Pontificia Universidad Católica de Chile

Tesis de Magíster

Formalismo Termodinámico para Dinámicas con Puntos Fijos Indiferentes

Autor:
Francisco Monardes Aguado

Supervisor:
Daniel Coronel

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, como requisito para optar al grado de Magíster en Matemática.

Jurado:
Godofredo Iommi (Pontificia Universidad Católica de Chile)
Jan Kiwi (Pontificia Universidad Católica de Chile)

Santiago, Chile

Índice general

Introducción

Un problema central en Formalismo termodinámico es estudiar la existencia y unicidad de estados de equilibrio, esto debido a que los estados de equilibrio suelen tener buenas propiedades ergódicas que reflejan la dinámica del sistema en cuestión. Gracias a los trabajos de Bowen y Ruelle [Bow75, Rue78], este problema está bien entendido para una clase importante de sistemas. Por ejemplo, toda dinámica uniformemente expansora y topológicamente mixing admite un único estado de equilibrio para un potencial Hölder dado. Por otro lado, Hofbauer [Hof77] construyó, en el full-shift, ejemplos de potenciales que no son Hölder y admiten más de un estado de equilibrio.

El objetivo de este trabajo es, precisamente, estudiar la existencia y unicidad de estados de equilibrio para potenciales que no son Hölder o transformaciones que no son uniformemente expansoras. Más especificamente, nos vamos a concentrar en sistemas que poseen puntos fijos indiferentes.

Este trabajo se divide en 6 capítulos. El Capítulo 1 está destinado a entregar las definiciones y resultados básicos de Teoría ergódica, siguiendo principalmente [VO16].

En los Capítulos 2 y 3 se encuentran las herramientas principales que utilizamos en los capítulos siguientes. Por un lado, en el Capítulo 2 presentamos resultados relacionados con el Formalismo termodinámico para cierta clase de potenciales definidos sobre el full-shift con alfabeto numerable. Aquí, nuestra principal referencia es [MU01]. Por otro lado, en el Capítulo 3 nos enfocamos en las transformaciones inducidas, poniendo especial atención en la función de primer retorno. Veremos resultados que relacionan propiedades de una dinámica f con su transformación inducida. Para este capítulo, en las Secciones 3.2 y 3.1 seguimos [VO16], y en la Sección 3.3 seguimos [Sar20].

En el cuarto capítulo consideramos el full-shift en dos símbolos $\Sigma_2 := \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ y la función shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$. Consideramos $M_0 = [1]$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$M_n := \{x \in \Sigma_2 : x_i = 0 \text{ para } 0 \leq i \leq n-1, x_n = 1\}.$$

Denotemos por $\overline{0}$ a la sucesión constante 0. Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ que converge a 0 definimos el potencial $\phi : \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} a_n & \text{si } x \in M_n, \\ 0 & \text{si } x = \overline{0}. \end{cases}$$

Estudiamos la existencia y unicidad de estados de equilibrio para ϕ. Este fue exactamente el problema abordado por Hofbauer [Hof77], cuyos resultados se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 0.0.1. *Sea $s_n = a_1 + \ldots + a_n$.*

1. *Si $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} > 1$, existe un único estado de equilibrio para ϕ.*
2. *Si $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} = 1$, se tienen dos casos:*
   - *Cuando $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{s_n} = \infty$, $\delta_{\overline{0}}$ es el único estado de equilibrio para ϕ.*
   - *Cuando $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{s_n} < \infty$, $\delta_{\overline{0}}$ es un estado de equilibrio para ϕ, y además, existe otro estado de equilibrio distinto de $\delta_{\overline{0}}$.*
3. *Si $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} < 1$, entonces $\delta_{\overline{0}}$ es el único estado de equilibrio para ϕ.*

En este trabajo obtenemos los mismos resultados que Hofbauer pero con técnicas diferentes basadas en los resultados presentados en los Capítulos 2 y 3. Además, en el caso en que existen dos estados de equilibrio, probamos que estos son los únicos estados de equilibrio ergódicos.

En el Capítulo 5, nos enfocamos en una versión diferenciable del problema estudiado en el Capítulo 4. Para $\gamma > 0$ consideramos $a \in (0,1)$ el único número tal que $a(1+a^\gamma) = 1$ y definimos $f : [0,1] \to [0,1]$ por,

$$f(x) = \begin{cases} x(1+x^\gamma) & \text{si } x \in [0,a], \\ x(1+x^\gamma) - 1 & \text{si } x \in (a,1]. \end{cases}$$

Esta función es conocida como la *Transformación de Manneville-Pomeau* y fue introducida en [PM80]. Consideramos el potencial geométrico $-t\log f'$ con $t > 0$ y denotamos por $P(t)$ a su presión. Aunque $f'|_{(0,1]} > 1$, esta transformación no es uniformemente expansora, pues $f'(0) = 1$. Por lo tanto, $-t\log f'(0) = 0$ para todo $t > 0$. En este caso decimos que 0 es un punto fijo indiferente. Las propiedades de la función $t \mapsto P(t)$ han sido objeto de estudio de diversos autores (ver por ejemplo [PS92] y [Sar01]). Aquí, los principales resultados (ver

Teorema 5.3.4, Lema 5.3.5, Teorema 5.3.8 y Teorema 5.3.9) se resumen en,

Teorema 0.0.2. *Considere, para cada $t > 0$, el potencial $\phi_t := -t \log f'$.*

1. *Si $t \in (0,1)$, entonces $P(t) > 0$ y existe un único estado de equilibrio para ϕ_t.*
2. *Para $t = 1$, se tiene $P(1) = 0$ y*
   - *si $\gamma \in (0,1)$, existe un estado de equilibrio $\nu \neq \delta_0$ para el potencial ϕ_1. Además, ν y δ_0 son los únicos estados de equilibrio ergódicos para ϕ_1.*
   - *si $\gamma \geq 1$, entonces δ_0 es el único estado de equilibrio para ϕ_1.*
3. *Si $t > 1$, entonces $P(t) = 0$ y δ_0 es el único estado de equilibrio para ϕ_t.*

Por último, en el Capítulo 6 estudiamos la existencia y unicidad de estados de equilibrio para un sistema simbólico que sirve como modelo de una dinámica diferenciable con dos puntos fijos indiferentes. Para eso, trabajamos sobre el full-shift en tres símbolos $\Sigma_3 = \{0,1,2\}^{\mathbb{N}_0}$ y definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos

$$M_n := \{x \in \Sigma_3 : x_i = 0 \text{ para } 0 \leq i \leq n-1, x_n \neq 0\},$$
$$N_n := \{x \in \Sigma_3 : x_i = 2 \text{ para } 0 \leq i \leq n-1, x_n \neq 2\}.$$

Consideramos una constante $A > 0$, un par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que convergen a 0, y definimos el potencial $\phi : \Sigma_3 \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} a_n & \text{si } x \in M_n, \\ b_n & \text{si } x \in N_n, \\ -A & \text{si } x \in [1], \\ 0 & \text{si } x \in \{\overline{0}, \overline{2}\}, \end{cases}$$

donde $\overline{0}$ y $\overline{2}$ denotan a la sucesión constante 0 y a la sucesión constante 2 respectivamente. En los Teoremas 6.1.1, 6.2.1 y 6.3.1 caracterizamos la existencia y unicidad de estados de equilibrio para ϕ. Más precisamente, en los Teoremas 6.1.1 y 6.3.1 damos condiciones bajo las cuales se puede asegurar la existencia de un único estado de equilibrio. En el Teorema 6.2.1 mostramos que pueden existir tres estados de equilibrio ergódicos diferentes. Terminamos el Capítulo 6 exhibiendo ejemplos de potenciales que satisfacen las distintas hipótesis de los teoremas antes mencionados.

En los Capítulos 4, 5 y 6 la estrategia será similar: consideraremos un subconjunto apropiado del espacio de fase, de tal forma que la función de primer retorno correspondiente pueda ser codificada mediante un full-shift con alfabeto numerable. Las teorías desarrolladas por Mauldin y Urbansky [MU01], y por Sarig [Sar99], nos permitirán estudiar la existencia de estados de equilibrio para un potencial en el sistema inducido, y utilizando herramientas que presentaremos más adelante podremos obtener conclusiones acerca de los estados de equilibrio de nuestro potencial original.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo exhibimos una recopilación de algunos de los preliminares utilizados en los capítulos siguientes. En la Sección 1.1 definimos los conceptos de medida invariante y ergodicidad, y también enunciamos el Teorema de descomposición ergódica. En las Secciones 1.2 y 1.3 exponemos las nociones entropía para una medida invariante y entropía topológica respectivamente. Más especificamente, en el Ejemplo 1.2 presentamos el full-shift, que es el espacio en el que trabajaremos en los Capítulos 4 y 6. Por último, en la Sección 1.4 estudiamos los conceptos de presión topológica y estados de equilibrio.

1.1. Medidas invariantes y ergodicidad

Definición 1.1.1. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \to X$ una función medible. Decimos que μ es *invariante bajo* f (f*-invariante* o que f *preserva* μ) si

$$\mu(f^{-1}(B)) = \mu(B) \text{ para todo } E \in \mathcal{B}.$$

También decimos que *el sistema* (f, μ) *preserva la medida* para referirnos a lo mismo.

Ejemplo 1.1. Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible y $f : X \to X$ una transformación medible. Considere $x \in X$ y δ_x la delta de Dirac en x. Luego, δ_x es f-invariante si y sólo si $f(x) = x$, pues

$$\delta_x(f^{-1}(E)) = \delta_{f(x)}(E) \text{ para todo } E \in \mathcal{B}.$$

Proposición 1.1.1 ([VO16, Proposition 1.1.1]). *Sea* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *un espacio de medida y*

$f : X \to X$ una transformación medible. Entonces μ es f-invariante si y sólo si

$$\int \phi \, d\mu = \int \phi \circ f \, d\mu$$

para toda función $\phi \in L^1(\mu)$.

El siguiente teorema establece que, si μ es una medida de probabilidad $f-$invariante y $\mu(B) > 0$, entonces casi todo $x \in B$ retorna infinitas veces a B bajo iteraciones de f.

Teorema 1.1.2 (Teorema de recurrencia de Poincaré)**.** *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $f : X \to X$ una transformación que preserva μ. Sea $B \in \mathcal{B}$ un conjunto medible tal que $\mu(B) > 0$. Entonces existe conjunto medible $A \subset B$ con $\mu(A) = \mu(B)$ tal que para todo $x \in A$ existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ que satisface $f^{n_k}(x) \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Definición 1.1.2. Sea μ una medida de probabilidad sobre el espacio medible $(X, \mathcal{B})$ y sea $f : X \to X$ una transformación que preserva μ. Se dice que μ es *ergódica* con respecto a f (o que (f, μ) es un *sistema ergódico*) si para todo $B \in \mathcal{B}$ se tiene que

$$f^{-1}(B) = B \implies \mu(B) \in \{0, 1\}.$$

Cuando la transformación f quede clara por contexto, solamente diremos que la medida μ es ergódica.

Teorema 1.1.3 ([Wal82, Theorem 1.5])**.** *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $f : X \to X$ una transformación que preserva la medida. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) T es ergódica.

(ii) Si $B \in \mathcal{B}$ es tal que $\mu(B \bigtriangleup T^{-1}(B))$, entonces $\mu(B) \in \{0, 1\}$.

(iii) Para todo $B \in \mathcal{B}$ con $\mu(B) > 0$ se tiene que $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-i}(B)) = 1$

(iv) Para todo par $A, B \in \mathcal{B}$ con $\mu(A) > 0$ y $\mu(B) > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$.

Recordemos que, dado un espacio medible $(X, \mathcal{B})$, dos medidas no nulas μ y ν definidas sobre $\mathcal{B}$ se dicen *mutuamente singulares* si existe $E \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(E) = \nu(X \setminus E) = 0$.

Proposición 1.1.4 ([EW11, Lemma 4.6])**.** *Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible y $f : X \to X$ una transformación medible. Si μ y ν son dos medidas ergódicas con respecto a f, entonces son* *mutuamente singulares o iguales.*

Para terminar con esta sección vamos a enunciar el Teorema de descomposición ergódica, el cual, informalmente hablando, establece que toda medida de probabilidad invariante se puede escribir como combinación convexa de medidas ergódicas.

Consideremos $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{P}$ una partición de X en conjuntos medibles. Para cada $x \in X$ vamos a denotar por $\mathcal{P}(x)$ al elemento de $\mathcal{P}$ que contiene a x. Luego, existe una proyección canónica $\pi : X \to \mathcal{P}$ dada por $\pi(x) = \mathcal{P}(x)$. Entonces, podemos definir la σ-álgebra $\hat{\mathcal{B}} := \{Q \subset \mathcal{P} : \pi^{-1}(Q) \in \mathcal{B}\}$ y la medida $\hat{\mu}$ definida por $\hat{\mu}(Q) = \mu(\pi^{-1}(Q))$ para todo $Q \in \hat{\mathcal{B}}$. Así, obtenemos el espacio de probabilidad $(\mathcal{P}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{\mu})$.

La demostración del siguiente teorema se encuentra en [VO16, Section 5.1].

Teorema 1.1.5 (Descomposición ergódica)**.** *Considere un espacio de probabilidad* $(X, \mathcal{B}, \mu)$*, donde* X *es un espacio métrico separable y* $\mathcal{B}$ *es la* σ*-álgebra de Borel en* X*. Sea* $f : X \to X$ *una transformación medible que preserva* μ*. Entonces existe un conjunto medible* $X_0 \subset X$ *con* $\mu(X_0) = 1$*, una partición* $\mathcal{P}$ *de* X_0 *en conjuntos medibles y una colección* $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ *de medidas de probabilidad en* X *satisfaciendo*

1. $\mu_P(P) = 1$ *para* $\hat{\mu}$*-casi todo* $P \in \mathcal{P}$*.*
2. *La función* $P \mapsto \mu_P(E)$ *es medible para todo* $E \in \mathcal{B}$*.*
3. μ_P *es* f*-invariante y ergódica para* $\hat{\mu}$*-casi todo* $P \in \mathcal{P}$*.*
4. $\mu(E) = \int \mu_p(E)\, d\hat{\mu}(P)$ *para todo* $E \in \mathcal{B}$*.*

1.2. Entropía

En esta sección consideramos $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $f : X \to X$ una transformación medible que preserva la medida μ. Escribimos log para referirnos al logaritmo natural y adoptamos la convención $0 \cdot \log 0 = 0$. También, a diferencia de la Sección 1.1, una partición de $(X, \mathcal{B}, \mu)$ será siempre una colección numerable (finita o infinita) y disjunta de elementos de $\mathcal{B}$ cuya unión es igual a X.

Definición 1.2.1. Sean que $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son dos particiones de $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Diremos que $\mathcal{Q}$ es un *refinamiento* de $\mathcal{P}$ (y escribimos $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$), si cada elemento de $\mathcal{P}$ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{Q}$.

Definición 1.2.2. Dadas dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, el *refinamiento entre* $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$

es la partición

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} := \{P \cap Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Más generalmente, si $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de particiones de $(X, \mathcal{B}, \mu)$ definimos

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n := \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n : P_n \in \mathcal{P}_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Observación 1.2.1. Notemos que $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ es un refinamiento tanto de $\mathcal{P}$ como de $\mathcal{Q}$.

Definición 1.2.3. Sea $\mathcal{P}$ una partición de $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Se define la *entropía de $\mathcal{P}$ con respecto a μ* como

$$H_\mu(\mathcal{P}) := \sum_{P\in\mathcal{P}} -\mu(P)\log(\mu(P)).$$

Notemos que $H_\mu(\mathcal{P}) \geq 0$, pues $-x\log x \geq 0$ si $x \in [0, 1]$.

El siguiente lema es fundamental para definir la entropía de f con respecto a μ.

Lema 1.2.1 ([VO16, Lemma 3.3.4])**.** *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión subaditiva, es decir, $x_{n+m} \leq x_n + x_m$ para todo par $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{n} \in [-\infty, \infty).$$

Definición 1.2.4. Sea $\mathcal{P}$ una partición de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, se define la partición $\mathcal{P}^n$ por

$$\mathcal{P}^n := \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}),$$

donde $f^{-i}(\mathcal{P}) := \{f^{-i}(P) : P \in \mathcal{P}\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Notemos que por la Observación 1.2.1 se tiene que $\mathcal{P}^n \leq \mathcal{P}^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Otro importante hecho es que la sucesión $\{\mathcal{P}^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es subaditiva:

Lema 1.2.2 ([VO16, Lemma 9.1.7])**.** *Si $\mathcal{P}$ es una partición de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, entonces*

$$H_\mu(\mathcal{P}^{n+m}) \leq H_\mu(\mathcal{P}^n) + H_\mu(\mathcal{P}^m)$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Definición 1.2.5. Sea $\mathcal{P}$ una partición de $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Se define la *entropía de f con respecto* a $\mathcal{P}$ como el siguiente límite

$$h_\mu(f,\mathcal{P}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n).$$

Observación 1.2.2. Por los Lemas 1.2.1 y 1.2.2, $h_\mu(f,\mathcal{P})$ está bien definida. Además, $h_\mu(f,\mathcal{P}) \geq 0$.

Definición 1.2.6. Se define la *entropía de f con respecto a μ* como

$$h_\mu(f) := \sup_{\mathcal{P}\in\mathcal{F}} h_\mu(f,\mathcal{P}),$$

donde $\mathcal{F} := \{\mathcal{P} : \mathcal{P} \text{ es partición de } (X,\mathcal{B},\mu) \text{ y } H_\mu(\mathcal{P}) < \infty\}$.

Teorema 1.2.3 ([VO16, Theorem 9.2.1])**.** *Supongamos que $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_3 \ldots$ es una sucesión decreciente de particiones de $(X,\mathcal{B},\mu)$ con $H_\mu(\mathcal{P}_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y tal que $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{P}_n$ genera la σ-álgebra $\mathcal{B}$. Entonces,*

$$h_\mu(f) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(f,\mathcal{P}_n).$$

Como consequencia directa del Teorema 1.2.3 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.4 ([VO16, Corollary 9.2.5])**.** *Si $\mathcal{P}$ es una partición con $H_\mu(\mathcal{P}) < \infty$ tal que $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{P}^n$ genera la σ-álgebra $\mathcal{B}$. Entonces, $h_\mu(f) = h_\mu(f,\mathcal{P})$.*

A particiones $\mathcal{P}$ como las del Corolario 1.2.4 las llamamos *particiones generadoras* para la función f.

Si además X es un espacio métrico y $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel de X, se tienen los siguientes resultados.

Corolario 1.2.5 ([VO16, Corollary 9.2.8])**.** *Supongamos que $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_3 \ldots$ es una sucesión de particiones de $(X,\mathcal{B},\mu)$ tal que $\operatorname{diam}\mathcal{P}_n \to 0$. Entonces,*

$$h_\mu(f) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(f,\mathcal{P}_n),$$

donde $\operatorname{diam}\mathcal{P}_n := \sup\{\operatorname{diam} P : P \in \mathcal{P}_n\}$.

Corolario 1.2.6 ([VO16, Corollary 9.2.10])**.** *Sea $\mathcal{P}$ una partición de $(X,\mathcal{B},\mu)$ que satisface $\operatorname{diam}\mathcal{P}^n \to 0$. Entonces, $h_\mu(f) = h_\mu(f,\mathcal{P})$.*

1.3. Entropía topológica

En está sección X es un espacio topológico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Definiremos una noción de entropía que sólo depende de la topología de X. Esta se conoce como entropía topológica de f y se denota por $h(f)$. También enunciaremos el conocido Principio variacional, que relaciona la entropía topológica con lo visto en la Sección 1.2.

Definición 1.3.1. Sean α y β cubrimientos abiertos de X. Decimos que β es un *refinamiento* de α (y escribimos $\alpha \leq \beta$) si todo elemento de β está contenido en algún elemento de α.

Definición 1.3.2. Si α y β son cubriemientos abiertos de X, se define su *refinamiento* como el cubrimiento $\alpha \vee \beta$ dado por

$$\alpha \vee \beta := \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}.$$

Más generalmente, si $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ es una colección finita de cubrimientos abiertos de X, se define

$$\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i : A_i \in \alpha_i \text{ para todo } i \in \{1, \ldots n\} \right\}.$$

Observación 1.3.1. Para todo par de cubrimientos abiertos α, β se tiene que $\alpha \leq (\alpha \vee \beta)$. Además, si β es un subcubrimiento de α, se tiene que $\alpha \leq \beta$.

Definición 1.3.3. Sea α un cubrimiento abierto de X. Se define el cubrimiento $f^{-1}(\alpha)$ como

$$f^{-1}(\alpha) := \{f^{-1}(A) : A \in \alpha\}.$$

Denotamos $\alpha^n := \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)$.

Definición 1.3.4. Si α es un cubrimiento abierto de X, definimos

$$N(\alpha) := \text{mín}\{|\beta| : \beta \text{ es subcubrimiento de } \alpha\}$$

donde $|\beta|$ denota la cardinalidad de β. Además, se define $H(\alpha) := \log N(\alpha)$. Decimos que $H(\alpha)$ es la *entropía* del cubrimiento α.

Observación 1.3.2. Como X es compacto, $N(\alpha) < \infty$ para cualquier cubrimiento abierto α.

De manera similar a lo visto en la Sección 1.3, se tiene que la sucesión $(H(\alpha^n))_{n\in\mathbb{N}}$ es subaditiva:

Lema 1.3.1. *Sea α es un cubrimiento abierto de X. Luego,*

$$H(\alpha^{n+m}) \leq H(\alpha^n) + H(\alpha^m)$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Definición 1.3.5. Sea α un cubrimiento abierto de X. Se define la *entropía de f con respecto a α* como el siguiente límite

$$h(f, \alpha) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n).$$

Observación 1.3.3. Por el Lema 1.3.1 la sucesión $(H(\alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$ es subaditiva, luego $h(f, \alpha)$ está bien definido gracias al Lema 1.2.1.

Definición 1.3.6. Se define la *entropía topológica* de f como

$$h(f) := \sup\{h(f, \alpha) : \alpha \text{ es un cubrimiento abierto de } X\}.$$

La siguiente proposición es útil para calcular la entropía topológica en algunos contextos.

Proposición 1.3.2 ([VO16, Corollary 10.1.13])**.** *Sea X un espacio métrico compacto. Si α es un cubrimiento abierto de X tal que el diámetro de $\alpha^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\alpha)$ converge a 0 cuando $n \to \infty$, entonces $h(f) = h(f, \alpha)$.*

Ejemplo 1.2. Dado $k \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto $\{0, 1, \ldots, k-1\}$ dotado de la topólogía discreta. Al conjunto $\Sigma_k := \{0, 1, \ldots, k-1\}^{\mathbb{N}_0}$ dotado de la topología producto se le conoce como el *full-shift* en *k-símbolos*. Notemos que Σ_k es compacto en virtud del Teorema de Tychonoff.

