PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

TESIS DE MAGÍSTER

Una C^r-Equivalencia Topológica No Autónoma Involucrando Contracciones y No Linealidades No Acotadas

Autora:
Fernanda Torres Troncoso

Tutor: Álvaro Castañeda
Co-tutor: Olivier Bourget

Septiembre 2023
Santiago, Chile

Índice general

Agradecimientos

.....

Capítulo 1

Introducción

Una herramienta fundamental para el estudio de las ecuaciones diferenciales es el concepto de equivalencia topológica, el cual ha sido de gran utilidad en las últimas décadas para comprender el comportamiento cualitativo de éstas. Generalmente, el resolver un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal conlleva una gran dificultad; pero por otro lado, el resolver y descifrar el comportamiento cualitativo de un sistema lineal es mucho más simple. Aquí es donde la equivalencia topológica es de gran ayuda, ya que bajo ciertas hipótesis las cuales presentaremos más adelante, esta equivalencia topológica nos asegura que la información obtenida de un sistema lineal va a ser la misma que la del sistema no lineal asociado. El poder caracterizar el comportamiento asintótico de las soluciones mediante una correspondencia continua entre las soluciones de ambos sistemas y poder encontrar atractores globales son algunas de las propiedades que se pueden obtener mediante esta herramienta.

En la década de 1960 comenzó el estudio del comportamiento local de los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales con el Teorema de Hartman-Grobman [11, 12]. Este resultado establece la existencia de un homeomorfismo entre las soluciones de un sistema no lineal con su linealización alrededor de un equilibrio hiperbólico; en otras palabras, al considerar un sistema no lineal $x' = f(x)$ decimos que este sistema posee un equilibrio hiperbólico cuando existe un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) = 0$, donde la matriz $A = Df(x_0)$ no posee valores propios con parte real cero. Entonces, existe un homeomorfismo entre las soluciones de $x' = f(x)$ y $x' = Ax$ en una vecindad $V \subseteq \mathbb{R}^n$ de x_0. Por lo tanto, la dinámica de estos sistemas es topológicamente la misma en una vecindad del punto de equilibrio. El análisis del comportamiento global de los sistemas no lineales comienza cuando C. Pugh [23] estudió un caso particular del Teorema de Linealización enfocado en los sistemas lineales con perturbaciones acotadas y Lipschitz permitiendo la construcción de un homeomorfismo global.

Linealización No Autónoma

En el año 1973, K.J. Palmer en [19], inspirado por el trabajo de C. Pugh, introdujo el Teorema de Linealización no autónoma para sistemas diferenciables, es decir, estableció una correspondencia entre las soluciones de un sistema lineal no autónomo y un sistema con una perturbación no lineal de este mismo. Como en el contexto de los sistemas no autónomos no es suficiente analizar los valores propios de la matriz $A(t)$ para poder caracterizar la estabilidad asintótica (uniforme) del sistema no autónomo $x' = A(t)x$, aquí es donde K.J. Palmer utiliza el concepto de dicotomía exponencial (concepto introducido por Perron en [21]) como una versión natural de la hiperbolicidad para los sistemas no autónomos. Se recomienda al lector [8, 16] donde se puede encontrar un estudio de la dicotomía exponencial, junto con algunas de sus propiedades.

Al igual que P. Hartman, K.J. Palmer aseguró la existencia de un homeomorfismo entre un sistema lineal y su perturbación no lineal para el caso no autónomo, y a esto se le conoce como equivalencia topológica o conjugación topológica. Esta herramienta es útil para describir el comportamiento asintótico de las soluciones e incluso encontrar variedades estables e inestables asociadas a la soluciones.

Posteriormente, el objetivo de mostrar que la equivalencia topológica mencionada anteriormente posee alguna clase de diferenciabilidad ha sido de gran interés. En la última década, este objetivo ha alcanzado una gran visibilidad debido a la gran cantidad de trabajos que han abordado este tema desde diferentes enfoques. Hasta donde tenemos conocimiento, los primeros en abordar este problema fueron Á. Castañeda y G. Robledo en [5], quienes bajo algunas condiciones de integrabilidad y sin utilizar teoría espectral pudieron demostrar que la linealización es de clase C^2 cuando la parte lineal es una contracción uniforme en $\mathbb{R}$. Un resultado similar en este contexto fue obtenido por los mismos autores anteriores en conjunto con P. Monzón en [6], quienes muestran que la linealización es de clase C^r para todo $r \geq 1$ cuando la parte lineal posee una contracción general no uniforme en $\mathbb{R}^+$. Un primer resultado en términos de la diferenciabilidad de la linealización considerando contracción y expansión, en cuanto a teoría espectral, fue obtenido por D. Dragičević *et al.* in [9]; en este artículo, se muestra la diferenciabilidad de la linealización suponiendo que la parte lineal posee una dicotomía exponencial fuerte no uniforme , esto es, el sistema lineal tiene la propiedad de dicotomía exponencial no uniforme (este concepto de dicotomía se puede encontrar en [1]) y la matriz de transición tiene la propiedad de crecimiento acotado no uniforme en $\mathbb{R}^+$.

Más adelante, en [3] los autores introducen el concepto de *equivalencia topológica continua*, la cual, establece la continuidad de la equivalencia topológica con respecto a ambas variables, espacio y tiempo; y prueban, sin teoría espectral, que si el sistema lineal posee la propiedad de contracción uniforme, entonces la linealización es C^r para todo $r \geq 1$, y las derivadas parciales de esta linealización son continuas con respecto a ambas variables, espacio y tiempo. Recientemente en [15], N. Jara demuestra, sin usar teoría espectral, que si el sistema lineal posee una dicotomía general no uniforme, entonces la linealización es de clase C^2 en $\mathbb{R}^+$. Podemos notar, que en los trabajos anteriormente mencionados, la linealización global considerada es entre un sistema lineal y una perturbación aditiva de si mismo por una no linealidad la cual es Lipschitz y acotada. De este modo, obtener resultados de linealización dejando de lado esta condición de acotamiento ha sido un desafío para muchos autores; un primer resultado en esta linea es obtenido por F. Lin en [17] el cual muestra que si el sistema lineal es una contracción uniforme en $\mathbb{R}$, entonces la linealización es de clase C^0. Con el fin de obtener su resultado, F. Lin utiliza el concepto de *casi reducible, i.e.*, el sistema lineal puede ser escrito como un sistema lineal diagonal perturbado por un término acotado lineal, donde la parte diagonal está contenida en el espectro asociado a la hiperbolicidad uniforme (para más detalles sobre este espectro, ver [16, Ch. 5]), y utiliza el concepto de *crossing time* con respecto a la esfera unitaria. Un segundo enfoque que trata con el problema de linealización cuando la no linealidad es no acotada es llevado a cabo por I. Huerta en [14]; el autor generaliza el trabajo anteriormente mencionado de F. Lin a un estructura no uniforme, esto es, se construye una linealización de clase C^0 en dos pasos: el primero considera el sistema lineal en $\mathbb{R}^+$ como en el caso de F. Lin donde la parte diagonal se encuentra en el espectro no uniforme, y el segundo paso considera construir una función de Lyapunov adecuada la cual juega el rol de *crossing time* con respecto a la esfera unitaria.

Motivación y Resultado

Hasta donde sabemos, no existen resultados sobre la suavidad de la linealización entre un sistema lineal con alguna hiperbolicidad no autónoma y una perturbación de si mismo por una no linealidad no acotada. El objetivo principal de esta tesis es obtener un primer resultado en esta dirección, considerando que el sistema lineal admite una contracción uniforme en $\mathbb{R}^+$, en otras palabras, que el sistema lineal sea uniformemente asintóticamente estable. Es decir, por un lado, evitando usar el concepto de reducibilidad y teoría espectral, se demuestra que la linealización de F. Lin [17] es de clase C^r para todo $r \geq 1$; y por otro lado, se mejora el trabajo [3] en términos que la perturbación no lineal es no acotada. Para más detalles sobre el resultado principal de esta tesis, se recomienda al lector dirigirse al Capítulo 5, Teorema 5.2.

Estructura

Durante el Capítulo 2 se mencionarán varios resultados mayormente conocidos, los cuales serán de gran ayuda en la demostración de los resultados principales de esta tesis. Como por ejemplo, se enunciará un resultado sobre el acotamiento de las soluciones del sistema no lineal (2.2), como también recordar las clásicas desigualdades como la de Gronwall y la de Bellman. También se presentarán algunos resultados asociados a la continuidad de las soluciones de un sistema no lineal con respecto a las condiciones iniciales y parámetros, para así finalizar con condiciones necesarias y suficientes para asegurar que una función sea un difeomorfismo global.

En el Capítulo 3 se presentarán los primeros resultados de esta tesis con respecto a la equivalencia topológica entre los sistemas a considerar; además, en este capítulo se mostrarán algunas propiedades que son verificadas por las funciones que están involucradas en la equivalencia topológica, enfatizando la característica de no acotamiento de éstas. Recordemos que la función que desempeña el papel de equivalencia topológica puede ser escrita como la identidad perturbada por un término que se puede ver como una solución del problema de valores iniciales; por lo tanto, en este capítulo se presentan propiedades de estas perturbaciones para que sea compatible con la definición de equivalencia topológica que se utiliza en esta tesis.

En el Capítulo 4 se continúa con el estudio de las propiedades de la equivalencia topológica, en particular se demostrará que las funciones no acotadas asociadas a esta equivalencia son continuas en $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

El Capítulo 5 está dedicado a la diferenciabilidad de la equivalencia topológica, esto es, las derivadas parciales hasta orden $r \geq 1$ de las funciones involucradas en la equivalencia topológica son continuas en $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones de esta tesis en conjunto con las perspectivas que se presentan para futuros trabajos.

Notación

Durante este trabajo, vamos a denotar por $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ a las normas matricial y vectorial respectivamente. El conjunto $[0, +\infty)$ es denotado por $\mathbb{R}^+$ y el conjunto de las matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes reales es denotado por $\mathcal{M}_n$, mientras que I_n es la matriz identidad de $n \times n$.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Durante esta tesis, vamos a considerar los siguientes sistemas continuos:

$$x' = A(t)x \tag{2.1}$$

y

$$y' = A(t)y + f(t, y), \tag{2.2}$$

donde $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y $A : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es continua y uniformemente acotada, esto es, existe $M > 1$ tal que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \|A(t)\| = M. \tag{2.3}$$

Denotamos por $t \mapsto x(t, \tau, \xi)$ y $t \mapsto y(t, \tau, \eta)$, a las soluciones de (2.1) y (2.2) donde $t \in \mathbb{R}^+$, las cuales pasan por ξ y η respectivamente en $t = \tau$.

Antes de introducir el concepto de dicotomía exponencial sobre $\mathbb{R}^+$, vamos a recordar la definición de matriz fundamental y matriz de transición asociadas al sistema (2.1).

Definición 2.1. *Una matriz fundamental del sistema (2.1) es una matriz $\Phi(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cuyas columnas $\{x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\}$ son una base para el espacio de soluciones del sistema (2.1). Así, la matriz de transición asociada a $\Phi(t)$ está definida por $\Phi(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$, donde $(t, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.*

Ejemplo 2.2. *Considere el sistema lineal no autónomo $x' = A(t)x$, donde*

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2}\cos(t)\sin(t) \\ -1 - \frac{3}{2}\cos(t)\sin(t) & -1 + \frac{3}{2}\sin^2(t) \end{bmatrix}.$$

Podemos notar que la matriz fundamental de este sistema está dada por

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t}\cos(t) & e^{-t}\sin(t) \\ -e^{\frac{1}{2}t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t) \end{bmatrix}, \text{ con } t \in \mathbb{R},$$

es decir, la matriz satisface $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$.

Definición 2.3. *El sistema lineal (2.1) tiene la propiedad de dicotomía exponencial en* $\mathbb{R}^+$ *si existe una proyección* $P^2 = P$ *y constantes* $K \geq 1, \alpha > 0$, *tal que su matriz fundamental* $\Phi(t)$ *verifica:*

$$\begin{cases} \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \text{ para cualquier } t \geq s \geq 0 \\ \|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(s-t)} \text{ para cualquier } s \geq t \geq 0. \end{cases}$$

Ejemplo 2.4. *Consideremos el sistema dado en el ejemplo 2.2. Podemos notar que el sistema posee dicotomía exponencial con proyector* P, *dado por*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En efecto, tenemos que $\mathbf{det}\Phi(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$. *Por tanto,* $\Phi^{-1}(t)$ *está dada por*

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(t) & -e^{-t}\sin(t) \\ e^{\frac{1}{2}t}\sin(t) & e^{\frac{1}{2}t}\cos(t) \end{bmatrix}.$$

De lo cual, obtenemos

$$\Phi(t)P\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} e^{s-t}\sin(t)\sin(s) & e^{s-t}\sin(t)\cos(s) \\ e^{s-t}\cos(t)\sin(s) & e^{s-t}\cos(t)\cos(s) \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| = e^{-(t-s)}$, *cuando* $t \geq s$, *considerando la norma* $\|A\| = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}$.

Por otro lado, tenemos el proyector

$$I - P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De lo cual, tenemos

$$\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}(s-t)}\cos(t)\cos(s) & e^{-\frac{1}{2}(s-t)}\cos(t)\sin(s) \\ -e^{-\frac{1}{2}(s-t)}\sin(t)\cos(s) & e^{-\frac{1}{2}(s-t)}\sin(t)\sin(s) \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\| = e^{-\frac{1}{2}(s-t)}$. *Tomando* $K = 1$ *y* $\alpha = \frac{1}{4}$ *en la definición 2.3, se tiene lo siguiente*

$$\begin{cases} \|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| \leq e^{-\frac{1}{4}(t-s)} \text{ para cualquier } t \geq s \\ \|\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)\| \leq e^{-\frac{1}{4}(s-t)} \text{ para cualquier } s \geq t. \end{cases}$$

Antes de presentar algunos resultados, los cuales utilizaremos más adelante en las demostraciones de los resultados principales de esta tesis, vamos a considerar las siguientes hipótesis con respecto a los sistemas (2.1) y (2.2), las cuales van a ser consideradas en los Capítulos 3, 4 y 5 de esta tesis:

(H1) El sistema (2.1) es uniformemente asintóticamente estable, es decir, existen constantes $K \geq 1$ y $\alpha > 0$ tal que su matriz de transición $\Phi(t,s)$ verifica

$$\|\Phi(t,s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad \text{para cualquier } t \geq s \geq 0.$$

(H2) La función f es continua en (t,y), y para cualquier $t \geq 0$ y para todo par $(y,\overline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, existe un $\gamma \geq 0$ tal que

$$|f(t,y) - f(t,\overline{y})| \leq \gamma|y-\overline{y}|.$$

(H3) Existe un $\mu \geq 0$ tal que $\sup\limits_{t\geq 0}|f(t,0)| \leq \mu$, y f es acotada en t para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.

(H4) $|f(t,x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$, para cualquier $t \geq 0$ fijo.

(H5) La función $f(t,x)$ y sus derivadas con respecto a x hasta orden r son funciones continuas de (t,x).

Observación 2.5. *La propiedad* ***(H1)*** *nos dice que el sistema lineal (2.1) es contractivo en el sentido que el sistema posee una dicotomía exponencial uniforme (hiperbolicidad no uniforme) con proyector* $P = I$.

2.1. Resultados Previos

En esta sección vamos a presentar algunos resultados conocidos, los cuales nos ayudarán durante el desarrollo de esta tesis.

La siguiente proposición nos permite establecer soluciones acotadas para sistemas que dependen de un parámetro en un espacio de Banach arbitrario, en particular, las soluciones del sistema (2.2) son acotadas. Adicionalmente, es análogo a aquellos presentados en [4, 14] en una estructura no autónoma discreta uniforme y en un contexto continuo no uniforme, respectivamente.

Proposición 2.6. *[14, Proposición 3] Asuma que el sistema (2.1) tiene dicotomía exponencial en $\mathbb{R}^+$ con $K \geq 1$, $\alpha > 0$ y $P = I$. Consideremos la perturbación no lineal*

$$x' = A(t)x + F(t, x(t), \eta)$$

donde $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach. Además, suponga que F satisface las siguientes condiciones:

I) *$F(t, x, \eta)$ es acotada con respecto a t, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\eta \in \mathcal{B}$ fijo.*

II) *Existe $\gamma_F > 0$ tal que $\|F(t, x_1, \eta) - F(t, x_2, \eta)\| \leq \gamma_F \|x_1 - x_2\|$, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$ y $\eta \in \mathcal{B}$.*

III) $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+,\ \eta \in \mathcal{B}} |F(t, 0, \eta)| = K_0 < +\infty$.

Si $K\gamma_F < \alpha$, entonces para cualquier $\eta \in \mathcal{B}$ fijo, el sistema (2) tiene una única solución acotada $X(t, \eta)$, dada por

$$X(t, \eta) = \int_0^t \Phi(t, s) F(s, X(s, \eta), \eta) ds, \tag{2.4}$$

tal que $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} |X(t, \eta)| < +\infty$.

