decir, $i[H,T] = I$. El autor notó la equivalencia de esta condición con la relación de Weyl (ver [8]) cuando el operador T es autoadjunto y basándose en esto, trabajó con un operador tiempo T general y demostró decaimiento débil como t^{-1} para la expresión $e^{-itH}\varphi$ (que es justamente la forma de la solución de la ecuación de Schrödinger sobre la cual se basa este trabajo). Luego usando un T_0 específico vió la aplicación de esto a probabilidad de supervivencia para el cálculo de tiempos de vida, entre otras cosas. A partir de esto, Rivera en [1] consiguió un resultado de decaimiento del mismo orden anterior, pero esta vez para la expresión $Pe^{-itH}\varphi$ y basándose en una regla más general de conmutación entre T y H de la forma $i[T, e^{-itH}] = P$ donde P es un operador positivo que conmuta con H, diciendo en este caso que T es un operador P-tiempo para H. En la Proposición 2.3 vamos a demostrar que es suficiente que T y P verifiquen la relación $i[H,T] = P$ para tener que T es un operador P-tiempo para H. Luego aplicaremos estos resultados, encontrando los operadores T y P, y donde P resultará ser una función de H.

Cabe destacar que fue Mourre en [6] quien comenzó con el estudio de las relaciones de conmutación entre operadores como los mencionados anteriormente. Luego de esto podemos observar en [4] y [5] resultados sobre operadores H y T verificando igualdades del tipo $i[H,A] = f(H) + K$ con distintas condiciones de regularidad para H, para ver decaimiento del tipo Kato-Jensen (ver[10]) en ecuaciones de Schrödinger y otros tipos de ecuaciones dispersivas (ver [5]) utilizando, por ejemplo, el método del operador conjugado (ver [4]).

Además de la ecuación de Schrödinger, también hay varios estudios relacionados con el comportamiento de las soluciones ecuaciones de Timoshenko, en particular del tipo $u_{tt} + \Delta^2 u = g(t)\Delta u$ donde $g(t)$ es una función no lineal y que aparece en varios modelos, mayormente relacionados con vibraciones no lineales de vigas [11]. Resultados de la existencia de solución para esta ecuación puede encontrarse en [12]. Para adentrarnos en el estudio de este tipo de ecuación de Timoshenko, debemos tener en consideración la relación que existe entre la solución u de la ecuación mencionada y la solución de un tipo de ecuación de Schrödinger. Esta relación fue expuesta en [3] y la probaremos en la Proposición 4.1.

En este trabajo comenzaremos entregando las herramientas básicas de espacios de Hilbert y operadores no acotados sobre estos, pasando después a estudiar las propiedades de los conmutadores entre operadores y su relación con la transformada de Föurier. Para, posteriormente, utilizar esto para comenzar analizando decaimiento de soluciones en ecuaciones de Schrödinger y luego, gracias a las herramientas desarrolladas en los Capítulos anteriores, tanto de conmutadores como de decaimiento, llegar a obtener decaimiento en la ecuación de Timoshenko mencionada. Primero en el caso homogéneo, es decir con $g(t) = 0$ y luego con $g(t) = g_0$ constante.

2

Preliminares

2.1. Espacios de Hilbert

Un subconjunto de los espacios de Banach, son los llamados espacios de Hilbert, que se caracterizan por tener producto interno. Con este producto es posible obtener resultados geométricos entre sus elementos.

Definición 2.1. *Un espacio vectorial $\mathcal{H}$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ (que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es llamado* ***espacio de Hilbert*** *si está dotado de un producto interno, es decir, de una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{F}$ tal que para todo $\varphi,\psi,\phi\in\mathcal{H}$ y $\alpha\in\mathbb{F}$ verifica:*

1. $\langle\varphi,\varphi\rangle \geq 0$ *y* $\langle\varphi,\varphi\rangle = 0$ *si y sólo si* $\varphi = 0$
2. $\langle\varphi,\psi+\alpha\phi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle + \overline{\alpha}\langle\varphi,\phi\rangle$
3. $\langle\alpha\varphi+\psi,\phi\rangle = \alpha\langle\varphi,\phi\rangle + \langle\psi,\phi\rangle$
4. $\langle\varphi,\psi\rangle = \overline{\langle\psi,\varphi\rangle}$.

Además, es completo con la norma inducida por este producto $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}}$ (que denotamos como $\|\cdot\|$ cuando es claro el espacio sobre el cual se está trabajando).

Estas propiedades serán fundamentales en el desarrollo de este trabajo, al igual que la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

Proposición 2.1. *Dados $\varphi,\psi\in\mathcal{H}$*

$$|\langle\varphi,\psi\rangle| \leq \|\varphi\|\,\|\psi\|\,.$$

Demostración. La demostración se puede encontrar en [16]. □

Ejemplo 2.1. *Dado Ω abierto de $\mathbb{R}^n$, considere el espacio vectorial real*

$$L^2(\Omega) = \left\{\varphi : \Omega\to\mathbb{F} \,:\, \left(\int_\Omega |\varphi(x)|dx\right)^{1/2} < \infty\right\}.$$

Este conjunto es un espacio de Hilbert con producto interno definido por

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_\Omega \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx, \quad \text{para } \varphi,\psi\in L^2(\Omega),$$

y con norma inducida:

$$\|\varphi\| = \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad \textit{para } \varphi \in L^2(\Omega).$$

Para presentar el siguiente ejemplo, necesitamos las siguientes definiciones

Definición 2.2. *Un* ***multi-índice*** *es una n-tupla $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, donde α_i son enteros positivos. Definimos el* ***orden*** *de α y lo escribimos $|\alpha|$ a la cantidad $\alpha_1 + ... + \alpha_n$. Con esto, se define el* ***operador derivada*** *de orden α como*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definición 2.3. *Sea m entero positivo y $1 \leq p \leq \infty$. Se define el* ***espacio de Sobolev de orden m*** *como:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio vectorial dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \quad \textit{si} \;\; 1 \leq p < \infty,$$

y para $p = \infty$:

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Definición 2.4. *Se definen los espacios $H^m(\Omega)$, como*

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq m\}.$$

Ejemplo 2.2. *Los espacios $H^m(\Omega)$ son Hilbert con el producto interno*

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

Su norma inducida es

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \langle u, u \rangle_{H^m(\omega)}^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

2.2. Operadores no acotados en espacios de Hilbert

Una de las más importantes aplicaciones de los operadores definidos en espacios de Hilbert, es en problemas de física matemática, modelación, estudio de ecuaciones, etc. Es un hecho que muchos de los operadores más importantes que aparecen son no acotadas. En esta sección introduciremos, entre otras cosas, conceptos y resultados necesarios para poder trabajar con estos operadores no acotados en espacios de Hilbert. Diremos que A es un **operador** sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ si este es un mapeo lineal desde un subespacio lineal de $\mathcal{H}$ llegando a $\mathcal{H}$.

Definición 2.5. *El **dominio** del operador A es el subconjunto $D(A) \subset \mathcal{H}$ dado por*

$$D(A) = \{\varphi \in \mathcal{H} \quad / \quad \|A\varphi\|_{\mathcal{H}} < \infty\}.$$

Definición 2.6. *Un operador $A : D(A) \to \mathcal{H}$ se dice **acotado** si existe $C > 0$ tal que $\|A\varphi\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{H}}$ para todo $\varphi \in D(A)$, en caso contrario, el operador A es **no acotado**.*

El Teorema de Hellinger-Toeplitz (ver [8] sección III.5) dice que un operador definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que

$$\langle A\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, A\psi\rangle$$

es necesariamente acotado. Esto sugiere que un operador no acotado cualquiera estará definido solo en un subespacio denso de $\mathcal{H}$.

Por lo que, salvo que se explicite lo contrario, supondremos siempre que el dominio de A es denso en $\mathcal{H}$. Así, para identificar un operador no acotado sobre un Hilbert, debemos dar el dominio sobre el cual actúa y especificar de qué forma lo hace.

Para aclarar estos conceptos, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.3. *Considere el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ y el operador A definido sobre $D(A) = H^2(\mathbb{R})$ por*

$$Au = -u''$$

para todo $u \in D(A)$.

Tomando la sucesión $\psi_n(x) = e^{-n|x|}$ para $n \in \mathbb{N}$ es claro $\psi_n(x) \in D(A)$ para todo n. Además

$$\|\psi_n\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2n|x|} dx = \frac{1}{n}$$

y

$$\|A\psi_n\|^2_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{\infty} n^4 e^{-2n|x|} dx = n^3.$$

Por lo tanto

$$\frac{\|A\psi_n\|_{\mathcal{H}}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} = n \to \infty,$$

cuando n tiende a ∞, es decir, A es un operador no acotado en $L^2(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.4. *Sea $\mathcal{H} = L^2(]0,1[)$ y en $D(A) = C^1(]0,1[)$ considere el operador derivada dado por*

$$Au = u'$$

para todo $u \in D(A)$.