Dados $m \in \mathbb{N}$ y $\{\omega_0, \ldots, \omega_{m-1}\} \subset \{0, 1, \ldots k-1\}$, se define el *cilindro* $[\omega_0 \ldots \omega_{m-1}]$ de *largo* m por

$$[\omega_0 \ldots \omega_{m-1}] := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \Sigma_k : x_n = \omega_n \text{ para todo } 0 \leq n \leq m-1\}.$$

El conjunto de todos los cilindros forma una base para la topología de Σ_k.

En Σ_k podemos definir la métrica $d : \Sigma_k \times \Sigma_k \to [0, 1]$ dada por

$$d(x, y) = e^{-n(x,y)},$$

donde $n(x, y) := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : x_n \neq y_n\}$. Se puede verificar que la topología inducida por d coincide con la topología producto en Σ_k.

Consideramos la función *shift* $\sigma : \Sigma_k \to \Sigma_k$ definida por

$$\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0},$$

y definimos el cubrimiento abierto $\mathcal{P}$ de Σ_k dado por los cilindros de largo 1, es decir,

$$\mathcal{P} := \{[\omega] : \omega \in \{0, 1, \ldots, k-1\}\}.$$

Es sencillo notar que

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} \sigma^{-j}(\mathcal{P}) = \{[\omega_0 \ldots \omega_{n-1}] : \omega_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\} \text{ para todo } 0 \leq i \leq n-1\}.$$

Luego, como $\mathcal{P}^n$ es una partición de Σ_k para todo $n \in \mathbb{N}$, se obtiene que

$$h(\sigma, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{P}^n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log k^n = \log k.$$

Finalmente, como $\operatorname{diam} \mathcal{P}^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, por la Proposición 1.3.2 tenemos que

$$h(\sigma) = h(\sigma, \mathcal{P}) = \log k.$$

Terminamos esta sección enunciando el Principio variacional para la entropía que, como veremos en la Sección 1.4, es un caso particular del Teorema 1.4.3. Para una demostración de este hecho ver [Wal82, Theorem 8.6].

Teorema 1.3.3 (Principio variacional)**.** *Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Entonces*

$$h(f) = \sup\{h_\mu(f) : \mu \in \mathcal{M}_f(X)\},$$

donde $\mathcal{M}_f(X)$ es el conjunto de todas las medidas de probabilidad Borelianas f-invariantes.

1.4. Presión topológica

En esta sección se introduce el concepto de presión topológica (o simplemente presión). Acá, consideramos solo transformaciones continuas en un espacio métrico compacto. Sin embargo, en el Capítulo 2 vamos a definir el concepto de presión para un caso particular definido en un espacio no compacto.

Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua.

Definición 1.4.1. Un *potencial* en X es una función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$. Si ϕ es un potencial, se define, para cada $n \in \mathbb{N}$, el potencial $S_n\phi := \sum_{i=0}^{n-1} \phi \circ f^i$.

Definición 1.4.2. Sea ϕ un potencial en X y α un cubrimiento abierto de X. Definimos

$$P_n(f, \phi, \alpha) := \text{ínf} \left\{ \sum_{U \in \gamma} \sup_{x \in U} e^{S_n\phi(x)} : \gamma \text{ es un subcubrimiento finito de } \alpha^n \right\}.$$

Proposición 1.4.1. *Si α es un cubrimiento abierto de X y ϕ es un potencial, la sucesión $(\log P_n(f, \phi, \alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ es subaditiva.*

Observación 1.4.1. Por el Lema 1.2.1 el límite $P(f, \phi, \alpha) := \text{lím}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(f, \phi, \alpha)$ existe.

Para poder definir la presión de un potencial ϕ es esencial el siguiente lema.

Lema 1.4.2 ([VO16, Lemma 10.3.1])**.** *Sea $\phi : X \to \mathbb{R}$ un potencial y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubrimientos abiertos de X tal que $\operatorname{diam} \alpha_n \to 0$. Entonces $\text{lím}_{n\to\infty} P(f, \phi, \alpha_n)$ existe y es independiente de la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

El Lema 1.4.2 nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 1.4.3. Sea $\phi : X \to \mathbb{R}$ un potencial y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubrimientos abiertos de X tal que $\text{lím}_{n\to\infty} \operatorname{diam} \alpha_n = 0$. Definimos la *presión* $P(f, \phi)$ del potencial ϕ como el límite

$$P(f, \phi) := \lim_{n\to\infty} P(f, \phi, \alpha_n).$$

Observación 1.4.2. Es sencillo verificar que $P(f, 0) = h(f)$.

El siguiente resultado está demostrado en [VO16, Theorem 10.4.1].

Teorema 1.4.3 (Principio variacional)**.** *Sea $\phi : X \to \mathbb{R}$ un potencial y denotemos por $\mathcal{M}_f(X)$ al conjunto de todas las medidas de probabilidad de Borel f-invariantes. Entonces*

$$P(f, \phi) = \sup \left\{ h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu : \mu \in \mathcal{M}_f(X) \right\}. \tag{1.1}$$

Observación 1.4.3. Notemos que, de la Observación 1.4.2 y el Teorema 1.4.3, se obtiene el Teorema 1.3.3.

Una consequencia del Teorema 1.4.3 y el Teorema 1.1.5 es el siguiente corolario.

Corolario 1.4.4 ([VO16, Corollary 10.4.2]). *Sea $\phi : X \to \mathbb{R}$ un potencial. Entonces*

$$P(f, \phi) = \sup \left\{ h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu : \mu \textit{ es ergódica} \right\}.$$

Uno de los principales objetos de estudio relacionados con la presión son las medidas que realizan el supremo en (1.1). Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.4.4. Sea $\phi : X \to \mathbb{R}$ un potencial y $\mu \in \mathcal{M}_f(X)$. Diremos que μ es un *estado de equilibrio* para ϕ si

$$P(f, \phi) = h_\mu(f) + \int \phi \, d\mu.$$

Al conjunto de estados de equilibrio de ϕ lo denotamos por $\mathcal{E}(f, \phi)$.

Observación 1.4.4. Si μ es un estado de equilibrio para el potencial nulo, por la Observación 1.4.2 se tiene que $h(f) = h_\mu(f)$. En este caso decimos que μ es una medida de *máxima entropía.*

Proposición 1.4.5 ([VO16, Corollary 10.5.6]). *Si $\mathcal{E}(f, \phi) \neq \emptyset$, entonces contiene medidas ergódicas. Además, $\mathcal{E}(f, \phi)$ es un conjunto convexo y sus puntos extremos son exactamente las medidas ergódicas contenidas en el.*

Capítulo 2

Dinámica simbólica

En este capítulo definimos el full-shift sobre un alfabeto infinito numerable y estudiamos propiedades de la función shift. En la Sección 2.1 se define la noción de presión y se enuncia un principio variacional para este caso. En la Sección 2.2 se introduce el concepto de estado de Gibbs y extendemos la nocion de estado de equilibrio vista en el Capítulo 1. Finalmente, presentamos resultados relacionados con la existencia y unicidad de estados de equilibrio para cierta familia de potenciales.

Definición 2.0.1. Consideremos $\Sigma := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} : x_n \in \mathbb{N}_0\}$ y $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ la función dada por

$$\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$$

para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \Sigma$. Al conjunto Σ dotado de la topología producto se le conoce como el *full-shift en infinitos símbolos* o el *full-shift con alfabeto numerable*, y a la función σ se le dice *shift*.

La topología producto en Σ está generada por los *cilindros*, es decir, los conjuntos de la forma

$$[i_0 i_1 \dots i_{n-1}] := \{x \in \Sigma : x_j = i_j \text{ para cada } 0 \leq j \leq n-1\}.$$

Definición 2.0.2. Una *palabra* es una secuencia finita $\omega = x_0 \dots x_{n-1} \in \mathbb{N}_0^n$. Se define el *largo* $|\omega|$ de una palabra ω como la cantidad de coordenadas que tiene.

Notemos que el full-shift en infinitos símbolos no es compacto, sin embargo, es metrizable: Para cada $\alpha > 0$ consideremos la métrica $d_\alpha : \Sigma \times \Sigma \to [0, \infty)$ dada por

$$d_\alpha(x, y) = e^{-\alpha n(x,y)},$$

donde $n(x,y) := \text{mín}\{n \in \mathbb{N}_0 : x_n \neq y_n\}$. Para $\alpha, \beta > 0$ las métricas d_α y d_β son equivalentes y compatibles con la topología producto.

2.1. Presión y principio variacional

Consideremos una función $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$. Se define

$$Z_n(\phi) := \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0^n} \exp\left(\sup_{x \in [\omega]} S_n\phi(x)\right) \tag{2.1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $S_n\phi := \sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ \sigma^j$.

Lema 2.1.1 ([MU03, Lemma 2.1.2]). *La sucesión* $(\log(Z_n(\phi)))_{n\in\mathbb{N}}$ *es subaditiva.*

Así, gracias al Lema 1.2.1 podemos hacer la siguiente definición.

Definición 2.1.1. Definimos la *presión* de ϕ como

$$P(\phi) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n(\phi) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} \log Z_n(\phi)\right). \tag{2.2}$$

Como Σ no es compacto, los resultados vistos en la Sección 1.5 no aplican directamente a este caso. Sin embargo, veremos que bajo ciertas hipótesis se tienen resultados similares.

Definición 2.1.2. Una función $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ es *aceptable*, si es uniformemente continua y

$$\text{osc}(\phi) := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \{\sup(\phi|_{[n]}) - \text{ínf}(\phi|_{[n]})\} < \infty.$$

Observación 2.1.1. Notemos que las funciones aceptables no son necesariamente acotadas.

Para las funciones aceptables tenemos la siguiente versión del principio variacional.

Teorema 2.1.2 ([MU03, Theorem 2.1.8]). *Sea* $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ *una función aceptable, entonces*

$$P(\phi) = \sup\left\{h_\mu(\sigma) + \int \phi \, d\mu\right\},$$

donde el supremo es tomado sobre todas las medidas de probabilidad de Borel σ*-invariantes* μ *que satisfacen* $\int \phi \, d\mu > -\infty$.

Para terminar esta sección enunciamos el siguiente resultado, que será util más adelante.

Proposición 2.1.3 ([MU03, Proposition 2.1.9]). *Si la función $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ es aceptable, entonces $P(\phi) < \infty$ si y sólo si $Z_1(\phi) < \infty$.*

2.2. Estados de Gibbs y estados de equilibrio

Al igual que en la Definición 1.4.1, un *potencial* es una función continua $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$.

Definición 2.2.1. Sea $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ un potencial. Un *estado de Gibbs* para ϕ es una medida de probabilidad Boreliana μ en Σ para la cual existen $C \geq 1$ y $P_\mu \in \mathbb{R}$ satisfaciendo

$$C^{-1} \leq \frac{\mu([\omega])}{\exp\left(S_{|\omega|}\phi(x) - P_\mu|\omega|\right)} \leq C,$$

para toda palabra ω y todo $x \in [\omega]$. Si además μ es σ-invariante, decimos que μ es un *estado de Gibbs invariante.*

Proposición 2.2.1 ([MU03, Proposition 2.2.2]). *Si μ es un estado de Gibbs para ϕ, se tiene que $P_\mu = P(\phi)$.*

Definición 2.2.2. Sea $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ un potencial. Una medida de probabilidad Boreliana σ-invariante μ es un *estado de equilibrio* para ϕ si $\int \phi\, d\mu > -\infty$ y

$$P(\phi) = h_\mu(\sigma) + \int \phi\, d\mu.$$

2.3. Existencia de estados de equilibrio

En esta sección presentamos resultados sobre la existencia y unicidad de estados de equilibrio para potenciales sumables y localmente Hölder. Para esto, una herramienta fundamental es el operador de transferencia.

Definición 2.3.1. Sea $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha > 0$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{\alpha,n}(\phi) = \sup\{|\phi(x) - \phi(y)|e^{\alpha(n-1)} : x, y \in \Sigma \text{ y } x_i = y_i \text{ para todo } i = 0, \dots, n-1\}.$$

Decimos que ϕ es *localmente Hölder* si existe $\alpha > 0$ tal que

$$V_\alpha(\phi) := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{V_{\alpha,n}(\phi)\} < \infty.$$

Observación 2.3.1. Note que toda función localmente Hölder es aceptable.

Definición 2.3.2. Un potencial $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ es *sumable* si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(\sup(\phi|_{[n]})) < \infty.$$

Denotemos por $C_b(\Sigma)$ al espacio de las funciones continuas y acotadas definidas en Σ dotado de la norma uniforme. Para un potencial sumable ϕ se define el *operador de transferencia* $\mathcal{L}_\phi : C_b(\Sigma) \to C_b(\Sigma)$ como sigue, para cada $f \in C_b(\Sigma)$ y cada $x \in \Sigma$,

$$\mathcal{L}_\phi f(x) := \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} \exp(\phi(y)) f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\phi(nx)) f(nx).$$

Notemos que, como ϕ es sumable, entonces

$$\|\mathcal{L}_\phi f\| \leq \|f\| \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\sup \phi|_{[n]}) < \infty.$$

Así, $\mathcal{L}_\phi$ está bien definido. Además, es fácil ver que para cada $n \geq 1$,

$$\mathcal{L}_\phi^n f(x) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0^n} \exp(S_n \phi(\omega x)) f(\omega x).$$

Consideremos $C_b^*(\Sigma)$ el espacio dual de $C_b(\Sigma)$ y el operador dual $\mathcal{L}_\phi^* : C_b^*(\Sigma) \to C_b^*(\Sigma)$ dado por $(\mathcal{L}_\phi^* \ell)(f) = \ell(\mathcal{L}_\phi f)$ para cada $\ell \in C_b^*(\Sigma)$. Si μ es una medida finita sobre Σ, la podemos identificar con el operador $\overline{\mu} : C_b(\Sigma) \to \mathbb{R}$ definido como

$$\overline{\mu}(f) = \int f \, d\mu,$$

para todo $f \in C_b(\Sigma)$. Así, $\mathcal{L}_\phi^*$ actúa sobre el espacio de medidas finitas en Σ de la siguiente forma:

$$\int f d(\mathcal{L}_\phi^* \mu) = \int \mathcal{L}_\phi f d\mu \quad \text{para todo } f \in C_b(\Sigma).$$

A continuación enunciamos el resultado principal de esta sección, el cual se encuentra contenido en [MU01, Corollary 2.10].

Teorema 2.3.1. *Sea $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ un potencial sumable y localmente Hölder. Entonces,*

a) Existe una única medida μ_ϕ que es vector propio para el operador $\mathcal{L}_\phi^*$, y su valor propio correspondiente es $e^{P(\phi)}$.

b) La medida μ_ϕ es un estado de Gibbs para ϕ.

c) El potencial ϕ admite un único estado de Gibbs σ-invariante. Además, dicho estado de Gibbs es ergódico.

Ahora, expresamos en el siguiente teorema condiciones suficientes para la existencia y unicidad de un estado de equilibrio (ver [MU03, Theorem 2.2.9]).

Teorema 2.3.2. *Sea $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ un potencial localmente Hölder y sumable con $\sup \phi < \infty$, y sea $\widetilde{\mu}_\phi$ el único estado de Gibbs σ-invariante para ϕ dado por el Teorema 2.3.1. Si $\int \phi \, d\widetilde{\mu}_\phi > -\infty$, entonces $\widetilde{\mu}_\phi$ es el único estado de equilibrio para el potencial ϕ.*

Teorema 2.3.3 ([MU03, Theorem 2.4.3])**.** *Sea $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ un potencial sumable y localmente Hölder. Existen constantes A y B positivas y una función continua ψ tal que $A \leq \psi \leq B$, $\mathcal{L}_\phi \psi = e^{P(\phi)} \psi$ y*

$$\int \psi d\mu_\phi = 1,$$

donde μ_ϕ es el estado de Gibbs dado por el Teorema 2.3.1.

Observación 2.3.2. Notar que en el Teorema 2.3.3, como $A \leq \psi \leq B$, se tiene que la medida dada por $d\mu = \psi d\mu_\phi$ es un estado de Gibbs. Además, μ es σ-invariante pues

$$\mathcal{L}_\phi \psi = e^{P(\phi)} \psi \quad y \quad \int \psi d\mu_\phi = 1,$$

lo que implica que, dado $f \in L^1(\mu)$,

$$\begin{aligned} \int f \circ \sigma \, d\mu = \int (f \circ \sigma) \psi \, d\mu_\phi = e^{-P(\phi)} \int (f \circ \sigma) \psi \, d(\mathcal{L}_\phi^* d\mu_\phi) = e^{-P(\phi)} \int \mathcal{L}_\phi((f \circ \sigma)\psi) \, d\mu_\phi \\ = e^{-P(\phi)} \int f \, \mathcal{L}_\phi \psi \, d\mu_\phi = \int f \, \psi \, d\mu_\phi = \int f \, d\mu_\phi. \end{aligned}$$

Luego, la invarianza de μ sigue de la Proposición 1.1.1.

Definición 2.3.3. Dada una función $\phi : \Sigma \to \mathbb{R}$ se define

$$\mathrm{var}_n \phi = \sup\{|\phi(x) - \phi(y)| : x_i = y_i \text{ para } i = 0, \ldots, n-1\}.$$

Decimos que ϕ tiene *variación sumable* si $\sum_{n \geq 2} \mathrm{var}_n \phi < \infty$.

Gracias a la Observación 2.3.2 tenemos la siguiente versión de [Sar15, Theorem 5.5].

Teorema 2.3.4. *Sea $\phi : \Sigma :\to \mathbb{R}$ un potencial con variación sumable que satisface $\sup \phi < \infty$ y $P(\phi) < \infty$, entonces*

1. *ϕ tiene a lo más un estado de equilibrio.*
2. *Este estado de equilibrio, si existe, es el estado de Gibbs σ-invariante dado por el Teorema 2.3.1.*

Observación 2.3.3. Vale mencionar que en [Sar15] este teorema está escrito para una noción de presión levemente diferente llamada la presión de Gurevich en el contexto de un shift de Markov numerable topológicamente mixing. Sin embargo, la noción de presión presentada aquí y la presión de Gurevich coinciden en nuestro contexto. Para más detalles al respecto ver [MU01, Section 7].

Capítulo 3

Transformaciones inducidas

En este capítulo vamos a describir un método que permite construir, a partir de un sistema que preserva la medida, otro sistema diferente denominado sistema inducido. Esto es útil, ya que el sistema inducido suele tener mejores propiedades y se pueden obtener interesantes conclusiones acerca del sistema original solamente analizando el sistema inducido.

3.1. Función de primer retorno

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $f : X \to X$ una transformación que preserva μ. Sea también $E \in \mathcal{B}$ un conjunto tal que $\mu(E) > 0$ y consideremos la medida $\mu|_E$ como la restricción de μ a la σ-álgebra $\mathcal{B}_E := \{A \cap E : A \in \mathcal{B}\}$. En ocasiones vamos a considerar la normalización μ_E, definida por $\mu_E := \mu|_E/\mu(E)$. Notar que μ_E es una medida de probabilidad.

Definimos el *tiempo de primer retorno* a E como la función $m_E : E \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definida por

$$m_E(x) := \min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in E\}$$

si $\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in E\} \neq \emptyset$, de lo contrario $m_E(x) = \infty$. Sin embargo, por el Teorema 1.1.2, esto último ocurre sólo en un conjunto de medida nula.

Consideremos los conjuntos

$$E_\infty := \{x \in E\, f^n(x) \notin E \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$
$$E_\infty^* := \{x \in X : f^n(x) \notin E \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned} E_n &:= \{x \in E : m_E(x) = n\}, \\ E_n^* &:= \{x \in X : x \notin E, \ldots, f^{n-1}(x) \notin E, f^n(x) \in E\}. \end{aligned}$$

Proposición 3.1.1. *Para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ se tiene $E_n \in \mathcal{B}_E$. En particular, el tiempo de primer retorno m_E es $\mathcal{B}_E$-medible.*

Demostración. Notemos que

$$E_n = (E \cap f^{-n}(E)) \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} (E \cap f^{-j}(E))) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Como f es $\mathcal{B}$-medible, por (3.1) tenemos que $E_n \in \mathcal{B}_E$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado,

$$E_\infty = E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Así, $E_\infty \in \mathcal{B}_E$. Ahora, si $A \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, entonces

$$m_E^{-1}(A) = \bigcup_{n \in A} E_n \in \mathcal{B}_E.$$

Esto prueba que m_E es $\mathcal{B}_E$-medible. □

El siguiente teorema establece que el tiempo de primer retorno es μ-integrable y nos entrega el valor de su integral.

Teorema 3.1.2 (Kac)**.** *El tiempo de primer retorno m_E es μ-integrable y*

$$\int_E m_E \, d\mu = 1 - \mu(E_\infty^*).$$

Demostración. Por la Proposición 3.1.1, tenemos que E_n es medible para $n \in \mathbb{N}_0$. Además, observemos que

$$E_n^* = f^{-n}(E) \setminus \bigcup_{j=0}^{n-1} f^{-j}(E)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y

$$E_\infty^* = X \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} f^{-j}(E).$$

Por lo que $E_n^* \in \mathcal{B}_E$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Es claro que $\{E_n\}_{n=1}^\infty \cup \{E_n^*\}_{n=1}^\infty \cup \{E_\infty, E_\infty^*\}$ forma una partición de X, y por el Teorema 1.1.2 se tiene que $\mu(E_\infty) = 0$. Luego,

$$1 = \mu(X) = \mu(E_\infty^*) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(E_n) + \mu(E_n^*)). \tag{3.2}$$

Ahora, notemos que $f^{-1}(E_n^*) = E_{n+1} \sqcup E_{n+1}^*$ para todo $n \geq 1$. En efecto,

$$\begin{aligned} f^{-1}(E_n^*) &= \{x \in X : f(x) \in E_n^*\} \\ &= \{x \in X : f(x) \notin E, \ldots, f^n(x) \notin E, f^{n+1}(x) \in E\} \\ &= \{x \in E : f(x) \notin E, \ldots, f^n(x) \notin E, f^{n+1}(x) \in E\} \sqcup E_{n+1}^* \\ &= E_{n+1} \sqcup E_{n+1}^*. \end{aligned}$$

Como μ es f-invariante,

$$\mu(E_n^*) = \mu(f^{-1}(E_n^*)) = \mu(E_{n+1}^*) + \mu(E_{n+1}) \text{ para todo } n \geq 1. \tag{3.3}$$

Aplicando (3.3) sucesivamente obtenemos que

$$\mu(E_n^*) = \mu(E_m^*) + \sum_{i=n+1}^{m} \mu(E_i) \text{ para todo } m > n. \tag{3.4}$$

De (3.2) tenemos que $\sum_{m=1}^\infty \mu(E_m^*) < \infty$. Luego,

$$\lim_{m \to \infty} \mu(E_m^*) = 0. \tag{3.5}$$

Tomando $m \to \infty$ en (3.4) se tiene que

$$\mu(E_n^*) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Reemplazando esto en (3.2),

$$\begin{aligned} 1 - \mu(E_\infty^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(E_n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(E_i) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \mu(E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} m_E \, d\mu \\ &= \int_E m_E \, d\mu. \end{aligned}$$

Esto termina la demostración. $\square$

Observación 3.1.1. Note que de (3.5) tenemos que $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n^*) = 0$. Esto será útil en la demostración de la Proposición 3.1.4.