Demostración. Consideremos un $\eta \in \mathcal{B}$ fijo, y construyamos la sucesión $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ recursivamente definida por

$$\varphi_{j+1}(t, \eta) = \int_0^t \Phi(t, s) F(s, \varphi_j(s, \eta), \eta) ds$$

y $\varphi_0(t, \eta) = \displaystyle\int_0^t \Phi(t, s) F(s, 0, \eta) ds$, tal que $\varphi_0(t, \eta) \in C$, donde C está definido por

$$C = \left\{ Z : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n : \text{para cualquier } \eta \in \mathcal{B} \text{ fijo, } \|U(\eta)\|_C < +\infty \text{ y } U \text{ es continua en } (t, \eta) \right\},$$

donde $\|U(\eta)\|_C = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} |U(t, \eta)|$, con $|\cdot|$ norma en $\mathbb{R}^n$. Afirmamos que $(C, \|\cdot\|_C)$ es un espacio de Banach.

En efecto, sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en C, i.e., para todo $\varepsilon > 0$, y para todo $\tau \in \mathbb{R}^+$ fijo, existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}$

$$\|U_n(\eta) - U_m(\eta)\|_C = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |U_n(t,\eta) - U_m(t,\eta)| < \varepsilon.$$

Así,

$$|U_n(\tau,\eta) - U_m(\tau,\eta)| \leq \|U_n(\eta) - U_m(\eta)\|_C < \varepsilon.$$

De esto, se tiene que $\{U_n(\tau,\eta)\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, y así obtenemos una función $U : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$ bien definida, la cual satisface $U(\tau,\eta) = \lim_{n\to+\infty} U_n(\tau,\eta)$, para τ, η fijos.

Además, tenemos

$$|U(\tau,\eta) - U_n(\tau,\eta)| = \lim_{m\to+\infty} |U_m(\tau,\eta)| < \lim_{m\to+\infty} \varepsilon = \varepsilon.$$

Lo que implica

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}^+} |U(\tau,\eta) - U_n(\tau,\eta)| \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

De (2.5), podemos inferir que

$$\|U(\eta)\|_C \leq \|U(\eta) - U_n(\tau,\eta)\|_C + \|U_n(\eta)\|_C < +\infty$$

para un $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande. Adicionalmente, U es continua debido a la continuidad de U_n, entonces $U \in C$, por lo tanto, $(C, \|\cdot\|_C)$ es un espacio de Banach.

Probaremos por inducción que $\varphi_j \in C$ para cualquier $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En efecto, cuando $\varphi_j \in C$, podemos estimar $\|\varphi_{j+1}(\eta)\|_C$,

$$\begin{aligned}
|\varphi_{j+1}(t,\eta)| &\leq \int_0^t |\Phi(t,s) f(s,\varphi_j(s,\eta),\eta)| ds \\
&\leq \int_0^t K e^{-\alpha(t-s)} (\gamma|\varphi_j(s,\eta)| + K_0) ds.
\end{aligned}$$

Como $\varphi_j \in C$, tenemos que $K_j = \|\varphi_j(\eta)\|_C$, entonces

$$
\begin{aligned}
|\varphi_{j+1}(t,\eta)| &< \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}(\gamma K_j + K_0)ds \\
&= K(\gamma K_j + K_0)e^{-t}\int_0^t e^{\alpha s}ds \\
&= \frac{K(\gamma K_j + K_0)}{\alpha}e^{-t}[e^{\alpha t}-1] \\
&= \frac{K(\gamma K_j + K_0)}{\alpha}[1-e^{-\alpha t}].
\end{aligned}
$$

Como $e^{-\alpha t} \leq 1$, tenemos

$$
|\varphi_{j+1}(t,\eta)| < \frac{K(\gamma K_j + K_0)}{\alpha},
$$

y así, obtenemos

$$
\|\varphi_{j+1}(\eta)\|_C < \frac{K(\gamma K_j + K_0)}{\alpha} < +\infty.
$$

De lo anterior, podemos considerar un mapa $T : C \to C$ dado por

$$
T(X(t,\eta)) = \int_0^t \Phi(t,s)f(s,X(s,\eta),\eta)ds
$$

el cual está bien definido. Como $K\gamma < \alpha$, tenemos

$$
|T(x_1(t,\eta)) - T(x_2(t,\eta))| \leq \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}\gamma|x_1(s,\eta) - x_2(s,\eta)|ds.
$$

Por tanto,

$$
\|T(x_1(t,\eta)) - T(x_2(t,\eta))\|_C \leq \frac{K\gamma}{\alpha}\|x_1(\eta) - x_2(\eta)\|_C.
$$

De esto se tiene que T es una contracción, y además se asegura que $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es la única sucesión en C que satisface la recursividad establecida anteriormente. Ahora probaremos que $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $(C, \|\cdot\|_C)$. Procederemos por inducción. Primero, observemos que

$$
\begin{aligned}
|\varphi_1(t,\eta) - \varphi_0(t,\eta)| &\leq \int_0^t |\Phi(t,s)f(s,\varphi_0(s,\eta),\eta) - \Phi(t,s)f(s,0,\eta)|ds \\
&\leq \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}\gamma|\varphi_0(s,\eta)|ds \\
&\leq K\gamma\int_0^t \frac{KK_0}{\alpha}e^{-\alpha(t-s)}ds \\
&\leq \overline{K}\frac{K\gamma}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

De lo cual tenemos

$$
\|\varphi_1(\eta) - \varphi_0(\eta)\|_C \leq \overline{K}\frac{K\gamma}{\alpha},
$$

donde $\overline{K} = \dfrac{KK_0}{\alpha}$. Como hipótesis inductiva, tenemos

$$\|\varphi_j(\eta) - \varphi_{j-1}(\eta)\|_C \leq \overline{K} \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^j$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}
|\varphi_{j+1}(t,\eta) - \varphi_j(t,\eta)| &\leq \int_0^t K e^{-\alpha(t-s)} \gamma |\varphi_j(s,\eta) - \varphi_{j-1}(s,\eta)| ds \\
&\leq K\gamma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \overline{K} \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^j ds \\
&\leq \overline{K} \frac{K\gamma}{\alpha} \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^j \\
&= \overline{K} \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^{j+1},
\end{aligned}$$

de lo cual, tenemos

$$\|\varphi_{j+1}(\eta) - \varphi_j(\eta)\|_C \leq \overline{K} \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^{j+1}.$$

Es más, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m \geq N$ (sin pérdida de generalidad, vamos a considerar $n \geq m$) tenemos que,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n(\eta) - \varphi_m(\eta)\|_C &\leq \|\varphi_n(\eta) - \varphi_{n-1}(\eta)\|_C + \|\varphi_{n-1}(\eta) - \varphi_{n-2}(\eta)\|_C + \cdots + \|\varphi_{m+1}(\eta) - \varphi_m(\eta)\|_C \\
&\leq \overline{K} \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^n + \overline{K} \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^{n-1} + \cdots + \overline{K} \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^{m+1} \\
&= \overline{K} \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^{m+1} \left[1 + \frac{K\gamma}{\alpha} + \cdots + \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^{n-(m+1)}\right] \\
&\leq \overline{K} \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^N \left[\frac{1 - \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^{n-m}}{1 - \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)}\right] \\
&\leq \overline{K} \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)^N \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{K\gamma}{\alpha}\right)}\right] \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esta desigualdad prueba que $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach C, la cual converge al punto fijo $X(t,\eta)$ definida en la ecuación (2.4).

Considerando un $\eta \in \mathcal{B}$ fijo, tenemos que $\|X(\eta)\|_C < K(\eta)$. Esto nos dice que $X(\cdot,\eta) \in C$, pero la cota $K(\eta)$ podría estar determinada por η. Probaremos que $K(\eta)$ tiene una cota superior independiente de η. En efecto,

$$\begin{aligned}
|X(t,\eta)| &\leq \int_0^t |\Phi(t,s)f(s,X(s,\eta),\eta)|ds \\
&\leq \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}|f(s,X(s,\eta),\eta)|ds \\
&\leq \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}(\gamma|X(s,\eta)|+K_0)ds \\
&= \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}\gamma|X(s,\eta)|ds + KK_0\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}ds \\
&\leq \frac{K\gamma K(\eta)}{\alpha} + \frac{KK_0}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Así,

$$|X(t,\eta)| \leq \frac{K\gamma K(\eta)}{\alpha} + \frac{KK_0}{\alpha}.$$

Tomando supremo sobre $t \in \mathbb{R}^+$, obtenemos

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |X(t,\eta)| = \|X(t,\eta)\|_C \leq \frac{K\gamma K(\eta)}{\alpha} + \frac{KK_0}{\alpha}.$$

Así,

$$K(\eta) \leq \frac{K\gamma K(\eta)}{\alpha} + \frac{KK_0}{\alpha}$$

para finalmente obtener

$$K(\eta) \leq \frac{KK_0}{\alpha}\left(1 - \frac{K\gamma}{\alpha}\right)^{-1}.$$

□

Observación 2.7. *En particular, podemos notar que todas las soluciones de (2.2) son acotadas como una consecuencia de la Proposición 2.6, i.e.,* $\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |y(t,\tau,\eta)| < +\infty$.

El siguiente Lema, más conocido como Desigualdad de Gronwall, es un resultado clásico y una herramienta útil en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias. En [10, 13, 18, 20] se pueden encontrar demostraciones para distintas versiones de esta desigualdad.

Lema 2.8 (Desigualdad de Gronwall)**.** *[20, Pág. 79]*

Sea $J \subset \mathbb{R}$ *un intervalo,* $t_0 \in J$ *y* $c > 0$. *Sean* $u, v \in C(J, \mathbb{R}^+)$ *tal que para cualquier* $t \geq t_0$ *con* $t \in J$ *se sigue que*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t v(s)u(s)ds. \tag{2.6}$$

Entonces, para cualquier $t \geq t_0$ *se tiene que*

$$u(t) \leq c \exp \left(\int_{t_0}^{t} v(s) ds \right).$$

Demostración. Sea $w(t) = c + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds$ con $t \in J$ tal que $t \geq t_0$. Entonces $w(t) \geq u(t)$ y $w(t) > 0$. Se sigue del Teorema Fundamental del Cálculo que

$$w'(t) = v(t)u(t),$$

y por tanto,

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v(t)u(t)}{w(t)} \leq \frac{v(t)w(t)}{w(t)} = v(t),$$

para todo $t \geq t_0$. Lo anterior es equivalente a

$$\frac{d}{dt} \ln(w(t)) \leq v(t),$$

así,

$$\ln(w(t)) \leq \int_{t_0}^{t} v(s) ds + \ln(w(t_0)),$$

por tanto,

$$w(t) \leq w(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^{t} v(s) ds \right), \qquad \text{donde } w(t_0) = c.$$

De esto, concluimos que

$$u(t) \leq c \exp \left(\int_{t_0}^{t} v(s) ds \right).$$

□

Una variación importante del Lema 2.8 (Lema de Gronwall) se presenta en el siguiente resultado el cual puede ser encontrado en [2, 18].

Lema 2.9 (Desigualdad de Bellman). *[18, Teorema 1.2.2] Sean $\psi, \varphi : J \to \mathbb{R}^+$ funciones localmente integrables tal que para $M > 0$, $t_0 \in J$,*

$$\varphi(t) \leq M + \left| \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s) ds \right|, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

entonces,

$$\varphi(t) \leq M \exp \left(\left| \int_{t_0}^{t} \psi(s) ds \right| \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Si $t \geq t_0$, la desigualdad en (2.7) es equivalente a (2.6) y por el Lema 2.8 podemos deducir que

$$\varphi(t) \leq M \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right) = M \exp\left(\left|\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right|\right).$$

Ahora, asumiendo que $t \leq t_0$, podemos notar lo siguiente

$$w(t) = M + \left|\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)ds\right| = M + \int_{t}^{t_0} \varphi(s)\psi(s)ds \geq \varphi(t). \tag{2.8}$$

Derivando (2.8), obtenemos

$$w'(t) = -\varphi(t)\psi(t) \geq -w(t)\psi(t),$$

lo cual es equivalente a

$$w'(t) + w(t)\psi(t) \geq 0. \tag{2.9}$$

Multiplicando (2.9) por el factor $\rho(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right)$, tenemos

$$w'(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right) + w(t)\psi(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right) \geq 0,$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{d}{dt}\left[w(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right)\right] \geq 0.$$

Entonces, la función $t \mapsto w(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right)$ es creciente para cualquier $t \in J$ con $t \leq t_0$. En consecuencia, cuando $t \leq t_0$ se sigue que

$$w(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right) \leq w(t_0) = M.$$

Entonces,

$$w(t) \leq M \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right).$$

Así, podemos concluir que

$$\varphi(t) \leq w(t) \leq M \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right) = M \exp\left(\left|\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds\right|\right).$$

□

La siguiente proposición y corolario son clásicos en la literatura de los sistemas diferenciales en términos de la continuidad local con respecto a las condiciones iniciales. Estos resultados se pueden encontrar en [17].

Proposición 2.10. *[17, Proposición 2] Sea $f(t,y)$ una función continua tal que satisface la condición de Lipschitz con constante γ. Entonces la solución $y(t,s,\eta)$ de (2.2) con $y(s,s,\eta)=\eta$ satisface*

$$\frac{1}{K}|\eta-\overline{\eta}|e^{-K\gamma|t-s|} \leq |y(t,s,\eta)-y(t,s,\overline{\eta})| \leq K|\eta-\overline{\eta}|e^{K\gamma|t-s|}$$

Demostración. Para cualquier $\eta \in \mathbb{R}^n$, se tiene que la solución de (2.2) está dada por

$$y(t,s,\eta) = \Phi(t,s)\eta + \int_s^t \Phi(t,r)f(r,y(r,s,\eta))dr.$$

Así,

$$|y(t,s,\eta)-y(t,s,\overline{\eta})| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|\eta-\overline{\eta}| + \left|\int_s^t K\gamma e^{-\alpha(t-r)}|y(r,s,\eta)-y(r,s,\overline{\eta})|dr\right|$$

De lo anterior, obtenemos lo siguiente

$$e^{\alpha t}|y(t,s,\eta)-y(t,s,\overline{\eta})| \leq Ke^{\alpha s}|\eta-\overline{\eta}| + \left|\int_s^t K\gamma e^{\alpha r}|y(r,s,\eta)-y(r,s,\overline{\eta})|dr\right|$$

De la Proposición (2.9), tenemos la siguiente desigualdad

$$e^{\alpha t}|y(t,s,\eta)-y(t,s,\overline{\eta})| \leq Ke^{\alpha s}|\eta-\overline{\eta}|e^{K\gamma|t-s|}$$

Obteniendo así,

$$|y(t,s,\eta)-y(t,s,\overline{\eta})| \leq K|\eta-\overline{\eta}|e^{-\alpha(t-s)+K\gamma|t-s|} \tag{2.10}$$

Como $e^{-\alpha(t-s)} \leq 1$ para todo $t \geq s \geq 0$, entonces de 2.10 nos queda

$$|y(t,s,\eta)-y(t,s,\overline{\eta})| \leq K|\eta-\overline{\eta}|e^{K\gamma|t-s|}. \tag{2.11}$$

Reemplazando η por $y(s,t,\eta)$ y $\overline{\eta}$ por $y(s,t,\overline{\eta})$ en (2.11), obtenemos

$$|y(t,s,y(s,t,\eta))-y(t,s,y(s,t,\overline{\eta}))| \leq K|y(s,t,\eta)-y(s,t,\overline{\eta})|e^{K\gamma|t-s|}.$$

De la unicidad de la solución $y(t,s,\eta)$, se tiene que

$$y(t,s,y(s,t,\eta)) = y(t,t,\eta) = \eta, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}^+,$$

y

$$y(t,s,y(s,t,\overline{\eta})) = y(t,t,\overline{\eta}) = \overline{\eta}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}^+.$$

Así, lo anterior nos queda

$$|\eta - \overline{\eta}| \leq K|y(s,t,\eta) - y(s,t,\overline{\eta})|e^{K\gamma|t-s|}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{K}|\eta - \overline{\eta}|e^{\alpha(t-s)-K\gamma|t-s|} \leq |y(s,t,\eta) - y(s,t,\overline{\eta})|$$

de lo cual, podemos concluir

$$\frac{1}{K}|\eta - \overline{\eta}|e^{-K\gamma|t-s|} \leq |y(t,s,\eta) - y(t,s,\overline{\eta})| \leq K|\eta - \overline{\eta}|e^{K\gamma|t-s|)}.$$

□

El siguiente corolario es una consecuencia de la proposición anterior.

Corolario 2.11. *Bajo las hipótesis de la proposición anterior considerando $F(t,x) = A(t)x$, se tiene que las soluciones $x(t,s,\xi)$ con $x(s,s,\xi) = \xi$ del sistema (2.1) satisfacen*

$$|\xi - \overline{\xi}|e^{-M|t-s|} \leq |x(t,s,\xi) - x(t,s,\overline{\xi})| \leq |\xi - \overline{\xi}|e^{M|t-s|}. \tag{2.12}$$

En particular, si $\overline{\xi} = 0$,

$$|\xi|e^{-M|t-s|} \leq |x(t,s,\xi)| \leq |\xi|e^{M|t-s|}$$

donde $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}^+} \|A(t)\| = M < +\infty$.

Demostración. Primero, podemos notar que $F(t,x) = A(t)x$ es continua en (t,x) ya que $A(t)$ es continua, además satisface la condición de Lipschitz con constante M.