Tomando la sucesión $\psi_n(x) = x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente $\psi_n \in C^1(]0,1[)$ para todo n. Además,

$$\|\psi_n\|^2_{\mathcal{H}} = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}$$

y

$$\|A\psi_n\|^2_{\mathcal{H}} = \int_0^1 n^2 x^{2n-2} dx = \frac{n^2}{2n-1}.$$

Nuevamente,

$$\frac{\|A\psi_n\|_{\mathcal{H}}}{\|\psi_n\|_{\mathcal{H}}} = n\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \to \infty$$

cuando $n \to \infty$, es decir, A es un operador no acotado en $L^2(]0,1[)$.

Ejemplo 2.5. *(**Operador posición**) Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ y $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por*

$$(T\varphi)(x) = x\varphi(x),$$

con dominio

$$D(T) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) / \int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi(x)|^2 dx < \infty\}.$$

Note que este operador es no acotado, pues podemos escoger φ con $\|\varphi\| = 1$ tal que tenga soporte en todo $\mathbb{R}$, por tanto el valor de $\int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi(x)|^2 dx$ crece indefinidamente a medida que se va escogiendo valores de x acercándose a infinito.

Definición 2.7. *Diremos que un operador A con dominio denso $D(A)$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es **positivo** si*

$$\langle A\varphi, \varphi\rangle \geq 0$$

para todo $\varphi \in D(A)$.

Ejemplo 2.6. *Sea $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ y $T : D(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definido por*

$$(T\varphi)(x) = x^2\varphi(x),$$

con dominio

$$D(T) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) / \int_{\mathbb{R}} x^4|\varphi(x)|^2 dx < \infty\}.$$

Este dominio es denso en $\mathcal{H}$ ya que contiene a las funciones continuas de soporte compacto, el cual es denso en $\mathcal{H}$. Veamos que es un operador positivo: sea $\varphi \in D(T)$, entonces

$$\langle T\varphi, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (T\varphi)(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} x^2\varphi(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} x^2|\varphi(x)|^2 dx \geq 0.$$

Ejemplo 2.7. *Defina el operador **Laplaciano** $\Delta : D(\Delta) \to \mathcal{H}$ por*

$$\Delta\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\varphi, \tag{2.1}$$

para $\varphi \in D(\Delta) = H^2(\mathbb{R}^n)$.

El dominio $D(\Delta)$ contiene a las funciones continuas de soporte compacto, luego la densidad de $H^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R})$ es clara. El operador $H_0 = -\Delta$ es positivo. En efecto, para $\varphi \in D(H_0)$ tenemos

$$\langle H_0\varphi\ ,\ \varphi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\overline{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)}dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}|^2 dx \geq 0.$$

Por lo tanto $H_0 = -\Delta$ es un operador positivo.

Definición 2.8. *El **gráfico** de un operador T es el conjunto:*

$$\Gamma(T) = \{(\varphi, T\varphi) | \varphi \in D(T)\},$$

el cual es un subespacio de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, que a su vez es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por

$$\langle (\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}}$$

*para $(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Si $\Gamma(T)$ es un conjunto cerrado con la norma inducida por este producto interno, se dice que T es un operador **cerrado**.*

Definición 2.9. *Dados los operadores S y T sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Si el gráfico de T está contenido en el gráfico de S, S es una **extensión** de T y se denota $T \subset S$.*

Observación 2.1. *$T \subset S$ es equivalente a que $D(T) \subset D(S)$ y $S\varphi = T\varphi$ para todo $\varphi \in D(T)$.*

Definición 2.10. *Un operador T es **clausurable** si tiene una extension cerrada. Se define la **clausura** de T como la extensión cerrada más pequeña de T y se denota $\overline{T}$.*

Definición 2.11. *Sea T operador densamente definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Sea $D(T^*)$ el conjunto de elementos $\varphi \in \mathcal{H}$ para los cuales existe un $u \in \mathcal{H}$ verificando*

$$\langle T\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, u \rangle \quad \forall \psi \in D(T).$$

*Para tales $\varphi \in D(T^*)$ definimos $T^*\varphi := u$. El operador T^* es llamado el **adjunto** de T.*

Observación 2.2. *Para asegurarnos de que u este unicamente determinado, se necesita el hecho de que $D(T)$ sea denso, pues si no es denso, su ortogonal $(D(T))^{\perp}$ es no trivial. Lo que es equivalente a que exista $u \neq 0$ tal que $\langle \psi, u \rangle = 0$, para todo $\psi \in D(T)$. Con lo que se verifica que existen u_1, u_2 tales que $\langle \psi, u_1 \rangle = \langle \psi, u_2 \rangle$ para todo $\psi \in D(T)$.*

Observación 2.3.

$$D(T^*) = \{\varphi \in \mathcal{H} : |\langle \varphi, T\psi \rangle| < \infty, \forall \psi \in D(T)\}.$$

2.2.1. Operadores simétricos y autoadjuntos

Definición 2.12. *Un operador T definido en $D(T)$ un subespacio denso del Hilbert $\mathcal{H}$, es **simétrico** si se verifica que $T \subset T^*$.*

Observación 2.4. *T es simétrico si y solo si $\langle T\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, T\psi \rangle$ para todo $\varphi, \psi \in D(T)$.*

Ejemplo 2.8. *Consideremos el operador $H_0 = -\Delta$ son dominio $D(H_0) = H^2(\mathbb{R}^n)$ y veamos que es simétrico.*

Sean $\varphi, \psi \in D(H_0)$, integrando por partes y dado que estas funciones tienden a cero para x suficientemente grande:

$$\begin{aligned} \langle H_0\varphi \ , \ \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varphi \right) \overline{\psi} dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \overline{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right)} dx \\ &= \sum_{j=1}^{n} - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \overline{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} \right)} dx = \langle \varphi \ , \ H_0\psi \rangle. \end{aligned}$$

Lo que muestra que H_0 es simétrico con dominio $H^2(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.13. *T es **autoadjunto** si $T = T^*$, es decir $T \subset T^*$ y $T^* \subset T$.*

Observación 2.5. *T es autoadjunto si y solo si T es simétrico y $D(T) = D(T^*)$.*

Otra forma de ver que un operador es simétrico es autoadjunto, es el Criterio básico de autoadjunción, cuya demostración se detalla en [8] Teorema VIII.3.

Teorema 2.1. *Sea T un operador simétrico sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

(a) T es autoadjunto.

(b) T es cerrado y $Ker(T^* \pm i) = \langle 0 \rangle$.

(c) $Ran(T \pm i) = \mathcal{H}$

Ejemplo 2.9. *Sea f una función a valores reales y $T : D(T) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ de la forma*

$$(T\varphi)(x) = f(x)\varphi(x),$$

Veamos que este operador T es autoadjunto. Note que para todo $\varphi, \psi \in D(T)$ se tiene

$$\langle T\varphi, \psi \rangle \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{f(x)\psi}dx = \langle \varphi, T\psi \rangle.$$

Por lo tanto T es simétrico en $D(T)$. Ahora dado $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, si tomamos

$$\varphi(x) = (f(x) \pm i)^{-1}\psi(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$(T \pm i)\varphi = \psi.$$

Así $Ran(T \pm i) = L^2(\mathbb{R}^n)$ y por el Teorema 2.1 se concluye que T es autoadjunto.

2.3. Conmutadores de operadores

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y considere los operadores lineales $A : D(A) \to \mathcal{H}$ y $B : D(B) \to \mathcal{H}$. Se define el **conmutador** de A y B como el operador

$$[A, B] := AB - BA$$

cuyo dominio es

$$D([A, B]) = \{\varphi \in \mathcal{H} \ / \ \varphi \in D(A) \cap D(B) \ , \ A\varphi \in D(B) \ , \ B\varphi \in D(A)\}$$

.

Proposición 2.2. *Dados los operadores A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 en dominios adecuados para que los respectivos conmutadores estén bien definidos. Se tiene que*

$$[A, \lambda B_1 + B_2] = \lambda[A, B_1] + [A, B_2]$$

y

$$[\lambda A_1 + A_2, B] = \lambda[A_1, B] + [A_2, B],$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Directa de la definición. $\square$

Ejemplo 2.10. *Considere el operador M dado por*

$$(M\varphi)(x) = x \cdot \nabla\varphi(x)$$

(que escribiremos a partir de ahora simplemente como $x \cdot \nabla$) y veamos su conmutador con el operador $-\Delta$.