Corolario 3.1.3. *Si μ es ergódica, entonces*

$$\int_E m_E \, d\mu = 1.$$

Demostración. Si μ es ergódica, por la parte (iii) del Teorema 1.1.3 se tiene $\mu(E_\infty^*) = 0$. □

Definición 3.1.1. Definimos la *función de primer retorno a E* como la función $F : E \backslash E_\infty \to E$ dada por $F_E(x) := f^{m_E(x)}(x)$.

Observación 3.1.2. Note que por el Teorema 1.1.2 se tiene $\mu_E(E \setminus E_\infty) = 1$.

Proposición 3.1.4. *La medida $\mu|_E$ satisface $\mu|_E(F_E^{-1}(B)) = \mu|_E(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}_E$.*

Demostración. Denotemos por $F = F_E$. Sea $B \in \mathcal{B}_E$, entonces

$$\mu(F^{-1}(B)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F^{-1}(B) \cap E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(f^{-k}(B) \cap E_k). \tag{3.6}$$

Por otro lado, notemos que $f^{-1}(B) \setminus E_1 = f^{-1}(B) \setminus E$, pues $B \subset E$. Luego, como μ es f-invariante, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(f^{-1}(B)) \\ &= \mu(f^{-1}(B) \cap E_1) + \mu(f^{-1}(B) \setminus E_1) \\ &= \mu(f^{-1}(B) \cap E_1) + \mu(f^{-1}(B) \setminus E). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \mu(f^{-1}(B) \setminus E) &= \mu(f^{-1}(f^{-1}(B) \setminus E)) \\ &= \mu(f^{-2}(B) \setminus f^{-1}(E)) \\ &= \mu((f^{-2}(B) \setminus f^{-1}(E)) \cap E_2) + \mu((f^{-2}(B) \setminus f^{-1}(E)) \setminus E_2) \\ &= \mu((f^{-2}(B) \setminus f^{-1}(E)) \cap E_2) + \mu((f^{-2}(B) \setminus f^{-1}(E)) \setminus E) \\ &= \mu(f^{-2}(B) \setminus E_2) + \mu(f^{-2}(B) \setminus (f^{-1}(E) \cup E)), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene porque $E_2 \subset (f^{-1}(E))^c$. Reemplazando esto en (3.7) vemos que

$$\mu(B) = \mu(f^{-1}(B) \cap E_1) + \mu(f^{-2}(B) \cap E_2) + \mu(f^{-2}(B) \setminus (f^{-1}(E) \cup E)).$$

Iterando este argumento se obtiene que

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{n} \mu(f^{-k}(B) \cap E_k) + \mu(f^{-n}(B) \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(E)). \tag{3.8}$$

Observemos que

$$f^{-n}(B) \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(E) \subset f^{-n}(E) \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(E) = E_n^*,$$

y por la Observación 3.1.1 tenemos que $\mu(E_n^*) \to 0$. Por lo tanto, tomando $n \to \infty$ en (3.8), tenemos que

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(f^{-k}(B) \cap E_k).$$

Así, por (3.6) concluímos que

$$\mu|_E(B) = \mu(B) = \mu(F^{-1}(B)) = \mu|_E(F^{-1}(B)) \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B}_E.$$

Esto prueba la Proposición 3.1.4. □

3.2. Transformaciones inducidas

Los resultados de la Sección 3.1 muestran que dado un sistema que preserva la medida $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$ y un conjunto de medida positiva E, podemos construir un sistema que preserva la medida $(E, \mathcal{B}_E, \mu_E, F_E)$. En lo que sigue, veremos que podemos hacer una construcción en la dirección opuesta.

Consideremos $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible y $f : X \to X$ una función medible. Sea E un subconjunto medible de X, $\mathcal{B}_E$ la σ-álgebra sobre E definida en la Sección 3.1 y ν una medida finita sobre $\mathcal{B}_E$ invariante bajo la función F definida por $F(x) = f^{m(x)}(x)$, donde $m : E \to \mathbb{N}$ es una función medible (basta que esté definida sobre un conjunto de medida total en E).

Definición 3.2.1. A la función F definida antes le decimos *transformación inducida por f asociada a m.*

Como mencionamos antes, a partir de ν podemos construir una medida f-invariante ν_m de la siguiente forma: consideramos los conjuntos $E_n = \{x \in E : m(x) = n\}$ y definimos la medida ν_m por

$$\nu_m(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k) \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B}.$$

Proposición 3.2.1. *La medida ν_m es invariante bajo f y satisface*

$$\nu_m(X) = \int_E m \, d\nu.$$

En particular, ν_m es finita si y sólo si la función m es integrable con respecto a ν.

Demostración. Es sencillo verificar que ν_m es una medida. Ahora, probemos la invarianza de ν_m. Dado $B \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}
\nu_m(f^{-1}(B)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(f^{-(n+1)}(B) \cap E_k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\geq n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(f^{-n}(B) \cap E_n).
\end{aligned}$$

Así,

$$\nu_m(f^{-1}(B)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(f^{-n}(B) \cap E_n). \tag{3.9}$$

Por otro lado, como ν es F-invariante,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(f^{-n}(B) \cap E_n) = \nu(F^{-1}(B \cap E)) = \nu(B \cap E) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B \cap E_k).$$

Reemplazando esto en (3.9) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\nu_m(f^{-1}(B)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B \cap E_k) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k) \\
&= \nu(B).
\end{aligned}$$

Esto prueba que ν_m es f-invariante. Para probar la segunda afirmación notemos que

$$\begin{aligned}\nu_m(X) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k>n}\nu(f^{-n}(X)\cap E_k) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k>n}\nu(X\cap E_k)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k>n}\nu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty}k\nu(E_k)\\ &= \int_E m\,d\nu.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\nu_m(X) = \int_E m\,d\nu.$$

□

Observación 3.2.1. Cuando $\int_E m\,d\nu < \infty$, se tiene que $\nu_m/\nu_m(X)$ es una medida de probabilidad f-invariante.

Corolario 3.2.2. *Sea μ una medida de probabilidad f-invariante y F la función de primer retorno de f a E. Si $\nu = \mu|_E$, entonces*

1. *$\nu_m(B) = \nu(B) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}_E$.*
2. *$\nu_m(B) \leq \mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}_E$. Claramente $\nu(B) = \mu(B)$. De la definición de $m = m_E$ es directo que $f^{-n}(B)\cap E_k = \emptyset$ para todo $0 < n < k$. Luego,

$$\begin{aligned}\nu_m(B) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k>n}\nu(f^{-n}(B)\cap E_k)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k>n}\underbrace{\nu(f^{-n}(B)\cap E_k)}_{=0} + \sum_{k>0}\nu(B\cap E_k) \qquad (3.10)\\ &= \sum_{k>0}\nu(B\cap E_k) = \nu(B).\end{aligned}$$

Esto prueba 1. Para probar 2, sea $B \in \mathcal{B}$. Por 1 tenemos que

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mu(B\cap E) + \mu(B\cap E^c) = \nu(B\cap E) + \mu(B\cap E^c)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\nu(B\cap E_k) + \mu(B\cap E^c).\end{aligned} \qquad (3.11)$$

Como μ es f-invariante, $\mu(B \cap E^c) = \mu(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(E^c))$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mu(B \cap E^c) &= \mu(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(E^c)) \\
&= \nu(f^{-1}(B) \cap E \cap f^{-1}(E^c)) + \mu(f^{-1}(B) \cap E^c \cap f^{-1}(E^c)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(f^{-1}(B) \cap E_k \cap f^{-1}(E^c)) + \mu(f^{-1}(B) \cap E^c \cap f^{-1}(E^c))
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Notemos que $f^{-1}(B) \cap E_1 \cap f^{-1}(E^c) = \emptyset$ y $E_k \subset f^{-1}(E^c)$ para todo $k \geq 2$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(f^{-1}(B) \cap E_k \cap f^{-1}(E^c)) = \sum_{k=2}^{\infty} \nu(f^{-1}(B) \cap E_k).$$

Luego, de (3.12) obtenemos

$$\mu(B \cap E^c) = \sum_{k=2}^{\infty} \nu(f^{-1}(B) \cap E_k) + \mu(f^{-1}(B) \cap E^c \cap f^{-1}(E^c))$$

Reemplazando esto en (3.11) se tiene

$$\mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(B \cap E_k) + \sum_{k=2}^{\infty} \nu(f^{-1}(B) \cap E_k) + \mu(f^{-1}(B) \cap E^c \cap f^{-1}(E^c)).$$

Iterando este argumento obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{k>n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k) + \mu\left(f^{-N}(B) \cap \bigcap_{k=0}^{N} f^{-k}(E^c)\right) \\
&\geq \sum_{n=0}^{N} \sum_{k>n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

para todo $N \geq 1$. Tomando $N \to \infty$ en (3.13) sigue que

$$\mu(B) \geq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k) = \nu_m(B).$$

Esto prueba la parte 2. □

Observación 3.2.2. Note que, si ν es una medida F-invariante y $B \subset E$ es medible, entonces por (3.10) se tiene que $\nu_m(B) = \nu(B)$.

El siguiente corolario establece bajo qué condición la medida ν_m coincide con μ.

Corolario 3.2.3. *Bajo las mismas hipótesis del Corolario 3.2.2, se tiene que*

$$\nu_m = \mu \iff \mu(E_\infty^*) = 0.$$

En particular, si μ es ergódica, entonces $\nu_m = \mu$.

Demostración. Por la Proposición 3.2.1 y el Corolario 3.2.2 tenemos que

$$\nu_m(X) = \int_E m\, d\nu = \int_E m\, d\mu = \mu(X) - \mu(E_\infty^*). \tag{3.14}$$

De (3.14) es claro que si $\nu_m = \mu$, entonces $\mu(E_\infty^*) = 0$. Para la otra implicancia, tomemos $B \in \mathcal{B}$. Luego, por (3.14) se tiene que

$$\mu(E_\infty^*) + (\nu_m(B^c) - \mu(B^c)) = \mu(B) - \nu_m(B).$$

Por el Corolario 3.2.2, $\nu_m(B^c) - \mu(B^c) \leq 0$ y $\mu(B) - \nu_m(B) \geq 0$. Por lo tanto,

$$\mu(E_\infty^*) \geq \mu(B) - \nu_m(B) \geq 0.$$

Así, si $\mu(E_\infty^*) = 0$, entonces $\mu(B) - \nu_m(B) = 0$. Esto completa la otra implicacia. Finalmente, si μ es ergódica, por el Teorema 1.1.3 se tiene que $\mu(E_\infty^*) = 0$. Así, por lo probado anteriormente tenemos que $\nu_m = \mu$. □

Terminamos esta sección con un resultado que será útil en los siguientes capítulos.

Proposición 3.2.4. *Sea m el tiempo de primer retorno a E y F la función de primer retorno asociada. Si ν es una medida F-invariante ergódica tal que $\int m d\nu < \infty$, entonces $\mu := \nu_m/\nu_m(X)$ es una medida ergódica.*

Demostración. Sea B un subconjunto medible de X tal que $f^{-1}(B) = B$. Observemos que

$$F^{-1}(B \cap D) = \{x \in D : x \in f^{-m(x)}(B)\} = \{x \in D : x \in B\} = B \cap D.$$

Como ν es ergódica, tenemos que $\nu(B \cap D) \in \{0, 1\}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \frac{1}{\nu_m(X)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(f^{-n}(B) \cap E_k) \right) = \frac{1}{\nu_m(X)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(B \cap E_k) \right) \\ &= \frac{1}{\nu_m(X)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \nu((B \cap D) \cap E_k) \right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Si $\nu(B \cap D) = 0$, de (3.15) obtenemos que $\mu(B) = 0$ pues $\nu((B \cap D) \cap E_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Si $\nu(B \cap D) = 1$, entonces $\nu((B \cap D) \cap E_k) = \nu(E_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, de (3.15) se tiene que

$$\mu(B) = \frac{1}{\nu_m(X)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \nu(E_k) = \frac{1}{\nu_m(X)} \sum_{n=0}^{\infty} n\nu(E_n) = \frac{1}{\nu_m(X)} \int m d\mu = 1,$$

donde la última igualdad se tiene gracias a la Proposición 3.2.1. Por lo tanto, $\mu(B) \in \{0, 1\}$ y concluímos que μ es ergódica. □

3.3. Fórmula de Abramov

En esta sección el resultado principal es conocido como la fórmula de Abramov. Esta relaciona la entropía de un sistema que preserva la medida definido en un espacio de Lebesgue y la entropía del sistema inducido.

Definición 3.3.1. Decimos que dos espacios de medida $(X_1, \mathcal{B}_1, \mu_1)$ y $(X_2, \mathcal{B}_2, \mu_2)$ son *isomorfos* si existe un par de conjuntos de medida total $X_1' \subset X_1$, $X_2' \subset X_2$, y una biyección medible $\pi : X_1' \to X_2'$ con inversa medible, tal que

$$\mu_2(B) = \mu_1(\pi^{-1}(B)) \text{ para todo } B \in \mathcal{B}_2.$$

Definición 3.3.2. Un *espacio de Lebesgue* es un espacio de probabilidad isomorfo a un espacio $(X, \mathcal{L}, \mu)$, donde X es un intervalo, $\mathcal{L}$ es la σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue-medibles y μ es una medida de probabilidad formada por una combinación convexa entre la medida de Lebesgue en X y una medida que consiste de una cantidad a lo más numerable de átomos (i.e. puntos con medida positiva).

Definición 3.3.3. Dado un sistema que preserva la medida $(X, \mathcal{B}, \mu, f)$, un conjunto medible E se dice *generador* si $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(B) = X \mod \mu$.

Observación 3.3.1. Por el Teorema 1.1.3, si μ es ergódica, todo conjunto medible de medida positiva es generador.

Teorema 3.3.1 (Fórmula de Abramov)**.** *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de Lebesgue y $f : X \to X$ una transformación que preserva μ. Si $(E, \mathcal{B}_E, \mu_E, F)$ es el sistema inducido por f en un* *conjunto generador E, con F la función de primer retorno a E, entonces*

$$h_{\mu_E}(F) = \frac{h_\mu(f)}{\mu(E)}.$$

Demostración. En [Sar20, Theorem 4.6] se prueba el caso en que f es invertible, a continuación demostraremos el caso no invertible.

Supongamos que $f : X \to X$ no es invertible. Consideremos $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mu}, \widehat{f})$ su extensión natural, es decir, $\widehat{X} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_0 \in X, f(x_n) = x_{n+1} \,\forall\, n \in \mathbb{Z}\}$ y $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{X}$ se define por $\widehat{f}((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widehat{X}$, $\widehat{\mathcal{B}}$ es la menor σ-álgebra que contiene a los conjuntos de la forma $\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widehat{X} : x_i \in B\}$ para todo $i \leq 0$ y todo $B \in \mathcal{B}$, y $\widehat{\mu}$ es la única medida de probabilidad en $\widehat{\mathcal{B}}$ tal que

$$\widehat{\mu}(\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widehat{X} : x_i \in B_i\}) = \mu(B_i) \tag{3.16}$$

para todo $i \leq 0$ y $B_i \in f^{-i}(\mathcal{B})$ (para más detalles ver [Sar20, Section 1.6.3]).

Es claro que $\widehat{f}$ es invertible. Además, es bien conocido que, dado que X es un espacio de Lebesgue,

$$h_{\widehat{\mu}}(\widehat{f}) = h_\mu(f). \tag{3.17}$$

Sea $\tilde{F}$ la función de primer retorno al conjunto

$$[E] := \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widehat{X} : x_0 \in E\}.$$

Como E es generador es sencillo verificar que $[E]$ es generador. Luego, dado que $\widehat{f}$ es invertible, por la fórmula de Abramov para el caso invertible, (3.16) y (3.17),

$$h_{\widehat{\mu}_{[E]}}(\tilde{F}) = \frac{1}{\widehat{\mu}([E])} h_{\widehat{\mu}}(\widehat{f}) = \frac{1}{\mu(E)} h_\mu(f). \tag{3.18}$$

Ahora, consideremos F la función de primer retorno a E y $(\widehat{E}, \widehat{\mathcal{B}}_E, \widehat{\mu}_E, \widehat{F})$ su extensión natural. Entonces $\widehat{E} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n \in E, F(x_n) = x_{n+1} \,\forall\, n \in \mathbb{Z}\}$. Sea $\pi : \widehat{E} \to [E]$ dada por

$$\begin{aligned} &\pi((\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)) \\ &= (\ldots, x_{-1}, f(x_{-1}), \ldots f^{m(x_{-1})-1}(x_{-1}), x_0, f(x_0), \ldots, f^{m(x_0)-1}(x_0), x_1, \ldots). \end{aligned}$$

Es decir, entre x_n y x_{n+1}, agregamos el segmento de órbita previo al retorno de x_n al conjunto

E. Notemos que si $B \subset [E]$ es medible, entonces

$$\pi^{-1}(B) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \widehat{E} : x_0 \in B\},$$

y este último conjunto es medible por la construcción de la extensión natural. Así, π es medible. Por construcción tenemos que $\pi \circ \widehat{F} = \tilde{F} \circ \pi$ y que π es inyectiva. Además,

$$[E] \setminus \pi(\hat{E}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in [E] : x_n \notin E \quad \forall\, n \leq -k\}}_{:=B_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k. \tag{3.19}$$

Fijemos $k \geq 1$ y consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B_k$. Es fácil notar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\widehat{f})^{\ell}((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \notin B_k$ para todo $\ell \geq N$. Por el Teorema 1.1.2 se tiene que $\widehat{\mu}(B_k) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Sigue de (3.19) que $\widehat{\mu}_E(\pi(\widehat{E})) = 1$ y por lo tanto π define un isomorfismo. Luego,

$$h_{\widehat{\mu}_{[E]}}(\tilde{F}) = h_{\widehat{\mu}_E}(\widehat{F}) = h_{\mu_E}(F).$$

Reemplanzando en (3.18) obtenemos que

$$h_{\mu_E}(F) = \frac{\mu(E)}{h_{\mu}(f)}.$$

Esto completa la demostración. $\square$

Capítulo 4

Un punto fijo indiferente: caso simbólico

Consideremos el full-shift en dos símbolos $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ (ver Ejemplo 1.2), y la función shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ dada por $\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Sea $M_0 := [1]$ y

$$M_n := \{x \in \Sigma_2 : x_i = 0 \text{ para } 0 \leq i \leq n-1, x_n = 1\},$$

para cada $n \geq 1$. Claramente la colección $\{M_n\}_{n\geq 0}$ forma una partición de $\Sigma_2 \setminus \{\overline{0}\}$, donde $\overline{0}$ denota a la sucesión constante 0.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números reales tal que $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Definimos el potencial $\phi : \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ como sigue,

$$\phi(x) = \begin{cases} a_n & \text{si } x \in M_n, \\ 0 & \text{si } x = \overline{0}. \end{cases}$$

Queremos estudiar la existencia y unicidad de estados de equilibrio para el potencial ϕ utilizando las herramientas de los capítulos 2 y 3. Como mencionamos antes, este problema ya fue abordado por Hofbauer [Hof77]. Los principales resultados son los Teoremas 4.1.1, 4.2.1 y 4.2.3.

Consideremos el conjunto $D = [1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n}(\overline{0})$. Sea $m : \Sigma_2 \setminus \{\overline{0}\} \to \mathbb{N}$ dada por

$$m(x) := \inf\{n \in \mathbb{N} : \sigma^n(x) \in [1]\}.$$

Observe que $m|_D$ es el tiempo de primer retorno a D. Sea $F : D \to D$ la función de primer retorno dada por $F(x) = \sigma^{m(x)}(x)$ para cada $x \in D$. Note que para todo $x \in D$, $F(x)$ está bien definida.

Definamos $A_0 := [11]$, y para todo $n \geq 1$, el cilindro

$$A_n := \{x \in D : x_0 = x_{n+1} = 1, x_j = 0 \text{ para } j = 1, \ldots, n\}.$$

Observemos que $\{A_n\}_{n\geq 0}$ forma una partición de D y

$$x \in A_n \iff m(x) = n + 1.$$

Es fácil ver que (D, F) es conjugado al full-shift con alfabeto numerable (Σ, σ), donde

$$\Sigma = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} : x_n \in \mathbb{N}_0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0\},$$

y $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ es la función shift. De hecho, la conjugación está dada por la función $\pi : D \to \Sigma$ definida como

$$\pi(x) = (m(F^k(x)) - 1)_{k\in\mathbb{N}_0},$$

y notemos que $\pi^{-1}([k]) = A_k$ para todo $k \geq 0$. Gracias a esto podemos aplicar los resultados del Capítulo 2 al sistema (D, F).

Como $\pi^{-1}([n]) = A_n$ para todo $n \geq 0$, los conjuntos A_n corresponden a los cilindros de largo 1 bajo la conjugación. Para ahorrar notación escribiremos $[i_0 \ldots i_{n-1}]_D$ para referirnos al conjunto

$$A_{i_0} \cap F^{-1}(A_{i_1}) \cap \ldots \cap F^{-(n-1)}(A_{i_{n-1}}).$$

Estos conjuntos corresponden a los cilindros de largo n bajo la conjugación π.