Así, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$x(t,s,\xi) = \xi + \int_s^t A(t)x(r,s,\xi)dr$$

De esto obtenemos,

$$|x(t,s,\xi)-x(t,s,\overline{\xi})| \leq |\xi-\overline{\xi}| + \left|\int_s^t M|x(r,s,\xi)-x(r,s,\overline{\xi})|dr\right|$$

Por el Lema (2.9), lo anterior nos queda

$$|x(t,s,\xi)-x(t,s,\overline{\xi})| \leq |\xi-\overline{\xi}|e^{M|t-s|} \tag{2.13}$$

Reemplazando ξ por $x(s,t,\xi)$ y $\overline{\xi}$ por $x(s,t,\overline{\xi})$ en (2.13) nos queda lo siguiente

$$|x(t,s,x(s,t,\xi))-x(t,s,x(s,t,\overline{\xi}))| \leq |x(s,t,\xi)-x(s,t,\overline{\xi})|e^{M|t-s|} \tag{2.14}$$

De la unicidad de las soluciones, tenemos que

$$x(t,s,x(s,t,\xi)) = \xi \quad \text{y} \quad x(t,s,x(s,t,\overline{\xi})) = \overline{\xi}$$

Así, de la desigualdad (2.14) se sigue que

$$|\xi-\overline{\xi}|e^{-M|t-s|} \leq |x(s,t,\xi)-x(s,t,\overline{\xi})|$$

De lo cual obtenemos

$$|\xi-\overline{\xi}|e^{-M|t-s|} \leq |x(t,s,\xi)-x(t,s,\overline{\xi})| \leq |\xi-\overline{\xi}|e^{M|t-s|}$$

Si $\overline{\xi}=0$, entonces la solución $x(t,s,0)=0$ para todo $t,s \in R^+$, y por tanto

$$|\xi|e^{-M|t-s|} \leq |x(t,s,\xi)| \leq |\xi|e^{M|t-s|}$$

□

2.2. Dependencia de las soluciones en relación a las condiciones iniciales y parámetros.

La solución de una ecuación diferencial definida en un intervalo I no solo la podemos considerar como una función sobre $t \in I$, si no también como una función sobre las coordenadas $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ las cuales corresponden a las condiciones iniciales de la solución. Por ejemplo, si consideramos la ecuación de primer orden en una dimensión $x' = -x$ tal que $x(\tau) = \xi$, su solución estará dada por $x(t) = \xi e^{-(t-\tau)}$ la cual está definida en $\mathbb{R}$. Pero en vez de considerarla como una función de una sola variable, vamos a considerarla como una función $x(t, \tau, \xi)$ definida en $\mathbb{R}^3$. Así, podemos analizar si esta función con respecto a sus condiciones iniciales es continua o diferenciable, por ejemplo. Los resultados que vamos a enunciar en esta sub sección, con respecto a la dependencia de las soluciones en relación a las condiciones iniciales y parámetros se pueden encontrar en [26, Cap. II].

Supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{E}$ sea una función continua en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ donde $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ es el espacio euclidiano de dimensión n, y que a través de cada punto $(t_0, x_0) \in \Omega$, pase una única solución $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0)$ del sistema

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.15}$$

definida en su intervalo máximo $I(t_0, x_0) = (\omega_-(t_0, x_0), \omega_+(t_0, x_0))$. Mostraremos que, bajo estas condiciones, la función φ depende continuamente y tambien diferencialmente (si f es diferenciable) de las variables (t, t_0, x_0).

Estudiaremos también la dependencia en relación a las variables (t, t_0, x_0, λ) de las soluciones de una familia de ecuaciones

$$x' = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.16}$$

las cuales dependen de un parámetro $\lambda \in \Lambda$, donde Λ es un espacio euclidiano tal que para cada λ fijo, (2.16) posee una única solución $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$ definida en su intervalo máximo $I(t_0, x_0, \lambda) = (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$. En este caso, la función f está definida en un abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda$.

Observación 2.12. *La dependencia con respecto a (t, t_0, x_0, λ) de las soluciones de (2.16) pueden ser reducidas a la dependencia de las soluciones de (2.15), sin parámetros adicionales. De hecho, substituyendo (2.16) por*

$$x' = F(t, y), \quad y(t_0) = y_0 = (x_0, \lambda_0) \tag{2.17}$$

donde $y = (x, \lambda) \in \mathbb{E} \times \Lambda$ y $F(t, y) = (f(t, x, \lambda); 0) \in \mathbb{E} \times \Lambda$, se tiene que la solución de (2.17) que pasa por (t_0, y_0) es $\phi(t, t_0, y_0) = (\varphi(t, t_0, x_0, \lambda_0), \lambda_0)$.

Por lo tanto, las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de ϕ serían también válidas para φ.

Ahora, enunciaremos algunos resultados que serán de utilidad para demostrar la continuidad de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales.

Lema 2.13. *[26, Lema 2] Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión equicontinua y uniformemente acotada de funciones reales y continuas en un espacio métrico compacto X. Supongamos que toda subsucesión uniformemente convergente de esta sucesión tiene el mismo límite φ. Entonces $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente a φ.*

Demostración. Supongamos que $\{\varphi_n\}$ no converge uniformemente a φ. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{\varphi_{n'}\}$ tal que $|\varphi_{n'}(t_{n'}) - \varphi(t_{n'})| \geq 0$ para alguna sucesión $\{t_{n'}\}$ en X. Por el Teorema de Arzelá-Ascoli tenemos que $\{\varphi_{n'}\}$ tiene una subsucesión $\{\varphi_{n''}\}$ uniformemente convergente en X. Como $\{\varphi_{n''}\}$ es también una subsucesión de $\{\varphi_n\}$, entonces por hipótesis $\{\varphi_{n''}\}$ converge uniformemente a φ. Esto es una contradicción, ya que $|\varphi_{n''}(t_{n''}) - \varphi(t_{n''})| \geq \varepsilon$. □

Proposición 2.14. *[26, Proposición 3] Considere $\mathbb{E}$ un espacio euclideano de dimensión n, y sea $f_n : \Omega \to \mathbb{E}$, con $n \in \mathbb{N}_0$, una sucesión de funciones definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{E}$, tal que f_n converge uniformemente a f_0 en cada parte compacta de Ω. Sea $\{(t_n, x_n)\}$ una sucesión de puntos en Ω que converge a (t_0, x_0). Supongamos que*

$$x' = f_n(t, x), x(t_n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

tiene una única solución máxima φ_n en su intervalo máximo $I_n = (\omega_-(n), \omega_+(n))$. Sea $[a, b] \subset I_0 = (\omega_-(0), \omega_+(0))$. Entonces existe $n_0 = N_0(a, b)$ tal que para $n > n_0$, $[a, b] \subset I_n$ y $\varphi_n|_{[a,b]} \to \varphi_0|_{[a,b]}$ uniformemente.

Demostración. Sea C un compacto que contiene el gráfico de φ_0 definida en $[a, b]$ en su interior. Sea $\Omega_0 \subset \Omega$ otro compacto que contiene a C en su interior. Como f_n converge uniformemente a f_0 en cada parte compacta de Ω, entonces existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_1$ se tiene que $|f_n| < M$ en Ω_0, esto ya que f_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Por el Corolario (Peano) [26, Capítulo I, Corolario 8], existe un $\alpha > 0$ tal que para todo $(t_*, x_*) \in C$ el sistema

$$x' = f_n(t, x), \quad x(t_*) = x_*, n > n_1$$

tiene una única solución definida en $|t - t_*| \leq \alpha$, cuyo gráfico está contenido en Ω_0.

Sea $\varepsilon = \alpha/3$. Como la sucesión $\{(t_n, x_n)\}$ converge a $(t_0, x_0) \in C$, entonces existe $n_2 > n_1$ tal que si $n > n_2$, $(t_n, x_n) \in C$ y $|t_n - t_0| < \varepsilon$, y por tanto, φ_n con $n > n_2$ está definida en $|t - t_n| \leq \varepsilon$, pues con estas condiciones el intervalo $|t - t_n| \leq \alpha = 3\varepsilon$ contiene al intervalo $|t - t_0| \leq \varepsilon$. La familia $F = \{\varphi_n|\{|t - t_0| \leq \varphi\}, n > n_2\}$ es una sucesión que satisface las hipótesis del Lema 2.13. En efecto, podemos notar que la familia F es uniformemente acotada y equicontinua, ya que el gráfico de φ_n está contenido en el compacto Ω_0, donde

$$|\varphi_n'(t)| = |f_n(t, \varphi_n(t))| < M.$$

Solo nos falta verificar que toda subsucesión $\{\varphi_{n'}\}$ uniformemente convergente en $|t - t_0| \leq \varepsilon$ converge a φ_0. Es suficiente probar que $\lim_{n' \to \infty} = \varphi$ es solución de $x' = f_0(t, x), x(t_0) = x_0$. De hecho,

$$\varphi_{n'}(t) = x_{n'} + \int_{t_{n'}}^{t} f_{n'}(s, \varphi_{n'}(s))ds.$$

Tomando $n' \to +\infty$, tenemos

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_0(s, \varphi(s))ds.$$

Luego, por la unicidad de las soluciones, tenemos que $\varphi = \varphi_0$ en $|t - t_0| \leq \varepsilon$. En consecuencia, por el Lema 2.13, $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente a φ_0 en $|t - t_0| \leq \varepsilon$. Solo falta comprobar la convergencia en el intervalo $[a, b]$. Si $t_0 + \varepsilon \leq b$, podemos repetir el argumento anterior considerando la sucesión de puntos $x_{n'} = \varphi_n(t_0 + \varepsilon), t_{n'} = t_0 + \varepsilon$. Así, el sistema que vamos a considerar está dado por

$$x' = f_n(t, x), \quad x(t_0 + \varepsilon) = \varphi_n(t_0 + \varepsilon).$$

Podemos concluir que existe un $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_3$, entonces φ_n está definida en $[t_0 - \varepsilon, t_0 + 2\varepsilon]$ y por tanto converge uniformemente a φ_0 en este intervalo.

Analogamente, considerando el sistema

$$x' = f_n(t, x), \quad x(t_0 - 2\varepsilon) = \varphi_n(t_0 - 2\varepsilon)$$

tenemos que existe un $n_4 \in \mathbb{N}$, tal que si $n > n_4$, entonces φ_n está definida en $[t_0 - 3\varepsilon, t_0 - \varepsilon]$ y converge uniformemente a φ_0 en este intervalo. Luego de repetir este proceso un número finito de veces (no más de $\frac{b-a}{\varepsilon}$) se concluye que existe un $n_0 = n_0(a, b)$ tal que, para $n > n_0$, φ_n está definida en $[a, b]$, esto es, $[a, b] \subset I_n$ y converge uniformemente a φ_0 en $[a, b]$.

$\square$

Teorema 2.15. *[26, Teorema 1] Sea $f : \Omega \to \mathbb{E}$ una función continua en un abierto Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \Lambda$. Para cada $(t_0, x_0, \lambda) \in \Omega$ supongamos que el problema de valores iniciales, con λ fijo,*

$$x' = f(t, x, \lambda), \; x(t_0) = x_0$$

tiene una única solución $\varphi = \varphi(t, t_0, x_0, \lambda)$*, definida en su intervalo máximo* $(\omega_-, \omega_+), \omega_\pm = \omega_\pm(t_0, x_0, \lambda)$*. Entonces,*

$$D = \{(t, t_0, x_0, \lambda); (t_0, x_0, \lambda) \in \Omega, t \in (\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))\}$$

es abierto en $\mathbb{R} \times \Omega$ *y* φ *es continua en* D*.*

Demostración. Por la observación (2.12), es suficiente probar este teorema para las ecuaciones de la forma

$$x' = f(t, x)$$

con todas sus soluciones únicas para algún problema de valores iniciales dado. Aplicando la Proposición (2.14) a la sucesión $f_n = f$, esto implica que para todo $(t_0, x_0) \in \Omega$, dados $\varepsilon > 0$ y $[a, b] \subset I(t_0, x_0)$, existe una vecindad $V_0 = V_0(t_0, x_0) \subset \Omega$ tal que, para todo $(t', x') \in V_0$, se tiene que $[a, b] \subset I(t', x')$ y

$$|\varphi(t, t', x') - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon/2, \quad t \in [a, b]. \tag{2.18}$$

Como Ω es abierto, y $I(t_0, x_0)$ contiene al intervalo $[a, b]$, en particular contiene a (a, b), se tiene que D es abierto. De (2.18) se prueba la continuidad de φ en (t, t_0, x_0) con $t \in (a, b)$. En efecto, vamos a considerar $\varepsilon > 0$ anteriormente dado, entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $|t - s| < \delta$, se tiene que $|\varphi(s, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon/2$. De esto, obtenemos lo siguiente

$$|\varphi(s, t', x') - \varphi(t, t_0, x_0)| \leq |\varphi(s, t', x') - \varphi(s, t_0, x_0)| + |\varphi(s, t_0, x_0) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

□

Después de haber establecido la existencia y la continuidad de φ en función de (t, τ, ξ), es natural preguntarnos que condiciones serán suficientes para la existencia y la continuidad de las derivadas parciales $\partial\varphi/\partial\tau, \partial\varphi/\partial\xi_j$ con $j = 1, ..., n$, donde ξ_j son las componentes de $\xi \in \mathbb{R}^n$. El siguiente Teorema nos entrega una caracterización para el determinantre de la matriz jacobiana con respecto al valor inicial $\xi \in \mathbb{R}^n$ de la solución φ del Teorema 2.15. Vamos a denotar por f_x a la matriz Jacobiana de f con respecto a la variable $x \in \mathbb{R}^n$, es decir la matriz donde su entrada (i, j) está dada por $\partial f_i/\partial x_j$, con $i, j = 1, ..., n$. De la misma forma vamos a denotar por φ_ξ a la matriz jacobiana donde su entrada (i, j) está dada por $\partial\varphi_i/\partial\xi_j$, con $i, j = 1, ..., n$. Los Teoremas 2.16 y 2.18 se pueden encontrar en [7, Capítulo 1] con sus respectivas demostraciones.

Teorema 2.16. *[7, Teorema 7.2] Suponga que se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.15, y además, la matriz Jacobiana f_x existe y es continua en $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Entonces $\varphi \in C^1(D)$, donde $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, y además*

$$\det \varphi_\xi(t, \tau, \xi) = \exp\left(\int_\tau^t \text{tr } f_x(s, \varphi(s, \tau, \xi))\, ds\right)$$

Observación 2.17. *En las hipótesis del Teorema 2.15 estamos considerando, además de las condiciones iniciales, un parámetro fijo $\lambda \in \Lambda$, pero como explicamos anteriormente en la Observación 2.12, las propiedades de continuidad y diferenciabilidad de la solución se mantienen al considerar o no considerar el parámetro, por lo tanto, para simplificar las cosas, en las hipótesis del Teorema 2.16 solo vamos a considerar la solución φ en función de (t, τ, ξ).*

Teorema 2.18. *[7, Teorema 7.3] Sea $A : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz con elementos continuos en el intervalo I, y suponga que Φ es una matriz de funciones definida en un intervalo I la cual satisface la siguiente ecuación*

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t),\ t \in I.$$

Entonces $\det \Phi$ satisface la siguiente ecuación de primer orden en el intervalo I

$$(\det \Phi(t))' = (\text{tr } A)(\det \Phi),$$

y por tanto, para $\tau, t \in I$

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \text{tr } A(s)\, ds\right).$$

2.3. Homeomorfismos entre espacios de Banach

Buscaremos condiciones necesarias y suficientes para que un mapa F entre dos espacios de Banach sea un difeomorfismo global. Usando teoría de espacios de cubrimiento reducimos el problema de cómo obtener un homeomorfismo global a encontrar condiciones para que un homeomorfismo local satisfaga la propiedad de levantar caminos. Más adelante, mostraremos que si F posee esta propiedad, entonces es equivalente a decir que F satisface una nueva condición, la cual designaremos por (L). Luego, mostraremos que un homeomorfismo local es un homeomorfismo global si y sólo si la condición (L) se satisface.

Finalmente,utilizando este último resultado, entregamos condiciones suficientes y necesarias para demostrar que este homeomorfismo local es un difeomorfismo global. Los resultados en esta sub sección se pueden encontrar en [22].

El siguiente Lema es un resultado conocido, el cual nos entrega condiciones necesarias y suficientes para que el mapa F sea un homeomorfismo de X a Y.

Lema 2.19. *[22, Lema 1.1]*

Sean X e Y espacios conexos, y localmente conexos por caminos. Además, sea Y simplemente conexo. Entonces F es un homeomorfismo de X a Y si y sólo si (X, F) es un espacio de cubrimiento de Y.

Para poder aplicar el Lema (2,19), debemos encontrar condiciones precisas para determinar cuando un homeomorfismo es un mapa de cubrimiento.

Sean X e Y espacios de Banach, y $D \subseteq X$ un conjunto abeirto y conexo.