Usando que $\Delta x = 0$ y $\nabla x = 1$ cuando $x \in \mathbb{R}$, en un dominio D adecuado y $\varphi \in D$ tenemos que

$$\begin{aligned}
[-\Delta, x\cdot\nabla]\varphi &= -\Delta(x\cdot\nabla)\varphi - x\cdot\nabla(-\Delta)\varphi \\
&= -\nabla\cdot\nabla(x\cdot\nabla\varphi) + x\cdot\nabla\Delta\varphi \\
&= -\nabla\cdot((\nabla x)\nabla\varphi + x\Delta\varphi) + x\cdot\nabla\Delta\varphi \\
&= -\nabla\cdot((\nabla x)\nabla\varphi) - \nabla\cdot(x\Delta\varphi) + x\cdot\nabla\Delta\varphi \\
&= -(\Delta x)\nabla\varphi - (\nabla x)\Delta\varphi - (\nabla x)\Delta\varphi - x\cdot\nabla\Delta\varphi + x\cdot\nabla\Delta\varphi \\
&= -2\Delta\varphi.
\end{aligned}$$

Así $[-\Delta, x\cdot\nabla] = -2\Delta$.

Ejemplo 2.11. *Calculemos el conmutador entre Δ^2 y $x\cdot\nabla$ sobre un dominio D adecuado.*

Por el ejemplo 2.10 se tiene

$$x\cdot\nabla\Delta = (-2\Delta + \Delta x\cdot\nabla).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
[\Delta^2, x\cdot\nabla] &= \Delta^2 x\cdot\nabla - x\cdot\nabla\Delta^2 \\
&= \Delta^2 x\cdot\nabla - (-2\Delta + \Delta x\cdot\nabla)\Delta \\
&= \Delta^2 x\cdot\nabla + 2\Delta^2 - \Delta(-2\Delta + \Delta x\cdot\nabla) \\
&= 4\Delta^2.
\end{aligned}$$

Observación 2.6.

Si tenemos un operador H acotado, se puede definir el operador exponencial e^{-itH} simplemente como una serie de potencias que converge en norma, sin embargo cuando H es autoadjunto no acotado es necesario el cálculo funcional para definirlo. Esto puede revisarse en [8] sección VIII.4, con lo cual también se obtienen distintas propiedades de e^{-itH} tal como el hecho de que es un operador unitario.

Para lo siguiente, considere un operador autoadjunto H en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ si existe un operador simétrico T y un operador positivo P que conmuta con H que verifican

$$[T, e^{-itH}] = tPe^{-itH} \tag{2.2}$$

entonces probaremos decaimiento temporal de un sistema físico gobernado por H. A continuación vamos a establecer un criterio que bajo ciertas condiciones sobre los operadores nos permite verificar la relación (2.2).

Proposición 2.3. *Sea H un operador autoadjunto con dominio $D(H) \subset \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que existe otro operador T simétrico en el mismo espacio, con la propiedad $i[H,T] = P$, donde P un operador positivo que conmuta con H. Entonces*

$$[T, e^{-itH}] = tPe^{-itH} \quad \forall t \geq 0$$

Demostración. Sea $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ el conjunto de todos los operadores lineales desde un subespacio de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$. Definamos las funciones $f, g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, como

$$f(t) := [T, e^{-itH}] \;\text{ y }\; g(t) := tPe^{-itH}.$$

Usando cálculo funcional, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{df(t)}{dt} &= \frac{d(Te^{-itH} - e^{-itH}T)}{dt} \\
&= (-iTH)e^{-itH} - (-iH)e^{-itH}T \\
&= (P - itH)e^{-itH} + iHe^{-itH}T \\
&= Pe^{-itH} - iH(Te^{-itH} - e^{-itH}T) \\
&= Pe^{-itH} - iHf(t),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{dg(t)}{dt} &= \frac{d(tPe^{-itH})}{dt} \\
&= Pe^{-itH} + tP(-iH)e^{-itH} \\
&= Pe^{-itH} - iHtPe^{-itH} \\
&= Pe^{-itH} - iHg(t).
\end{aligned}$$

Tomando $F(t) = f(t) - g(t)$ se verifica que

$$\begin{aligned}
&\frac{dF}{dt}(t) = -iH(f(t) - g(t)) = -iHF(t) \\
&F(0) = 0
\end{aligned}$$

sistema que tiene solución única $F(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.(Ver [7]). □

2.4. Transformada de Föurier

La transformada de Föurier es una herramienta importante en el estudio del análisis clásico y moderno. En este caso, la definiremos como un operador del espacio de funciones de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en si mismo, de esta forma la transformada de Fourier es biyectiva (ver [9] Teorema IX.1) y por lo tanto podemos trabajar con su inversa.

Se define el **espacio de funciones de Schwartz** $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,:\, \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\},$$

donde α y β son multi-índices y $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es el conjunto de funciones infinitamente diferenciales en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.14. *Sea $\varphi \in \mathcal{S}$, la* ***transformada de Föurier*** *de φ está dada por:*

$$(\mathcal{F}\varphi)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot k} \varphi(x) dx,$$

donde

$$x \cdot k = \sum_{i=1}^n x_i k_i.$$

La ***transformada de Föurier inversa*** *de $\varphi \in \mathcal{S}$ es la función*

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot k} \varphi(x) dx.$$

Note que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$, por lo que el operador $-\Delta$ está bien definido sobre el espacio de Schwartz. Esto lo usaremos para ver la siguiente propiedad de la transformada de Föurier que será necesaria más adelante.

Proposición 2.4. *Sea $H_0 = -\Delta$. Entonces para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*

$$(\mathcal{F} H_0 \mathcal{F}^{-1} \varphi)(k) = (k^2 \varphi)(k), \tag{2.3}$$

con $k^2 = (k \cdot k) = \sum_{j=1}^n k_j^2$.

Demostración. Basta probar que dado $j \in \{1, ..., n\}$, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se verifica que

$$\left(\mathcal{F}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) \mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(k) = (k_j^2 \varphi)(k),$$

con esto, sumando sobre $j \in \{1, ..., n\}$ se obtiene (2.3).

Escribamos $D_j^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ y note que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $D_j^2 \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De donde

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} D_j^2 \varphi(x) dx < \infty.$$

Por Teorema de Fubini-Tonelli (ver [15]) la transformada de Fourier de $D_j^2\varphi$ es

$$(\mathcal{F} D_j^2 \varphi)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x} D_j^2 \varphi(x) dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-ik_1 x_1} \dots e^{-ik_n x_n} D_j^2 \varphi(x) (dx_1 \dots dx_{j-1} dx_j dx_{j+1} \dots dx_n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ik_j x_j} D_j^2 \varphi(x) dx_j\right) (e^{-ik_1 x_1} \dots e^{-ik_n x_n})(dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n)$$

Ahora, integrando por partes el término j-ésimo y considerando que las funciones de Schwartz decaen a cero en el infinito, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-ik_jx_j} D_j^2\varphi(x)dx_j &= (e^{-ik_jx_j}D_j\varphi)(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}(-ik_j)e^{-ik_jx_j}D_j\varphi(x)dx_j \\
&= ik_j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_jx_j}D_j\varphi(x)dx_j \\
&= ik_j\left(ik_j\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_jx_j}\varphi(x)dx_j\right) \\
&= -k_j^2\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ik_jx_j}\varphi(x)dx_j\right)
\end{aligned}$$

Reemplazando esto último en lo anterior

$(\mathcal{F}D_j^2\varphi)(k) =$

$$-k_j^2\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}}\dots\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-k_jx_j}\varphi(x)dx_j\right)(e^{-ik_1x_1}\dots e^{-ik_nx_n})(dx_1\dots dx_{j-1}dx_{j+1}\dots dx_n).$$

$$= -k_j^2\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}}\dots\int_{\mathbb{R}} e^{-k_jx_j}\dots e^{-ik_n}\varphi dx_1\dots dx_{j-1}dx_jdx_{j+1}\dots dx_n$$

$$= -k_j^2\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x}\varphi dx = -k_j^2\mathcal{F}\varphi(k)$$

Por lo tanto, sumando de 1 a n sobre j, para $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene la igualdad $\mathcal{F}H_0\varphi = k^2\mathcal{F}\varphi$, que es equivalente a

$$(\mathcal{F}H_0\mathcal{F}^{-1}\varphi) = (k^2\varphi).$$

□

Corolario 2.1.

$$(\mathcal{F}\Delta^2\mathcal{F}^{-1}\varphi) = ((k\cdot k)^2\varphi).$$

Demostración. Por Proposición 2.4, sobre el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene la siguiente igualdad entre operadores:

$$\mathcal{F}(-\Delta)\mathcal{F}^{-1} = k\cdot k.$$

Luego

$$\mathcal{F}(-\Delta)\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(-\Delta)\mathcal{F}^{-1} = (k\cdot k)(k\cdot k).$$

Por lo tanto $(\mathcal{F}\Delta^2\mathcal{F}^{-1}\varphi) = ((k\cdot k)^2\varphi)$ para todo $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