Definimos, para cada $p \in \mathbb{R}$, el *potencial inducido* $\Phi_p : D \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi_p(x) := S_{m(x)}\phi(x) - pm(x) = \sum_{j=0}^{m(x)-1} \phi(\sigma^j(x)) - pm(x).$$

Vamos a denotar por $\mathcal{P}(p)$ a la presión del potencial Φ_p. Recordemos que por (2.1) se tiene que

$$Z_n(\Phi_p) := \sum_{(i_0,\ldots,i_{n-1})\in\mathbb{N}_0^n} \exp(\sup S_n\Phi_p|_{[i_0\ldots i_{n-1}]_D}).$$

Luego, por (2.2) tenemos que

$$\mathcal{P}(p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n(\Phi_p).$$

Lema 4.0.1. *Sea $\psi : \Sigma \to \mathbb{R}$ un potencial tal que $\psi|_{[n]}$ es constante para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces,*

$$Z_n(\psi) = (Z_1(\psi))^n \tag{4.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular,

$$P(\psi) = \log Z_1(\psi).$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Notemos que, si $x \in [i_0 \dots i_{n-1}]$, entonces

$$S_n\psi(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \psi(F^j(x)) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \psi|_{[i_j]}.$$

Así, por (2.1),

$$\begin{aligned} Z_n(\psi) &= \sum_{(i_0,\dots,i_{n-1})\in\mathbb{N}_0^n} \exp(\sup S_n\psi|_{[i_0\dots i_{n-1}]}) \equiv \sum_{(i_0,\dots,i_{n-1})\in\mathbb{N}_0^n} \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \psi|_{[i_j]}\right) \\ &= \sum_{i_0\in\mathbb{N}_0} \exp(\psi|_{[i_0]}) \cdots \sum_{i_{n-1}\in\mathbb{N}_0} \exp(\psi|_{[i_{n-1}]}) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \exp(\psi|_{[i_k]})\right)^n \\ &\equiv (Z_1(\psi))^n. \end{aligned}$$

Esto prueba (4.1). Finalmente, por (2.2),

$$P(\psi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Z_n(\psi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(Z_1(\psi))^n = \log Z_1(\psi).$$

□

En lo que sigue consideramos la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dada por $s_n := a_0 + \ldots + a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Proposición 4.0.2. *Para todo $p \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$Z_1(\Phi_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(s_n - p(n+1)). \tag{4.2}$$

En particular,

$$\mathcal{P}(p) = \log\left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(s_n - p(n+1))\right).$$

Demostración. Sea $p \in \mathbb{R}$. Primero, observemos que $\Phi_p|_{A_n}$ es constante para cada $n \in \mathbb{N}_0$. En efecto,

$$\Phi_p|_{A_n} = \sum_{j=0}^{n} (\varphi \circ \sigma^j)|_{A_n} - p(n+1) \equiv s_n - p(n+1). \tag{4.3}$$

Luego,

$$Z_1(\Phi_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\sup(\Phi_p|_{A_n})) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(s_n - p(n+1)),$$

y obtenemos (4.2). Ahora, por el Lema 4.0.1,

$$\mathcal{P}(p) = \log Z_1(\Phi_p) = \log\left(\sum_{n=0}^{\infty} \exp(s_n - p(n+1))\right).$$

Esto completa la demostración. $\square$

El siguiente teorema establece una relación entre los estados de equilibrio del potencial $\Phi_{P(\phi)}$ y los estados de equilibrio para el potencial ϕ. Aquí, $P(\phi)$ denota la presión del potencial ϕ.

Teorema 4.0.3. *Sea μ un estado de equilibrio para el potencial $\Phi_{P(\phi)}$ tal que $\int m\, d\mu < \infty$. Si $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$, entonces $\mu_m/\mu_m(\Sigma_2)$ es un estado de equilibrio para ϕ.*

Demostración. Por la Observación 3.2.1 se tiene que $\nu = \mu_m/\mu_m(\Sigma_2)$ es una medida de probabilidad σ-invariante. Como μ es un estado de equilibrio para $\Phi_{P(\phi)}$, se tiene que

$$0 = \mathcal{P}(P(\phi)) = h_\mu(F) + \int \Phi_{P(\phi)}\, d\mu. \tag{4.4}$$

Notemos que $\nu_D = \mu$. En efecto, si $B \subset D$ es medible, por la Observación 3.2.2 tenemos que

$$\mu_m(B) = \mu(B). \tag{4.5}$$

Luego,

$$(\nu_D)(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(D)} = \frac{\mu_m(B)}{\mu_m(D)} = \frac{\mu(B)}{\mu(D)} = \mu(B).$$

Así, por el Teorema 3.3.1 se tiene que

$$h_\mu(F) = \frac{h_\nu(\sigma)}{\nu(D)}. \tag{4.6}$$

Por otro lado,

$$\int \Phi_{P(\phi)}\, d\mu = \int S_{m(x)}\phi(x)\, d\mu(x) - P(\phi) \int m\, d\mu.$$

Por la Proposición 3.2.1 y (4.5),

$$\int m\, d\mu = \mu_m(\Sigma_2) = \frac{\mu_m(D)}{\nu(D)} = \frac{\mu(D)}{\nu(D)} = \frac{1}{\nu(D)}. \tag{4.7}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\int S_{m(x)}\phi(x)\, d\mu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} S_{n+1}\phi(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} \left(\sum_{k=0}^{n} \phi \circ \sigma^k \right) d\mu \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int \left(\sum_{k=0}^{n} \phi \circ \sigma^k \right) d\mu|_{A_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \int \phi \circ \sigma^k d\mu|_{A_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \int \phi\, d(\mu|_{A_n} \circ \sigma^{-k}) = \int \phi\, d \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu|_{A_n} \circ \sigma^{-k} \right) \\
&= \int \phi\, d \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \mu|_{A_k} \circ \sigma^{-n} \right) = \int \phi d\mu_m \\
&= \mu_m(\Sigma_2) \int \phi d\nu = \frac{1}{\nu(D)} \int \phi d\nu,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde la última igualdad sigue de (4.7). Reemplazando (4.6), (4.8) y (4.7) en (4.4) obtenemos que

$$0 = \frac{1}{\nu(D)}(h_\nu(\sigma) + \int \phi\, d\nu - P(\phi)).$$

Esto implica que

$$P(\phi) = h_\nu(\sigma) + \int \phi\, d\nu.$$

Por lo tanto, ν es un estado de equilibrio para el potencial ϕ. Esto concluye la demostración.

□

Consideremos la *función de primera entrada* $L : [0] \setminus \{\overline{0}\} \to [1]$ dada por

$$L(x) = \sigma^{m(x)}(x),$$

y para cada $p \in \mathbb{R}$ e $y \in [1]$ definimos

$$L_p(y) := \sum_{x \in L^{-1}(y)} \exp(S_{m(x)}\phi(x) - pm(x)). \tag{4.9}$$

Sigue de la Proposición 4.0.2 que, para cada $y \in [1]$,

$$L_p(y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \exp(S_n\phi|_{\underbrace{[0\ldots01]}_{n \text{ ceros}}} - np) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \exp((a_1 + \ldots + a_n) - np) = e^{p-a_0} Z_1(\Phi_p). \tag{4.10}$$

El siguiente resultado lo escribiremos en un contexto más general, pues lo utilizaremos nuevamente en el Capitulo 6.

Lema 4.0.4. *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $\Sigma_k = \{0, \ldots, k-1\}^{\mathbb{N}_0}$. Dado un potencial $\psi : \Sigma_k \to \mathbb{R}$ se tiene que*

$$P(\psi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{P \in \mathcal{P}_n} \exp(\inf_{x \in P} S_n\psi(x)) \right). \tag{4.11}$$

En particular, para todo $y \in \Sigma_k$,

$$P(\psi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{x \in \sigma^{-n}(y)} \exp(S_n\psi(x)) \right). \tag{4.12}$$

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{[0], \ldots [k-1]\}$ y $\mathcal{P}_n = \bigvee_{j=0}^{n-1} \sigma^{-j}(\mathcal{P})$ para $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que

$$P(\psi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{P \in \mathcal{P}_n} \exp(\sup_{x \in P} S_n\psi(x)) \right).$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como ψ es uniformemente continua existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\psi(x) - \psi(y)| < \varepsilon. \tag{4.13}$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, se tiene $\operatorname{diam} P < \delta$ para todo $P \in \mathcal{P}_n$. Entonces, dado $P \in \mathcal{P}_n$ con $n > N$, y $x_1, x_2 \in P$, por (4.13) se tiene que

$$\begin{aligned} |S_n\psi(x_1) - S_n\psi(x_2)| &\leq \sum_{j=0}^{n-N-1} |\psi(\sigma^j(x_1)) - \psi(\sigma^j(x_2))| + \sum_{j=n-N}^{n-1} |\psi(\sigma^j(x_1)) - \psi(\sigma^j(x_2))| \\ &\leq (n-N)\varepsilon + 2N \sup|\psi|. \end{aligned}$$

Así, si $n > N$ y $P \in \mathcal{P}_n$,

$$\sup_{x\in P} S_n\psi(z) - \inf_{x\in P} S_n\psi(x) \leq (n-N)\varepsilon + 2N\sup|\psi|.$$

Luego, dado $n > N$ tenemos que

$$\frac{1}{n}\log\left(\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\exp(\sup_{x\in P} S_n\psi(x))\right) \leq \frac{(n-N)\varepsilon + 2N\sup|\psi|}{n} + \frac{1}{n}\log\left(\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\exp(\inf_{x\in P} S_n\psi(x))\right).$$

Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\exp(\sup_{x\in P} S_n\psi(x))\right) \leq \varepsilon + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\exp(\inf_{x\in P} S_n\psi(x))\right).$$

Tomando $\varepsilon \to 0$ se obtiene (4.11).

Finalmente, notando que, para cada $y \in \Sigma_k$ y cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\exp(\inf_{x\in P} S_n\psi(x))\right) &\leq \frac{1}{n}\log\left(\sum_{x\in\sigma^{-n}(y)}\exp(S_n\psi(x))\right)\\ &\leq \frac{1}{n}\log\left(\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\exp(\sup_{x\in P} S_n\psi(x))\right),\end{aligned}$$

obtenemos (4.12). □

Teorema 4.0.5. *Se satisface*

$$P(\phi) = \inf\{p \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(p) \leq 0\}. \tag{4.14}$$

Además,

$$\mathcal{P}(p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = P(\phi). \tag{4.15}$$

Demostración. Sea $x \in D$. Por el Lema 4.0.4 se tiene que

$$P(\phi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{y\in\sigma^{-n}(x)} e^{S_n\phi(y)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{\omega\in\{0,1\}^n} e^{S_n\phi(\omega x)}\right). \tag{4.16}$$

Por (4.16) se tiene que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega \in \{0,1\}^n} e^{S_n\phi(\omega x)}$$

es divergente para $p < P(\phi)$ y convergente para $p > P(\phi)$.

Notemos que dado $\ell \in \mathbb{N}$, todo $y \in F^{-\ell}(x)$ cumple

$$F^{\ell}(y) = \sigma^{m(y)+\ldots+m(F^{\ell-1}(y))}(y).$$

Entonces, por el Lema 4.0.1,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega \in \{0,1\}^{n-1}} e^{S_n\phi(1\omega x)} &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{y \in F^{-\ell}(x)} e^{-p(m(y)+\ldots+m(F^{\ell-1}(y)))} e^{S_{m(y)+\ldots+m(F^{\ell-1}(y))}\phi(y)} \\ &\equiv \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{(i_0,\ldots,i_{\ell-1}) \in \mathbb{N}_0^n} \exp\left(\sum_{j=0}^{\ell-1} (\Phi_p \circ F^j)|_{[i_0 \ldots i_{\ell-1}]_D}\right) \\ &\equiv \sum_{\ell=1}^{\infty} Z_\ell(\Phi_p) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (Z_1(\Phi_p))^{\ell}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega \in \{0,1\}^n} e^{S_n\phi(\omega x)} \geq \sum_{\ell=1}^{\infty} (Z_1(\Phi_p))^{\ell}. \tag{4.18}$$

Es claro que

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega \in \{0,1\}^n} e^{S_n\phi(\omega x)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega \in \{0,1\}^{n-1}} e^{S_n\phi(1\omega x)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega \in \{0,1\}^{n-1}} e^{S_n\phi(0\omega x)}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Luego, de (4.17) sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega \in \{0,1\}^{n-1}} e^{S_n\phi(1\omega x)} = \sum_{\ell=1}^{\infty} (Z_1(\Phi_p))^{\ell}. \tag{4.20}$$

Por otro lado, por (4.10) y (4.17) tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega\in\{0,1\}^{n-1}} e^{S_n\phi(0\omega x)} = \\
&L_p(x) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{y\in L^{-1}(F^{-\ell}(x))} e^{-p(m(y))+m(L(y))+\dots m(F^{\ell-1}(L(y)))} e^{S_{m(y))+m(L(y))+\dots m(F^{\ell-1}(L(y)))}\phi(y)} \\
&\leq L_p(x) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{z\in F^{-\ell}(x)} e^{-p(m(z)+\dots+m(F^{\ell-1}(z)))} e^{S_{m(z)+\dots+m(F^{\ell-1}(z)))}\phi(z)} L_p(z) \\
&\leq e^{p-a_0} Z_1(\Phi_p) + e^{p-a_0} Z_1(\Phi_p) \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{z\in F^{-\ell}(x)} e^{-p(m(z)+\dots+m(F^{\ell-1}(z)))} e^{S_{m(z)+\dots+m(F^{\ell-1}(z)))}\phi(z)} \\
&= e^{p-a_0} \left(Z_1(\Phi_p) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (Z_1(\Phi_p))^{\ell+1} \right).
\end{aligned}
$$

Así,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\omega\in\{0,1\}^{n-1}} e^{S_n\phi(0\omega x)} \leq e^{p-a_0} \left(Z_1(\Phi_p) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (Z_1(\Phi_p))^{\ell+1} \right). \tag{4.21}
$$

Reemplazando (4.20) y (4.21) en (4.19) obtenemos que

$$
\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega\in\{0,1\}^{n}} e^{S_n\phi(\omega x)} \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} (Z_1(\Phi_p))^{\ell} + e^{p-a_0} \left(Z_1(\Phi_p) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (Z_1(\Phi_p))^{\ell+1} \right). \tag{4.22}
$$

Por lo tanto, de (4.18) y (4.22) tenemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{\infty} (Z_1(\Phi_p))^{\ell} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega\in\{0,1\}^{n}} e^{S_n\phi(\omega x)} \\
&\leq e^{p-a_0} \sum_{\ell=1}^{\infty} (Z_1(\Phi_p))^{\ell+1} + e^{p-a_0} Z_1(\Phi_p) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (Z_1(\Phi_p))^{\ell}.
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Luego, si $\mathcal{P}(p) \geq 0$, por el Lema 4.0.2 se tiene que $Z_1(\Phi_p) \geq 1$. Por (4.23) tenemos que

$$
\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega\in\{0,1\}^{n}} e^{S_n\phi(\omega x)} = \infty,
$$

y esto implica que $p \leq P(\phi)$.

Ahora, si $\mathcal{P}(p) < 0$, por el Lema 4.0.2 se tiene $Z_1(p) < 1$. Sigue de (4.23) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega \in \{0,1\}^n} e^{S_n\phi(\omega x)} < \infty,$$

y concluímos que $p \geq P(\phi)$. Por lo tanto, se tiene que $p \leq P(\phi)$ para cada $p \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{P}(p) \geq 0$, y $p \geq P(\phi)$ para cada $p \in \mathbb{R}$ cumpliendo $\mathcal{P}(p) < 0$. Esto implica que

$$\begin{aligned} p > P(\phi) \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{P}(p) < 0, \\ p < P(\phi) \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{P}(p) \geq 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Consideremos $p \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{P}(p) \leq 0$.

Si $\mathcal{P}(p) < 0$, entonces $p \geq P(\phi)$ gracias a (4.24).

Si $\mathcal{P}(p) = 0$, supongamos que $p < P(\phi)$. Entonces existe $p < q < P(\phi)$. Luego, como $p \mapsto \mathcal{P}(p)$ es estrictamente decreciente donde es finita, tenemos que

$$\mathcal{P}(q) < \mathcal{P}(p) = 0. \tag{4.25}$$

Pero como $q < P(\phi)$, de (4.24) se tiene que $\mathcal{P}(q) \geq 0$, lo cual contradice (4.25). Por otro lado, si se tuviera $p > P(\phi)$, entonces existiria $p > q > P(\phi)$. Luego,

$$\mathcal{P}(q) > \mathcal{P}(p) = 0,$$

lo cual contradice (4.24). Por lo tanto, $p = \mathcal{P}(\phi)$. Note que esto prueba (4.15).

Lo anterior demuestra que $P(\phi)$ es una cota inferior de $\{p \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(p) \leq 0\}$. Finalmente, (4.24) implica que $\mathcal{P}(P(\phi) + \varepsilon) < 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto,

$$P(\phi) = \inf\{p \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(p) \leq 0\}.$$

□

4.1. Existencia de un único estado de equilibrio

El objetivo de esta sección es probar el Teorema 4.1.1, el cual establece una hipótesis sobre la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ que es suficiente para asegurar la existencia de un único estado de equilibrio para el potencial ϕ.

Teorema 4.1.1. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} > 1$, *entonces existe un único estado de equilibrio para el potencial* ϕ.

Para demostrar el Teorema 4.1.1 probaremos la existencia de un único estado de equilibrio para el potencial inducido $\Phi_{P(\phi)}$, y utilizaremos el Teorema 4.0.2 para concluir la existencia de un estado de equilibrio para ϕ. Para la unicidad, supondremos que existen dos estados de equilibrio distintos para ϕ, y a partir de eso construiremos dos estados de equilibrio distintos para el potencial inducido $\Phi_{P(\phi)}$, lo cual va a contradecir la Proposición 4.1.4.

Para aplicar los resultados del Capítulo 2 será importante estudiar la convergencia de

$$Z_1(\Phi_p) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(s_n - p(n+1)).$$

Observemos que $Z_1(\Phi_p) < \infty$ para todo $p > 0$. En efecto,

$$\frac{\exp(s_{n+1} - p(n+2))}{\exp(s_n - p(n+1))} = \exp(a_{n+1} - p) \xrightarrow{n\to\infty} e^{-p} < 1. \tag{4.26}$$

Proposición 4.1.2. *Si* $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} > 1$, *existen* p_1 *y* p_2 *positivos tales que*

$$0 < \mathcal{P}(p_1) < \infty \quad y \quad -\infty < \mathcal{P}(p_2) < 0.$$

En particular, se tiene que $P(\phi) > 0$ *y* $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$.

Demostración. Si $p > 0$, por (4.26) $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(s_n - p(n+1)) < \infty$. Ahora, definamos la sucesión de funciones $f_k : \mathbb{N}_0 \to [0, \infty)$ por $f_k(n) = \exp(s_n - p_k(n+1))$, donde $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ es estrictamente decreciente y $p_k \to 0$. Entonces $f_k \leq f_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ y $f_k(n) \xrightarrow{k\to\infty} e^{s_n}$. Luego, por el Teorema de convergencia monótona,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(s_n - p_k(n+1)) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_k(n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} > 1.$$

Por lo tanto, $\mathcal{P}(p_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{P}(0) > 0$. Por otro lado, si definimos f_k de la misma manera, pero consideramos una sucesión creciente $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ con $p_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. Entonces $f_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ y $f_k \geq f_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Por el Teorema de convergencia monótona para una sucesión decreciente de funciones tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(s_n - p_k(n+1)) = 0,$$

y por lo tanto, $\mathcal{P}(p_k) \xrightarrow{k\to\infty} -\infty$. Así, existen p_1 y p_2 positivos tales que $0 < \mathcal{P}(p_1) < \infty$ y $0 > \mathcal{P}(p_2) > -\infty$. Como $\mathcal{P}(p)$ es estrictamente decreciente y continua en el conjunto de los $p \in \mathbb{R}$ tales que $\mathcal{P}(p) < \infty$, por el Teorema 4.0.5 concluímos que $P(\phi) > p_1 > 0$ y $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$. □

Proposición 4.1.3. *Si $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_k} \geq 1$, entonces existe un único estado de Gibbs F-invariante para el potencial inducido $\Phi_{P(\phi)}$.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.1 basta probar que el potencial $\Phi_{P(\phi)}$ es localmente Hölder y satisface

$$Z_1(\Phi_{P(\phi)}) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\sup(\Phi_{P(\phi)}|_{A_n}) < \infty.$$

Como $\Phi_{P(\phi)}|_{A_n}$ es constante para todo $n \geq 0$ se tiene directamente que $\Phi_{P(\phi)}$ es localmente Hölder. Ahora, notemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(\sup(\Phi_{P(\phi)}|_{A_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(s_n - P(\phi)(n+1)) = Z_1(\Phi_{P(\phi)}).$$

Luego, si $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} = 1$, entonces $\mathcal{P}(0) = 0$. El Teorema 4.0.5 implica que $P(\phi) \leq 0$. Además, por el Principio variacional se tiene que $P(\phi) \geq 0$, pues

$$h_{\delta_{\overline{0}}}(\sigma) + \int \phi \, d\delta_{\overline{0}} = 0.$$

Así, concluímos que $P(\phi) = 0$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(\sup(\Phi_{P(\phi)}|_{A_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\sup(\Phi_0|_{A_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} = 1 < \infty.$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} > 1$, por la Proposición 4.1.2 se tiene que $P(\phi) > 0$. Luego, por (4.26) se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(\sup(\Phi_{P(\phi)}|_{A_n}) < \infty.$$

Esto completa la demostración. □

Proposición 4.1.4. *Supogamos que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} > 1$ y sea μ el único estado de Gibbs F-invariante para $\Phi_{P(\phi)}$. Entonces μ es el único estado de equilibrio para $\Phi_{P(\phi)}$. Además, se tiene que $\int m d\mu < \infty$.*

Demostración. Denotemos por $p = P(\phi)$. Como μ es un estado de Gibbs y $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$, existe $C > 0$ tal que, para cada $n \geq 0$ y $x \in A_n$, se tiene

$$C^{-1} \leq \frac{\mu(A_n)}{\exp(\Phi_p(x))} \leq C.$$

Sigue que

$$\mu(A_n) \leq C \exp(\Phi_p(x)) = C(\exp(s_n - p(n+1))).$$

Entonces,

$$\int m \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} m \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\mu(A_n) \leq C \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\exp(s_n - p(n+1))).$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} > 1$, por la Proposición 4.1.2 existe $0 < \delta < p$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(s_n - \delta(n+1)) \in (1, \infty).$$

Luego,

$$\int m \, d\mu \leq C \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\exp(s_n - p(n+1))) = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\exp((p-\delta)(n+1))} \exp(s_n - \delta(n+1)).$$

Como $p - \delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{n+1}{\exp((p-\delta)(n+1))} \leq 1$ para todo $n \geq N$. Sigue que

$$\int m \, d\mu \leq C \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{n+1}{\exp((p-\delta)(n+1))} (\exp(s_n - \delta(n+1))) + \sum_{n=N}^{\infty} \exp(s_n - \delta(n+1)) \right) < \infty.$$

Para concluir, por el Teorema 2.3.2 es suficiente verificar que $\int \Phi_p d\mu > -\infty$. Para esto, notemos que

$$\begin{aligned} \int \Phi_p d\mu &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} \Phi_p d\mu \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \Phi_p|_{A_n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)(s_n - p(n+1)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) s_n - p \int m d\mu \geq (\inf_{n \in \mathbb{N}_0} a_n) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\mu(A_n) - p \int m d\mu \qquad (4.27) \\ &= ((\inf_{n \in \mathbb{N}_0} a_n) - p) \int m d\mu > -\infty. \end{aligned}$$

Así, se tiene que μ es el único estado de equilibrio para $\Phi_{P(\phi)}$. $\square$

Por el Teorema 4.0.3 se tiene que $\nu := \mu_m/\mu_m(\Sigma_2)$ es un estado de equilibrio para el potencial ϕ. Para completar la demostración del Teorema 4.1.1, sólo falta probar la unicidad de dicho estado de equilibrio. Para eso, necesitaremos los siguientes resultados.