Definición 2.20. *$F : D \to Y$ levanta caminos en $F(D)$ si y sólo si para cada recta $L(t) = (1-t)y_1 + ty_2$ en $F(D)$ y para cada punto $x_\alpha \in F^{-1}(y_1)$ hay un camino $P_\alpha(t)$ tal que $P_\alpha(0) = x_\alpha$ y $F(P_\alpha(t)) = L(t)$.*

Teorema 2.21. *[22, Teorema 1.1] Sea $D \subseteq X$ un subconjunto abierto y conexo y $F : D \to X$. Las siguientes condiciones son necesarias y suficientes para que (D, F) sea un cubrimiento de $F(D)$:*

- I) *F es un homeomorfismo local, y*
- II) *F levanta caminos en $F(D)$.*

Demostración. La necesidad se sigue de las propiedades de un espacio de cubrimiento. Para poder probar la suficiencia primero observamos que si $y \in F(D)$, podemos encontrar un $r > 0$ tal que $B_r(y) = \{z : |z - y| < r\} \subseteq F(D)$, y que cualquier radio en $B_r(y)$ puede ser descrito por una recta $L_z(t) = y + trz$ con $|z| = 1, 0 \leq t \leq 1$, la cual puede ser levantada por F. Sean $x \in F^{-1}(y)$ y

$$O_x^* = \{P(t) : F(P(t)) = L_z(t), \forall\, |z| = 1, 0 \leq t \leq 1, \text{ y } P(0) = x\} \subset D.$$

Además, denotaremos por $O_x = O_x^*$ al mismo conjunto, pero considerado como un conjunto de puntos, es decir, $O_x = \{\overline{x} \mid P(\overline{t}) = \overline{x},\ P \in O_x^*\}$, donde $O_x \neq \emptyset$ por la condición ii).
Debemos mostrar que tanto O_x como $B_r(y)$ satisfacen las condiciones dadas en la definición de un espacio de cubrimiento, es decir, mostrarremos que los O_x, con $x \in F^{-1}(y)$ son conjuntos disjuntos y abiertos, los cuales son mapeados homeomorficamente sobre $B_r(y)$ por F, y

$$F^{-1}(B_r(y)) = \bigcup_{x \in F^{-1}(y)} O_x.$$

Realizaremos la demostración en varios pasos.

a) Cada O_x es mapeado sobre $B_r(y)$ ya que cualquier $\overline{y} \in B_r(y)$ se encuentra en algún radio L_z; por tanto hay un camino $P(t) \in O_x^*$ y un $\overline{t} \in [0,1]$ tal que $F(P(\overline{t})) = \overline{y}$. Por definición de O_x, $P(\overline{t}) \in O_x$.

b) Cada O_x es mapeado homeomorficamente sobre $B_r(y)$. Si no, sean $x_1 \neq x_2 \in O_x$ y $F(x_1) = F(x_2) = \overline{y}$. Por definición de O_x, x_1 y x_2 se encuentran sobre caminos P_1 y P_2 los cuales son idénticos, porque de lo contrario su imagen sería un radio el cual se intersectaría a si mismo. Por tanto, $F(P_1(t))$ y $F(P_2(t))$ son radios distintos. De este modo, $\overline{y} = y$, y así $F(x_1) = F(P_1(t_1)) = F(P(0)) = y = F(P_2(t_2)) = F(x_2)$. Por lo tanto, $T_1 = t_2 = 0$ (de lo contrario, la imagen de $P_i(t)$ con $i = 1, 2$ sería un radio el cual se intersecta a sí mismo), y así $x_1 = x_2 = x$, lo cual es una contradicción. La continuidad de la inversa se sigue del hecho que $F|_{O_x}$ es un homeomorfismo local y por tanto un mapa abierto.

c) Cada O_x con $x \in F^{-1}(y)$ con disjuntos entré sí. Supongamos que existe $x_0 \in O_{x_1} \cap O_{x_2}$ con $x_1 \neq x_2$, entonces $x_0 = P_1(t_1) = P_2(t_2)$ para algunos $t_1, t_2 \in [0,1]$. Las imagenes de P_1 y P_2 bajo F deben ser el mismo radio, porque de lo contrario los radios se intersectarían y así $F(x_0) = F(x_1) = F(x_2) = y$. Por la parte b) , tendríamos que $x_0 = x_1 = x_2$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $F(P_1(t)) = F(P_2(t)) = L(t)$, y así $L(t_1) = L(t_2)$ lo cual implica que $t_1 = t_2 = \overline{t}$. De esto concluimos que $P_1(t) = P_2(t)$, y en particular, $x_1 = x_2$. De este modo los O_x son disjuntos.

d) Cada O_x es un conjunto abierto en D. Si $u \in O_x$, con $u \neq x$, entonces hay un camino $P(t)$, donde $0 \leq t \leq 1$ en O_x con $P(0) = x$ y $P(1) = u$ tal que $F(P(t)) = (1-t)y + tv$, donde $F(x) = y$ y $F(u) = v$. Por b), tenemos que F es inyectiva en $P(t)$. Este hecho, junto con la compacidad del camino $P(t)$ nos permite encontrar un conjunto abierto S conteniendo a $P(t)$ tal que $F : S \to F(S)$ es un homeomorfismo, donde $F(S)$ es un conjunto abierto.

   Para mostrar que u está en el interior de O_x, primero encontramos una bola abierta $B_\delta(v) \subseteq F(S)$ con la propiedad de que cada recta $R(t) = (1-t)y + tw$ esté en $F(S)$ siempre que $w \in B_\delta(v)$. Si este no fuera el caso, encontraríamos sucesiones $\{t_i\}_i$ con $0 \leq t_i \leq 1$, y $w_i \to v$ cuando $i \to \infty$ tal que $R_i(t) = (1-t_i)y + t_i w_i = y_i \notin F(S)$. Sin embargo, una subsucesión adecuada de $\{y_i\}_i$ converge a un punto $(1-\overline{t})y + \overline{t}v$ el cual está en $F(S)$, lo cual contradice el hecho que $F(S)$ sea abeirto.

   Por lo tanto, $F^{-1}(B_\delta(v)) \cap S$ es un conjunto abierto en O_x conteniendo a u. La demostración para el caso $u = x$ se sigue directamente de la hipótesis i). Como O_x es abierto en D, junto con la hipóteis i), se sigue que $F|O_x$ es un homeomorfismo local.

e) Solo nos falta probar que $F^{-1}(B_r(y)) = \bigcup_{x\in F^{-1}(y)} O_x$. Como $F^{-1}(B_r(y)) \subseteq \bigcup_{x\in F^{-1}(y)} O_x$, nos basta probar la inclusión opuesta.

   Sean $x \in F^{-1}(B_r(y))$ y $L(t) = (1-t)F(x) + ty$, con $0 \leq t \leq 1$. Entonces $L(t) \in B_r(y)$ y por hipótesis hay un camino $P(t)$ tal que $P(0) = x$ y $F(P(t)) = L(t)$. Por tanto, $P(1) \in F^{-1}(y)$. Sea $L'(t) = L(1-t)$ y $P'(t) = P(1-t)$. De este modo, $F(P'(t)) = L'(t)$, $P'(0) = P(1) \in F^{-1}(y)$ y $P'(1) = x$. Entonces por definición de $O_{P(1)}$, vemos que $x \in O_{P(1)}$.

□

Nuevamente vamos a suponer que X e Y son espacios de Banach, $D \subseteq X$ es abierto y conexo. Sea $F : D \to Y$ continua. Introduciremos la siguiente condición:

(L) Sea $P(t)$, con $t \in [0, b)$ un camino el cual satisface $F(P(t)) = L(t)$, donde $L(t) = (1-t)y_1 + ty_2$ es cualquier linea en Y. Entonces existe una sucesión $t_i \to b$ cuando $i \to +\infty$ tal que $\lim_{i\to\infty} P(t_i)$ existe y está en D.

Teorema 2.22. *[22, Teorema 1.2] Sea $F : D \subseteq X \to Y$ un homeomorfismo local. Entonces F es un homeomorfismo de D a Y si y sólo si F satisface la condición (L).*

Demostración. Si F es un homeomorfismo, entonces tomando $P(b) = F^{-1}(L(b))$ se comprueba que F satisface (L). Por otro lado, supongamos que F satisface la condición (L). Para mostrar que F es un homeomorfismo, primero mostraremos que F levanta caminos. Sea $L(t)$ cualquier recta en $F(D)$ con $L(0) = \overline{y}$. Sea $\overline{x} \in F^{-1}(\overline{y})$.

Como F es un homeomorfismo local, hay un $\varepsilon > 0$ y un camino $P(t) = F^{-1}(L(t))$, con $0 \leq t < \varepsilon$, tal que $P(0) = \overline{x}$ y $F(P(t)) = L(t)$ para $0 \leq t < \varepsilon$. Sea $K \leq 1$ el número más grande para el cual $P(t)$ puede ser extendido a un camino continuo para $0 \leq t < K$ y que satisface $F(P(t)) = L(t), 0 \leq t < K$. Como F satisface la condición (L), denotamos $\lim_{t_i\to K} P(t_i) = z$. Por continuidad, tenemos lo siguiente

$$F(z) = F(\lim_{t_i\to K} P(t_i)) = \lim_{t_i\to K} F(P(t_i)) = \lim_{t_i\to K} L(t_i) = L(K)$$

con $K \leq 1$.

Sea W una vecindad de z en la cual F es un homeomorfismo. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $P(t_i) \in W$ para $i \geq N$. Además, como F es un homeomorfismo en W, y $L(K) \in F(W)$, entonces tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que $L(t) \in F(W)$, y así, existe un camino $Q(t)$ definido para $K - \delta < t < K + \delta$ tal que $Q(t_M) = P(t_M)$, donde M se escoje tal que $M \geq N$ y $K - \delta < t_M < K$ y $F(Q(t)) = L(t)$ para $K - \delta < t < K + \delta$. Por tanto, $P(t)$ puede extenderse a un camino continuo (el cual volveremos a llamar P(t)) en $0 \leq t < K + \delta$, donde

$P(0) = \overline{x}$ y $F(P(t)) = L(t), 0 \leq t < K + \delta$. Por la maximalidad de K, concluimos que $K = 1$ y por tanto F levanta caminos. Del Teorema 2.21, concluimos que (D, F) es un cubrimiento de $F(D)$. Sólo nos falta probar que $F(D) = Y$, en orden de poder aplicar el Lema 2.19, y así concluir que F es un homeomorfismo de D a Y. Entonces, sea $y_1 \in Y$, y escojamos un $y_2 \in F(D)$ y sea $L(t) = (1-t)y_2 + ty_1$ con $0 \leq t \leq 1$. Si recordamos los pasos de la primera parte de nuestra demostración. podemos encontrar un camino $P(t)$ con $0 \leq t \leq 1$, tal que $F(P(t)) = L(t)$ en $0 \leq t \leq 1$. En particular $F(P(1)) = L(1) = y_1$, y así $F(D) = Y$.

□

Definición 2.23. *Un mapa continuo F entre dos espacios topológicos X e Y es propio si y sólo si $F^{-1}(C)$ es un conjunto compacto en X cuando C es un conjunto compacto en Y.*

Teorema 2.24. *[22, Teorema 2.2] Sean X e Y espacios de Banach y $F : X \to Y$. Entonces F es un homeomorfismo de X sobre Y si y sólo si F es un homeomorfismo local y un mapa propio.*

Demostración. Si F es un homeomorfismo, entonces F^{-1} es continua y así $F^{-1}(C)$ es un conjunto compacto cuando C es un conjunto compacto. Por tanto, es un mapa propio.

Por otro lado, supongamos que F es un homeomorfismo local y un mapa propio. En virtud del Teorema 2.22, es suficientte demostrar que F satisface la condición (L) para concluir que F es un homeomorfismo. Entonces, sea $P(t)$ un camino definido en $0 \leq t < b$ que satisface $F(P(t)) = L(t)$ para $0 \leq t < b$ donde $L(t)$ es una recta en Y. Sea $\{t_i\}_i$ una sucesión tal que $t_i \to b$ cuando $i \to \infty$. Como $S = \{L(t)\}_{0 \leq t \leq 1}$ es compacto, también lo es $F^{-1}(S)$ y además contiene a la sucesión $P(t_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, existe una subsucesión $\{t_{i_n}\}$ la cual $t_{i_n} \to b$ cuando $n \to \infty$. tal que $\lim_{n\to\infty} P(t_{i_n})$ existe y está en X. Así, F satisface la condición (L), y concluimos por el Teorema 2.22 que F es un homeomorfismo de X sobre Y. □

Corolario 2.25. *[22, Corolario 2.1] Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un homeomorfismo local. Tenemos que F es un difeomorfismo si y sólo si $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y F satisface*

I) $\det F'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$

II) $|F(x)| \to \infty$ *cuando* $|x| \to +\infty$.

Demostración. Si F es un difeomorfismo, entonces al aplicar la regla de la cadena podemos comprobar que $F'(x)$ es invertible y por tanto $\det F'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Además, comprobar que F satisface la condición ii) es equivalente a demostrar que F es un mapa propio cuando F es al menos un homeomorfismo local. Comprobemos que ambas condiciones son equivalentes. Decir que F satisface la condición ii) cuando es un homeomorfismo local, es equivalente a decir que satisface la condición que cuando B es un conjunto acotado entonces $F^{-1}(B)$ es un conjunto acotado. Esto, además, es equivalente a que un mapa continuo entre espacios de Banach de dimensión finita sea propio. Por tanto, como F es un difeomormismo sobre $\mathbb{R}^n$, en particular es un mapa propio, por tanto satisface ambas condiciones.

Por otro lado, si $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $\det F'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces por el Teorema de la función inversa, existe una función $F^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la cual es la inversa de F, donde F^{-1} es diferenciable, es decir, $\det(F^{-1})'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por el Teorema 2.24 obtenemos que F es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. $\square$

Capítulo 3

Equivalencia Topológica en $\mathbb{R}^+$

En [19] K.J. Palmer introdujo el concepto de equivalencia topológica entre los sistemas (2.1) y (2.2). A grandes rasgos, existe un homeomorfismo que lleva soluciones de un sistema lineal a un sistema no lineal y viceversa. Más adelante, F. Lin en [17] presentó una definición más débil de este concepto de equivalencia topológica, la cual se exhibe en este trabajo. A traves de este capítulo, vamos a considerar $J \subseteq \mathbb{R}^+$.

Definición 3.1. *Los sistemas (2.1) y (2.2) son $\mathbb{R}^+$-topológicamente equivalentes si existe una función $H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con las siguientes propiedades*

i) *Si $x(t)$ es una solución de (2.1), entonces $H[t, x(t)]$ es una solución de (2.2);*

ii) *$H(t, x) \to H(t, x_0)$ cuando $x \to x_0$, uniformemente con respecto a t;*

iii) *$|H(t, x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$, uniformemente con respecto a t;*

iv) *Para cada $\tau \in \mathbb{R}^+$ fijo, $u \mapsto H(\tau, u)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$.*

Además, la función $G(\tau, u) = H^{-1}(\tau, u)$ verifica las condiciones ii), iii) y iv) y mapea soluciones de (2.2) en (2.1).

Durante este capítulo, se considerarán las siguientes hipótesis:

(H1) El sistema (2.1) es uniformemente asintóticamente estable, es decir, existen constantes $K \geq 1$ y $\alpha > 0$ tal que su matriz de transición $\Phi(t, s)$ verifica

$$\|\Phi(t, s)\| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{para cualquier } t \geq s \geq 0.$$

(H2) La función f es continua en (t, y), y para cualquier $t \geq 0$ y para todo par $(y, \overline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, existe un $\gamma \geq 0$ tal que

$$|f(t, y) - f(t, \overline{y})| \leq \gamma |y - \overline{y}|.$$

(H3) Existe un $\mu \geq 0$ tal que $\sup_{t\geq 0} |f(t,0)| \leq \mu$, y f es acotada en t para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.

(H4) $|f(t,x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$, para cualquier $t \geq 0$ fijo.

En [3, Demostración Teorema 1] los autores construyen los mapas H y G de la definición previa dada por Palmer, sin embargo, tal construcción la realizaremos en $\mathbb{R}^+$ en vez de $\mathbb{R}$ como fue considerado por Palmer en su novedoso trabajo. Para esto, vamos a considerar los siguientes problemas de valor inicial

$$\begin{cases} w' = A(t)w - f(t, y(t,\tau,\eta)) \\ w(0) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

y

$$\begin{cases} z' = A(t)z + f(t, x(t,\tau,\xi) + z) \\ z(0) = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Usando la fórmula de variación de parámetros tenemos que

$$w^*(t;(\tau,\eta)) = -\int_0^t \Phi(t,s) f(s, y(s,\tau,\eta))ds$$

es la única solución de (3.1).