□

De forma análoga a la demostración de la Proposición 2.4, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.5. *Para $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y el operador $A = -\frac{i}{2}(x\cdot\nabla + \nabla\cdot x)$ se tiene*

$$\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}\varphi = \frac{i}{2}k\cdot\nabla\varphi. \tag{2.4}$$

Demostración. Como

$$A = -\frac{i}{2}(x\cdot\nabla + \nabla\cdot x) = \frac{-i}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}x_j\right).$$

Debemos probar que

$$\frac{-i}{2}\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}x_j\right)\mathcal{F}^{-1}\varphi = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(k_j\frac{\partial}{\partial k_j}\right)\varphi.$$

Por lo que es suficiente demostrar que para cada $j\in\{1,...,n\}$ se tiene

$$\mathcal{F}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}x_j\right)\mathcal{F}^{-1}\varphi = -\left(k_j\frac{\partial}{\partial k_j}\right)\varphi. \tag{2.5}$$

Usando la notación $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ y $c_0 = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$, note que

$$(\mathcal{F}(x_jD_j + D_jx_j)\varphi) = c_0\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x}(x_jD_j + D_jx_j)\varphi(x)dx$$

$$= c_0\int_{\mathbb{R}}\dots\int_{\mathbb{R}} e^{-ik_1x_1}\dots e^{-ik_nx_n}(x_jD_j + D_jx_j)\varphi(x)(dx_1\dots dx_{j-1}dx_jdx_{j+1}\dots dx_n)$$

$$= c_0\int_{\mathbb{R}}...\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ik_jx_j}(x_jD_j + D_jx_j)\varphi(x)dx_j\right)(e^{-ik_1x_1}...e^{-ik_nx_n})(dx_1...dx_{j-1}dx_{j+1}...dx_n).$$

Integrando por partes el término j-ésimo el paréntesis de la última expresión

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-ik_jx_j}(x_jD_j + D_jx_j)\varphi(x)dx_j &= (e^{-ik_jx_j}x_j\varphi)(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}(-ik_j)e^{-ik_jx_j}x_j\varphi(x)dx_j \\
&= ik_j\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_jx_j}x_j\varphi(x)dx_j \\
&= ik_j\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ik_jx_j}x_j\varphi(x)dx_j\right)
\end{aligned}$$

Reemplazando esto último en lo anterior, y reagrupando

$(\mathcal{F}(x_jD_j + D_jx_j)\varphi) =$

$$ik_jc_0\int_{\mathbb{R}}\dots\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-k_jx_j}x_j\varphi(x)dx_j\right)(e^{-ik_1x_1}\dots e^{-ik_nx_n})(dx_1\dots dx_{j-1}dx_{j+1}\dots dx_n).$$

$$= ik_j\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik\cdot x}(x_j\varphi)dx = k_j(i\mathcal{F}x_j)\varphi.$$

Por lo tanto

$$(\mathcal{F}(x_jD_j + D_jx_j)\varphi) = k_j(i\mathcal{F}x_j)\varphi \tag{2.6}$$

Ahora calculamos $i\mathcal{F}x_j\varphi$.

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{F}^{-1}\frac{\partial}{\partial k_j}\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x}\frac{\partial}{\partial k_j}\varphi(k)dk\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} e^{ik_1x_1}\dots e^{ik_nx_n}\frac{\partial}{\partial k_j}\varphi(k)(dk_1\dots dk_{j-1}dk_jdk_{j+1}\dots dk_n)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{ik_jx_j}\frac{\partial}{\partial k_j}\varphi(k)dk_j\right)(e^{ik_1x_1}\dots e^{ik_nx_n})(dk_1\dots dk_{j-1}dk_{j+1}\dots dk_n)\\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\left(-ix_j\int_{\mathbb{R}} e^{ik_jx_j}\varphi(k)dk_j\right)(e^{ik_1x_1}\dots e^{ik_nx_n})(dk_1\dots dk_{j-1}dk_{j+1}\dots dk_n)\\
&= -ix_j\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ik\cdot x}\varphi(k)dk = -ix_j\mathcal{F}^{-1}\varphi.
\end{aligned}
$$

Con esto tenemos para todo $\varphi \in S$

$$\mathcal{F}^{-1}\frac{\partial}{\partial k_j}\varphi = -ix_j\mathcal{F}^{-1}\varphi.$$

Aplicando $\mathcal{F}$ por la izquierda y derecha, al desarrollar queda:

$$-\frac{\partial}{\partial k_j}\mathcal{F}\varphi = i\mathcal{F}x_j\varphi$$

Reemplazando esto en la ecuación (2.6), obtenemos (2.5) y con esto concluye la prueba. □

3

Decaimiento de soluciones en ecuación de Schrödinger usando conmutadores

Considere el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ con el producto interno usual, que denotaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$. En este capítulo vamos a estudiar una ecuación de Schrödinger de la forma

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = H\varphi \tag{3.1}$$

donde H un operador autoadjunto definido sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Para esta ecuación, Miyamoto en [2] encuentra decaimiento de la solución en sentido débil, es decir en producto interno, para esto utiliza una relación de conmutación de la forma $i[H,T] = I$ donde T es un operador simétrico sobre el mismo espacio. Este resultado fue extendido por Rivera en [1] con una regla distinta de conmutación, el autor consideró $i[H,T] = P$ donde P es un operador positivo que conmuta con H (Teorema 3.2). Comenzaremos estableciendo las definiciones previas para enunciar y demostrar algunos de estos resultados, dando ejemplos de su utilización en ecuaciones particulares, para luego obtener un resultado de decaimiento similar a los mencionados anteriormente, basándose en reglas de conmutacion del estilo $i[H,T] = P$, pero esta vez el decaimiento obtenido será en la norma de un subespacio (Teorema 3.3). Finalizando con un resultado de decaimiento para la parte real de la solución de la ecuación (3.1) que se utilizará en el Capítulo 3 para encontrar decaimiento en la solución de la ecuación homogénea de Timoshenko.

Definición 3.1. *Diremos que T es un **operador tiempo** para H si es simétrico y satisface*

$$[T, e^{-itH}] = te^{-ith}.$$

A partir de esta definición, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Si T es un operador tiempo para H, entonces para $\varphi \in D(T)$*

$$|\langle \varphi, e^{-itH}\varphi \rangle| \leq \frac{C}{t},$$

donde C es constante respecto a t.

Ejemplo 3.1. *Para $n = 1$ consideremos la ecuación*

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{-\Delta}\ \psi \\ \\ \psi(\cdot, 0) = \psi_0 \end{cases}$$

En este caso $H = \sqrt{-\Delta} = i\frac{d}{dx}$. Considerando el operador de posición $(T\psi)(x) = x\psi(x)$ (ejemplo 2.5). Con un cálculo directo es fácil ver que $i[H,T] = I$ y por Proposición 2.3 se obtiene $[T, e^{-itH}] = te^{-itH}$.

Usando el Teorema 3.1, para todo $\psi \in D(T)$ obtenemos

$$|\langle \psi,\ e^{-itH}\psi\rangle| \leq \frac{C}{t}.$$

Más adelante, dado un operador H autoadjunto en $\mathcal{H}$, encontraremos dos operadores T y P tales que $i[H,T] = P$. Con esto será suficiente para obtener un resultado de decaimiento similar al Teorema 3.1, por lo cual es necesario extender la definición de operador tiempo para H:

Definición 3.2. *T es un* ***operador P-tiempo*** *para H si este es simétrico y satisface*

$$[T, e^{-itH}] = tPe^{-itH}.$$

Por la Proposición 2.3, para encontrar un operador T con estas características basta con que sea simétrico y verifique

$$i[H,T] = P. \tag{3.2}$$

Bajo estas condiciones se obtiene el siguiente resultado, que será fundamental para los desarrollos posteriores.

Teorema 3.2. *Sea T un operador P-tiempo para H. Si $\varphi \in D(T)$*

$$|\langle \varphi, Pe^{-itH}\varphi\rangle| \leq \frac{C}{t} \tag{3.3}$$

con C independiente del tiempo.