Lema 4.1.5. *Sea ρ una medida σ-invariante. Si $\rho \neq \delta_{\overline{0}}$ entonces $\rho([1]) > 0$.*

Demostración. Procederemos probando el contrarrecíproco. Supongamos que $\rho([1]) = 0$. Entonces, como ρ es σ-invariante,

$$1 = \rho([0]) = \rho(\sigma^{-1}([0])) = \rho([00]) + \rho([10]) = \rho([00]).$$

Luego, por inducción se obtiene que $\rho([0^n]) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde 0^n denota la palabra compuesta por n ceros. Esto implica que,

$$\rho(\{\overline{0}\}) = \rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}[0^n]\right) = \lim_{n\to\infty} \rho([0^n]) = 1.$$

Por lo tanto, $\rho = \delta_{\overline{0}}$. □

Corolario 4.1.6. *Sea ρ una medida σ-invariante. Si $\rho(\{\overline{0}\}) = 0$, entonces $\rho(D) > 0$.*

Demostración. Como $\rho(\{\overline{0}\}) = 0$, necesariamente $\rho \neq \delta_{\overline{0}}$. Por el Lema 4.1.5 tenemos que $\rho([1]) > 0$. Como $\rho(\{\overline{0}\}) = 0$ se tiene $\rho(\sigma^{-n}(\overline{0})) = 0$ para todo $n \geq 1$, pues ρ es σ-invariante. Luego,

$$\rho(D) = \rho\left([1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma^{-n}(\overline{0})\right) = \rho([1]) > 0.$$

□

Proposición 4.1.7. *Si $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$ y ρ es un estado de equilibrio ergódico para ϕ tal que $\rho(D) > 0$, entonces $\rho_D = \rho|_D/\rho(D)$ es un estado de equilibrio para $\Phi_{P(\phi)}$. Además, existe a lo más un estado de equilibrio ergódico ρ tal que $\rho(D) > 0$.*

Demostración. Como $\rho(D) > 0$, entonces ρ_D es una medida de probabilidad F-invariante. Ahora, por el Teorema 3.3.1,

$$h_{\rho_D}(F) = \frac{h_\rho(\sigma)}{\rho(D)}. \tag{4.28}$$

Además, como ρ es ergódica, sigue del Teorema 3.1.2 que

$$\int m d(\rho_D) = \frac{1}{\rho(D)} \int m d\rho = \frac{1}{\rho(D)}, \tag{4.29}$$

y por (4.8),

$$\int S_{m(x)}\phi(x)d(\rho_D)(x) = \frac{1}{\rho(D)}\int \phi d\rho. \tag{4.30}$$

Así, por (4.28), (4.29), (4.30) se tiene,

$$\begin{aligned} h_{\rho_D}(F) + \int \Phi_{P(\phi)} d\rho_D &= h_{\rho_D}(F) + \int S_{m(x)}\phi(x)d\rho_D(x) - P(\phi)\int m d\rho_D \\ &= \frac{1}{\rho(D)} \underbrace{\left(h_\rho(\sigma) + \int \phi d\rho - P(\phi)\right)}_{=0} \\ &= 0 = \mathcal{P}(P(\phi)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, ρ_D es un estado de equilibrio para el potencial $\Phi_{P(\phi)}$.

Ahora, supongamos que ρ y η son estados de equilibrio ergódicos distintos con $\rho(D) > 0$ y $\eta(D) > 0$. Entonces ρ_D y η_D son estados de equilibrio para $\Phi_{P(\phi)}$.

Como ρ y η son medidas ergódicas distintas, deben ser mutuamente singulares, es decir, existen conjuntos medibles y disjuntos $A, B \subset \Sigma_2$ tales que $\rho(A) = 1$ y $\eta(B) = 1$. Luego, $\rho(A \cap D) = \rho(D) > 0$, y $\eta(A \cap D) \leq \eta(A) = 0$. Esto implica que $\rho_D(A \cap D) > 0$ y $\eta_D(A \cap D) = 0$. Por lo tanto ρ_D y η_D son dos estados de equilibrio distintos para el potencial $\Phi_{P(\phi)}$, lo cual contradice la Proposición 4.1.4. $\square$

Ahora podemos completar la demostración del Teorema 4.1.1.

Supongamos que $\rho \neq \nu$ es un estado de equilibrio ergódico para ϕ. Como $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} > 1$, se tiene que $P(\phi) > 0$ y $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$ gracias a la Proposición 4.1.2 . Luego $\rho \neq \delta_{\overline{0}}$, y como $\delta_{\overline{0}}$ es ergódica, se tiene que ρ y $\delta_{\overline{0}}$ son mutuamente singulares, por lo tanto $\rho(\{\overline{0}\}) = 0$. Entonces, por el Corolario 4.1.6 tenemos que $\rho(D) > 0$.

Como μ es ergódica (ver Teorema 2.3.1), por la Proposición 3.2.4 sabemos que la medida ν es ergódica. El argumento anterior implica que $\nu(D) > 0$, y por la Proposición 4.1.7 obtenemos que $\rho = \nu$, y esto es una contradicción. Esto prueba que ν es el único estado de equilibrio ergódico para ϕ. Finalmente, por la Proposición 1.4.5, lo anterior implica que ν es el único estado de equilibrio para ϕ. Esto completa la demostración del Teorema 4.1.1. $\square$

4.2. Existencia de más de un estado de equilibrio

En esta sección veremos que el potencial ϕ también nos entrega ejemplos en los que no hay un único estado de equilibrio. Cuando $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} = 1$, se tiene que $\mathcal{P}(0) = 0$, y por lo tanto

$$P(\phi) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{P}(P(\phi)) = 0, \tag{4.31}$$

en virtud del Teorema 4.0.5 . Así, $\delta_{\overline{0}}$ es un estado de equilibrio para ϕ. En este caso, la unicidad de dicho estado de equilibrio dependerá de la integrabilidad del tiempo de primer retorno con respecto al estado de Gibbs F-invariante entregado por la Proposición 4.1.3. El resultado principal de esta sección es el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. *Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} = 1$, y sea μ el estado de Gibbs F-invariante para el potencial Φ_0 dado por la Proposición 4.1.3.*

1. *Si $\int m d\mu < \infty$, existe un estado de equilibrio ν para el potencial ϕ distinto de $\delta_{\overline{0}}$. Además, ν y $\delta_{\overline{0}}$ son los únicos estados de equilibro ergódicos para ϕ.*
2. *Si $\int m d\mu = \infty$, entonces $\delta_{\overline{0}}$ es el único estado de equilibrio para ϕ.*

El Teorema 4.2.1 contiene los teoremas demostrados en [Hof77] para el caso $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} = 1$, y además, agregamos el resultado sobre la unicidad en la parte 1. Vale mencionar que en [Hof77] las hipótesis están planteadas en términos de la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{s_n}$. Sin embargo, esto es exactamente lo mismo que hacemos acá, tal como muestra el siguiente lema.

Lema 4.2.2. *Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} = 1$ y sea μ el estado de Gibbs F-invariante para el potencial Φ_0 dado por la Proposición 4.1.3. Se tiene que*

$$\int m d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{s_n}.$$

Demostración. Primero, notemos que $\mathcal{L}_{\Phi_0}^* \mu = \mu$. En efecto, por el Teorema 2.3.1, existe un estado de Gibbs μ_{Φ_0} que satisface $\mathcal{L}_{\Phi_0}^* \mu_{\Phi_0} = \mu_{\Phi_0}$, pues de (4.31) se tiene que $e^{\mathcal{P}(P(\phi))} = 1$. Luego, si $\psi \in L^1(\mu_{\Phi_0})$,

$$\begin{aligned} \int \psi \circ F d\mu_{\Phi_0} &= \int \psi \circ F d(\mathcal{L}_{\Phi_0}^* \mu_{\Phi_0}) = \int \mathcal{L}_{\Phi_0}(\psi \circ F) d\mu_{\Phi_0} \\ &= \int \psi \mathcal{L}_{\Phi_0} 1 d\mu_{\Phi_0} = \int \psi d\mu_{\Phi_0}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

donde la última igualdad se tiene porque

$$\mathcal{L}_{\Phi_0}1(x) = \sum_{y\in F^{-1}(x)} e^{\Phi_0(y)} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\sup \Phi_0|_{A_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} = 1.$$

Así, (4.32) implica que μ_{Φ_0} es F-invariante gracias a la Proposición 1.1.1. Por el Teorema 2.3.1, existe un único estado de Gibbs F-invariante, así que $\mu = \mu_{\Phi_0}$.

Luego, para cada $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mu(A_n) &= \int \mathbb{1}_{A_n} d\mu = \int \mathbb{1}_{A_n} d(\mathcal{L}^*_{\Phi_0}\mu) = \int \mathcal{L}_{\Phi_0}\mathbb{1}_{A_n} d\mu \\
&= \int \left(\sum_{y\in F^{-1}(x)} e^{\Phi_0(y)} \mathbb{1}_{A_n}(y) \right) d\mu(x) \qquad (4.33)\\
&= \int e^{\Phi_0|_{A_n}} d\mu = e^{s_n}.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando (4.33) se tiene que,

$$\int m d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} m d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\mu(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{s_n}.$$

□

Ahora, probemos el Teorema 4.2.1.

Demostración (Teorema 4.2.1). Primero, supongamos que $\int m d\mu < \infty$. Tal como en (4.27), se tiene que

$$\int \Phi_0 d\mu \geq (\inf_{n\geq 0} a_n) \int m d\mu > -\infty.$$

Esto implica que μ es el único estado de equilibrio para Φ_0 gracias al Teorema 2.3.2. Sigue que $\nu = \mu_m/\mu_m(\Sigma_2)$ es un estado de equilibrio para ϕ en virtud del Teorema 4.0.3.

Para ver que $\nu \neq \delta_{\overline{0}}$ observemos que

$$\mu_m(\{\overline{0}\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \mu(\sigma^{-n}(\{\overline{0}\}) \cap A_{k-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \mu \underbrace{\left(\bigcup_{\omega\in\{0,1\}^n} \{\omega\,\overline{0}\} \cap A_{k-1} \right)}_{=\emptyset} = 0.$$

Así, $\nu(\{\overline{0}\}) = 0$ y concluímos que $\nu \neq \delta_{\overline{0}}$. Finalmente, si ρ es un estado de equilibrio ergódico distinto de $\delta_{\overline{0}}$ y ν, entonces ρ es mutuamente singular con $\delta_{\overline{0}}$ y ν (ν es ergódica por la Proposición 3.2.4), y esto implica que $\rho(\{\overline{0}\}) = 0$ y $\nu(\{\overline{0}\}) = 0$. Por el Corolario 4.1.6 se tiene que $\rho(D) > 0$ y $\nu(D) > 0$. La Proposición 4.1.7 implica que $\rho = \nu$, lo que es una contradicción. Esto prueba la parte 1.

Ahora, supongamos que $\int m d\mu = \infty$ y que $\rho \neq \delta_{\overline{0}}$ es un estado de equilibrio ergódico para ϕ. Luego, $\delta_{\overline{0}}$ y ρ son mutuamente singulares, lo cual, al igual que antes, implica que $\rho(\{\overline{0}\}) = 0$. Entonces, por el Corolario 4.1.6 $\rho(D) > 0$, y por la Proposición 4.1.7 se tiene que ρ_D es un estado de equilibrio para Φ_0. Del Teorema 2.3.4 sigue que $\rho_D = \mu$. Luego, por el Corolario 3.1.3,

$$\infty = \int m d\mu = \int m d(\rho_D) = \frac{1}{\rho(D)} \int m d\rho = \frac{1}{\rho(D)} < \infty,$$

y esto último es una contradicción. Por lo tanto, $\delta_{\overline{0}}$ es el único estado de equilibrio ergódico para ϕ. Por la Proposición 1.4.5 obtenemos que $\delta_{\overline{0}}$ es el único estado de equilbrio para ϕ. Esto completa la demostración del Teorema 4.2.1. □

Solo falta analizar el caso en que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} < 1$. En este caso se tiene que $\mathcal{P}(P(\phi)) < 0$, por lo que no es posible utilizar argumentos similares a los empleados en las demostraciones de los Teoremas 4.1.1 y 4.2.1. El argumento que exponemos a continuación es esencialmente el mismo que en [Hof77].

Teorema 4.2.3. *Si $\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} < 1$, entonces $\delta_{\overline{0}}$ es el único estado de equilibrio para ϕ.*

Demostración. La hipótesis implica que $\mathcal{P}(0) < 0$, luego por el Teorema 4.0.5 se tiene que $P(\phi) \leq 0$. Por el Principio variacional se tiene que $P(\phi) = 0$ y $\delta_{\overline{0}}$ es un estado de equilibrio para ϕ. Veamos ahora la unicidad. Supongamos que $\mu \neq \delta_{\overline{0}}$ es un estado de equilibrio para ϕ. Como $\mu \neq \delta_{\overline{0}}$, existe M_i tal que $\mu(M_i) > 0$.

Consideremos el potencial

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & , \ x \notin M_i, \\ \overline{a}_i & , \ x \in M_i, \end{cases}$$

con $\overline{a}_i > a_i$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{\overline{s}_n} < 1$, donde $\overline{s}_n = a_0 + \cdots + \overline{a}_i + \cdots + a_n$. Entonces, por lo mencionado al comienzo, se tiene que $P(\overline{\phi}) = 0$. Además,

$$\int \overline{\phi} d\mu - \int \phi d\mu = \mu(M_i)(\overline{a}_i - a_i) > 0.$$

Por lo tanto,

$$P(\overline{\phi}) = 0 = P(\phi) = h_\mu + \int \phi d\mu < h_\mu + \int \overline{\phi} d\mu.$$

Esto último contradice el Principio variacional. □

Terminamos este capítulo exhibiendo ejemplos de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ que satisfacen las distintas hipótesis de los Teoremas 4.1.1, 4.2.1 y 4.2.3. El siguiente ejemplo se encuentra en [Lop93].

Ejemplo 4.1. Sea $\gamma > 0$. Consideremos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dada por $a_n = \log\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1}$ para $n \geq 1$ y $a_0 = -\log\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma+1}}\right)$. Es claro que $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Además,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{s_n} = e^{a_0}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_1+\cdots+a_n}\right) = e^{a_0}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\gamma+1}}\right) = e^{a_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma+1}} = 1.$$

Luego, si $t < 1$ el potencial $t\phi$ satisface la hipótesis del Teorema 4.1.1, y si $t > 1$ el potencial $t\phi$ satisface las hipótesis del Teorema 4.2.3. Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{s_n} &= e^{a_0}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{a_1+\cdots+a_n}\right) = e^{a_0}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\gamma}}\right)\\ &= e^{a_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma}}\end{aligned}$$

Entonces, $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{s_n} = \infty$ para $\gamma \in (0,1]$ y $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{s_n} < \infty$ para $\gamma > 1$. Por lo tanto, por el Lema 4.2.2, si $\gamma \in (0,1]$, ϕ satisface las hipótesis de la parte 2 del Teorema 4.2.1, y si $\gamma > 1$, el potencial ϕ satisface las hipótesis de la parte 1 del Teorema 4.2.1.

Capítulo 5

Un punto fijo indiferente: caso diferenciable

Dado $\gamma > 0$, sea a el único número en $(0,1)$ tal que $a(1+a^\gamma) = 1$. Definamos $f : [0,1] \to [0,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x(1+x^\gamma) & \text{si } x \in [0,a], \\ x(1+x^\gamma) - 1 & \text{si } x \in (a,1]. \end{cases}$$

A f se le conoce como la *transformación de Manneville-Pomeau.*

Notemos que $f'(x) = 1 + (\gamma+1)x^\gamma \geq 1$ para todo $x \in [0,1]$, y la igualdad se tiene solamente cuando $x = 0$. En este caso decimos que 0 es un punto fijo indiferente. Vale mencionar que f tiene una discontinuidad en a, sin embargo, definimos $f'(a) = 1 + (\gamma+1)a^\gamma$. De esta forma, la función f' es continua en todo $[0,1]$.

Dado $t > 0$, consideramos el potencial $\phi_t := -t \log f'$ y definimos la *presión* de ϕ_t por

$$P(t) := \sup \left\{ h_\mu + \int \phi_t d\mu : \mu \in \mathcal{M}_f \right\} = \sup \left\{ h_\mu - t \int \log f' d\mu : \mu \in \mathcal{M}_f \right\}$$

Decimos que μ es un *estado de equilibrio* para ϕ_t si

$$P(t) = h_\mu - t \int \log f' d\mu.$$

En este capítulo estudiaremos la existencia y unicidad de estados de equilibrio para la familia de potenciales $\phi_t = -t \log f'$, con $t > 0$. Para esto, al igual que en Capítulo 4, utilizaremos las herramientas de los Capítulos 2 y 3.

Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $y_1 = a$ y $f|_{[0,a)}(y_{n+1}) = y_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Es sencillo notar que y_n es decreciente y converge a 0. La siguiente proposición nos dice que la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene decrecimiento polinomial.

Proposición 5.0.1. *Se satisface que*

$$\lim_{n\to\infty} y_n^\gamma n = \gamma^{-1}. \tag{5.1}$$

En particular, existen constantes positivas c_1, c_2, c_3 y c_4 tales que

$$c_1 \leq y_n n^{1/\gamma} \leq c_2 \quad \text{y} \quad c_3 \leq (y_n - y_{n+1}) n^{1+1/\gamma} \leq c_4 \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{5.2}$$

Demostración. Primero, notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n = f(y_{n+1}) = y_{n+1}(1 + y_{n+1}^\gamma). \tag{5.3}$$

Luego,

$$1 = \frac{y_{n+1}}{y_n} + \left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right) y_{n+1}^\gamma. \tag{5.4}$$

Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente se tiene que

$$0 \leq \frac{y_{n+1}}{y_n} \leq 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right) y_{n+1}^\gamma = 0.$$

Así, tomando $n \to \infty$ en (5.4), se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1. \tag{5.5}$$

Ahora, notemos que de (5.3) sigue que

$$y_{n+1}^{-\gamma} = y_n^{-\gamma}(1 + y_{n+1}^\gamma)^\gamma.$$

Usando la expansión de Taylor de $(1+x)^\gamma$ en torno a 0, tenemos que

$$y_{n+1}^{-\gamma} = y_n^{-\gamma}(1 + \gamma y_{n+1}^\gamma + o(y_{n+1}^\gamma)),$$

donde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{o(y_{n+1}^{\gamma})}{y_{n+1}^{\gamma}} = 0. \tag{5.6}$$

Luego,

$$y_{n+1}^{-\gamma} - y_n^{-\gamma} = \gamma \left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right)^{\gamma} + \frac{o(y_{n+1}^{\gamma})}{y_n^{\gamma}},$$

y usando (5.5) y (5.6) se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} y_{n+1}^{-\gamma} - y_n^{-\gamma} = \gamma.$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\gamma - \varepsilon \leq y_{n+1}^{-\gamma} - y_n^{-\gamma} \leq \gamma + \varepsilon$$

para todo $n \geq N$. Así, para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$y_N^{-\gamma} + k(\gamma - \varepsilon) \leq y_{N+k}^{-\gamma} \leq y_N^{-\gamma} + k(\gamma + \varepsilon).$$

Equivalentemente,

$$\frac{y_N^{-\gamma}}{(N+k)\gamma} + \frac{k(\gamma-\varepsilon)}{(N+k)\gamma} \leq \frac{y_{N+k}^{-\gamma}}{(N+k)\gamma} \leq \frac{y_N^{-\gamma}}{(N+k)\gamma} + \frac{k(\gamma+\varepsilon)}{(N+k)\gamma}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma} &= \liminf_{k\to\infty} \left(\frac{y_N^{-\gamma}}{(N+k)\gamma} + \frac{k(\gamma-\varepsilon)}{(N+k)\gamma}\right) \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{y_{N+k}^{-\gamma}}{(N+k)\gamma} \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \frac{y_{N+k}^{-\gamma}}{(N+k)\gamma} \leq \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{y_N^{-\gamma}}{(N+k)\gamma} + \frac{k(\gamma+\varepsilon)}{(N+k)\gamma}\right) \\ &= \frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Tomando $\varepsilon \to 0$ en (5.7) obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n^{-\gamma}}{n\gamma} = 1.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} y_n^{\gamma} n = \gamma^{-1}. \tag{5.8}$$

Esto prueba (5.1).

La primera parte de (5.2) sigue directamente de (5.1). Finalmente, notemos que dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(y_n - y_{n+1})n^{1+1/\gamma} &= (y_n - y_{n+1})(n+1)^{1+1/\gamma}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+1/\gamma} \\
&= (y_{n+1}(1+y_{n+1}^{\gamma}) - y_{n+1})(n+1)^{1+1/\gamma}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+1/\gamma} \\
&= y_{n+1}^{\gamma+1}(n+1)^{1+1/\gamma}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+1/\gamma} \\
&= (y_{n+1}(n+1)^{1/\gamma})^{\gamma+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+1/\gamma}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Por lo tanto, por (5.8) y (5.9), se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - y_{n+1})n^{1+1/\gamma} = \gamma^{-(\gamma+1)/\gamma}.$$

Esto implica la segunda parte de (5.2) y concluímos la demostración. □

5.1. Función de primer retorno y presión en dos variables

De manera similar a lo hecho en el Capítulo 4 consideramos $m : (0,1] \to \mathbb{N}$ dada por

$$m(x) = \inf\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in (a,1]\}.$$

Note que $m|_{(a,1]}$ es el tiempo de primer retorno a $(a,1]$.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión dada por $a_0 = 1$ y $a_n = (f|_{(a,1]})^{-1}(y_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, si $x \in (a,1]$,

$$m(x) = n \iff x \in (a_n, a_{n-1}],$$

y si $x \in (0,a]$,

$$m(x) = n \iff x \in (y_{n+1}, y_n].$$

Sea F la función de primer retorno a $(a,1]$, es decir, $F : (a,1] \to (a,1]$ está dada por

$$F(x) = f^{m(x)}(x),$$

para cada $x \in (a,1]$. Luego, por la Regla de la cadena, si $x \in (a_n, a_{n-1}]$,

$$\begin{aligned}F'(x) &= (f^n)'(x) = f'(x)f'(f(x))\cdots f'(f^{n-1}(x)) \geq f'(x) = 1 + (\gamma+1)x^\gamma \\ &\geq 1 + (\gamma+1)a^\gamma > 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, existe $\lambda > 1$ tal que

$$F'(x) \geq \lambda \quad \forall\, x \in (a, 1]. \tag{5.10}$$

De manera similar al Capítulo 4, la función $\pi : (a, 1] \to \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$ dada por

$$\pi(x) = (m(F^n) - 1)_{n\in\mathbb{N}_0},$$

determina un isomorfismo entre los espacios medibles $((a, 1], \mathcal{B}((a, 1]))$ y $(\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{B}(\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}))$ y satisface $\pi \circ F = \sigma \circ \pi$. Bajo ese isomorfismo, el cilindro $[n]$ corresponde al intervalo $(a_{n+1}, a_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Gracias a esto podemos aplicar los resultados del Capítulo 2 al sistema $((a, 1], F)$.