Sea $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ el espacio de Banach de las funciones continuas y acotadas con la norma del supremo. Ahora, para cualquier par $(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, definimos el operador $\Gamma_{(\tau,\xi)} : BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n) \to BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ de la siguiente manera

$$\phi \mapsto \Gamma_{(\tau,\xi)}\phi := \int_0^t \Phi(t,s) f(s, x(s,\tau,\xi) + \phi)ds.$$

Si suponemos que las constantes α, γ y K satisfacen $K\gamma/\alpha < 1$ es fácil ver por **(P1)-(P2)** que $\Gamma_{(\tau,\xi)}$ es una contracción. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} |\Gamma_{(\tau,\xi)}\phi - \Gamma_{(\tau,\xi)}\overline{\phi}| \leq & \int_0^t \|\Phi(t,s)\| |f(s, x(s,\tau,\xi) + \phi) - f(s, x(s,\tau,\xi) + \overline{\phi})|ds \\ \leq & \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}\gamma|\phi - \overline{\phi}|ds \\ \leq & |\phi - \overline{\phi}|K\gamma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}ds \\ = & |\phi - \overline{\phi}|\frac{K\gamma}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \\ \leq & \frac{K\gamma}{\alpha}|\phi - \overline{\phi}|, \end{aligned}$$

donde $\|\phi - \overline{\phi}\| = \sup_{t\geq 0} |\phi - \overline{\phi}|$.

Por el teorema del punto fijo de Banach, se sigue que

$$z^*(t;(\tau,\xi)) = \int_0^t \Phi(t,s)f(s,x(s,\tau,\xi) + z^*(s;(\tau,\xi)))ds \tag{3.3}$$

es la única solución de (3.2).

Además, por la unicidad de las soluciones se puede probar que

$$z^*(t;(\tau,\xi)) = z^*(t;(r,x(r,\tau,\xi))) \quad \text{para cualquier } \; r \geq 0 \tag{3.4}$$

y

$$w^*(t;(\tau,\eta)) = w^*(t;(r,y(r,\tau,\eta))) \quad \text{para cualquier } \; r \geq 0 \tag{3.5}$$

Para cualquier $t \geq 0$ definimos los mapas $H(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $G(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} H(t,\xi) &:= \xi + \int_0^t \Phi(t,s)f(s,x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))ds \\ &= \xi + z^*(t;(t,\xi)), \end{aligned} \tag{3.6}$$

y

$$\begin{aligned} G(t,\eta) &:= \eta - \int_0^t \Phi(t,s)f(s,y(s,t,\eta))ds \\ &= \eta + w^*(t;(t,\eta)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Al usar (3.4), podemos verificar que

$$\begin{aligned} H[t,x(t,\tau,\xi)] &= x(t,\tau,\xi) + \int_0^t \Phi(t,s)f(s,x(s,t,x(t,\tau,\xi))) + z^*(s;(t,x(t,\tau,\xi))))ds \\ &= x(t,\tau,\xi) + \int_0^t \Phi(t,s)f(s,x(s,\tau,\xi)) + z^*(s;(t,x(t,\tau,\xi))))ds \\ &= x(t,\tau,\xi) + z^*(t;(\tau,\xi)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Por otro lado, de (3.5) podemos verificar directamente que

$$G[t,y(t,\tau,\eta)] = y(t,\tau,\eta) + w^*(t;(t,\eta)). \tag{3.9}$$

Vamos a utilizar, en el contexto de la Definición 3.1, las mismas funciones H y G previamente mencionadas, para poder establecer nuestros principales resultados. Sin embargo, previamente vamos a establecer algunos resultados en términos de $|z^*(t;(t,\xi))|$ y $|w^*(t;(t,\eta))|$, los cuales son considerados en la construcción de (3.6) y (3.7) respectivamente, tal que las funciones H y G puedan ser adaptadas a la definición de equivalencia topológica dada en la Definición 3.1.

Primero, podemos notar que el punto fijo $z^*(t;(t,\xi))$ se puede escribir como el límite uniforme en $\mathbb{R}^+$ de una sucesión $z_j^*(t;(t,\xi))$ definida recursivamente como se sigue:

$$\begin{cases} z_{j+1}^*(t;(t,\xi)) = \displaystyle\int_0^t \Phi(t,s)f(s,x(s,t,\xi)+z_j^*(s;(t,\xi)))ds \text{ para cualquier } j \geq 1, \\ z_0^*(t;(t,\xi)) = \displaystyle\int_0^t \Phi(t,s)f(s,x(s,t,\xi))ds. \end{cases} \tag{3.10}$$

Consideremos además, la siguiente hipótesis

(N) La solución del sistema (2.1) en conjunto con $z_j^*(s;(t,\xi))$ satisfacen para todo $j \in \mathbb{N}_0$,

$$|x(s,\tau,\xi)+z_j^*(s;(\tau,\xi))| \to \infty \text{ cuando } |\xi| \to \infty.$$

Lema 3.2. *Bajo las hipótesis* **(H1)-(H4)**, **(N)** *y considerando que $K\gamma < \alpha$, las soluciones de los sistemas (3.1) y (3.2) satisfacen, respectivamente*

i) $|z^*(t;(t,\xi))| \to +\infty$ *cuando* $|\xi| \to +\infty$, *uniformemente con respecto a* t,

ii) $|w^*(t;(t,\eta))| \to +\infty$ *cuando* $|\eta| \to +\infty$, *uniformemente con respecto a* t,

Demostración. Para i), demostraremos por inducción que para todo $j \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $|z_j^*(t;(t,\xi))| \to +\infty$ cuando $|\xi| \to +\infty$. De hecho, para $j=0$, por el Corolario (2.11) tenemos que $|x(s,t,\xi)| \to +\infty$ cuando $|\xi| \to +\infty$ para todo $t,s \in \mathbb{R}^+$; además, de la condición **(H4)**, $f(t,x)$ no es acotada en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, lo cual implica que $|z_0^*(t;(t,\xi))| \to +\infty$ cuando $|\xi| \to +\infty$.

Ahora, asumiremos la hipótesis inductiva, tal que para algún $n \in \mathbb{N}$ se satisface $|z_n^*(t;(t,\xi))| \to +\infty$ cuando $|\xi| \to +\infty$. Para el paso $n+1$, notemos que

$$z_{n+1}^*(t;(t,\xi)) = \int_0^t \Phi(t,s)f(s,x(s,t,\xi)+z_n^*(s;(t,\xi)))ds$$

Entonces, del hecho que $f(t,x)$ no es acotada en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ y de la hipótesis (**N**) podemos concluir que $|z_{n+1}^*(t;(t,\xi))| \to +\infty$ cuando $|\xi| \to +\infty$.

Solo nos falta mostrar que la solución $z^*(t;(t,\xi))$ tiene el mismo comportamiento que $z_j^*(t;(t,\xi))$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$ cuando $|\xi| \to +\infty$.

Vamos a demostrar esto por contradicción. Supongamos entonces que

$$\limsup_{k\to+\infty} |z^*(t;(\tau,\xi_k))| = L < +\infty,$$

donde $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^n$ tal que $|\xi_k| \to +\infty$ cuando $k \to \infty$.

De (3.3) tendríamos que $\limsup_{k\to\infty} |f(t, x_{\xi_k})| = C < +\infty$. Sin embargo, esto es una contradicción, ya que, de **(H4)** tenemos que $f(t,\cdot)$ no es acotada en $\mathbb{R}^n$.

Para probar ii), podemos ver que al usar **(H4)** y la Proposición 2.10, tenemos que $|y(t,s,\eta)| \to +\infty$ cuando $|\eta| \to +\infty$ para cualquier $t, s \in \mathbb{R}^+$, concluyendo así que $|f(s, y(s,\tau,\eta))| \to +\infty$ cuando $|\eta| \to +\infty$ para cualquier $s \in \mathbb{R}^+$. □

Lema 3.3. *Asuma que se cumplen las condiciones* ***(H1)-(H3)****, entonces para cualquier* $j \in \mathbb{N}_0$, $z_j^*(s;(t,\xi))$ *es acotado en* s *para cualquier* $\xi \in \mathbb{R}^n$*. Además, tenemos que*

$$
\begin{aligned}
|z_0^*(s;(t,\xi))| &\leq \frac{K}{\alpha}\{\gamma|x(\cdot,t,\xi)|_\infty + \mu\} < +\infty \text{ , y} \\
|z_j^*(s;(t,\xi))| &\leq \frac{K}{\alpha}\{\gamma|x(s,t,\xi) + z_{j-1}^*(s,t,\xi))|_\infty + \mu\} < +\infty, \text{ para } j \geq 1,
\end{aligned}
$$

donde $|x(\cdot,t,\xi)|_\infty = \sup\limits_{s\in\mathbb{R}^+} |x(s,t,\xi)|$.

Demostración. Sabemos que z_j^* está definida por (3.10). Por tanto, vamos a demostrar por inducción sobre j que z_j^* es acotada para cualquier $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Para $j = 0$, como tenemos **(H1)-(H3)**, se sigue que

$$
\begin{aligned}
|z_0^*(s;(t,\xi))| &\leq \int_0^s Ke^{-\alpha(s-r)}|f(r, x(r,t,\xi))|dr \\
&\leq \int_0^s Ke^{-\alpha(s-r)}\{\gamma|x(r,t,\xi)| + \mu\}dr \\
&\leq \int_0^s K\gamma e^{-\alpha(s-r)}|x(r,t,\xi)|ds + \int_0^s Ke^{-\alpha(s-r)}\mu ds \\
&\leq \int_0^t K\gamma e^{-\alpha(s-r)}|x(r,t,\xi)|ds + \frac{K\mu}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Como $x(s,t,\xi)$ es solución de (2.1), entonces es acotada en $s \in \mathbb{R}^+$, por tanto $|x(\cdot,t,\xi)|_\infty < +\infty$, lo cual implica que

$$
\begin{aligned}
|z_0^*(s;(t,\xi))| &\leq K\gamma|x(\cdot,t,\xi)|_\infty \int_0^s e^{-\alpha(s-r)}dr + \frac{K\mu}{\alpha} \\
&\leq \frac{K}{\alpha}\{\gamma|x(\cdot,t,\xi)|_\infty + \mu\} < +\infty.
\end{aligned}
$$

De esto, tenemos que $|z_0^*(s;(t,\xi))| < +\infty$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$.

Ahora, vamos a asumir la hipótesis inductiva, esto es, para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|z_n^*(s;(t,\xi))|$ es acotada en $s \in \mathbb{R}^+$. Para el paso $n+1$, como tenemos **(H1)-(H3)**, se sigue que

$$
\begin{aligned}
|z_{n+1}^*(s;(t,\xi))| &\leq \int_0^s Ke^{-\alpha(s-r)}|f(r,x(r,t,\xi)+z_n^*(r;(t,\xi))|dr \\
&\leq \int_0^s Ke^{-\alpha(s-r)}\{\gamma|x(r,t,\xi)+z_n^*(r;(t,\xi))|+\mu\}dr.
\end{aligned}
$$

Por hipótesis de inducción se tiene que $|z_n^*(\cdot,t,\xi))|_\infty < +\infty$, por tanto $|x(\cdot,t,\xi)+z_n^*(\cdot,t,\xi))|_\infty < +\infty$. Finalmente, obtenemos lo siguiente

$$
|z_{n+1}^*(s;(t,\xi))| \leq \frac{K}{\alpha}\{\gamma|x(\cdot,t,\xi)+z_n^*(\cdot,t,\xi))|_\infty+\mu\} < +\infty.
$$

Entonces podemos concluir que $|z_j^*(\cdot;(t,\xi))|_\infty < +\infty$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}^+$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Lema 3.4. *Asuma que se cumplen las condiciones* ***(H1)-(H2)****, entonces para cualquier $j \in \mathbb{N}_0$, $z_j^*(t;(t,\xi))$ es uniformemente continua con respecto a ξ.*

Demostración. La demostración la realizaremos por inducción. Antes de esto, introduciremos la siguiente función auxiliar $\theta_0(t) : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definida por:

$$
\theta_0(t) = \begin{cases} K\gamma t & \text{si } \alpha = M \\ K\gamma\left(\dfrac{e^{(M-\alpha)t}-1}{M-\alpha}\right) & \text{si } \alpha < M. \end{cases}
$$

Ahora, dado un $\varepsilon > 0$, definimos las siguientes constantes

$$
L^*(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{2\gamma\omega K}{\alpha\varepsilon}\right) \quad \text{y} \quad \Theta_0^* = \max_{t\in[0,L^*(\varepsilon)]}\theta_0(t)
$$

donde $\omega = \omega_\xi + \omega_{\overline{\xi}}$ con $\omega_\xi = \sup_{s\in\mathbb{R}^+}|x(s,t,\xi)+z_j^*(s;(t,\xi))|$.

Vamos a distinguir los casos $t \in [0,L^*(\varepsilon)]$ y $t > L^*(\varepsilon)$, además vamos a usar la siguiente notación

$$
\Delta_j(t,\xi,\overline{\xi}) = z_j^*(t;(t,\xi)) - z_j^*(t;(t,\overline{\xi})).
$$

Primero, para $j=0$ y $t\in[0,L^*(\varepsilon)]$, al utilizar (2.3) junto con **(H1)-(H2)** y la segunda desigualdad en (2.12), podemos verificar que

$$\begin{aligned}|\Delta_0(t,\xi,\bar{\xi})| &\leq K\gamma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}|x(s,t,\xi)-x(s,t,\bar{\xi})|ds\\ &\leq K\gamma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}|\xi-\bar{\xi}|e^{M(t-s)}ds\\ &\leq K\gamma\left\{\frac{e^{(M-\alpha)t}-1}{M-\alpha}\right\}|\xi-\bar{\xi}|\\ &\leq \Theta_0^*|\xi-\bar{\xi}|.\end{aligned}$$

Por otro lado, cuando $t>L^*(\varepsilon)$, de las condiciones **(H1)-(H2)** tenemos

$$\begin{aligned}|\Delta_0(t,\xi,\bar{\xi})| \leq{}& K\gamma e^{-\alpha t}\int_0^{t-L^*} e^{\alpha s}\{|x(s,t,\xi)|+|x(s,t,\bar{\xi})|\}ds\\ &+K\gamma\int_{t-L^*}^t e^{-\alpha(t-s)}\{|x(s,t,\xi)-x(s,t,\bar{\xi})|\}ds\\ \leq{}& K\gamma e^{-\alpha t}\int_0^{t-L^*} e^{\alpha s}\omega ds+K\gamma e^{-\alpha t}\int_{t-L^*}^t e^{\alpha s}\{|x(s,t,\xi)-x(s,t,\bar{\xi})|\}ds.\end{aligned}$$

De (2.3) junto con $u=t-s$ y la segunda desigualdad en (2.12), se sigue que

$$\begin{aligned}|\Delta_0(t,\xi,\bar{\xi})| &\leq \frac{K\gamma\omega}{\alpha}e^{-\alpha L^*}+K\gamma\int_0^{L^*} e^{-\alpha u}\{|x(t-u,t,\xi)-x(t-u,t,\bar{\xi})|\}du\\ &\leq \frac{K\gamma\omega}{\alpha}e^{-\alpha L^*}+K\gamma\int_0^{L^*}|\xi-\bar{\xi}|e^{(M-\alpha)u}du\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+K\gamma|\xi-\bar{\xi}|\left\{\frac{e^{(M-\alpha)L^*}-1}{M-\alpha}\right\}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}+\Theta_0^*|\xi-\bar{\xi}|.\end{aligned}$$

En segundo lugar, vamos a asumir la hipótesis inductiva

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta_j(\varepsilon)>0 \text{ s.t. } |\xi-\bar{\xi}|<\delta_j(\varepsilon)\implies |z_j^*(t;(t,\xi))-z_j^*(t;(t,\bar{\xi}))|<\varepsilon \quad \text{for any } t\geq 0.$$

Para el paso $j+1$, al igual que en el caso anterior, vamos a distinguir los casos $t\in[0,L^*(\varepsilon)]$ y $t>L^*(\varepsilon)$. Entonces, cuando $t\in[0,L^*(\varepsilon)]$ y para un $\varepsilon>0$ dado, usando la segunda desigualdad en (2.12) y **(H1)-(H2)**, podemos verificar que

$$
\begin{aligned}
|\Delta_{j+1}(t,\xi,\overline{\xi})| &\le K\gamma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\{|x(s,t,\xi)-x(s,t,\overline{\xi})|+|\Delta_j(s,\xi,\overline{\xi})|\}ds\\
&\le K\gamma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\{|\xi-\overline{\xi}|e^{M(t-s)}+|\Delta_j(\cdot,\xi,\overline{\xi})|_\infty\}ds\\
&\le K\gamma\left\{\frac{e^{(M-\alpha)t}-1}{M-\alpha}\right\}|\xi-\overline{\xi}|+\frac{K\gamma}{\alpha}|\Delta_j(\cdot,\xi,\overline{\xi})|_\infty\\
&\le \Theta_0^*|\xi-\overline{\xi}|+\frac{K\gamma}{\alpha}|\Delta_j(\cdot,\xi,\overline{\xi})|_\infty
\end{aligned}
$$

donde $|\Delta_j(\cdot,\xi,\overline{\xi})|_\infty=\sup\limits_{t\ge 0}|\Delta_j(t,\xi,\overline{\xi})|$.