Demostración. Como e^{-itH} es un operador unitario y T es simétrico, usando desigualdad de Cauchy-Schwarz y la Proposición 2.3 obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, tPe^{-itH}\varphi\rangle| &= |\langle \varphi, (TPe^{-itH} - e^{-itH}T)\varphi\rangle| \\ &\leq |\langle \varphi, Te^{-itH}\varphi\rangle| + |\langle \varphi, e^{-itH}T\varphi\rangle| \\ &= |\langle T\varphi, e^{-itH}\varphi\rangle| + |\langle \varphi, e^{-itH}T\varphi\rangle| \\ &\leq \|T\varphi\|\,\|\varphi\| + \|\varphi\|\,\|T\varphi\| \\ &= 2\,\|T\varphi\|\,\|\varphi\| \end{aligned}$$

Como $\varphi \in D(T)$, existe C independiente del tiempo tal que

$$|\langle \varphi, Pe^{-itH}\varphi\rangle| \leq \frac{C}{t}.$$

□

Ejemplo 3.2. *Consideremos la ecuación de Schrödinger*

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi = 0 \\ \\ \psi(x,0) = \psi_0(x) \end{cases}$$

Definiendo $H_0 = -\Delta$, consideremos el operador $T = -i(x \cdot \nabla + \nabla \cdot x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$. Haciendo un desarrollo similar a los ejemplos 2.10 y 2.11, es fácil verificar que:

$$i[H_0, T] = 4H_0.$$

Del ejemplo 2.7, tenemos que $P = 4H_0 = -4\Delta$ es un operador positivo que conmuta con H_0, por lo tanto usando la Proposición 2.3 obtenemos

$$[T, e^{-itH_0}] = tPe^{-itH_0}.$$

Por Teorema 3.2, se sigue que para $\varphi \in D(T)$

$$|\langle\psi,\ Pe^{-itH}\psi\rangle| \leq \frac{C}{t}.$$

Notemos que $Pe^{-itH_0}\psi$ es solución de la ecuación de Schrödinger y decae polinomialmente, en el sentido débil, a cero a 0 cuando $t \to \infty$.

Motivados por la demostración del Teorema 3.2 vamos a obtener, bajo ciertas condiciones, decaimiento de la solución de la ecuación de Schrödinger en sentido fuerte, esto es, decaimiento en norma. Para esto, necesitaremos de la siguiente propiedad de los espacios de Hilbert:

Lema 3.1. *Sea M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $\theta \in M$, entonces*

$$\sup_{\{\psi\in M/\|\psi\|=1\}} |\langle\psi,\theta\rangle| = \|\theta\|.$$

Demostración. Por un lado, por desigualdad de Cauchy Schwarz

$$\sup_{\{\psi\in M/\|\psi\|=1\}} |\langle\psi,\theta\rangle| \leq \|\psi\|\,\|\theta\| = \|\theta\|.$$

Para ver la otra desigualdad,

$$\|\theta\| = \left|\left\langle\frac{\theta}{\|\theta\|},\theta\right\rangle\right| \leq \sup_{\{\psi\in M/\|\psi\|=1\}} |\langle\psi,\theta\rangle|$$

□

Teorema 3.3. *Sea T un operador P-tiempo para H y M es un subespacio cerrado de $D(T)$ tal que*

$$\sup_{\{\psi\in M/\|\psi\|=1\}} \|T\psi\| < \infty.$$

Si S es el operador proyección sobre M. Entonces para $\varphi \in D(T)$:

$$\left\| S(Pe^{-itH}\varphi) \right\| \leq \frac{C}{t}, \tag{3.4}$$

con C constante en t.

Demostración. Sea $\varphi \in D(T)$ y $\psi \in M$

$$\begin{aligned} |\langle \psi, tPe^{-itH}\varphi \rangle| &= |\langle \psi, (Te^{-itH} - e^{-itH}T)\varphi \rangle| \\ &\leq |\langle \psi, Te^{-itH}\varphi \rangle| + |\langle \psi, e^{-itH}T\varphi \rangle| \\ &= |\langle T\psi, e^{-itH}\varphi \rangle| + |\langle \psi, e^{-itH}T\varphi \rangle| \\ &\leq \|T\psi\| \|\varphi\| + \|\psi\| \|T\varphi\| . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dado que $\psi \in M$, $\psi = S\psi = S^2\psi$. Entonces si aplicamos S^2 en ψ, como S es autoadjunto, puede pasar un S a la derecha del producto interno, obteniéndose lo siguiente:

$$|\langle \psi, StPe^{-itH}\varphi \rangle| \leq \|T\psi\| \|\varphi\| + \|\psi\| \|T\varphi\| .$$

Tomando supremo de los $\psi \in M$ con $\|\psi\| = 1$ en la expresión anterior,

$$\sup_{\{\psi \in M / \|\psi\|=1\}} |\langle \psi, S(tPe^{-itH}\varphi) \rangle| \leq \sup_{\{\psi \in M / \|\psi\|=1\}} \|T\psi\| \|\varphi\| + \|\psi\| \|T\varphi\| .$$

Por el Lema 3.1 y usando que $\sup_{\{\psi \in M / \|\psi\|=1\}} \|T\psi\| < \infty$. Entonces existe C independiente de t tal que

$$\left\| S(Pe^{-itH}\varphi) \right\| \leq \frac{C}{t} \tag{3.6}$$

□

A continuación probaremos un resultado de decaimiento en la ecuación de Schrödinger, esta vez sobre la parte real de su solución. Esto nos será útil en el estudio del decaimiento en la ecuación de Timoshenko homogénea.

Para esto, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.2. *Sean $h, g \in \mathcal{H}$ con $g(t)$ real y $h(t) = U(t) + iV(t)$ con U y V funciones reales de t con $t \in \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\langle g, Re(h) \rangle = Re\langle g, h \rangle \quad y \quad |\langle g, Im(h) \rangle| = |Im\langle g, h \rangle|.$$

Demostración. Considerando las hipótesis tenemos

$$\langle g, Re(h) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g\overline{Re(h)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} g\overline{U}dx = \int_{\mathbb{R}^n} gU dx.$$

Por otro lado

$$Re(\langle g,h\rangle) = Re(\int_{\mathbb{R}^n} g(U-iV)dx) = Re(\int_{\mathbb{R}^n} gUdx - i\int_{\mathbb{R}^n} gVdx) = \int_{\mathbb{R}^n} gUdx.$$

De donde $\langle g, Re(h)\rangle = Re(\langle g,h\rangle)$. Haciendo un desarrollo análogo se obtiene

$$|\langle g, Im(h)\rangle| = |Im\langle g,h\rangle|$$

□

Considere la siguiente ecuación con valor inicial

$$\begin{cases} i\frac{\partial\omega}{\partial t} + H\omega = 0 \\ \\ \omega_0(x,0) = \phi(x) + i\psi(x) \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ y $\phi, \psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$, esto último es para poder asociarla posteriormente con una ecuación de Timoshenko. La solución está dada por

$$\omega(x,t) = e^{-itH}\omega_0(x),$$

Sea u la parte real de la solución ω, esto es $u = Re(\omega)$ y supongamos que T es un operador tiempo para H. En estas condiciones tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.4. *Si* $\omega_0 \in D(T)$ *entonces*

$$|\langle \phi, cos(tH)\phi + sen(tH)\psi\rangle| \leq \frac{C}{t},$$

con C *constante.*

Demostración. Claramente $u(t) = Re(e^{-itH}\omega_0) = cos(tH)\phi + sen(tH)\psi$ y $u_0 = \phi$ es real. Así, por Lema anterior

$$\begin{aligned} |\langle u_0, u(t)\rangle|^2 &= |\langle \phi, Re(e^{-itH}\omega_0)\rangle|^2 \\ &\leq |\langle \phi, Re(e^{-itH}\omega_0)\rangle|^2 + |\langle \phi, Im(e^{-itH}\omega_0)\rangle|^2 \\ &\leq |Re\langle \phi, e^{-itH}\omega_0\rangle|^2 + |Im\langle \phi, e^{-itH}\omega_0\rangle|^2 \\ &= |\langle \phi, e^{-itH}\omega_0\rangle|^2, \end{aligned}$$

de donde

$$t^2|\langle u_0, u(t)\rangle|^2 \leq |\langle \phi, te^{-itH}\omega_0\rangle|^2.$$

Ahora, haciendo un procedimiento análogo al de la desigualdad (3.5), obtenemos

$$|\langle \phi, te^{-itH}\omega_0\rangle| \leq \|T\phi\|\,\|\omega_0\| + \|\phi\|\,\|T\omega_0\|\,.$$

Como $\phi, \omega_0 \in D(T)$ el lado derecho de la desigualdad anterior es un valor independiente del tiempo y finito. Así $|\langle u_0, u(t)\rangle|^2 \leq \frac{C^2}{t^2}$, y por ende

$$|\langle \phi, cos(tH)\phi + sen(tH)\psi\rangle| \leq \frac{C}{t}.$$

□

4

Decaimiento en ecuación de Timoshenko

En este capítulo consideramos la ecuación de evolución del tipo Timoshenko:

$$u_{tt} + \Delta^2 u = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u, \tag{4.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \geq 0$ y $M(s)$ una función suave no lineal. El término $M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u$ es conocido usualmente como no linealidad de tipo Timoshenko y aparece en diversos modelos asociados con vibraciones no lineales de vigas (ver [11]). Resultados de existencia global para (4.1) se pueden encontrar en [12]. En este trabajo desarrollaremos dos casos particulares de la función $M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)$ para los cuales encontraremos decaimiento temporal a través de los resultados de conmutares obtenidos en el capítulo anterior. Primero, estudiaremos el caso homogéneo, es decir cuando el término

$$M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right) = 0,$$

en este caso llevaremos el problema a una ecuación de Schrödinger en la cual aplicaremos el Teorema 3.2 que nos entrega el decaimiento de la solución de la ecuación. Esto, a partir de la existencia de un operador simétrico T apropiado, y utilizaremos la Proposición 2.3.