El siguiente resultado es una consecuencia de la Proposición 5.0.1.

Proposición 5.1.1. *Existen constantes $b_1, b_2 > 0$ tales que para todo $n \geq 1$ se tiene*

$$b_1 n^{1+1/\gamma} \leq F'(x) \leq b_2 n^{1+1/\gamma} \quad \textit{para todo } x \in (a_n, a_{n-1}]. \tag{5.11}$$

Demostración. Sea $x \in (a_n, a_{n-1}]$, entonces $m(x) = n$ y $f(x) \in (y_n, y_{n-1}]$. Por la Regla de la cadena,

$$F'(x) = (f^n)'(x) = (f^{n-1})'(f(x))f'(x) \geq (f^{n-1})'(f(x))(1 + (\gamma+1)a^\gamma) \tag{5.12}$$

Además, se tiene que $f^n((y_{n+1}, y_n)] = (a, 1]$. Entonces, por el Teorema del valor medio, existe $\xi \in (y_{n+1}, y_n)$ tal que

$$\frac{1-a}{y_n - y_{n+1}} = (f^n)'(\xi) = f'(f^{n-1}(\xi))(f^{n-1})'(\xi).$$

Luego, por la Proposición 5.0.1,

$$\begin{aligned}(f^{n-1})'(\xi) &= \frac{1-a}{f'(f^{n-1}(\xi))(y_n - y_{n+1})} \geq \frac{1-a}{f'(f^{n-1}(\xi))c_4} n^{1+1/\gamma} \\ &\geq \frac{1-a}{(\gamma+2)c_4} n^{1+1/\gamma}.\end{aligned}$$

Como $\xi \in (y_{n+1}, y_n)$, $f(x) \in (y_n, y_{n-1})$ y f' es creciente, entonces

$$(f^{n-1})'(\xi) \leq (f^{n-1})'(f(x)),$$

pues $f^j(\xi)$ y $f^j(x)$ Por lo tanto,

$$(f^{n-1})'(f(x)) \geq \frac{1-a}{(\gamma+2)c_4} n^{1+1/\gamma}.$$

Reemplazando en (5.12) obtenemos que

$$F'(x) \geq \frac{(1-a)(1+(\gamma+1)a^\gamma)}{(\gamma+2)c_4} n^{1+1/\gamma}.$$

Basta tomar $b_1 = \dfrac{(1-a)(1+(\gamma+1)a^\gamma)}{(\gamma+2)c_4}$ y se tiene la cota inferior de (5.11). Para la cota superior, notemos que

$$\begin{aligned} F'(x) = (f^n)'(x) = (f^{n-1})'(f(x))f'(x) &\leq (\gamma+2)(f^{n-1})'(f(x)) \\ &\leq (\gamma+2)(f^{n-1})'(y_{n-1}). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Además, dado que $f(y_n) = y_{n-1}$,

$$\frac{(f^{n-1})'(y_{n-1})}{(f^{n-1})'(y_n)} = \frac{\prod_{j=0}^{n-2} f'(f^j(y_{n-1}))}{\prod_{j=0}^{n-2} f'(f^j(y_n))} = \frac{f'(f^{n-1}(y_n))}{f'(y_n)} \leq f'(f^{n-1}(y_n)) \leq \gamma + 2.$$

Luego, de (5.13) sigue que

$$F'(x) \leq (\gamma+2)^2 (f^{n-1})'(y_n). \tag{5.14}$$

Por otro lado, $f^{n-1}((y_n, y_{n-1}]) = (a, 1]$, entonces, por el Teorema del valor intermedio y la monotonía de f', existe $\zeta \in (y_n, y_{n-1})$ tal que

$$1 - a = (f^{n-1})'(\zeta)(y_{n-1} - y_n) \geq (f^{n-1})'(y_n)(y_{n-1} - y_n) \geq (f^{n-1})'(y_n) c_3 n^{-(1+1/\gamma)},$$

donde la última desigualdad se tiene por la Proposición 5.0.1. Así,

$$(f^{n-1})'(y_n) \leq \frac{1-a}{c_3} n^{1+1/\gamma}.$$

Por lo tanto, de (5.14) obtenemos que

$$F'(x) \leq \frac{(\gamma+2)^2(1-a)}{c_3} n^{1+1/\gamma}.$$

Basta tomar $b_2 = \dfrac{(\gamma+2)^2(1-a)}{c_3}$ y se tiene (5.11). $\square$

Dado $t > 0$ y $p \in \mathbb{R}$, el *potencial inducido* $\Phi_{t,p}$ tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Phi_{t,p}(x) &:= S_{m(x)}\phi_t(x) - pm(x) = \sum_{j=0}^{m(x)-1} \phi_t(f^j(x)) - pm(x)\\ &= -t\log(f^{m(x)})'(x) - pm(x) = -t\log F'(x) - pm(x).\end{aligned}$$

Vamos a denotar por $\mathcal{P}(t,p)$ a la presión del potencial $\Phi_{t,p}$ y por $Z_1(t,p)$ a $Z_1(\Phi_{t,p})$.

Observemos que

$$\begin{aligned}Z_1(t,p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in(a_{n+1},a_n]} \exp(\Phi_{t,p}(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in(a_{n+1},a_n]} \exp(-t\log F'(x) - p(n+1))\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in(a_{n+1},a_n]} \left(\frac{1}{(F'(x))^t}\right) e^{-p(n+1)}.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Proposición 5.1.2. *Dado $p \in \mathbb{R}$ se tiene que*

1. *Si $p > 0$, entonces $Z_1(t,p) < \infty$ para todo $t \geq 0$.*
2. *Si $p = 0$, entonces existe $t^* \in (0,1)$ tal que $Z_1(t,0) = \infty$ para $t \in (0,t^*]$ y $Z_1(t,0) < \infty$ para $t \in (t^*,\infty)$.*

Demostración. Por (5.15) y la Proposición 5.1.1,

$$\begin{aligned}Z_1(t,p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in(a_{n+1},a_n]} \left(\frac{1}{(F'(x))^t}\right) e^{-p(n+1)}\\ &\leq b_1^{-t}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{t(1+1/\gamma)}e^{p(n+1)}} < \infty \quad \text{para todo } p > 0.\end{aligned}$$

Esto prueba 1.

Si $p = 0$, por el cálculo anterior y la Proposición 5.1.1 se tiene

$$b_2^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{t(1+1/\gamma)}} \leq Z_1(t,0) \leq b_1^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{t(1+1/\gamma)}}.$$

Luego, tomando $t^* = \gamma/(\gamma+1)$ obtenemos la parte 2. $\square$

Proposición 5.1.3. *El potencial $\Phi_{1,0} = -\log F'$ es localmente Hölder.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Consideremos el cilindro I de largo m,

$$I := (a_{n_0}, a_{n_0-1}] \cap F^{-1}((a_{n_1}, a_{n_1-1}]) \cap \ldots \cap F^{-(m-1)}((a_{n_{m-1}}, a_{n_{m-1}-1}]).$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $n_0 > 2$. Notemos que $F^m(I) = (a, 1]$. Luego,

$$1 - a \geq \inf_{\xi \in I} (F^m)'(\xi)|I|,$$

donde $|I|$ denota el diámetro de I. Por la Regla de la cadena y (5.10) se tiene

$$\inf_{\xi \in I} (F^m)'(\xi) \geq (\inf_{\xi \in I} F'(\xi))(\inf_{\xi \in I} (F^{m-1})'(F(\xi))) \geq b_1 n_0^{1+1/\gamma} \lambda^{m-1}.$$

Por lo tanto,

$$|I| \leq \frac{1-a}{b_1 n_0^{1+1/\gamma} \lambda^{m-1}}. \tag{5.16}$$

Sean $x, y \in I$ con $x \geq y$. Como la función $t \mapsto t^\gamma$ es Höder con constante γ, existe $L > 0$ tal que $|t_1^\gamma - t_2^\gamma| \leq L|t_1 - t_2|^\gamma$ para todo par $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|\Phi_{1,0}(x) - \Phi_{1,0}(y)| = \log F'(x) - \log F'(y) &= \sum_{j=0}^{n_0-1} \log\left(\frac{f'(f^j(x))}{f'(f^j(y))}\right) \\
&\leq \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{f'(f^j(x)) - f'(f^j(y))}{f'(f^j(y))} \leq \sum_{j=0}^{n_0-1} f'(f^j(x)) - f'(f^j(y)) \\
&= (\gamma+1) \sum_{j=0}^{n_0-1} (f^j(x))^\gamma - (f^j(y))^\gamma \\
&\leq L(\gamma+1) \sum_{j=0}^{n_0-1} (f^j(x) - f^j(y))^\gamma \\
&\leq L(\gamma+1) \sum_{j=0}^{n_0-1} |f^j(I)|^\gamma.
\end{aligned}$$

Así,

$$|\Phi_{1,0}(x) - \Phi_{1,0}(y)| \leq L(\gamma+1) \sum_{j=0}^{n_0-1} |f^j(I)|^\gamma. \tag{5.17}$$

Si $1 \leq j \leq n_0 - 1$,

$$|f^j(I)| \leq \sup_{\xi \in I} (f^j)'(\xi)|I| \leq (\gamma+2) \sup_{\xi \in I} (f^{j-1})'(f(\xi))|I| \leq (\gamma+2)(f^{j-1})'(y_{n_0-1})|I|, \tag{5.18}$$

pues $f(I) \subset (y_{n_0}, y_{n_0-1}]$. Además se tiene que

$$f^{j-1}((y_{n_0-1}, y_{n_0-2}]) = (y_{n_0-j}, y_{n_0-(j+1)}].$$

Luego,

$$y_{n_0-(j+1)} - y_{n_0-j} \geq (f^{j-1})'(y_{n_0-1})(y_{n_0-2} - y_{n_0-1}),$$

y por la Proposición 5.0.1 obtenemos que,

$$\frac{c_4}{(n_0-(j+1))^{1+1/\gamma}} \geq (f^{j-1})'(y_{n_0-1}) \frac{c_3}{(n_0-2)^{1+1/\gamma}}.$$

Por lo tanto,

$$(f^{j-1})'(y_{n_0-1}) \leq \frac{c_4}{c_3} \left(\frac{n_0-2}{n_0-(j+1)} \right)^{1+1/\gamma}.$$

De (5.18) sigue que

$$|f^j(I)| \leq (\gamma+2)|I| \frac{c_4}{c_3} \left(\frac{n_0-2}{n_0-(j+1)} \right)^{1+1/\gamma}.$$

Reemplazando esto en (5.17) y usando (5.16), se tiene que

$$\begin{aligned}
|\Phi_{1,0}(x) - \Phi_{1,0}(y)| &\leq |I|^\gamma L(\gamma+1) + |I|^\gamma (n_0-2)^{\gamma+1} L(\gamma+1)(\gamma+2)^\gamma \left(\frac{c_4}{c_3}\right)^\gamma \sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{1}{(n_0-(j+1))^{\gamma+1}} \\
&\leq L(\gamma+1) \left(|I|^\gamma + |I|^\gamma (n_0-2)^{\gamma+1} (\gamma+2)^\gamma \left(\frac{c_4}{c_3}\right)^\gamma \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\gamma+1}} \right) \\
&\leq \frac{L(\gamma+1)(1-a)^\gamma}{b_1^\gamma \lambda^{\gamma(m-1)} n_0^{\gamma+1}} + \underbrace{\left(\frac{(1-a)(\gamma+2)c_4}{b_1 c_3} \right)^\gamma \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\gamma+1}} \right)}_{:=K_1} \left(\frac{n_0-2}{n_0} \right)^{\gamma+1} \frac{1}{\lambda^{\gamma(m-1)}} \\
&\leq \underbrace{\frac{L(\gamma+1)(1-a)^\gamma}{b_1^\gamma}}_{:=K_2} \frac{1}{\lambda^{\gamma(m-1)}} + K_1 \underbrace{\left(\frac{n_0-2}{n_0} \right)^{\gamma+1}}_{\leq 1} \frac{1}{\lambda^{\gamma(m-1)}} \\
&\leq \frac{1}{\lambda^{\gamma(m-1)}}(K_2 + K_1).
\end{aligned}$$

Sea $\alpha > 0$ tal que $e^\alpha < \lambda^\gamma$. Lo anterior implica que

$$e^{\alpha(m-1)}|\Phi_{1,0}(x) - \Phi_{1,0}(y)| \leq \left(\frac{e^\alpha}{\lambda^\gamma}\right)^{m-1}(K_1 + K_2) \leq (K_1 + K_2).$$

Luego,

$$V_{\alpha,m}(\Phi_{1,0}) \leq (K_1 + K_2) \quad \text{para todo } m \geq 1.$$

Por lo tanto, $V_\alpha(\Phi_{1,0}) \leq K_1 + K_2$ y concluímos que $\Phi_{1,0}$ es localmente Hölder. □

Observación 5.1.1. Es directo de la Proposición 5.1.3 que $\Phi_{t,p}$ es localmente Hölder para todo $t > 0$ y $p \in \mathbb{R}$.

En lo que sigue, consideramos la partición $\mathcal{P} = \{(a_n, a_{n-1}]\}_{n\in\mathbb{N}}$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{P}_n := \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{P})$.

Corolario 5.1.4. *Existe $K > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$,*

$$K^{-1} \leq \left|\frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)}\right| \leq K \tag{5.19}$$

para todo par de elementos x e y pertenecientes al mismo elemento de $\mathcal{P}_n$.

Demostración. Sean x e y como en el enunciado. Por la Proposición 5.1.3 existe $\alpha > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\left|\log\frac{(F^n)'(x)}{(F^n)'(y)}\right| &\leq \sum_{n=0}^{n-1}\left|\log F'(F^j(x)) - \log F'(F^j(y)\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{n-1} V_{\alpha,n-j}(\Phi_{1,0})e^{-\alpha(n-(j+1))} \\
&\leq V_\alpha(\Phi_{1,0})\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\alpha j} < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, basta considerar $K = \exp(V_\alpha(\Phi_{1,0})\sum_{j=0}^\infty e^{-\alpha j})$ y se tiene (5.19). □

Proposición 5.1.5. *La función $t \mapsto \mathcal{P}(t, 0)$ es estrictamente decreciente en (t^*, ∞).*

Demostración. Por definición,

$$Z_n(t, 0) = \sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sup_{x\in P}(\exp S_n(-t\log F'(x))) = \sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sup_{x\in P}\left(\prod_{j=0}^{n-1}(F'(F^j(x)))\right)^{-t}.$$

Luego, si $s > 0$ de (5.10) se tiene que

$$Z_n(s+t,0) = \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_{x\in P} \left(\prod_{j=0}^{n-1} \underbrace{(F'(F^j(x)))}_{\geq \lambda > 1} \right)^{-s} \left(\prod_{j=0}^{n-1} (F'(F^j(x))) \right)^{-t} \leq \lambda^{-ns} Z_n(t,0).$$

Entonces,

$$\mathcal{P}(s+t,0) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\lambda^{-ns} Z_n(t,0)) = -s\log\lambda + \mathcal{P}(t,0) < \mathcal{P}(t,0).$$

Esto prueba que $t \mapsto \mathcal{P}(t,0)$ es estrictamente decreciente en (t^*, ∞). □

Para concluir esta sección vamos a demostrar que la función $t \mapsto \mathcal{P}(t,0)$ se anula en 1.

Proposición 5.1.6. *Se cumple que* $\mathcal{P}(1,0) = 0$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $P \in \mathcal{P}_n$. Luego, se tiene que $F^n(P) = (a,1]$. Entonces,

$$1 - a \geq |P| \inf_{x\in P} (F^n)'(x).$$

Esto implica que

$$\frac{1}{\inf_{x\in P}(F^n)'(x)} = \sup_{x\in P} \frac{1}{(F^n)'(x)} \geq \frac{|P|}{(1-a)}. \tag{5.20}$$

Similarmente, se tiene que

$$1 - a \leq |P| \sup_{x\in P} (F^n)'(x).$$

Luego,

$$\frac{1}{\sup_{x\in P}(F^n)'(x)} \leq \frac{|P|}{1-a}. \tag{5.21}$$

Por el Corolario 5.1.4, existe $K > 0$ (independiente de n) tal que

$$\sup_{x\in P}(F^n)'(x) \leq K \inf_{x\in P}(F^n)'(x).$$

Así, sigue de (5.21) que

$$\sup_{x\in P} \frac{1}{(F^n)'(x)} = \frac{1}{\inf_{x\in P}(F^n)'(x)} \leq \frac{K}{1-a}|P|. \tag{5.22}$$

Observemos que $\displaystyle\sum_{P\in\mathcal{P}_n} |P| = 1 - a$, pues $\mathcal{P}_n$ es una partición de $(a,1]$. Luego, por un lado, de

(5.20) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(1,0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_{x\in P}\left(\frac{1}{(F^n)'(x)}\right)\right) \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left((1-a)^{-1} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} |P|\right) = 0.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Por otro lado, de (5.22) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(1,0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{P\in\mathcal{P}_n} \sup_{x\in P}\left(\frac{1}{(F^n)'(x)}\right)\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{K}{(1-a)} \sum_{P\in\mathcal{P}_n} |P|\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log K = 0.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Por lo tanto, por (5.23) y (5.24) concluímos que $\mathcal{P}(1,0) = 0$. □

Corolario 5.1.7. *Para todo $t \in (t^*, 1)$ se tiene $\mathcal{P}(t,0) \in (0,\infty)$, y para todo $t \in (1,\infty)$ se tiene $\mathcal{P}(t,0) < 0$.*

Demostración. Sigue directamente de las Proposiciones 5.1.6 y 5.1.5. □

5.2. Relación entre $P(t)$ y $\mathcal{P}(t,p)$

En esta sección probaremos un resultado análogo al Teorema 4.0.5 para el potencial ϕ_t. Para eso, tal como en el Capítulo 4, vamos a definir la función de primera entrada a $(a,1]$. Además, dado que en este caso nuestra definición de presión es de naturaleza medible, tendremos que dar una caracterización topológica para $P(t)$ de tal forma que podamos usar argumentos similares a los de la demostración del Teorema 4.0.5.

A lo largo de esta sección consideramos $\mathcal{Q}$ la partición de $[0,1]$ dada por $\mathcal{Q} := \{[0,a],(a,1]\}$, y $\mathcal{Q}_n = \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{Q})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Lema 5.2.1. *Sea $Y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(a)$. Existe un conjunto X totalmente ordenado dotado de la topología del orden, y una función continua y sobreyectiva $\pi : X \to [0,1]$ tal que*

1. *Los conjuntos $X \setminus \pi^{-1}(Y)$ y $[0,1]\setminus Y$ son iguales como conjuntos totalmente ordenados, la función π es la identidad en $X \setminus \pi^{-1}(Y)$, y $\pi^{-1}(Y)$ consiste de dos copias distintas*

Y^- e Y^+ de Y, tal que para todo $y \in Y$, $\pi^{-1}(y) = \{y^-, y^+\}$ con $y^- \in Y^-$, $y^+ \in Y^+$ y se cumple que $y^- < y^+$.

2. *La topología del orden en X es compacta y metrizable.*

3. *Existe una función continua $\tilde{f} : X \to X$ tal que $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$ y*

$$Y^- = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{f}^{-n}(1) \quad , \quad Y^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{f}^{-n}(0).$$

4. *Sea $P_0 := [0, a^-]$ y $P_1 := [a^+, 1]$. La función $\tilde{\pi} : X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ dada por $(\tilde{\pi}(x))_k = i$ si $\tilde{f}^k(x) \in P_i$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$, es una conjugación topológica entre $(X, \tilde{f})$ y el full-shift $(\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}, \sigma)$.*

5. *Para toda medida f-invariante ν existe una medida $\tilde{f}$-invariante μ tal que $\pi_*\mu = \nu$ y los sistemas $(X, \tilde{f}, \mu)$ y $([0,1], f, \nu)$ son isomorfos en medida.*

Demostración. Es conocido que $([0,1], f)$ tiene una extensión $(X, \tilde{f})$ tal que X es compacto y metrizable y $\tilde{f}$ es continua. Vamos a describir brevemente cómo se construye X, para más detalles ver [Kel98, Appendix A.5]. El conjunto X es obtenido duplicando los puntos de Y. Así, cada $y \in Y$ es reemplazado por dos puntos y^- e y^+ y declaramos que $y^- < y^+$. Esto último dota a X de un orden total. La topología del orden en X es generada por los intervalos de la forma $[0, b)$ y $(c, 1]$ con b y c en X. Denotemos por $\pi : X \to [0,1]$ la proyección canónica, y notemos que π es continua pues la preimagen de todo intervalo abierto en $[0,1]$ es un intervalo abierto de la topología del orden. Esto prueba la parte 1.

Como X satisface el axioma del supremo y está dotado de la topología del orden, entonces X es compacto (ver [Mun00, Theorem 27.1]). Además, es claro que la colección

$$\{[0,b) : b \in (X \cap \mathbb{Q}) \cup (Y^- \cup Y^+)\} \cup \{(c,1] : c \in (X \cap \mathbb{Q}) \cup (Y^- \cup Y^+)\}$$

genera la topología del orden en X, así que X es segundo contable. Luego, X es metrizable, probando la parte 2.

Consideremos $\tilde{f} : X \to X$ tal que $\tilde{f}|_{X\setminus\pi^{-1}(Y)} = f|_{[0,1]\setminus Y}$, definimos $\tilde{f}(a^-) := \lim_{x\to a^-} f(x) = 1$ y $\tilde{f}(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, y para cada $y \in Y \setminus \{a\}$, definimos $\tilde{f}(y^-) = f(y)^-$ y $\tilde{f}(y^+) = f(y)^+$. Por ejemplo, $\tilde{f}(y_2^-) = f(y_2)^- = a^-$ y $\tilde{f}(y_2^+) = f(y_2)^+ = a^+$. De esta forma, $\tilde{f}$ es creciente en cada intervalo $[0, a^-]$ y $[a^+, 1]$. Luego, la preimagen de un intervalo de la forma $(b, 1]$ es de la forma $(c, a^-] \cup (d, 1] = (c, a^+) \cup (d, 1]$ y similarmente se tiene que la preimagen de un intervalo de la forma $[0, b)$ también es un abierto en la topología del orden.