Por otro lado, cuando $t>L^*(\varepsilon)$, usamos (2.3), y la propiedad Lipschitz de f para deducir que

$$
\begin{aligned}
|\Delta_{j+1}(t,\xi,\overline{\xi})| \le K\gamma&\int_0^{t-L^*} e^{-\alpha(t-s)}\{|x(s,t,\xi)+z_j^*(s;(t,\xi))|+|x(s,t,\overline{\xi})+z_j^*(s;(t,\overline{\xi}))|\}ds\\
&+K\gamma\int_{t-L^*}^t e^{-\alpha(t-s)}\{|x(s,t,\xi)-x(s,t,\overline{\xi})|+|\Delta_j(s,\xi,\overline{\xi})|\}ds.
\end{aligned}
$$

Por el Lema 3.3 sabemos que para cualquier $j\in\mathbb{N}_0,\ z_j^*(s;(t,\xi))$ es acotada en s para cualquier $\xi\in\mathbb{R}^n$, este hecho junto con el cambio de variable $u=t-s$ y la segunda desigualdad en (2.12), tenemos que

$$
\begin{aligned}
|\Delta_{j+1}(t,\xi,\overline{\xi})| &\le K\gamma\int_0^{t-L^*} e^{-\alpha(t-s)}\omega ds+K\gamma\int_0^{L^*} e^{-\alpha u}|x(t-u,t,\xi)-x(t-u,t,\overline{\xi})|du\\
&\quad +K\gamma\int_0^{L^*} e^{-\alpha u}|\Delta_j(\cdot,\xi,\overline{\xi})|_\infty du\\
&\le \frac{K\gamma\omega}{\alpha}(e^{-\alpha L^*}-e^{-\alpha t})+K\gamma|\xi-\overline{\xi}|\int_0^{L^*} e^{(M-\alpha)u}du+\frac{K\gamma}{\alpha}(1-e^{-\alpha L^*})|\Delta_j(\cdot,\xi,\overline{\xi})|_\infty\\
&\le \frac{K\gamma\omega}{\alpha}e^{-\alpha L^*}+K\gamma|\xi-\overline{\xi}|\left\{\frac{e^{(M-\alpha)L^*}-1}{M-\alpha}\right\}+\frac{K\gamma}{\alpha}|\Delta_j(\cdot,\xi,\overline{\xi})|_\infty\\
&\le \frac{\varepsilon}{2}+\Theta_0^*|\xi-\overline{\xi}|+\frac{K\gamma}{\alpha}|\Delta_j(\cdot,\xi,\overline{\xi})|_\infty.
\end{aligned}
$$

Resumiendo, para cualquier $t\ge 0$ se sigue que

$$
|\Delta_{j+1}(t,\xi,\overline{\xi})|\le\begin{cases}\Theta_0^*|\xi-\overline{\xi}|+|\Delta_j(\cdot,\xi,\overline{\xi})|_\infty & \text{si } \ t\in[0,L^*]\\[4pt] \dfrac{\varepsilon}{2}+\Theta_0^*|\xi-\overline{\xi}|+\dfrac{K\gamma}{\alpha}|\Delta_j(\cdot,\xi,\overline{\xi})|_\infty & \text{si } \ t\ge L^*.\end{cases}
$$

Ahora, para cualquier $\varepsilon>0$, existen $L^*(\varepsilon)>0$, $\Theta_0^*>0$ y

$$\delta_{j+1}(\varepsilon) = \text{mín}\left\{\delta_j(\varepsilon/2), \frac{\varepsilon}{2\Theta_0^*}\left(1 - \frac{K\gamma}{\alpha}\right)\right\}$$

tal que para cualquier $t \geq 0$, tenemos

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta_{j+1}(\varepsilon) > 0 \text{ t.q. } |\xi - \bar{\xi}| < \delta_{j+1} \implies |z_{j+1}^*(t;(t,\xi)) - z_{j+1}^*(t;(t,\bar{\xi}))| < \varepsilon.$$

y la continuidad uniforme de $\xi \mapsto z_j^*(t;(t,\xi))$ se sigue para cualquier $j \in \mathbb{N}_0$. □

Como ya hemos establecido las premisas, ahora podemos presentar el resultado principal de este capítulo, el cual proporciona una condición suficiente para asegurar que los sistemas (2.1) y (2.2) sean $\mathbb{R}^+$- topológicamente equivalentes.

Teorema 3.5. *Asuma que se cumplen* **(H1)-(H4)***, y además se tiene que $K\gamma < \alpha$, entonces los sistemas (2.1) y (2.2) son $\mathbb{R}^+$- topológicamente equivalentes.*

Demostración. Vamos a probar que los mapas H y G construidos en (3.6) y (3.7) respectivamente, cumplen las condiciones de la Definición (3.1). Para i), de (2.1) y (3.2), en conjunto con (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H[t,x(t,\tau,\xi)] &= \frac{\partial}{\partial t}x(t,\tau,\xi) + \frac{\partial}{\partial t}z^*(t;(\tau,\xi)) \\ &= A(t)x(t,\tau,\xi) + A(t)z^*(t;(\tau,\xi)) + f(t,H[t,x(t,\tau\xi)]) \\ &= A(t)H[t,x(t,\tau,\xi)] + f(t,H[t,x(t,\tau,\xi)]),\end{aligned}$$

entonces $t \to H[t,x(t,\tau,\xi)]$ es solución de (2.2) la cual pasa por $H(\tau,\xi)$ en $t = \tau$. Como consecuencia de la unicidad de las soluciones, obtenemos

$$H[t,x(t,\tau,\xi)] = y(t,\tau,H(\tau,\xi)).$$

Similarmente, podemos probar que $t \to G[t,y(t,\tau,\eta)]$ es solución de (2.1). En efecto, derivando (3.9) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}G[t,y(t,\tau,\eta)] =& \frac{\partial}{\partial t}y(t,\tau,\eta) + \frac{\partial}{\partial t}w^*(t;(\tau,\eta)) \\ =& A(t)y(t,\tau,\eta) + f(t,y(t,\tau,\eta)) + A(t)w^*(t;(\tau,\eta)) - f(t,y(t,\tau,\eta)) \\ =& A(t)[y(t,\tau,\eta) + w^*(t;(\tau,\eta))] \\ =& A(t)G[t,y(t,\tau,\eta)]\end{aligned}$$

entonces $t \mapsto G[t, y(t,\tau,\eta)]$ es solución de (2.1) la cual pasa por $G(\tau,\eta)$ en $t=\tau$ y además se tiene

$$G[t, y(t,\tau,\eta)] = x(t,\tau,G(\tau,\eta)) = \Phi(t,\tau)G(\tau,\eta),$$

y con esto, se tiene la propiedad $i)$.

Para mostrar ii), es decir, que H y G son uniformemente continuas con respecto a ξ para cualquier $t \geq 0$, vamos a construir una función auxiliar $\theta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definida por

$$\theta(t) = 1 + K\gamma\left(\frac{e^{(M+\gamma-\alpha)t}-1}{M+\gamma-\alpha}\right).$$

Ahora, dado un $\varepsilon > 0$, definimos las siguientes constantes

$$L(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{2\gamma\beta K}{\alpha\varepsilon}\right) \quad \text{y} \quad \theta^* = \max_{t\in[0,L(\varepsilon)]}\theta(t)$$

donde $\beta = \beta_1+\beta_2$ con $\beta_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}|y(t,\tau,\eta)|$, $\beta_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}|y(t,\tau,\overline{\eta})|$; los cuales están bien definidos por la Observación 2.7.

Probaremos la continuidad de G considerando dos casos:

Caso i): $t \in [0, L(\varepsilon)]$. Por **(H1)** y **(H2)** podemos deducir que

$$|G(t,\eta) - G(t,\overline{\eta})| \leq |\eta-\overline{\eta}| + K\gamma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}|y(s,t,\eta)-y(s,t,\overline{\eta})|ds. \tag{3.11}$$

Por **(H2)** y (2.3) obtenemos para cualquier $0 \leq s \leq t$:

$$\begin{aligned}|y(s,t,\eta)-y(s,t,\overline{\eta})| &\leq |\eta-\overline{\eta}| + \int_s^t \|A(r)\||y(r,t,\eta)-y(r,t,\overline{\eta})|dr \\ &\quad + \int_s^t |f(r,y(r,t,\eta))-f(r,y(r,t,\overline{\eta}))|dr \\ &\leq |\eta-\overline{\eta}| + (M+\gamma)\int_s^t |y(r,t,\eta)-y(r,t,\overline{\eta})|dr.\end{aligned}$$

Por el Lema 2.8, concluimos que para cualquier $0 \leq s \leq t$ se tiene:

$$|y(s,t,\eta)-y(s,t,\overline{\eta})| \leq |\eta-\overline{\eta}|e^{(M+\gamma)(t-s)}. \tag{3.12}$$

Así, usando (3.12) en (3.11), obtenemos

$$
\begin{aligned}
|G(t,\eta)-G(t,\overline{\eta})| &\leq \left(1+K\gamma e^{(M+\gamma-\alpha)t}\int_0^t e^{-(M+\gamma-\alpha)s}ds\right)|\eta-\overline{\eta}| \\
&= \left(1+K\gamma\left\{\frac{e^{(M+\gamma-\alpha)t}-1}{M+\gamma-\alpha}\right\}\right)|\eta-\overline{\eta}| \\
&\leq \theta(t)|\eta-\overline{\eta}| \\
&\leq \theta^{*}|\eta-\overline{\eta}|.
\end{aligned}
$$

Caso ii) $t > L(\varepsilon)$. Por **(H1)** y **(H2)** tenemos,

$$
\begin{aligned}
|G(t,\eta)-G(t,\overline{\eta})| \leq\ & |\eta-\overline{\eta}| + \int_0^{t-L} Ke^{-\alpha(t-s)}|f(s,y(s,t,\eta))-f(s,y(s,t,\overline{\eta}))|ds \\
& + \int_{t-L}^{t} Ke^{-\alpha(t-s)}|f(s,y(s,t,\eta))-f(s,y(s,t,\overline{\eta}))|ds \\
\leq\ & |\eta-\overline{\eta}| + \int_0^{t-L} K\gamma e^{-\alpha(t-s)}\{|y(s,t,\eta)|+|y(s,t,\overline{\eta})\}ds \\
& + \int_{t-L}^{t} K\gamma e^{-\alpha(t-s)}|y(s,t,\eta)-y(s,t,\overline{\eta})|ds \\
\leq\ & |\eta-\overline{\eta}| + K\gamma\beta\int_0^{t-L} e^{-\alpha(t-s)}ds \\
& + \int_{t-L}^{t} K\gamma e^{-\alpha(t-s)}|y(s,t,\eta)-y(s,t,\overline{\eta})|ds \\
=\ & |\eta-\overline{\eta}| + K\gamma\beta\int_0^{t-L} e^{-\alpha(t-s)}ds \\
& + \int_0^{L} K\gamma e^{-\alpha u}|y(t-u,t,\eta)-y(t-u,t,\overline{\eta})|du.
\end{aligned}
$$

Como en el caso i), la desigualdad (3.12) implica

$$
\begin{aligned}
K\gamma\int_0^L e^{-\alpha u}|y(t-u,t,\eta)-y(t-u,t,\overline{\eta})|du &\leq K\gamma\int_0^L e^{(M+\gamma-\alpha)u}|\eta-\overline{\eta}|du \\
&= K\gamma\left\{\frac{e^{(M+\gamma-\alpha)L}-1}{M+\gamma-\alpha}\right\}|\eta-\overline{\eta}|.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
|G(t,\eta)-G(t,\overline{\eta})| &\leq \left(1+K\gamma\left\{\frac{e^{(M+\gamma-\alpha)L}-1}{M+\gamma-\alpha}\right\}\right)|\eta-\overline{\eta}| + \frac{K\gamma\beta}{\alpha}e^{-\alpha L} \\
&\leq \theta^{*}|\eta-\overline{\eta}| + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Resumiendo, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $L(\varepsilon) > 0$ y θ^* tal que :

$$|G(t,\eta) - G(t,\bar{\eta})| \leq \begin{cases} \theta^*|\eta - \bar{\eta}| & \text{si} \quad t \in [0, L] \\ \\ \theta^*|\eta - \bar{\eta}| + \dfrac{\varepsilon}{2} & \text{si} \quad t > L. \end{cases}$$

Entonces se sigue que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists\, \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\theta^*} \text{ tal que } |\eta - \overline{\eta}| < \delta \implies |G(t,\eta) - G(t,\overline{\eta})| < \varepsilon$$

y la continuidad uniforme de G se sigue.

Ahora, probaremos que H es uniformemente continuo para cualquier $t \geq 0$, pero como la identidad es uniformemente continua, solamente probaremos que $\xi \mapsto z^*(t;(t,\xi))$ es uniformemente continua.

Anteriormente pudimos notar que el punto fijo $z^*(t;(t,\xi))$ puede ser escrito como el límite uniforme en $\mathbb{R}^+$ de la sucesión $z_j^*(t;(t,\xi))$ definida en (3.10), entonces la continuidad uniforme de cada mapa $\xi \mapsto z_j^*(t;(t,\xi))$ se sigue del Lema 3.4.

Solo nos basta comprobar que $z^*(t;(t,\xi)$ es uniformemente continua. Para esto, escogemos $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $j > N$ fijo, se sigue que

$$|z^*(\cdot;(\cdot,\xi)) - z_j^*(\cdot;(\cdot,\xi))|_\infty < \varepsilon \qquad \text{para cualquier } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

y por tanto, si $|\xi - \overline{\xi}| < \delta_j$ con $j > N$, es cierto que

$$\begin{aligned} |z^*(t;(t,\xi)) - z^*(t;(t,\overline{\xi}))| \leq & |z^*(t;(t,\xi)) - z_j^*(t;(t,\xi))| + \Delta_j(t,\xi,\overline{\xi}) \\ & |z^*(t;(t,\overline{\xi})) - z^*(t;(t,\overline{\xi}))| < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

y la continuidad uniforme de $\xi \mapsto z^*(t;(t,\xi))$ y $\xi \mapsto H(t,\xi)$ se sigue para cualquier $t \geq 0$ fijo.

Con el fin de demostrar iii) de la Definición (3.1), mostraremos que $|H(t,\xi)| \to +\infty$ cuando $|\xi| \to +\infty$. Por el ítem i) del Lema (3.2) tenemos que $|z^*(t;(t,\xi))| \to +\infty$ cuando $|\xi| \to +\infty$. Por lo tanto, podemos concluir que $|H(t,\xi)| \to +\infty$ cuando $|\xi| \to +\infty$. Similarmente, se puede comprobar que $|G(t,\eta)| \to +\infty$ cuando $|\eta| \to +\infty$ debido al ítem ii) del Lema (3.2).

Por último, vamos a demostrar que H es biyectivo para todo $t \geq 0$. Primero mostraremos que $H(t, G(t,\eta)) = \eta$, para cualquier $t \geq 0$.

En efecto,

$$\begin{aligned}H[t,G[t,y(t,\tau,\eta)]] =&G[t,y(t,\tau,\eta)]\\&+\int_0^t \Phi(t,s)f(s,x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)])+z^*(s;(t,G[t,y(t,\tau,\eta)])))ds\\=&y(t,\tau,\eta)-\int_0^t \Phi(t,s)f(s,y(s,t,y(t,\tau,\eta)))ds\\&+\int_0^t \Phi(t,s)f(s,x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)])+z^*(s;(t,G[t,y(t,\tau,\eta)])))ds\\=&y(t,\tau,\eta)-\int_0^t \Phi(t,s)f(s,y(s,\tau,\eta))ds\\&+\int_0^t \Phi(t,s)f(s,x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)])+z^*(s;(t,G[t,y(t,\tau,\eta)])))ds.\end{aligned}$$

Sea $\omega(t)=|H[t,G[t,y(t,\tau,\eta)]]-y(t,\tau,\eta)|$. Por lo tanto, al usar **(H1)** y **(H2)** tenemos que

$$\begin{aligned}\omega(t)=&\left|\int_0^t \Phi(t,s)\{f(s,x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)])+z^*(s;(t,G[t,y(t,\tau,\eta)])))-f(s,y(s,\tau,\eta))\}ds\right|\\\leq& K\gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}|\{x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)])+z^*(s;(t,G[t,y(t,\tau,\eta)]))-y(s,\tau,\eta)\}|ds.\end{aligned}$$

Notemos que

$$x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)])+z^*(s;(t,G[t,y(t,\tau,\eta)]))=H[s,x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)])],$$

y recordando que

$$x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)])=x(s,t,x(t,\tau,G(\tau,\eta)))=x(s,\tau,G(\tau,\eta))=G[s,y(s,\tau,\eta)],$$

podemos ver

$$H[s,x(s,t,G[t,y(t,\tau,\eta)])]=H[s,G[s,y(s,\tau,\eta)]].$$

Por tanto, obtenemos

$$\omega(t)\leq K\gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\omega(s)ds\leq\frac{K\gamma}{\alpha}\sup_{s\in\mathbb{R}^+}\{\omega(s)\},\qquad \text{para todo }\ t\geq 0.$$

El supremo está bien definido por la propiedad i) de la Definición 3.1 y el hecho que todas las soluciones de los sitemas (2.1) y (2.2) son acotadas en $\mathbb{R}^+$. Ahora, tomamos el supremo en el lado izquierdo de la desigualdad anterior, y dado que $K\gamma<\alpha$ se sigue que $\omega(t)=0$ para cualquier $t\geq 0$. En particular, cuando tomamos $t=\tau$ obtenemos $H(\tau,G(\tau,\eta))=\eta$.