Segundo, estudiaremos el caso

$$M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right) = 1.$$

Usaremos un método que nos permitirá, a partir de un operador P tiempo T para $H_0 = -\Delta$, encontrar un operador Q tiempo B para $H_1 = \sqrt{\Delta^2 - \Delta}$ y con este, usar la Proposición 2.3 y el Teorema 3.2 para encontrar decaimiento de la solución.

4.1. Ecuación de Timoshenko: caso M=0

Por simplicidad, a partir de ahora supondremos que los operadores diferenciales estarán definidos sobre el espacio $C^\infty([0,\infty[; S(\mathbb{R}^n))$. Esto podrá ser extendido a $C^j([0,\infty[; H^r(\mathbb{R}^n))$ para j y r enteros apropiados.

Existe una estrecha relación entre las soluciones de la ecuación (4.1) y algunas ecuaciones de tipo Schrödinger. En la siguiente proposición vamos a probar este hecho. Con esta idea considere la ecuación no lineal de Schrödinger con condición inicial

$$\begin{cases} i\omega_t + \Delta\omega = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} Re|\nabla\omega|^2 dx\right) Re(\omega), \quad t > 0 \\ \\ \omega_0(x,0) = \phi(x) + i\psi(x) \end{cases} \tag{4.2}$$

Supondremos que $\phi, \psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Sea u la solución real de la ecuación (4.1) con condiciones iniciales $u(x,0) = \phi(x)$ y $u_t(x,0) = -\Delta\psi(x)$.

Se define $v := v(x,t)$ como la solución real de

$$\begin{cases} v_t = \Delta u - M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right) u, \quad t > 0 \\ v(0) = \psi \end{cases} \tag{4.3}$$

Proposición 4.1. *La función $\omega = u + iv$ es solución de (4.2) si y sólo si u y v son soluciones de (4.1) y (4.3) respectivamente.*

Demostración. Sea $\omega = u + iv$ es solución de (4.2). Sabemos que para $x \in \mathbb{R}^n$ y $t > 0$

$$i(u+iv)_t + \Delta(u+iv) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla Re(u+iv)|^2 dx\right) Re(u+iv),$$

de donde

$$-v_t + iu_t + \Delta u + i\Delta v = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right) u.$$

Igualando partes reales se tiene

$$v_t = \Delta u - M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right) u.$$

Además $\omega(x,0) = u(x,0) + iv(x,0) = \phi + i\psi$. Lo que implica que $v(x,0) = \psi$ y por lo tanto la función v verifica (4.3). Por otro lado, derivando con respecto a t en la igualdad (4.2):

$$i\omega_{tt} + \Delta\omega_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(M\left(\int_{\mathbb{R}^n} Re|\nabla\omega|^2 dx\right) Re(\omega)\right),$$

equivalentemente,

$$i(u_{tt} + iv_{tt}) + \Delta(u_t + iv_t) = \frac{\partial}{\partial t} M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right) u + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right) u_t.$$

Multiplicando por i e igualando partes reales, $-u_t - \Delta v_t = 0$ y así:

$$-\Delta v_t = u_{tt}. \tag{4.4}$$

Por otro lado de (4.2) se obtiene que $i\Delta(u_t + iv_t) + \Delta^2(u+iv) = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u$ y reemplazando (4.4) en esta igualdad

$$i\Delta u_t + u_{tt} + \Delta^2 u + i\Delta^2 v = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u.$$

Igualando partes reales se tiene

$$u_{tt} + \Delta^2 u = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u.$$

Además $\omega_0(x,0) = u(x,0) + iv(x,0) = \phi(x) + i\psi(x)$ y como $w_t(x,t) = u_t(x,t) + iv_t(x,t)$, entonces:

$$iu_t(x,t) = -i\Delta v(x,t)$$

y por ende $u_t(x,0) = -\Delta\psi$. Por lo tanto u verifica la ecuación (4.1).

Recíprocamente, sea u solución de la ecuación (4.1) y v solución dela ecuación (4.3). Sea $\omega = u + iv$. Tenemos que $i\omega_t + \Delta\omega = iu_t - v_t + \Delta\omega$. En esta igualdad reemplazamos v_t dada por (4.3) y obtenemos

$$i\omega_t + \Delta\omega = i\Delta v + iu_t + M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\right) u. \tag{4.5}$$

Por otro lado, recordemos que u verifica

$$u_{tt} + \Delta^2 u = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\right)\Delta u$$

y de (4.3) se obtiene $\Delta u - v_t = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\right) u$. Aplicando el operador laplaciano a la igualdad anterior resulta

$$\Delta^2 u - \Delta v_t = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\right)\Delta u$$

de esto y usando (4.1) se sigue que $u_{tt} = -\Delta v_t$.

Integrando y considerando que $u_0 = \Delta\psi$ y $v_0 = \psi$ obtenemos $u_t - u_0 = -\Delta v - \Delta v_0$, o sea, $u_t = -\Delta v$. Reemplazando esto en (4.5) obtenemos finalmente que

$$i\omega_t + \Delta\omega = M\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Re\omega|^2 dx\right) Re\omega.$$

Además $\omega(x,0) = u(x,0) + iv(x,0) = \phi(x) + i\psi(x)$. Por lo tanto ω verifica (4.2), concluyendo la demostración. $\square$

Utilizaremos lo anterior para encontrar decaimiento de la solución en la ecuación de Timoshenko libre. Para esto, considere u solución de

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = -\Delta\psi(x). \end{cases}$$

con $\phi, \psi \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Por la Proposición 4.1, la solución de la ecuación anterior es $u = Re(\omega)$ donde w es solución de

$$\begin{cases} i\frac{\partial\omega}{\partial t} + \Delta\omega = 0 \\ \omega(x,0) = \phi(x) + i\psi(x) \end{cases}$$

Sea $T = \dfrac{1}{4}(QP^{-1} + P^{-1}Q)$ donde $Q\varphi(x) = x\varphi(x)$ y $P\varphi = -i\nabla\varphi$. En [2] se muestra que este es un operador tiempo para $H_0 = -\Delta$. Note que la solución de la ecuación anterior es de la forma $\omega(x,t) = e^{-itH_0}\omega(x,0)$. Por Teorema 3.2, si $\omega(x,0) = \phi(x) + i\psi(x) \in D(T)$ entonces

$$|\langle\, \omega_0, e^{-itH_0}\omega_0 \,\rangle| \leq \frac{C}{t}$$

y por Teorema 3.4 se tiene el mismo resultado para la parte real, es decir,

$$|\langle\, \phi, cos(tH_0)\phi + sen(tH_0)\psi \,\rangle| \leq \frac{C}{t}$$

donde $cos(tH_0)\phi + sen(tH_0)\psi = Re(\omega) = u$. Por lo tanto tenemos el decaimiento para la solución de la ecuación de Timoshenko homogénea.

4.2. Ecuación de Timoshenko: caso $M = 1$

Ahora trabajaremos con la ecuación

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u = 0 \\ u(x,0) = f \\ u_t(x,0) = g \end{cases} \tag{4.6}$$

con $f \in H^2(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Usaremos teoría de conmutadores para estudiar decaimiento de la solución u de la ecuación (4.6). Para utilizar el Teorema 3.2 aplicado en el caso libre, reescribimos la ecuación (4.6) como

$$u_{tt} + H_1 u = 0,$$

con $H_1 := \Delta^2 - \Delta$. Ahora, buscaremos un operador B de tal forma que $i[B, \sqrt{H_1}] = Q$ con Q operador positivo que conmute con H_1 y por lo tanto $u(t) = Qe^{it\sqrt{H_1}}\phi$ sea solución del problema (4.6).

Para encontrar B primero, buscamos un operador A para H_1 de modo que $i[H_1, A] = P$ con P operador positivo conmutando con H_1. Para esto, note que

$$\begin{aligned} (x\cdot\nabla)\varphi + (\nabla\cdot x)\varphi &= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} x_j \varphi_j\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi + \sum_{j=1}^{n}\left(\varphi_j + x_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) \\ &= 2\sum_{j=1}^{n}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi + \sum_{j=1}^{n}\varphi_j \\ &= 2(x\cdot\nabla)\varphi + \varphi. \end{aligned}$$

Así $\frac{1}{2}(x\cdot\nabla+\nabla\cdot x)=(x\cdot\nabla)+\frac{1}{2}I$. Entonces

$$\begin{aligned}[H_1,\frac{1}{2}(x\cdot\nabla+\nabla\cdot x)] &= [H_1,(x\cdot\nabla)+\frac{1}{2}I] \\ &= [H_1,(x\cdot\nabla)]+\frac{1}{2}[H_1,I] \\ &= [H_1,(x\cdot\nabla)].\end{aligned}$$

Obtenemos el siguiente lema.