Así, concluímos que $\tilde{f}$ es continua. Además, si $x \in X \setminus \pi^{-1}(Y)$ entonces

$$\pi(\tilde{f}(x)) = f(x) = f(\pi(x)),$$

y para $y \in Y$,

$$\pi(f(y)^-) = f(y) = f(\pi(y^-)) \quad , \quad \pi(f(y)^+) = f(y) = f(\pi(y^+)).$$

Por lo tanto, $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \pi$ y obtenemos la parte 3.

Para demostrar la parte 4, vamos a construir una métrica en X compatible con la topología del orden. Sea ρ la medida dada por

$$\rho := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{y \in f^{-n}(a)} 4^{-n} \delta_y.$$

Note que ρ es una medida de probabilidad, pues $|f^{-n}(a)| = 2^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. También consideremos las funciones crecientes $\iota^-, \iota^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\iota^-(x) = x + \rho([0,x)) \quad y \quad \iota^+ = x + \rho([0,x]).$$

Observe que

$$\begin{array}{lll} \iota^+(x) < \iota^-(x') & , & \text{para } x < x' \text{ pues } [0,x] \subset [0,x'), \\ \iota^-(x) = \iota^+(x) & , & \text{para } x \in [0,1] \setminus Y \text{ pues si } y \in Y, y \in [0,x] \Longleftrightarrow y \in [0,x), \\ \iota^+(y) = \iota^-(y) + 4^{-n} & , & \text{para } y \in f^{-n}(a). \end{array}$$

Sea $\tilde{Y} := \pi^{-1}(Y)$. Definimos $\iota : X \to \mathbb{R}$ por $\iota(x) = \iota^+(x)$ si $x \in X \setminus \tilde{Y}$, y para $y \in Y$ definimos $\iota(y^-) = \iota^-(y)$ y $\iota(y^+) = \iota^+(y)$. Notemos que ι es inyectiva y continua. Luego, podemos definir la métrica $d : X \times X \to [0, \infty)$ por

$$d(x,x') = |\iota(x) - \iota(x')|.$$

Ahora, probemos que la función $\tilde{\pi}$ definida en la parte 4 es una conjugación. Dada una palabra $\omega \in \{0,1\}$, $\tilde{\pi}^{-1}([\omega])$ es un intervalo $\tilde{J}$ de la forma $[y^+, z^-] = (y^-, z^+)$, $[0, z^-] = [0, z^+)$ o $[y^+, 1] = (y^-, 1]$ con $y, z \in Y$. Como todos estos intervalos son abiertos en la topología del orden tenemos que $\tilde{\pi}$ es continua. Note que para $y, z \in Y$ como antes, cada intervalo $(y,z]$, $(0,z]$ e $(y,1]$ es la imagen de $(0,1]$ bajo una rama inversa de $f^n|_{(0,1]}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Denotemos por J cualquiera de estos intervalos. Como $\tilde{J}$ no contiene otros puntos de

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(a)\right),$$

tenemos que

$$\operatorname{diam}(\tilde{J}) \leq \operatorname{diam}(J) + 2^{-n}. \tag{5.25}$$

En efecto, si $\tilde{J}$ es de la forma $[y^+, z^-]$ entonces $J = (y, z]$, luego

$$\begin{aligned}
\operatorname{diam}(\tilde{J}) - \operatorname{diam}(J) &= |\iota(z^-) - \iota(y^+)| - (z - y) \\
&= \iota^-(z) - \iota^+(y) - (z - y) = \rho([0, z)) - \rho([0, y]) \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{x \in f^{-k}(a)} 4^{-k}\delta_x \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{k+1}4^{-k} = 2^{-n}.
\end{aligned}$$

De manera similar vemos que se satisface (5.25) cuando $\tilde{J}$ es de la forma $[0, z^-]$ o $(y, 1]$.

Sabemos que $f^{-n}((a, 1])$ se compone de 2^{n+1} intervalos disjuntos que corresponden a la imagen de $(0, 1]$ bajo las 2^{n+1} ramas inversas de f^n. Afirmamos que para todo $k \in \mathbb{N}$ y toda componente conexa I de $f^{-k}((a, 1])$ se tiene

$$\operatorname{diam}(I) \leq y_k - y_{k+1}. \tag{5.26}$$

Para probar esta afirmación procederemos por inducción. Tenemos que $(f|_{(a,1]})^{-1}((a, 1]) \subset (a, 1]$ y $(f|_{[0,1]})^{-1}((0, a]) = (y_2, y_1] \subset (0, a]$. Como f' es creciente se tiene que

$$\operatorname{diam}((f|_{(a,1]})^{-1}((a, 1])) \leq |y_1 - y_2|.$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, supongamos que toda componente conexa I de $f^{-k}((a, 1])$ cumple (5.26) y sea $\overline{I}$ una componente conexa de $f^{-(k+1)}((a, 1])$. Luego, $f(\overline{I})$ y $f((y_{k+2} . y_{k+1}]) = (y_{k+1}, y_k]$ son componentes conexas de $f^{-k}((a, 1])$. Si $\overline{I} \neq (y_{k+2}, y_{k+1}]$, se tiene que

$$\sup(y_{k+2}, y_{k+1}] \leq \inf \overline{I}. \tag{5.27}$$

Por el Teorema del valor medio, existen $\xi \in \overline{I}$ y $\zeta \in (y_{k+2}, y_{k+1}]$ tales que

$$\operatorname{diam}(f(\overline{I})) = f'(\xi) \operatorname{diam}(\overline{I}) \quad y \quad |y_k - y_{k+1}| = f'(\zeta)|y_{k+1} - y_{k+2}|.$$

Así, usando la hipótesis de inducción, el hecho de que f' es creciente y (5.27), obtenemos

que
$$\operatorname{diam}(\overline{I}) = \frac{\operatorname{diam}(f(\overline{I}))}{f'(\xi)} \leq \frac{|y_k - y_{k+1}|}{f'(\zeta)} = |y_{k+1} - y_{k+2}|.$$
Esto completa la inducción y prueba la afirmación. Por lo tanto, por (5.25) y la Proposición 5.0.1,
$$\operatorname{diam}(\tilde{J}) \leq \operatorname{diam}(J) + 2^{-n} \leq |y_n - y_{n+1}| + 2^{-n} \leq \frac{c_4}{n^{1+1/\gamma}} + 2^{-n}.$$

Así, $\operatorname{diam}(\tilde{J}) \to 0$ cuando el largo de ω tiende a ∞. Esto implica que para cada $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$, existe un único $x \in X$ tal que $\tilde{\pi}(x) = \omega$, es decir, $\tilde{\pi}$ es biyectiva. Como X es compacto, se tiene que $\tilde{\pi}$ es un homeomorfismo. Además, por construcción $\tilde{\pi} \circ \tilde{f} = \sigma \circ \tilde{\pi}$. Esto prueba que $\tilde{\pi}$ es una conjugación topológica.

Notemos que un subconjunto B de X es el mismo conjunto que $\pi(B)$ en $[0,1]$ con los puntos de $\pi(B) \cap Y$ duplicados. Entonces la σ-álgebra de Borel de $X \setminus \tilde{Y}$ es igual a la σ-álgebra de Borel de $[0,1] \setminus Y$. Como
$$a \notin f^{-1}(Y) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-n}(\{a\}),$$
es sencillo verificar que Y es de medida cero para cualquier medida de probabilidad Boreliana f-invariante. Similarmente se tiene que $\tilde{Y}$ es de medida cero para cualquier medida de probabilidad $\tilde{f}$-invariante. Luego, para cada medida de probablilidad Boreliana $\tilde{f}$-invariante tenemos que $\pi_*\mu$ es igual a la extensión a la σ-álgebra de Borel de $[0,1]$ de la restricción de μ a los Borelianos de $X \setminus \tilde{Y}$, que coinciden con los Borelianos de $[0,1] \setminus Y$. Por otro lado, para cada medida de probabilidad f-invariante ν existe una única medida de probabilidad $\tilde{f}$-invariante tal que $\pi_*\mu = \nu$.

Por lo tanto, $(X, \tilde{f}, \mu)$ y $([0,1], f, \nu)$ son isormorfos en medida. Esto prueba la parte 5. □

La siguiente proposición nos entrega una caracterización topológica de $P(t)$.

Proposición 5.2.2. *Para cada $t > 0$,*
$$P(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{Q \in \mathcal{Q}_n} \sup_{x \in Q} \exp(S_n \phi_t)\right), \tag{5.28}$$
y para cada $y \in (0,1]$ se tiene
$$P(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{x \in f^{-n}(y)} \exp(S_n \phi_t(x))\right). \tag{5.29}$$

Demostración. Sea $t>0$, por la parte 4 del Lema 5.2.1, para $\tilde{\phi}_t := \phi\circ\pi$ se tiene

$$P(\tilde{\phi}_t,\tilde{f}) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_{\tilde{f}}(X)}\left\{h_\mu(\tilde{f})+\int\tilde{\phi}_t d\mu\right\} = \sup_{\nu\in\mathcal{M}_f([0,1])}\left\{h_\nu(f)+\int\phi_t d\nu\right\} = P(t). \tag{5.30}$$

Sean P_0 y P_1 los conjuntos definidos en la parte 4 del Lema 5.2.1. Notemos que bajo la conjugación $\tilde{\pi}: X\to\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$, el cubrimiento abierto $\mathcal{C} := \{P_0,P_1\}$ de X corresponde al cubrimiento abierto $\overline{\mathcal{C}} := \{[0],[1]\}$ de $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$. Luego, por el Principio variacional se tiene que $P(\tilde{\phi}) = P(\tilde{\phi}\circ\tilde{\pi}^{-1})$. Sean $\mathcal{C}_n = \bigvee_{k=0}^{n-1}\tilde{f}^{-k}(\mathcal{C})$ y $\overline{\mathcal{C}}_n = \bigvee_{k=0}^{n-1}\sigma^{-k}(\overline{\mathcal{C}})$ para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
P(\tilde{\phi}) = P(\tilde{\phi}\circ\tilde{\pi}^{-1}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{P\in\overline{\mathcal{C}}_n}\sup_{x\in P}\exp\left(\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{\phi}(\tilde{\pi}^{-1}(\sigma^j(x)))\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{P\in\overline{\mathcal{C}}_n}\sup_{x\in P}\exp\left(\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{\phi}(\tilde{f}^j(\tilde{\pi}^{-1}(x)))\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{P\in\mathcal{C}_n}\sup_{x\in P}\exp(S_n\tilde{\phi}(x))\right).
\end{aligned}\tag{5.31}$$

Como para cada $x\in X\setminus Y$ tenemos que

$$\tilde{\phi}(x)=\phi(\pi(x))=\phi(x),$$

y para cada $y\in Y$,

$$\tilde{\phi}(y^-)=\phi(\pi(y^-))=\phi(y)=\phi(\pi(y^+))=\tilde{\phi}(y^+),$$

obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{P\in\mathcal{C}_n}\sup_{x\in P}\exp(S_n\tilde{\phi}(x))\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{Q\in\mathcal{Q}_n}\sup_{x\in Q}\exp(S_n\phi_t)\right). \tag{5.32}$$

Por lo tanto, de (5.30), (5.31) y (5.32) sigue que

$$P(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{Q\in\mathcal{Q}_n}\sup_{x\in Q}\exp(S_n\phi_t)\right).$$

Esto prueba (5.28).

Ahora, consideremos $y \in (0,1]$ y $\varepsilon > 0$. Como ϕ_t es uniformemente continua existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x'| < \delta \iff |\phi_t(x) - \phi_t(x')| < \varepsilon. \tag{5.33}$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, se tiene $\operatorname{diam} Q < \delta$ para todo $Q \in \mathcal{Q}_n$. Entonces, dado $Q \in \mathcal{Q}_n$ con $n \geq N$, y x_1 y x_2 en Q, por (5.33) se tiene que

$$\begin{aligned}|S_n\phi_t(x_1) - S_n\phi_t(x_2)| &\leq \sum_{j=0}^{n-N-1} |\phi_t(\sigma^j(x_1)) - \phi_t(\sigma^j(x_2))| + \sum_{j=n-N}^{n-1} |\phi_t(\sigma^j(x_1)) - \phi_t(\sigma^j(x_2))| \\ &\leq (n-N)\varepsilon + 2N \sup|\phi_t|.\end{aligned}$$

Así, si $n > N$ y $Q \in \mathcal{Q}_n$,

$$\sup_{x\in Q} S_n\phi_t(x) - S_n\phi_t(z) \leq (n-N)\varepsilon + 2N \sup|\phi_t|,$$

para todo $z \in Q$. Como $f^{-n}(y)$ tiene exactamente un elemento en cada $Q \in \mathcal{Q}_n$, para $n > N$ se tiene que

$$\frac{1}{n}\log\left(\sum_{Q\in\mathcal{Q}_n} \sup_{x\in Q} \exp(S_n\phi_t)\right) \leq \frac{(n-N)\varepsilon + 2N\sup|\phi_t|}{n} + \frac{1}{n}\log\left(\sum_{x\in f^{-n}(y)} \exp(S_n\phi_t(x))\right).$$

Esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\left(\sum_{Q\in\mathcal{Q}_n} \sup_{x\in Q} \exp(S_n\phi_t)\right) \leq \varepsilon + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\left(\sum_{x\in f^{-n}(y)} \exp(S_n\phi_t(x))\right). \tag{5.34}$$

Tomando $\varepsilon \to 0$ en (5.34) obtenemos (5.29). Esto termina la demostración. □

Consideremos la *función de primera entrada* $L : (0,a] \to (a,1]$ dada por

$$L(x) = f^{m(x)}(x),$$

y para cada $t > 0$, $p \in \mathbb{R}$ e $y \in (a,1]$ definimos

$$L_{t,p}(y) := \sum_{x\in L^{-1}(y)} \exp(\Phi_{t,p}(x)) = \sum_{x\in L^{-1}(y)} \exp(-tS_{m(x)}\log f'(x) - pm(x)).$$

También denotamos por $\mathcal{L}_{t,p}$ al operador de transferencia asociado al potencial $\Phi_{t,p}$ definido en el Capítulo 2.

Así, para cada $y \in (a,1]$,

$$(\mathcal{L}_{t,p}1)(y) = \sum_{x \in F^{-1}(y)} \exp(\Phi_{t,p}(x)).$$

Lema 5.2.3. *Existe $C > 0$ tal que, para todo $t > 0$, $p \in \mathbb{R}$, e $y \in (a,1]$, se tiene*

$$e^p \mathcal{L}_{t,p}1(y) \leq L_{t,p}(y) \leq C^t e^p \mathcal{L}_{t,p}1(y).$$

Demostración. Sea $y \in (a,1]$, entonces para cada $x \in F^{-1}(y)$ se tiene que $f(x) \notin (a,1]$ y $m(x) = m(f(x)) + 1$. Luego, como $f' \leq (\gamma+2)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{t,p}1(y) &= \sum_{x \in F^{-1}(y)} \exp\left(-t \sum_{j=0}^{m(x)-1} \log f'(f^j(x)) - pm(x)\right) \\
&= \sum_{x \in F^{-1}(y)} \exp\left(-t \log f'(x) - t \sum_{j=0}^{m(f(x))-1} \log f'(f^j(f(x))) - p(m(f(x)) + 1)\right) \\
&\geq (\gamma+2)^{-t} e^{-p} \sum_{x \in F^{-1}(y)} \exp\left(-t \sum_{j=0}^{m(f(x))-1} \log f'(f^j(f(x))) - pm(f(x))\right) \\
&= (\gamma+2)^{-t} e^{-p} \sum_{z \in L^{-1}(y)} \exp\left(\sum_{j=0}^{m(z)-1} \log f'(f^j(z)) - pm(z)\right) \\
&= (\gamma+2)^{-t} e^{-p} L_{t,p}(y).
\end{aligned}$$

Similarmente, usando que $f' \geq 1$ obtenemos que

$$\mathcal{L}_{t,p}1(y) \leq e^{-p} L_{t,p}(y).$$

Por lo tanto, basta tomar $C = (\gamma+2)$ y se tiene el Lema 5.2.3. $\square$

Proposición 5.2.4. *Sea $t > 0$ y $p \in \mathbb{R}$. Existe $R > 0$ tal que, para cada y e y' en $(a,1]$, se tiene*

$$R^{-1} \leq \frac{\mathcal{L}^n_{t,p}1(y)}{\mathcal{L}^n_{t,p}1(y')} \leq R.$$

En particular, para todo $y \in (a,1]$,

$$R^{-1} \leq \frac{Z_n(t,p)}{\mathcal{L}^n_{t,p}1(y)} \leq R$$

y

$$\mathcal{P}(t,p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\mathcal{L}_{t,p}^n 1(y)).$$

Demostración. Sea $t > 0$ y $p \in \mathbb{R}$. Por la Observación 5.1.1 tenemos que $\Phi_{t,p}$ es localmente Hölder, digamos con expontente α. Luego, si $n \in \mathbb{N}$, para x y x' en el mismo elemento de $\mathcal{P}_n$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_{t,p}(F^j(x)) - \sum_{j=0}^{n-1} \Phi_{t,p}(F^j(x')) \right| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |\Phi_{t,p}(F^j(x)) - \Phi_{t,p}(F^j(x'))| \\
&\leq V_\alpha(\Phi_{t,p}) \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\alpha(n-j)} \qquad (5.35) \\
&\leq V_\alpha(\Phi_{t,p}) \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\alpha(n-1)} =: M.
\end{aligned}$$

Sean y e y' elementos de $(a,1]$, consideremos $F^{-n}(y) = \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $F^{-n}(y') = \{x'_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, enumerados de tal forma que, para cada $j \in \mathbb{N}$, x_j y x'_j pertenecen al mismo elemento de $\mathcal{P}_n$. Entonces, por (5.35) se tiene

$$\frac{\exp(S_n\Phi_{t,p}(x_j))}{\exp(S_n\Phi_{t,p}(x'_j))} \leq e^M \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que

$$\frac{\mathcal{L}_{t,p}^n 1(y)}{\mathcal{L}_{t,p}^n 1(y')} \leq e^M.$$

Intercambiando roles entre y e y' y tomando $R = e^M$ obtenemos que

$$R^{-1} \leq \frac{\mathcal{L}_{t,p}^n 1(y)}{\mathcal{L}_{t,p}^n 1(y')} \leq R, \tag{5.36}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo y e y' en $(a,1]$. Además, dado $j \in \mathbb{N}$ y $P \in \mathcal{P}_n$ tal que $x_j \in P$, (5.35) implica que

$$\frac{\sup_{x\in P}\exp(S_n\Phi_{t,p}(x))}{\exp(S_n\Phi_{t,p}(x_j))} \leq e^M \quad \text{y} \quad \frac{\exp(S_n\Phi_{t,p}(x_j))}{\sup_{x\in P}\exp(S_n\Phi_{t,p}(x))} \leq e^M.$$

Luego, se tiene que para todo $y \in (a,1]$,

$$R^{-1} \leq \frac{Z_n(t,p)}{\mathcal{L}_{t,p}^n 1(y)} \leq R.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{P}(t,p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{L}_{t,p}^n 1(y).$$

Esto concluye la demostración. □

Corolario 5.2.5. *Sean $t > 0$ y $p \in \mathbb{R}$, y sea $R > 0$ dado por la Proposición 5.2.4. Para todo $y \in (a,1]$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\mathcal{P}(t,p) \leq \frac{1}{n} \log \left(R\mathcal{L}_{t,p}^n 1(y) \right). \tag{5.37}$$

Demostración. Dado $y \in (a,1]$ y $n \in \mathbb{N}$, por la Proposición 5.2.4 se tiene

$$R^{-1} \leq \frac{Z_n(t,p)}{\mathcal{L}_{t,p}^n 1(y)} \leq R. \tag{5.38}$$

Luego,

$$\frac{1}{n} \log(Z_n(t,p)) \leq \frac{1}{n} \log(R\mathcal{L}_{t,p}^n 1(y)),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, de (2.2) obtenemos que

$$\mathcal{P}(t,p) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} \log Z_n(t,p) \right) \leq \frac{1}{n} \log(R\mathcal{L}_{t,p}^n 1(y)), \tag{5.39}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. □

Concluímos esta sección con un resultado análogo al Teorema 4.0.5 en este contexto.

Teorema 5.2.6. *Para todo $t > 0$ se satisface*

$$P(t) = \inf\{p \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(t,p) \leq 0\}.$$

Además,

$$\mathcal{P}(t,p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = P(t). \tag{5.40}$$

Demostración. Sea $y \in (a,1]$. Por la Proposición 5.2.2,

$$P(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{x \in f^{-n}(y)} \exp(S_n \phi_t(x)) \right). \tag{5.41}$$

Luego, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in f^{-n}(y)} \exp(S_n\phi_t(x))$$

diverge si $p < P(t)$ y converge si $p > P(t)$.