En lo que sigue, probaremos que $G(t, H(t, \xi)) = \xi$. En efecto, debido a que $H[t, x(t, \tau, \xi)] = y(t, \tau, H(\tau, \xi))$, tenemos

$$\begin{aligned}
G[t, H[t, x(t, \tau, \xi)]] =& H[t, x(t, \tau, \xi)] - \int_0^t \Phi(t, s) f(s, y(s, t, H[t, x(t, \tau, \xi)]))ds \\
=& H[t, x(t, \tau, \xi)] - \int_0^t \Phi(t, s) f(s, y(s, t, y(t, \tau, H(\tau, \xi))))ds \\
=& H[t, x(t, \tau, \xi)] - \int_0^t \Phi(t, s) f(s, y(s, \tau, H(\tau, \xi)))ds \\
=& x(t, \tau, \xi) + \int_0^t \Phi(t, s) f(s, x(s, t, \xi) + z^*(s; (t, \xi)))ds \\
& - \int_0^t \Phi(t, s) f(s, y(s, \tau, H(\tau, \xi)))ds.
\end{aligned}$$

Como sabemos que $H[t, x(t, \tau, \xi)] = x(t, \tau, \xi) + z^*(t; (\tau, \xi))$, de lo anterior obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
G[t, H[t, x(t, \tau, \xi)]] =& x(t, \tau, \xi) + \int_0^t \Phi(t, s) f(s, H[s, x(s, \tau, \xi)])ds - \int_0^t \Phi(t, s) f(s, y(s, \tau, H(\tau, \xi)))ds \\
=& x(t, \tau, \xi) + \int_0^t \Phi(t, s) f(s, y(s, \tau, H(\tau, \xi)))ds - \int_0^t \Phi(t, s) f(s, y(s, \tau, H(\tau, \xi)))ds \\
=& x(t, \tau, \xi).
\end{aligned}$$

Y tomando $t = \tau$ llegamos a $G(\tau, H(\tau, \xi)) = \xi$. Por tanto, para cualquier $t \geq 0$, H es una biyección y G es su inversa. □

Observación 3.6. *La demostración del Teorema 3.5 sigue las ideas de [3, Teorema 2.1]. Este último resultado, por un lado, considera una definición de $\mathbb{R}^+$-equivalencia topológica más fuerte que la Definición 3.1, sin embargo, por otro lado, y de forma compensatoria, se utiliza que $|f(t, y)| \leq \mu$ para cualquier $t \geq 0$, mientras que en esta tesis solo tenemos que $|f(t, 0)| \leq \mu$ para cualquier $t \geq 0$. Estos hechos establecen un contraste entre ambas perspectivas, destacando que la demostración del Teorema 3.5 posee detalles técnicos mas sutiles que [3, Teorema 2.1]. En efecto, el papel que cumple que $(t, y) \mapsto f(t, y)$ sea no acotada es difícil de manejar para demostrar que $|H(t, \xi)| \to +\infty$ cuando $|\xi| \to +\infty$ y que $|G(t, \eta)| \to +\infty$ cuando $|\eta| \to +\infty$.*

Capítulo 4

Continuidad de la Equivalencia Topológica

En este capítulo, se trabajará con la continuidad en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ de los mapas H y G construidos en la sección previa. Con el fin de formalizar este hecho, vamos a enunciar la definición de $\mathbb{R}^+$-continuamente topológicamente equivalente introducida en [3], pero adaptada al contexto de esta tesis.

Definición 4.1. *Los sistemas (2.1) y (2.2) son $\mathbb{R}^+$-continuamente topológicamente equivalentes si existe una función $H : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con las siguientes propiedades*

I) *Si $x(t)$ es una solución de (2.1), entonces $H[t, x(t)]$ es una solución de (2.2);*

II) *$H(t, x) \to H(t, x_0)$ cuando $x \to x_0$, uniformemente con respecto a t;*

III) *$|H(t, x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$, uniformemente con respecto a t;*

IV) *Para cada $t \in \mathbb{R}^+$ fijo, $u \mapsto H(t, u)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$;*

V) *H es continuo en cualquier $(t, u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.*

Además, la función $G(t, u) = H^{-1}(t, u)$ posee las propiedades ii)-v) y mapea soluciones de (2.2) a las soluciones de (2.1).

Durante este capítulo, se van a considerar las siguientes hipótesis:

(H1) El sistema (2.1) es uniformemente asintóticamente estable, es decir, existen constantes $K \geq 1$ y $\alpha > 0$ tal que su matriz de transición $\Phi(t, s)$ verifica

$$\|\Phi(t, s)\| \leq K e^{-\alpha(t-s)} \quad \text{para cualquier } t \geq s \geq 0.$$

(H2) La función f es continua en (t, y), y para cualquier $t \geq 0$ y para todo par $(y, \overline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, existe un $\gamma \geq 0$ tal que

$$|f(t, y) - f(t, \overline{y})| \leq \gamma |y - \overline{y}|.$$

(H3) Existe un $\mu \geq 0$ tal que $\sup_{t \geq 0} |f(t, 0)| \leq \mu$, y f es acotada en t para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.

(H4) $|f(t, x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$, para cualquier $t \geq 0$ fijo.

El siguiente resultado, el cual es el principal de esta sección, establece que las funciones $H(t, x)$ y $G(t, x)$ de la Definición 3.1, tienen la propiedad de ser funciones continuas en $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.2. *Asuma que se cumplen las condiciones* **(H1)–(H4)** *y además se tiene que $K\gamma < \alpha$, entonces los sistemas (2.1) y (2.2) son $\mathbb{R}^+$-continuamente topológicamente equivalentes.*

Demostración. Por el Teorema 3.5, sabemos que (2.1) y (2.2) son $\mathbb{R}^+$-topológicamente equivalentes.

Por otro lado, al usar la continuidad de las soluciones con respecto al tiempo inicial y condiciones iniciales dado por el Teorema 2.15, notamos que para cualquier $\varepsilon_1 > 0$ existe $\delta_1(t_0, \xi_0, \varepsilon_1) > 0$ tal que

$$|x(s, t, \xi) - x(s, t_0, \xi_0)| < \varepsilon_1 \quad \text{cuando} \quad |t - t_0| + |\xi - \xi_0| < \delta_2 \tag{4.1}$$

para cualquier t y s en un intervalo compacto de $\mathbb{R}^+$ que contiene a t_0.

Por otra parte, al usar nuevamente el Teorema 2.15, junto con la Proposición 2.6, sabemos que para cualquier $\varepsilon_2 > 0$, existe $\delta_2(t_0, \xi_0, \varepsilon_2) > 0$ tal que

$$|z^*(s; (t, \xi)) - z^*(s; (t_0, \xi_0))| < \varepsilon_2 \quad \text{cuando} \quad |t - t_0| + |\xi - \xi_0| < \delta_2 \tag{4.2}$$

para todo t y s en un intervalo compacto de $\mathbb{R}^+$ conteniendo t_0. Adicionalmente, sabemos que para cualquier $\varepsilon_3 > 0$ existe $\delta_3(\varepsilon_3, t_0) > 0$ tal que

$$\|\Phi(t, s) - \Phi(t_0, s)\| < \varepsilon_3 \quad \text{cuando} \quad |t - t_0| < \delta_3 \tag{4.3}$$

para cualquier t y s en un intervalo compacto de $\mathbb{R}^+$ conteniendo a t_0. De ahora en adelante, asumiremos que t, s y t_0 están en un intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^+$ y denotamos

$$\omega_1(s, t, t_0, \xi, \xi_0) = f(s, x(s, t, \xi) + z^*(s; (t, \xi))) - f(s, x(s, t_0, \xi_0) + z^*(s; (t_0, \xi_0))).$$

Primero, vamos a asumir que $t > t_0$. Entonces, podemos notar que

$$
\begin{aligned}
H(t,\xi) - H(t_0,\xi_0) &= \xi - \xi_0 + \int_0^t \Phi(t,s) f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))ds \\
&\quad - \int_0^{t_0} \Phi(t_0,s) f(s, x(s,t_0,\xi_0) + z^*(s;(t_0,\xi_0)))ds \\
&= \xi - \xi_0 + \int_0^{t_0} \{\Phi(t,s) - \Phi(t_0,s)\} f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))ds \\
&\quad + \int_0^{t_0} \Phi(t_0,s)\omega_1(s,t,t_0,\xi,\xi_0)ds \\
&\quad + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s) f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))ds.
\end{aligned}
$$

Sea $C = \text{máx}\{\|\Phi(u,s)\| : u,s \in I\}$. Al usar **(H3)** y el hecho que $f(t,x)$ es continua en $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, tenemos que $f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))$ es acotada en I.

De este modo, existe $\rho \geq 0$ tal que

$$
|f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))| \leq \rho \text{ para todo } t, s \in I. \tag{4.4}
$$

Usando (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4), tenemos que

$$
\begin{aligned}
|H(t,\xi) - H(t_0,\xi_0)| &\leq |\xi - \xi_0| + \rho \int_0^{t_0} \|\Phi(t,s) - \Phi(t_0,s)\| ds + \rho \int_{t_0}^{t} \|\Phi(t,s)\| ds \\
&\quad + \int_0^{t_0} \|\Phi(t_0,s)\| |\omega_1(s,t,t_0,\xi,\xi_0)| ds \\
&\leq |\xi - \xi_0| + \rho t_0 \varepsilon_3 + C|t - t_0|\rho + C\gamma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t_0.
\end{aligned}
$$

Ahora, consideramos $t < t_0$. Así, tenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
H(t,\xi) - H(t_0,\xi_0) &= \xi - \xi_0 + \int_0^t \Phi(t,s) f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))ds \\
&\quad - \int_0^{t_0} \Phi(t_0,s) f(s, x(s,t_0,\xi_0) + z^*(s;(t_0,\xi_0)))ds \\
&= \xi - \xi_0 + \int_0^{t} \{\Phi(t,s) - \Phi(t_0,s)\} f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))ds \\
&\quad + \int_0^{t} \Phi(t,s)\omega_1(s,t,t_0,\xi,\xi_0)ds \\
&\quad - \int_{t}^{t_0} \Phi(t_0,s) f(s, x(s,t_0,\xi_0) + z^*(s;(t_0,\xi_0)))ds.
\end{aligned}
$$

Usando (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4), tenemos que

$$
\begin{aligned}
|H(t,\xi)-H(t_0,\xi_0)| \leq{}& |\xi-\xi_0| + \rho\int_0^t \|\Phi(t,s)-\Phi(t_0,s)\|ds + \rho\int_t^{t_0}\|\Phi(t,s)\|ds \\
&+ \int_0^t \|\Phi(t_0,s)\||\omega_1(s,t,t_0,\xi,\xi_0)|ds \\
\leq{}& |\xi-\xi_0| + \rho t\varepsilon_3 + C|t-t_0|\rho + C\gamma(\varepsilon_1+\varepsilon_2)t \\
\leq{}& |\xi-\xi_0| + \rho t_0\varepsilon_3 + C|t-t_0|\rho + C\gamma(\varepsilon_1+\varepsilon_2)t_0.
\end{aligned}
$$

De esto, concluimos que H es continua en cualquier $(t_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$. Por último, vamos a verificar que G es continua en cualquier $(t_0,\eta_0)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$. Al usar la continuidad de las soluciones con respecto a los parámetros, es decir por el Teorema 2.16, junto con la Proposición 2.6 sabemos que para cualquier $\varepsilon_4>0$ existe $\delta_4(t_0,\xi_0,\varepsilon_4)>0$ tal que

$$
|y(s,t,\eta)-y(s,t_0,\eta_0)|<\varepsilon_4 \quad \text{cuando} \quad |t-t_0|+|\eta-\eta_0|<\delta_4. \tag{4.5}
$$

Al igual que en el caso anterior, primero vamos a considerar $t_0<t$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
G(t,\eta)-G(t_0,\eta_0) ={}& \eta-\eta_0-\int_0^t \Phi(t,s)f(s,y(s,t,\eta))ds + \int_0^{t_0}\Phi(t_0,s)f(s,y(s,t_0,\eta_0))ds \\
={}& \eta-\eta_0-\int_0^{t_0}\Phi(t,s)f(s,y(s,t,\eta))ds - \int_0^{t_0}\Phi(t_0,s)f(s,y(s,t,\eta))ds \\
&+\int_0^{t_0}\Phi(t_0,s)f(s,y(s,t,\eta))ds + \int_0^{t_0}\Phi(t_0,s)f(s,y(s,t_0,\eta_0))ds \\
&-\int_{t_0}^t \Phi(t,s)f(s,y(s,t,\eta))ds \\
={}& \eta-\eta_0+\int_0^{t_0}\{\Phi(t_0,s)-\Phi(t,s)\}f(s,y(s,t,\eta))ds - \int_{t_0}^t\Phi(t,s)f(s,y(s,t,\eta))ds \\
&+\int_0^{t_0}\Phi(t_0,s)\{f(s,y(s,t_0,\eta_0))-f(s,y(s,t,\eta))\}ds.
\end{aligned}
$$

Usando (4.3),(4.4) y (4.5), tenemos que

$$
\begin{aligned}
|G(t,\eta)-G(t_0,\eta_0)| \leq{}& |\eta-\eta_0| + \rho\int_0^{t_0}\|\Phi(t,s)-\Phi(t_0,s)\|ds + \rho\int_{t_0}^t\|\Phi(t,s)\|ds \\
&+\int_0^{t_0}\|\Phi(t_0,s)\||f(s,y(s,t,\eta))-f(s,y(s,t_0,\eta_0))|ds \\
\leq{}& |\eta-\eta_0| + \rho t_0\varepsilon_3 + \rho|t-t_0|C + C\gamma\varepsilon_4.
\end{aligned}
$$

Para el caso $t < t_0$, tenemos

$$\begin{aligned}
G(t,\eta) - G(t_0,\eta_0) =& \eta - \eta_0 - \int_0^t \Phi(t,s) f(s, y(s,t,\eta)) ds + \int_0^{t_0} \Phi(t_0,s) f(s, y(s,t_0,\eta_0)) ds \\
=& \eta - \eta_0 - \int_0^t \Phi(t,s) f(s, y(s,t,\eta)) ds + \int_0^t \Phi(t_0,s) f(s, y(s,t_0,\eta_0)) ds \\
&+ \int_t^{t_0} \Phi(t_0,s) f(s, y(s,t_0,\eta_0)) ds - \int_0^t \Phi(t_0,s) f(s, y(s,t,\eta)) ds \\
&+ \int_0^t \Phi(t_0,s) f(s, y(s,t,\eta)) ds \\
=& \eta - \eta_0 + \int_0^t \{\Phi(t_0,s) - \Phi(t,s)\} f(s, y(s,t,\eta)) ds \\
&+ \int_t^{t_0} \Phi(t_0,s) f(s, y(s,t_0,\eta_0)) ds \\
&+ \int_0^t \Phi(t_0,s) \{f(s, y(s,t_0,\eta_0)) - f(s, y(s,t,\eta))\} ds.
\end{aligned}$$

Usando (4.3), (4.4) y (4.5), tenemos que

$$\begin{aligned}
|G(t,\eta) - G(t_0,\eta_0)| \leq& |\eta - \eta_0| + \rho \int_0^t \|\Phi(t,s) - \Phi(t_0,s)\| ds + \rho \int_t^{t_0} \|\Phi(t_0,s)\| ds \\
&+ C \int_0^t \gamma |y(s,t,\eta) - y(s,t_0,\eta_0)| ds \\
\leq& |\eta - \eta_0| + \rho\varepsilon_3 t + C\gamma\varepsilon_4 t + \rho C |t - t_0|.
\end{aligned}$$

Debido a que $t < t_0$, obtenemos lo siguiente

$$|G(t,\eta) - G(t_0,\eta_0) \leq |\eta - \eta_0| + \rho\varepsilon_3 t_0 + C\gamma\varepsilon_4 t_0 + \rho C |t - t_0|.$$

De esto, concluimos que G es continua en cualquier $(t_0,\eta_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. $\square$

Observación 4.3. *En el Teorema 2.3 de [3] se obtiene una cota similar para $|H(t,\xi) - H(t,\xi_0)|$ la cual depende de la cota de $|f(t,x)|$. Como esta hipótesis no es utilizada en esta tesis, tenemos que la cota para esta estimación depende del acotamiento de $|f(s, x(s,t,\xi) + z^*(s;(t,\xi)))|$ para cualquier $t \in I$.*

Capítulo 5

Diferenciabilidad de la Equivalencia Topológica

Al igual que en los capítulos anteriores, recordaremos la Definición [3, Definición 1.5] y la adaptaremos al contexto de esta tesis.

Definición 5.1. *Los sistemas* (2.1) *y* (2.2) *son* C^r- *continuamente topológicamente equivalentes en* $\mathbb{R}^+$ *si:*

i) *Los sistemas son* $\mathbb{R}^+-$*continuamente topológicamente equivalentes;*

ii) *Para cualquier* $t \in \mathbb{R}^+$ *fijo, el mapa* $u \mapsto H(t,u)$ *es un* C^r*-difeomorfismo de* $\mathbb{R}^n$*, con* $r \geq 1$*;*

iii) *Las derivadas parciales de* H *y* G *hasta orden* r *con respecto a* u *son funciones continuas de* $(t,u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Durante este capítulo, se considerarán las siguientes hipótesis:

(H1) El sistema (2.1) es uniformemente asintóticamente estable, es decir, existen constantes $K \geq 1$ y $\alpha > 0$ tal que su matriz de transición $\Phi(t,s)$ verifica

$$\|\Phi(t,s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad \text{para cualquier } t \geq s \geq 0.$$

(H2) La función f es continua en (t,y), y para cualquier $t \geq 0$ y para todo par $(y,\overline{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, existe un $\gamma \geq 0$ tal que

$$|f(t,y) - f(t,\overline{y})| \leq \gamma |y - \overline{y}|.$$

(H3) Existe un $\mu \geq 0$ tal que $\sup\limits_{t\geq 0} |f(t,0)| \leq \mu$, y f es acotada en t para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$.