Lema 4.1. *Considere los operadores* $A=-\frac{i}{2}(x\cdot\nabla+\nabla\cdot x)$ *y* $H_1=\Delta^2-\Delta$. *Sobre un dominio adecuado tenemos que*

$$i[H_1,A]=P,$$

con $P=4\Delta^2-2\Delta$.

Demostración. En los Ejemplos 2.10 y 2.11 obtuvimos que

$$[-\Delta,x\cdot\nabla]=-2\Delta \quad \text{y} \quad [\Delta^2,x\cdot\nabla]=4\Delta^2$$

respectivamente. Por la Proposición 2.2

$$[\Delta^2-\Delta,x\cdot\nabla]=[\Delta^2,x\cdot\nabla]+[-\Delta,x\cdot\nabla]=4\Delta^2-2\Delta.$$

Como $H_1=\Delta^2-\Delta$, por lo hecho antes del lema se sigue que

$$[H_1,\frac{1}{2}(x\cdot\nabla+\nabla\cdot x)]=[H_1,x\cdot\nabla]=4\Delta^2-2\Delta,$$

lo que es equivalente a $i[H_1,A]=4\Delta^2-2\Delta$. □

Lema 4.2. *Existe un operador* $\widetilde{A}$ *tal que*

$$i[(k\cdot k)^2+(k\cdot k),\widetilde{A}]=4(k\cdot k)^2+2(k\cdot k). \tag{4.7}$$

donde $(k\cdot k)$ *es un operador de multiplicación.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la transformada de Fourier. Por la Proposición 2.4 y Corolario 2.1, se tiene que

$$\mathcal{F}(-\Delta)\mathcal{F}^{-1}=(k\cdot k) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(\Delta^2)\mathcal{F}^{-1}=(k\cdot k)^2.$$

Usando esto en $i[H_1,A]=P$ obtenemos

$$i(H_1A-AH_1)=4\Delta^2-2\Delta,$$

de donde

$$i(\mathcal{F}H_1\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}-\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}H_1\mathcal{F}^{-1})=4\mathcal{F}\Delta^2\mathcal{F}^{-1}+2\mathcal{F}(-\Delta)\mathcal{F}^{-1}.$$

Definiendo $\widetilde{A}:=\mathcal{F}A\mathcal{F}^{-1}$ y como $\mathcal{F}H_1\mathcal{F}^{-1}=\mathcal{F}^{-1}(\Delta^2-\Delta)\mathcal{F}^{-1}=(k\cdot k)^2+(k\cdot k)$, se tiene

$$i[(k\cdot k)^2+(k\cdot k),\widetilde{A}]=4(k\cdot k)^2+2(k\cdot k).$$

□

Esta relación es similar a la del Lema 4.1 pero con $(k\cdot k)$, $(k\cdot k)^2$ y $\widetilde{A}$ en lugar de $-\Delta$, Δ^2 y A respectivamente. Debemos buscar un operador $\widetilde{B}$ tal que $i[\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)},\widetilde{B}]=\widetilde{Q}$ en este espacio auxiliar, para luego a partir de estos obtener el operador B y Q tal que $i[\sqrt{H_1},B]=Q$.

Por la Proposición 2.5 se tiene $\widetilde{A}\varphi=\frac{i}{2}k\cdot\nabla\varphi$, con este operador tenemos el siguiente lema.

Lema 4.3. *Considere $\widetilde{A}$ definido anteriormente y los operadores de multiplicación $(k\cdot k)$ y $(k\cdot k)^2$. Entonces*

$$i[\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)},\widetilde{A}]=\frac{2(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}{2\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}}.$$

Demostración. Para φ en un dominio adecuado se tiene

$$\begin{aligned}
i[\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)},\widetilde{A}]\varphi &= i\left(\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}\frac{i}{2}k\cdot\nabla\varphi-\frac{i}{2}k\cdot\nabla(\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}\varphi)\right)\\
&=\tfrac{i^2}{2}\left(\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}\,k\cdot\nabla\varphi-k\cdot(\nabla\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}\,\varphi+\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}\nabla\varphi)\right)\\
&=\tfrac{-1}{2}\left(\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}\,k\cdot\nabla\varphi-k\cdot\nabla\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}\,\varphi-\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}\,k\cdot\nabla\varphi\right)\\
&=\tfrac{1}{2}\left(k\cdot\nabla\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}\varphi\right)
\end{aligned}$$

Usando las propiedades del gradiente

$$\begin{aligned}
\nabla\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)} &= \frac{\nabla((k\cdot k)^2+(k\cdot k))}{2\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}}\\
&= \frac{2(k\cdot k)\nabla(k\cdot k)+\nabla(k\cdot k)}{2\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}}\\
&= \frac{2(k\cdot k)[(\nabla\cdot k)k+k(\nabla\cdot k)]+[(\nabla\cdot k)k+k(\nabla\cdot k)]}{2\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}}\\
&= \frac{2(k\cdot k)2k+2k}{2\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}}\\
&= \frac{2(k\cdot k)k+k}{\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}},
\end{aligned}$$

reemplazando esto último en la igualdad previa

$$i[\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)},\widetilde{A}]\varphi=\frac{1}{2}\left(k\cdot\frac{2(k\cdot k)k+k}{\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}}\varphi\right)=\frac{2(k\cdot k)(k\cdot k)+(k\cdot k)}{2\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}}\varphi,$$

y así

$$i[\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)},\widetilde{A}]=\frac{2(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}{2\sqrt{(k\cdot k)^2+(k\cdot k)}}.$$

□

Escogemos

$$\widetilde{Q} = \frac{2(k\cdot k)^2 + (k\cdot k)}{2\sqrt{(k\cdot k)^2 + (k\cdot k)}}$$

el cual es claramente positivo. Luego tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2. *El operador* $Q = (2\Delta^2 - \Delta)(2\sqrt{\Delta^2 - \Delta})^{-1}$ *es positivo, conmuta con* $\sqrt{H_1}$ *y satisface* $i[\sqrt{H_1}, A] = Q$.

Demostración. Es claro que $Q = (2\Delta^2 - \Delta)(2\sqrt{\Delta^2 - \Delta})^{-1}$ es un operador positivo que conmuta con $\sqrt{H_1} = \sqrt{\Delta^2 - \Delta}$ pues ambos son funciones del Laplaciano Δ. Para ver que verifica $i[\sqrt{H_1}, A] = Q$, note primero que por linealidad de la transformada de Föurier, usando la Proposición 2.4 y Corolario 2.1 se tiene que

$$\mathcal{F}(2\Delta^2 - \Delta)\mathcal{F}^{-1} = 2(k\cdot k)^2 + k\cdot k. \tag{4.8}$$

Similarmente $\mathcal{F}(\Delta^2 - \Delta)\mathcal{F}^{-1} = (k\cdot k)^2 + k\cdot k$. Entonces, usando que $\Delta^2 - \Delta$ y $(k\cdot k)^2 + k\cdot k$ son operadores positivos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Delta^2 - \Delta)\mathcal{F}^{-1} &= (k\cdot k)^2 + k\cdot k \\
\Leftrightarrow \mathcal{F}(\sqrt{\Delta^2 - \Delta}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\sqrt{\Delta^2 - \Delta})\mathcal{F}^{-1} &= (k\cdot k)^2 + k\cdot k \\
\Leftrightarrow (\mathcal{F}(\sqrt{\Delta^2 - \Delta}\mathcal{F}^{-1})^2 &= (k\cdot k)^2 + k\cdot k \\
\Leftrightarrow \mathcal{F}(2\sqrt{\Delta^2 - \Delta})\mathcal{F}^{-1} &= 2\sqrt{(k\cdot k)^2 + k\cdot k} \\
\Leftrightarrow (\mathcal{F}(2\sqrt{\Delta^2 - \Delta})\mathcal{F}^{-1})^{-1} &= \left(2\sqrt{(k\cdot k)^2 + k\cdot k}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Así

$$\mathcal{F}\left(2\sqrt{\Delta^2 - \Delta}\right)^{-1}\mathcal{F}^{-1} = \left(2\sqrt{(k\cdot k)^2 + k\cdot k}\right)^{-1}$$

Usando esta última ecuación y (4.8)

$$\mathcal{F}(2\Delta^2 - \Delta)\left(2\sqrt{\Delta^2 - \Delta}\right)^{-1}\mathcal{F}^{-1} = (2(k\cdot k)^2 + k\cdot k)\left(2\sqrt{(k\cdot k)^2 + k\cdot k}\right)^{-1}. \tag{4.9}$$

Por el Lema 4.3, esto es

$$\mathcal{F}(2\Delta^2 - \Delta)\left(2\sqrt{\Delta^2 - \Delta}\right)^{-1}\mathcal{F}^{-1} = i[\sqrt{(k\cdot k)^2 + (k\cdot k)}, \widetilde{A}].$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(2\Delta^2 - \Delta)\left(2\sqrt{\Delta^2 - \Delta}\right)^{-1}\mathcal{F}^{-1} &= i(\sqrt{(k\cdot k)^2 + (k\cdot k)}\widetilde{A} - \widetilde{A}\sqrt{(k\cdot k)^2 + (k\cdot k)}) \\
&= i\left(\mathcal{F}\sqrt{\Delta^2 - \Delta}\mathcal{F}^{-1}\widetilde{A} - \widetilde{A}\mathcal{F}\sqrt{\Delta^2 - \Delta}\mathcal{F}^{-1}\right) \\
&= i\left(\mathcal{F}\sqrt{\Delta^2 - \Delta}\mathcal{F}^{-1}\widetilde{A} - \widetilde{A}\mathcal{F}\sqrt{\Delta^2 - \Delta}\mathcal{F}^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Como $A = \mathcal{F}^{-1}\widetilde{A}\mathcal{F}$, aplicando transformada de Föurier y su inversa por la derecha e izquierda respectivamente

$$\begin{aligned}(2\Delta^2-\Delta)\left(2\sqrt{\Delta^2-\Delta}\right)^{-1} &= i\left(\sqrt{\Delta^2-\Delta}\mathcal{F}^{-1}\widetilde{A}\mathcal{F}-\mathcal{F}^{-1}\widetilde{A}\mathcal{F}\sqrt{\Delta^2-\Delta}\right)\\ &= i\left(\sqrt{\Delta^2-\Delta}A-A\sqrt{\Delta^2-\Delta}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto $i[\sqrt{H_1},A]=Q$.

□

Para concluir, por este último resultado tenemos que $i[\sqrt{H_1},A]=Q$. Entonces por la Proposición 2.3

$$[A,e^{-it\sqrt{H_1}}]=tQe^{-it\sqrt{H_1}},$$

es decir, A es un operador Q-tiempo para $\sqrt{H_1}$. Con esto utilizamos el Teorema 3.2 y obtenemos que, para $\phi\in D(A)$

$$|\langle\phi,Qe^{-it\sqrt{H_1}}\phi\rangle|\leq\frac{C}{t}.$$

Es decir, tenemos decaimiento polinomial como t^{-1} para $u(t)=Qe^{-it\sqrt{H_1}}\phi$ que es solución de la ecuación de Timoshenko (4.6).

Dado que todos los operadores diferenciales en el desarrollo de este capítulo son lineales, este resultado se puede extender de forma análoga a una ecuación de Timoshenko un poco más general, como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea A operador simétrico tal que $i[\sqrt{\Delta^2-c\Delta},A]=Q$ con Q operador positivo que conmuta con $\sqrt{\Delta^2-c\Delta}$ y considere la ecuación de Timoshenko*

$$\begin{cases} u_{tt}+\Delta^2 u &= c\Delta u\\ u(x,0) &= Q\phi(x)\\ u_t(x,0) &= -iQ\sqrt{\Delta^2-c\Delta}\;\psi(x)\end{cases}\tag{4.10}$$

con $c>0$ y $\phi,\psi\in H^4(\mathbb{R}^n)$. Entonces para $\phi\in D(A)$ existe $C_0>0$ independiende de t tal que

$$|\langle\phi,Qe^{-it\sqrt{\Delta^2-c\Delta}}\phi\rangle|\leq\frac{C_0}{t}.$$

Observación 4.1. Es importante notar que en este último teorema, el decaimiento de la solución depende de la regularidad de las condiciones iniciales, pues se debe verificar que $u(x,0)=Q\phi\in H^2(\mathbb{R}^n)$ y $u_t(x,0)=-iQ\sqrt{\Delta^2-c\Delta}\;\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$, esto ya que los operadores Q y $\sqrt{\Delta^2-k\Delta}$ son operadores diferenciales de orden dos.

5

Conclusiones

En esta tesis se estudió el decaimiento de orden t^{-1} de la solución u de una ecuación de Timoshenko del tipo

$$u_{tt} + \Delta^2 u - g(t)\Delta u = 0,$$

con $g(t) = g_0$ constante y bajo ciertas condiciones iniciales. Esto, a partir de llevar dicha ecuación de segundo orden a una de Schrödinger de primer orden del tipo $i\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = iH\varphi$ para la que se pudo encontrar dos operadores T y P tales que cumplieran una relación de conmutación, con el operador H, de la forma $[T, e^{-itH}] = tPe^{-itH}$ y con el Teorema 3.2 concluir el decaimiento antes mencionado. Para hallar a T y P, gracias a la Proposición 2.3, fue suficiente con que T, P y H verificaran una relación de conmutación más sencilla del tipo $i[H, A] = P$.

Todo lo anterior, nos permite proyectar esta idea para la investigación de otros problemas similares, que a futuro, podrían ser abordados utilizando esta técnica. Como por ejemplo en [13], donde se estudia el comportamiento cuando $t \to \infty$ de la solución de una ecuación de Timoshenko del tipo

$$u_{tt} + u_{xxxx} = M\left(\int_0^L |u_x|^2\right) u_{xx} + h,$$

con h siendo una carga estática y bajo ciertas disipaciones no lineales en la frontera. Con lo que se prueba la existencia de un atractor global, que es un cierto tipo de c_0-semigrupo para el cual se halla comportamiento asintótico para un tiempo suficientemente grande.

También en [14], se observa el trabajo con una ecuación de vigas de Timoshenko con una disipación local de Kelvin-Voigt, donde, bajo ciertas condiciones de suavidad de las funciones de disipación y llevando el problema a una ecuación de primer orden, se prueba estabilidad polinomial del semigrupo e^{At} asociado. Entonces, algo que se espera como trabajo futuro es aplicar la técnica de conmutadores utilizada en esta tesis, para concluir algún tipo de decaimiento del funcional de energía sobre problemas no autónomos como los recién mencionados.

Bibliografía

[1] Rivera W. *Función de scattering y y resonancias para Hamiltoniano de Floquet.* Disponible en http://www.mat.uc.cl/archivos/dip/tesis-postgrado/doctorado-mat/tesis-claudio-rivera.pdf, pp 77-80, 2012.

[2] Miyamoto, M. *A generalized Weyl relation approach to the time operator and its connection to the survival probability.* J. Math. Phys. 42, 1038-1052 (2001).

[3] Astaburuaga M.A., Fernández C. and Perla G. *Local smoothing effects for a nonlinear Timoshenko type equation.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol 23. No.9, pp 1091-1103, 1994.

[4] Larenas M. *An abstract approach to pointwise decay estimates for dispersive equations.* Thesis (Ph.D.)-Rutgers The State University of New Jersey - New Brunswick. pp 69. 2015.

[5] Georgescu V., Larenas M. and Soffer A. *Abstract theory of pointwise decay with applications to wave Schrödinger equations.* Ann. Henri Poincaré 17. no. 8, 2075-2101. 2016.

[6] Mourre E. *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators.* Communications in Mathematical Physics 78(3). 519-567. 1981.

[7] Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York. pp 100, 1983.

[8] Reed M. and Simon B. *Methods of modern Mathematical physics. Vol I : Functional Analysis.* Academic Press, New York, 1980.

[9] Reed M. and Simon B. *Methods of modern Mathematical physics. Vol II: Fourier Analysis, Self-Adjointness.* Academic Press, New York, 1979.

[10] Jensen A. and Kato T. *Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions.* Duke Math. J. 46(3): pp 583-611, 1979.

[11] Eisley J.G. *Nonlinear vibrations of beams and rectangular plates.* Z. Anger. Math. Phys. 15, pp 167 - 175, 1964.

[12] Perla G. *On global classical solutions of a nonliner wave equation.* Applicable Analysis 10, pp 179-195, 1980.

[13] Ma T.F., Narciso V. and Pelicer M. L. *Long-time behavior of a model of extensible beams with nonlinear boundary dissipations.* J. Math. Anal. Appl. 396: 694-703 (2012).

[14] Zhuangyu L. and Qiong Z. *Stability and Regulatiry of solution to the Timoshenko beam equation with local Kelvin-Voigt damping.* Siam J. Control Optim. Vol. 56, No. 6, pp. 3919-3947, 2017.

[15] Folland G. *Real Analysis: Modern techniques and their applications.* John Wiley and Sons Inc, New York: pp 80, 1999.

[16] Conway J. B. *A course in Functional Analysis.* Springer-Verlag, New York: pp 3, 1990.