(H4) $|f(t,x)| \to +\infty$ cuando $|x| \to +\infty$, para cualquier $t \geq 0$ fijo.

(H5) La función $f(t,x)$ y sus derivadas con respecto a x hasta orden r son funciones continuas de (t,x).

El siguiente teorema es el resultado principal de esta tesis. Demostraremos que la equivalencia topológica establecida en el Teorema 3.5 es de clase $C^r, r \geq 1$ en $\mathbb{R}^+$.

Teorema 5.2. *Asuma que* ***(H1)-(H5)*** *y* $\dfrac{K\gamma}{\alpha} < 1$ *se satisfacen, entonces (2.1) y (2.2) son* C^r*-continuamente topológicamente equivalentes en* $\mathbb{R}^+$*.*

Demostración. La propiedad i) de la Definición 5.1 se satisface como consecuencia del Teorema 3.5. La propiedad ii) de la Definición previamente mencionada se establecerá por casos.

Caso $r = 1$**.** Como f satisface la condición **(H5)**, entonces se tiene que $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ es continua para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Entonces se sigue que los mapas $y \mapsto Df(t,y)$ y $\eta \mapsto \frac{\partial y}{\partial \eta}$ son continuos, donde Df es la matriz Jacobiana de f. Esto permite calcular la primera derivada parcial del mapa $\eta \mapsto G(t,\eta)$ para cualquier $t \geq 0$, de la siguiente manera

$$\frac{\partial G}{\partial \eta_i}(t,\eta) = e_i - \int_0^t \Phi(t,s) Df(s, y(s,t,\eta)) \frac{\partial y}{\partial \eta_i}(s,t,\eta) ds \quad (i = 1, ..., n), \tag{5.1}$$

lo cual implica que las derivadas parciales existen y son continuas para cualquier $t \geq 0$, entonces $\eta \mapsto G(t,\eta)$ es de clase C^1.

Por otro lado, al usar nuevamente **(H5)** se tiene que $\partial y(t,\tau,\eta)/\partial\eta$ satisface la siguiente ecuación diferencial matricial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}(t,\tau,\eta) = \{A(t) + Df(t, y(t,\tau,\eta))\}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}(t,\tau,\eta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \eta}(\tau,\tau,\eta) = I_n. \end{cases} \tag{5.2}$$

Recordemos que $\Phi(t)$ es la matriz fundamental del sistema (2.1) con $t \in \mathbb{R}^+$, por tanto, la inversa de la matriz fundamental verifica lo siguiente

$$\frac{d}{dt}\Phi^{-1}(t) = -\Phi^{-1}(t)A(t).$$

En efecto, sabemos que $\Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I_n$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, donde I_n es la matriz identidad. Derivando, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{\Phi(t)\Phi^{-1}(t)\} =& \frac{d}{dt}\Phi(t)\Phi^{-1}(t) + \Phi(t)\frac{d}{dt}\Phi^{-1}(t) = 0 \\ \implies \Phi(t)\frac{d}{dt}\Phi^{-1}(t) =& - A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t) = -A(t) \\ \implies \quad \frac{d}{dt}\Phi^{-1}(t) =& - \Phi^{-1}(t)A(t). \end{aligned}$$

Así, obtenemos la siguiente identidad para la matriz de transición

$$\frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s) = -\Phi(t,s)A(s). \tag{5.3}$$

Ahora, al usar la identidad (5.3) junto con (5.2) podemos deducir que para cualquier $t \geq 0$, la matriz Jacobiana está dada por

$$\frac{\partial G}{\partial \eta}(t,\eta) = I_n - \int_0^t \Phi(t,s)Df(s,y(s,t,\eta))\frac{\partial y}{\partial \eta}(s,t,\eta)ds. \tag{5.4}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}\left\{\Phi(t,s)\frac{\partial y}{\partial \eta}(s,t,\eta)\right\} =& \frac{\partial}{\partial s}\Phi(t,s)\frac{\partial y}{\partial \eta}(s,t,\eta) + \Phi(t,s)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}(s,t,\eta)\right) \\ =& - \Phi(t,s)A(s)\frac{\partial y}{\partial \eta}(s,t,\eta) + \Phi(t,s)\{A(s) + Df(s,y(s,t,\eta))\}\frac{\partial y}{\partial \eta}(s,t,\eta) \\ =& \Phi(t,s)Df(s,y(s,t,\eta))\frac{\partial y}{\partial \eta}(s,t,\eta). \end{aligned}$$

Con esto, (5.4) nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \eta}(t,\eta) =& I_n - \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\left\{\Phi(t,s)\frac{\partial y}{\partial \eta}(s,t,\eta)\right\}ds \\ =& I_n - \Phi(t,t)\frac{\partial y}{\partial \eta}(t,t,\eta) + \Phi(t,0)\frac{\partial y}{\partial \eta}(0,t,\eta) \\ =& \Phi(t,0)\frac{\partial y}{\partial \eta}(0,t,\eta). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Como $f(t,x) \in C^1$, se tiene que la función $g(t,x) = A(t)x + f(t,x) \in C^1$, entonces del Teorema 2.16 tenemos que la solución $y(t,\tau,\eta) \in C^1$ y además

$$\det \frac{\partial y}{\partial \eta}(t,\tau,\eta) = \exp\left(\int_\tau^t tr\ Dg(s,y(s,\tau,\eta))ds\right) > 0, \quad \forall\, t,\tau \in \mathbb{R}^+.$$

Por el Teorema 2.18, como la matriz de transición $\Phi(t,0)$ satisface

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,0) = A(t)\Phi(t,0)$$

entonces

$$\det \Phi(t,0) = \det \Phi(0,0) \exp\left(\int_0^t tr\ A(s)ds\right) > 0, \quad \text{donde} \;\; \Phi(0,0) = I_n.$$

Y con esto, tenemos

$$\det \frac{\partial G}{\partial \eta} G(t,\eta) = \det \Phi(t,0) \det \frac{\partial}{\partial \eta} y(0,t,\eta) > 0, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Finalmente, debido al Teorema 3.5 sabemos que $|G(t,\eta)| \to +\infty$ cuando $|\eta| \to +\infty$, combinado con el hecho que $\eta \mapsto G(t,\eta)$ es C^1, se sigue de el Corolario 2.25 que $\eta \mapsto G(t,\eta)$ es un difeomorfismo global para cualquier $t \geq 0$.

Caso $r = 2$**.** De **(H5)** podemos verificar que las segundas derivadas parciales $\partial^2 y(s,\tau,\eta)/\partial\eta_j\partial\eta_i$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta_j\partial\eta_i} & = & \{A(t) + Df(t,y)\}\dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta_j\partial\eta_i} + D^2 f(t,y)\dfrac{\partial y}{\partial\eta_j}\dfrac{\partial y}{\partial\eta_i} \\ \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta_j\partial\eta_i} & = & 0, \end{array}\right. \tag{5.6}$$

para cualquier $i,j = 1,\dots,n$, donde $D^2 f$ es la segunda derivada formal de f y $y = y(t,\tau,\eta)$. Al usar (5.1) y (5.6) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial\eta_j\partial\eta_i}(t,\eta) &= -\int_0^t \Phi(t,s)D^2 f(s,y(s,t,\eta))\frac{\partial y}{\partial\eta_j}(s,t,\eta)\frac{\partial y}{\partial\eta_i}(s,t,\eta)\,ds \\ &= -\int_0^t \Phi(t,s)Df(s,y(s,t,\eta))\frac{\partial^2 y(s,t,\eta)}{\partial\eta_j\partial\eta_i}\,ds \\ &= \Phi(t,0)\frac{\partial^2 y(0,t,\eta)}{\partial\eta_j\partial\eta_i}. \end{aligned}$$

Entonces, el mapa $\eta \mapsto G(t,\eta)$ es C^2 para cualquier $t \geq 0$ fijo. La identidad $\xi = G(t,H(t,\xi))$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$ fijo, y la matriz Jacobiana del mapa identidad en $\mathbb{R}^n$ podemos escribirlo como

$$DG(t,H(t,\xi))DH(t,\xi) = I_n \quad \text{for any fixed } t \in \mathbb{R}^+.$$

Por el caso $r = 1$, tenemos que $\eta \mapsto G(t, \eta)$ es un difeomorfismo de clase C^1 para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$ fijo, lo cual implica que

$$DH(t, \xi) = [DG(t, H(t, \xi))]^{-1} \quad \text{for any } t \in \mathbb{R}^+ \tag{5.7}$$

está bien definido. Además, notemos que $(t, \xi) \mapsto DH(t, \xi)$ es continuo, ya que los mapas $A \mapsto A^{-1}$ y $(t, \xi) \mapsto DG(t, H(t, \xi))$ son continuos para cualquier $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ y $(t, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

Ahora, derivando nuevamente con respecto a la segunda variable, tenemos el siguiente cálculo formal

$$D^2G(t, H(t, \xi))DH(t, \xi)DH(t, \xi) + DG(t, H(t, \xi))D^2H(t, \xi) = 0$$

y la identidad (5.7) implica que

$$D^2H(t, \xi) = -DH(t, \xi)D^2G(t, H(t, \xi))DH(t, \xi)DH(t, \xi). \tag{5.8}$$

Es fácil ver que $D^2H(t, \xi)$ es continuo con respecto a (t, ξ) debido a que es una composición de mapas que son continuos con respecto a (t, ξ). Por lo tanto $\eta \mapsto G(t, \eta)$ es un difeomorfismo global de clase C^2 para cualquier $t \geq 0$ fijo.

Caso $r \geq 3$. Al usar **(H5)** podemos concluir que $\eta \mapsto y(0, t, \eta)$ es C^r y las derivadas parciales

$$(t, \eta) \mapsto \frac{\partial^{|m|} y(0, t, \eta)}{\partial \eta_1^{m_1} \cdots \partial \eta_n^{m_n}}, \quad \text{where } |m| = m_1 + \ldots + m_n \leq r,$$

son continuas para cualquier $(t, \eta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Es más, este hecho junto con (5.5) muestra que las derivadas parciales hasta orden r–ésimo de G con respecto a η

$$(t, \eta) \mapsto \frac{\partial^{|m|} G(t, \eta)}{\partial \eta_1^{m_1} \cdots \partial \eta_n^{m_n}} = \Phi(t, 0) \frac{\partial^{|m|} y(0, t, \eta)}{\partial \eta_1^{m_1} \cdots \partial \eta_n^{m_n}}, \quad \text{where } |m| = m_1 + \ldots + m_n \leq r,$$

son continuas en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Adicionalmente, las derivadas formales de orden superior de H hasta orden $r-$ésimo y su continuidad en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ pueden ser deducidas de una forma recursiva por (5.7) and (5.8).

La propiedad iii) de la Definición 5.1 está inmersa en el análisis anterior. Por tanto, se sigue el resultado . $\square$

Observación 5.3. *Como se enfatiza anteriormente, este resultado mejora dos resultados previos: i) En [17], F. Lin mostró que la linealización entre (2.1) y (2.2) es de clase C^0 cuando $f(t, 0)$ es acotada, mientras que en esta tesis se demuestra que es de clase C^r con $r \geq 1$, agregando la hipótesis que f es acotada en t y se escapa al infinito cuando x tiende al infinito. ii) En [3], los autores demostraron que* *la linealización es de clase* C^r *con* $r \geq 1$ *cuando la parte no lineal es acotada en* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$*, mientras que nosotros probamos que tiene la misma clase de regularidad, sin embargo, consideramos la parte no lineal como no acotada en* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$*.*

Observación 5.4. *A pesar que se sigue la misma linea de la demostración [3, Teorema 4.1], en la cual se demuestra que* $|G(t,\eta)| \to +\infty$ *cuando* $|\eta| \to +\infty$ *para así utilizar el resultado de Hadamard [22, 24], mientras que en el Teorema 5.2 este hecho es una consecuencia directa del Teorema 3.5, ya que durante esta tesis utilizamos una definición de equivalencia topológica más débil que la utilizada en [3].*

Capítulo 6

Conclusiones y Perspectivas

El resultado principal de esta tesis fue demostrar que entre un sistema lineal y su perturbación no lineal existe una equivalencia topológica la cual es de clase C^r para todo $r \geq 1$, considerando que el sistema lineal es contractivo en $\mathbb{R}^+$ al igual que en [3], pero por otro lado, eliminando la hipótesis de acotamiento para la perturbación aditiva del sistema lineal asociado al igual que en [17], por lo tanto, se logró mejorar los resultados de dos trabajos relacionados con la equivalencia topológica entre dos sistemas.

Un tema que no se trabajó durante el desarrollo de esta tesis es el caso cuando el sistema lineal posee dicotomía exponencial con proyector distinto de la identidad. Este caso corresponde a considerar un espacio estable y un espacio inestable de soluciones.

Adicionalmente, se puede generalizar aún más lo realizado en esta tesis considerando otro tipo de dicotomía mucho más general, como por ejemplo la μ-dicotomía no uniforme utilizada en [25, Página 4], de la cual se puede recuperar la dicotomía exponencial presentada en el Capítulo 2.

Bibliografía

[1] L. Barreira, C. Valls. Stability of Nonautonomous Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics 1926, Springer, Berlin, 2008.

[2] F. Berthelin, Équations Différentielles, Cassini, Paris, 2017.

[3] Á. Castañeda, P. Monzón, G.Robledo, Smoothness of topological equivalence on the half–line for nonautonomous systems. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 150 (2020), 2484–2502.

[4] Á. Castañeda, G. Robledo. Dichotomy spectrum and almost topological conjugacy on nonautonomous unbounded difference systems. Discrete Contin. Dyn. Syst. 38 (2018), 2287—2304.

[5] Á. Castañeda and G. Robledo. Differentiability of Palmer's linearization theorem and converse result for density functions. J. Differential Equations 259 (2015), 4634–4650.

[6] Á. Castañeda, P. Monzón, G.Robledo, Nonuniform contractions and density stability results via a smooth topological equivalence, Dynamical Systems, 38 (2023), 179-196. doi.org/10.1080/14689367.2022.2163881

[7] E. Coddington, N. Levinson. Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw-Hill, New York, 1955.

[8] W. A. Coppel, Dichotomies in Stability Theory, Lecture Notes in Mathematics, 629 Springer–Verlag, Berlin, 1978.

[9] D. Dragičević, W. Zhang, W. Zhang, Smooth linearization of nonautonomous differential equations with a nonuniform dichotomy. Proc. Lond. Math. Soc. 121 (2020), 32-50.

[10] J. Guckenheimer, P. Holmes. Nonlinear Oscillations, Dynamical systems, and Bifurcations of Vector Fields, Applied Mathematical Sciences, 42. Springer-Verlag, New York, 1983.

[11] D. Grobman. Homeomorphisms of Systems of Differential Equations. *Dokl, Akad. Nauk SSSR*, **128** (1959) 880-881.

[12] Hartman, P. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 610–620.

[13] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney. Differential Equations, Dynamical Dystems, and an Introduction to Chaos. Third edition. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2013.

[14] I. Huerta, Linearization of a nonautonomous unbounded system with nonuniform contraction: a spectral approach. Discrete Contin. Dyn. Syst. 40 (2020), 5571—5590.

[15] N. Jara, Smoothness of class C^2 of nonautonomous linearization without spectral conditions, J. Dynam. Differential Equations (2022), doi.org/10.1007/s10884-022-10207-5.

[16] P.E. Kloeden, M. Rasmussen. Nonautonomous Dynamical Systems. Mathematical Surveys and Monographs, 176. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[17] F. Lin, Hartman's linearization on nonautonomous unbounded system. Nonlinear Anal. 66 (2007), 38–50.

[18] B.G. Pachpatte, Inequalities for differential and integral equations, Academic Press, San Diego, 1998.

[19] K.J. Palmer. A generalization of Hartman's linearization theorem. *J. Math. Anal. Appl.* **41** (1973), 753–758.

[20] L. Perko. Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York, 2001.

[21] O. Perron, Die Stabilitatsfrage bei Differential gleichungen Math. Z. 32 (1930), 703–728.

[22] R. Plastock. Homeomorphisms between Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **200** (1974), 1691-7183.

[23] C. Pugh, On a theorem of P. Hartman. Amer. J. Math. 91 (1969), 363–367.

[24] M. Radulescu, S. Radulescu. Global Inversion Theorems and Application to Differential Equations. *Nonlinear Analysis, Th.* **4** (1980), 951-965.

[25] César M. Silva, Nonuniform μ-dichotomy spectrum and kinematic similarity, Journal of Differential Equations 375 (2023) 618-652.

[26] J. Sotomayor. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.