Notemos que dado $\ell \in \mathbb{N}$, todo $x \in F^{-\ell}(y)$ cumple

$$F^{\ell}(x) = f^{m(x)+\ldots+m(F^{\ell-1}(x))}(x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in f^{-n}(y)} e^{S_n\phi_t(x)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x\in[0,a]\cap f^{-n}(y)} e^{-pn} e^{S_n\phi_t(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x\in(a,1]\cap f^{-n}(y)} e^{-pn} e^{S_n\phi_t(x)} \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x\in(a,1]\cap f^{-n}(y)} e^{-pn} e^{S_n\phi_t(x)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{x\in F^{-\ell}(y)} e^{-p(m(x)+\ldots+m(F^{\ell-1}(x)))} e^{S_{m(x)+\ldots m(F^{\ell-1}(x))}\phi_t(x)} \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}_{t,p}^{\ell} 1(y).
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in f^{-n}(y)} e^{S_n\phi_t(x)} \geq \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}_{t,p}^{\ell} 1(y). \tag{5.43}$$

Por otro lado, es claro que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in f^{-n}(y)} e^{S_n\phi_t(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in[0,a]\cap f^{-n}(y)} e^{S_n\phi_t(x)} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in(a,1]\cap f^{-n}(y)} e^{S_n\phi_t(x)} \tag{5.44}$$

Luego, de (5.42) sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in(a,1]\cap f^{-n}(y)} e^{S_n\phi_t(x)} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}_{t,p}^{\ell} 1(y). \tag{5.45}$$

Además, por el Lema 5.2.3 y la Proposición 5.2.4 se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in[0,a]\cap f^{-n}(y)} e^{S_n\phi_t(x)} = \\
&L_{t,p}(y) + \sum_{\ell=1} \sum_{x\in L^{-1}(F^{-\ell}(y))} e^{-p(m(x)+m(L(x))+\ldots+m(F^{\ell-1}(L(x))))} e^{S_{m(x)+m(L(x))+\ldots+m(F^{\ell-1}(L(x)))}\phi_t(x)} \\
&= L_{t,p}(y) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{z\in F^{-1}(y)} e^{-p(m(z)+\ldots m(F^{\ell-1}(z)))} e^{S_{m(z)+\ldots m(F^{\ell-1}(z))}\phi_t(z)} L_{t,p}(z) \\
&\leq C^t e^p \mathcal{L}_{t,p}1(y) + C^t e^p \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{z\in F^{-1}(y)} e^{-p(m(z)+\ldots m(F^{\ell-1}(z)))} e^{S_{m(z)+\ldots m(F^{\ell-1}(z))}\phi_t(z)} \mathcal{L}_{t,p}1(z) \\
&\leq C^t e^p R\mathcal{L}_{t,p}1(y) \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}_{t,p}^{\ell} 1(y)\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in[0,a]\cap f^{-n}(y)} e^{S_n\phi_t(x)} \leq C^t e^p R\mathcal{L}_{t,p}1(y) \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}_{t,p}^{\ell} 1(y)\right). \tag{5.46}$$

Reemplazando (5.45) y (5.46) en (5.44) obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in f^{-n}(y)} e^{S_n\phi_t(x)} \leq C^t e^p R\mathcal{L}_{t,p}1(y) \left(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}_{t,p}^{\ell} 1(y)\right) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}_{t,p}^{\ell} 1(y). \tag{5.47}$$

Si $\mathcal{P}(t,p) > 0$, por el Corolario 5.2.5 tenemos que

$$\log(R\mathcal{L}_{t,p}^{n} 1(y)) > 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\mathcal{L}_{t,p}^{n} 1(y) > R^{-1}$. Luego,

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}_{t,p}^{\ell} 1(y) = \infty,$$

y por (5.43) concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in f^{-n}(y)} e^{S_n\phi_t(x)} = \infty.$$

Esto último implica que $P(t) \geq p$.

Si $\mathcal{P}(t,p) < 0$, entonces existe $\kappa > 0$ tal que $\mathcal{P}(t,p) < -\kappa$. Por la Proposición 5.2.4,

$$\mathcal{P}(t,p) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{L}_{t,p}^n 1(y).$$

Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$,

$$\mathcal{L}_{t,p}^n 1(y) < e^{-n\kappa}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{L}_{t,p}^{\ell} 1(y) \leq \sum_{\ell=1}^{N} \mathcal{L}_{t,p}^{\ell} 1(y) + \sum_{\ell=N+1}^{\infty} e^{-\ell\kappa} < \infty.$$

Así, por (5.47) se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{x\in f^{-n}(y)} e^{S_n\phi_t(x)} < \infty,$$

y concluímos que $P(t) \leq p$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} p > P(t) \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{P}(t,p) \leq 0, \\ p < P(t) \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{P}(t,p) \geq 0. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Consideremos $p \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{P}(t,p) \leq 0$.

Si $\mathcal{P}(t,p) < 0$ entonces $p \geq P(t)$ gracias a (5.48).

Si $\mathcal{P}(t,p) = 0$, supongamos que $p < P(t)$. Entonces, existe $q \in \mathbb{R}$ tal que $p < q < P(t)$. Luego, como $p \mapsto \mathcal{P}(t,p)$ es estrictamente decreciente cuando es finita, tenemos que

$$\mathcal{P}(t,q) < \mathcal{P}(t,p) = 0. \tag{5.49}$$

Pero como $q < P(t)$, (5.48) implica que $\mathcal{P}(t,q) \geq 0$, lo que contradice (5.49). Por otro lado, si se tuviera que $p > P(t)$, entonces existiría $q \in \mathbb{R}$ tal que $p > q > P(t)$. Luego,

$$\mathcal{P}(t,q) > \mathcal{P}(t,p) = 0,$$

lo cual contradice (5.48) pues $q > P(t)$. Por lo tanto, se tiene que $p = P(t)$. Note que esto prueba (5.40).

Lo anterior demuestra que $P(t)$ es una cota inferior para $\{p \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(t,p) \leq 0\}$. Finalmente, (5.48) implica que $\mathcal{P}(t, P(t)+\varepsilon) \leq 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto,

$$P(t) = \text{ínf}\{p \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(t,p) \leq 0\}.$$

□

5.3. Estados de equilibrio

En esta sección estudiamos la existencia y unicidad de estados de equilibrio para la familia de potenciales $\phi_t = -t \log f'$, con $t > 0$. En el Teorema 5.3.4 probamos la existencia de un único estado de equilibrio cuando $t \in (0,1)$. Para $t = 1$, el Teorema 5.3.8 establece que es posible tener existencia de más de un estado de equilibiro. Finalmente, si $t > 1$, en el Teorema 5.3.9 mostramos que nuevamente existe un único estado de equilibrio para el potencial $-t \log f'$.

El siguiente teorema será importante en las demostraciones de los Teoremas 5.3.4 y 5.3.8.

Teorema 5.3.1. *Sea $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ un potencial. Supongamos que ψ admite un único estado de equilibrio ergódico. Entonces existe un único estado de equilibrio para ψ.*

Demostración. Sea ν el estado de equilibrio ergódico para ψ y sea μ un estado de equilibrio arbitrario. Probaremos que $\mu = \nu$.

Consideremos $\{\mu_F : F \in \mathcal{F}\}$ la descomposición ergódica de μ dada por el Teorema 1.1.5. Sea $\widehat{\mu}$ la medida definida sobre $\mathcal{F}$ también dada por el Teorema 1.1.5. Entonces,

$$\int \psi d\mu = \int \left(\int \psi d\mu_F \right) d\widehat{\mu}(F),$$

y por el Teorema de Jacob (ver [VO16, Theorem 9.6.2]), se tiene que

$$h_\mu(f) = \int h_{\mu_F}(f) d\widehat{\mu}(F).$$

Así, como μ es un estado de equilibrio,

$$P(\psi) = h_\mu(f) + \int \psi d\mu = \int \left(h_{\mu_F}(f) + \int \psi d\mu_F \right) d\widehat{\mu}(F). \tag{5.50}$$

Por otro lado, por definición,

$$P(\psi) \geq h_{\mu_F}(f) + \int \psi d\mu_F \quad \text{para todo } F \in \mathcal{F}.$$

Luego, (5.50) implica que

$$P(\psi) = h_{\mu_F}(f) + \int \psi d\mu_F \quad \widehat{\mu} - c.t.p\ F \in \mathcal{F}. \tag{5.51}$$

Además, como μ es ergódica para $\widehat{\mu} - c.t.p\ F \in \mathcal{F}$, y ν es el único estado de equilibrio ergódico, por (5.51) obtenemos que $\mu_F = \nu$ para $\widehat{\mu} - c.t.p\ F \in \mathcal{F}$. Luego, por el Teorema 1.1.5, para todo Boreliano $E \subset [0,1]$,

$$\mu(E) = \int \mu_F(E) d\widehat{\mu}(F) = \int \nu(E) d\widehat{\mu} = \nu(E).$$

Por lo tanto, concluímos que ν es el único estado de equilibrio para ψ. □

La demostración del teorema que enunciamos a continuación la vamos a omitir, pues es análoga a la demostración del Teorema 4.0.3.

Teorema 5.3.2. *Sea $t > 0$, y μ un estado de equilibrio para $\Phi_{t,P(t)}$ tal que $\int m d\mu < \infty$. Si $\mathcal{P}(t, P(t)) = 0$, entonces $\mu_m/\mu_m([0,1])$ es un estado de equilibrio para $\phi_t = -t \log f'$.*

A continuación probamos un resultado similar al Lema 4.1.5 en este contexto.

Lema 5.3.3. *Sea ρ una medida de probabilidad f-invariante. Si $\rho \neq \delta_0$, entonces $\rho((a,1]) > 0$.*

Demostración. Como $y_n \to 0$, se tiene que

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, y_n].$$

Supongamos que $\rho((a,1]) = 0$. Entonces $\rho([0,a]) = 1$. Como ρ es f-invariante,

$$1 = \rho([0,a]) = \rho(f^{-1}([0,a])) = \rho([0,y_1]) + \rho((a,a_1]) = \rho([0,y_1]).$$

Por inducción se tiene que $\rho([0,y_n])) = 1$ para todo $n \geq 1$. Por lo tanto,

$$\rho(\{0\}) = \rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}[0,y_n]\right) = \lim_{n\to\infty} \rho([0,y_n]) = 1.$$

Esto implica que $\rho = \delta_0$. □

La existencia y unicidad de estados de equilibrio para ϕ_t dependerá del signo de $\mathcal{P}(t,0)$.

Comencemos analizando el caso en que $\mathcal{P}(t,0)>0$.

Teorema 5.3.4. *Si $t\in(0,1)$, existe un único estado de equilibrio para el potencial $\phi_t=-t\log f'$.*

Comencemos la demostracion del Teorema 5.3.4 con el siguiente lema.

Lema 5.3.5. *Si $t\in(0,1)$, entonces $P(t)>0$ y $\mathcal{P}(t,P(t))=0$.*

Demostración. Sea $t\in(0,1)$. Si $t\in(0,t^*]$, por la Proposición 5.1.2 se tiene que $Z_1(t,0)=\infty$. Luego, en virtud de la Proposición 2.1.3 obtenemos que $\mathcal{P}(t,0)=\infty$. Probaremos que existe $p>0$ tal que $\mathcal{P}(t,p)\in(0,\infty)$.

Por la Proposición 5.1.1 existen b_1 y b_2 positivos tales que para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene

$$b_1 n^{1+1/\gamma}\le F'(x)\le b_2 n^{1+1/\gamma}\quad \text{para todo } x\in(a_n,a_{n-1}]. \tag{5.52}$$

Sea $n\in\mathbb{N}$ y $P\in\mathcal{P}_n$. Sigue de (5.52) que

$$b_1^n\prod_{j=0}^{n-1}(m(F^j(x)))^{1+1/\gamma}\le (F^n)'(x)\le b_2^n\prod_{j=0}^{n-1}(m(F^j(x)))^{1+1/\gamma}\quad \text{para todo } x\in P.$$

Luego, si $p>0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(t,p) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\sup_{x\in P}\left(\frac{1}{(F^n)'(x)}\right)^t e^{-p(m(x)+\ldots+m(F^{n-1}(x)))}\right)\\
&\ge \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(b_2^{-nt}\sum_{P\in\mathcal{P}_n}\left(\prod_{j=0}^{n-1} m|_{F^j(P)}\right)^{-t(1+1/\gamma)} e^{-p(m|_P+\ldots+m|_{F^{n-1}(P)})}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(b_2^{-nt}\sum_{(k_0,\ldots,k_{n-1})\in\mathbb{N}^n}(k_0\ldots k_{n-1})^{-t(1+1/\gamma)}e^{-p(k_0+\ldots k_{n-1})}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(b_2^{-nt}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{t(1+1/\gamma)}e^{pk}}\right)^n\right)\\
&= -t\log b_2+\log\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{t(1+1/\gamma)}e^{pk}}\right).
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Por el Teorema de convergencia monótona,

$$\log\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{t(1+1/\gamma)}e^{pk}}\right)\xrightarrow{p\to 0^+}\log\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{t(1+1/\gamma)}}\right).$$

Recordemos que $t^* = \gamma/(\gamma+1)$, entonces como $t \in (0, t^*]$ tenemos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{t(1+1/\gamma)}} = \infty$. Por lo tanto, de (5.53) sigue que

$$\mathcal{P}(t,p) \xrightarrow{p \to 0^+} \infty.$$

Esto implica que existe $p_0 > 0$ tal que $\mathcal{P}(t,p_0) \in (0,\infty)$. Un argumento similar al hecho en (5.53) muestra que $\mathcal{P}(t,p) \xrightarrow{p\to\infty} -\infty$, así que existe $p_1 > 0$ tal que $\mathcal{P}(t,p_1) \in (-\infty, 0)$. Como la función $p \mapsto \mathcal{P}(t,p)$ es continua donde es finita concluímos que existe una raíz para $\mathcal{P}(t,p)$. Por el Teorema 5.2.6 tenemos que $P(t) > p_0 > 0$ y $\mathcal{P}(t, P(t)) = 0$.

Si $t \in (t^*, 1)$, gracias al Corolario 5.1.7 tenemos que $\mathcal{P}(t, 0) \in (0, \infty)$. Luego, el Teorema 5.2.6 implica que $P(t) > 0$. Como $\mathcal{P}(t,0) \in (0,\infty)$ y $\mathcal{P}(t,p) \xrightarrow{p\to\infty} -\infty$, por continuidad, existe una raíz para la función $p \mapsto \mathcal{P}(t,p)$. Por el Teorema 5.2.6 concluímos que $\mathcal{P}(t,P(t)) = 0$. Esto completa la demostración. $\square$

Proposición 5.3.6. *Si $t \in (0,1)$, existe un único estado de equilibrio para el pontencial $\Phi_{t,P(t)}$. Además, si μ_t es dicho estado de equilibrio, se tiene que $\int m d\mu_t < \infty$.*

Demostración. Por el Lema 5.3.5 se tiene que $P(t) > 0$ y $\mathcal{P}(t, P(t)) = 0$. Por la Observación 5.1.1 tenemos que $\Phi_{t,P(t)}$ es localmete Hölder, y por la Proposición 5.1.2 se tiene $Z_1(t, P(t)) < \infty$, así que $\Phi_{t,P(t)}$ es sumable. Luego, por el Teorema 2.3.1, existe un único estado de Gibbs F-invariante μ_t para el potencial $\Phi_{t,P(t)}$. Como μ_t es un estado de Gibbs y $\mathcal{P}(t,P(t)) = 0$, existe $C > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$C^{-1} \le \frac{\mu_t((a_n, a_{n-1}])}{\exp(\Phi_{t,P(t)}(x))} \le C \quad \text{para todo } x \in (a_n, a_{n-1}]. \tag{5.54}$$

Probaremos que μ_t es el estado de equilibrio para $\Phi_{t,P(t)}$. Así que para concluir, en virtud del Teorema 2.3.2, es suficiente probar que $\int \Phi_{t,P(t)} d\mu_t > -\infty$ y $\int m d\mu_t < \infty$. Comencemos verificando esto último.

De (5.54) se tiene que,

$$\begin{aligned} \int m d\mu_t &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mu_t((a_n, a_{n-1}]) \le C \sum_{n=1}^{\infty} n \sup_{x \in (a_n, a_{n-1}]} (\exp(-t \log F'(x)) - P(t)n)) \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sup_{x\in(a_n,a_{n-1}]} ((F'(x)))^t e^{P(t)n}} \le C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{P(t)n}}. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Como $P(t) > 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{P(t)n}} < \infty$. Así, por (5.55) tenemos que $\int m d\mu_t < \infty$.

Ahora, observemos que

$$\begin{aligned}\int \Phi_{t,P(t)} d\mu_t &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(a_n,a_{n-1}]} \Phi_{t,P(t)} d\mu_t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{(a_n,a_{n-1}]} -t \log F' d\mu_t - P(t) \int_{(a_n,a_{n-1}]} m d\mu_t \right) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{(a_n,a_{n-1}]} -tn \log(\gamma+2) - P(t) \int_{(a_n,a_{n-1}]} n d\mu_t \right) \\ &= -(t\log(\gamma+2) + P(t)) \int m d\mu_t > -\infty.\end{aligned} \tag{5.56}$$

Por lo tanto, por el Teorema 2.3.2 sigue que μ_t es el único estado de equilibrio para el potencial $\Phi_{t,P(t)}$. □

Consideremos la medida μ_t dada por la Proposición 5.3.6. Luego, por el Teorema 5.3.2 se tiene que $\nu_t := (\mu_t)_m/(\mu_t)_m([0,1])$ es un estado de equilibrio para el potencial $\phi_t = -t\log f'$. Para concluir la demostración del Teorema 5.3.4 solamente falta probar la unicidad. Para esto, necesitamos el siguiente resultado, cuya demostración es análoga a la demostración de la Proposición 4.1.7.

Proposición 5.3.7. *Sea $t > 0$. Si $\mathcal{P}(t, P(t)) = 0$ y ρ es un estado de equilibrio ergódico para ϕ_t tal que $\rho((a,1]) > 0$, entonces $\rho_{(a,1]} = \rho|_{(a,1]}/\rho((a,1])$ es un estado de equilibrio para $\Phi_{t,P(t)}$. Además, existe a lo más un estado de equilibrio ergódico ρ tal que $\rho((a,1]) > 0$.*

Ahora podemos completar la demostración del Teorema 5.3.4.

Supongamos que $\rho \neq \nu_t$ es un estado de equilibrio ergódico para ϕ_t. Por el Lema 5.3.5 se tiene que $P(t) > 0$ y $\mathcal{P}(t, P(t)) = 0$. Luego $\rho \neq \delta_0$, y obtenemos que $\rho((a,1]) > 0$ gracias al Lema 5.3.3.

Como μ_t es ergódica (ver Teorema 2.3.1), por la Proposición 3.2.4 sabemos que ν_t es ergódica. El argumento anterior implica que $\nu_t((a,1]) > 0$, y por la Proposición 5.3.7 obtenemos que $\rho = \nu_t$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que ν_t es el único estado de equilibrio ergódico para ϕ_t.

Finalmente, por el Teorema 5.3.1 concluímos que ν_t es el único estado de equilibrio para ϕ_t. Esto completa la demostración del Teorema 5.3.4. □

El siguiente teorema caracteriza la existencia y unicidad de estados de equilibrio cuando $t = 1$. En este caso, la existencia de un único estado de equilibrio depende de γ.

Teorema 5.3.8. *Se tiene que $P(1) = 0$. Además, se tienen los siguientes casos:*

1. *Si $\gamma \in (0,1)$, existe un estado de equilibrio $\nu \neq \delta_0$ para el potencial $\phi = -\log f'$. Además, ν y δ_0 son los únicos estados de equilibrio ergódicos para ϕ.*
2. *Si $\gamma \geq 1$, entonces δ_0 es el único estado de equilibrio para ϕ.*

Demostración. Por la Proposición 5.1.6 se tiene $\mathcal{P}(1,0) = 0$, y esto implica $P(1) = 0$ gracias al Teorema 5.2.6, así que δ_0 es una estado de equilibrio. Luego, como $\mathcal{P}(1,0) = 0$ tenemos que $Z_1(1,0) < \infty$ (ver Proposición 2.1.3), y por la Proposición 5.1.3 se tiene que $\Phi_{1,0}$ es localmente Hölder. Entonces, el Teorema 2.3.1 nos dice que existe un único estado de Gibbs F-invariante μ para el potencial $\Phi_{1,0}$. Así, existe $C > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$C^{-1} \leq \frac{\mu((a_n, a_{n-1}])}{\exp(\Phi_{1,0}(x))} \leq C \quad \text{para todo } x \in (a_n, a_{n-1}].$$

Luego, de la Proposición 5.0.1 sigue que

$$\begin{aligned}\int m d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu((a_n, a_{n-1}]) &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n \sup_{x\in(a_n,a_{n-1}]} \exp(\Phi_{1,0}(x)) = C \sum_{n=1}^{\infty} n \sup_{x\in(a_n,a_{n-1}]} \frac{1}{F'(x)} \\ &\leq \frac{C}{b_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{1+1/\gamma}} \leq \frac{C}{b_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/\gamma}}.\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\frac{1}{b_2 C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/\gamma}} \leq \int m d\mu.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{b_2 C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/\gamma}} \leq \int m d\mu \leq \frac{C}{b_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/\gamma}}.$$

Esto implica que

$$\int m d\mu < \infty \iff \gamma \in (0,1). \tag{5.57}$$

Por otro lado, de (5.56) se tiene

$$\int \Phi_{1,0} d\mu \geq -\log(\gamma+2) \int m d\mu.$$

Entonces, si $\gamma \in (0,1)$, por el Teorema 2.3.2, μ es el único estado de equilibrio para $\Phi_{1,0}$. Así, la medida $\nu := \mu_m/\mu_m((a,1])$ es un estado de equilibrio ergódico para $\phi = -\log f'$, en virtud del Teorema 5.3.2. Además, por el Teorema 2.3.1 se tiene que μ es ergódica. Así, la

Proposición 3.2.4 implica que ν es ergódica.

Ahora, veamos que $\nu \neq \delta_0$. Notemos que

$$\mu_m(\{0\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \mu(f^{-n}(\{0\}) \cap (a_k, a_{k-1}]) = 0,$$

donde la última igualdad se tiene porque $f^{-n}(\{0\}) \cap (a_k, a_{k-1}] = \emptyset$ para todo $k > n$. En efecto, si $x \in f^{-n}(\{0\}) \cap (a_k, a_{k-1}]$, entonces $f^n(x) = 0$ y $f^k(x) \in (a, 1]$, esto implica que

$$0 = f^{k-n}(f^n(x)) = f^k(x) \in (a, 1],$$

y esto último es una contradicción. Así, concluímos que $\nu \neq \delta_0$.

Para finalizar la demostración de la parte 1, tenemos que probar que ν y δ_0 son los únicos estados de equilibrio ergódicos. Supongamos que ρ es un estado de equilibrio ergódico distinto de ν y δ_0. Por el Lema 5.3.3 sigue que $\rho((a, 1]) > 0$ y $\nu((a, 1]) > 0$. Además, como ρ y ν son mutuamente singulares, existen conjntos medibles disjuntos A y B tales que $\rho(A) = 1$ y $\nu(B) = 1$. Esto implica que $\rho(A \cap (a, 1]) > 0$ y $\nu(A \cap (a, 1]) = 0$, así que $\rho_{(a,1]} \neq \nu_{(a,1]}$. Sin embargo, por el Teorema 5.3.7 tenemos que $\rho_{(a,1]}$ y $\nu_{(a,1]}$ son estados de equilibrio distintos para el potencial $\Phi_{1,0}$, lo cual es una contradicción. Esto prueba la parte 1.

Ahora, consideremos $\gamma > 1$. Luego, por (5.57) se tiene $\int m d\mu = \infty$. Supongamos que $\rho \neq \delta_0$ es un estado de equilibrio ergódico para ϕ, por el Lema 5.3.3 tenemos que $\rho((a, 1]) > 0$. La Proposición 5.3.7 implica que $\rho_{(a,1]}$ es un estado de equilibrio para el potencial $\Phi_{1,0}$. Por el Teorema 2.3.4 necesariamente $\rho_{(a,1]} = \mu$. Luego, del Corolario 3.1.3 sigue que

$$\infty = \int m d\mu = \int m d(\rho_{(a,1]}) = \frac{1}{\rho((a, 1])} \int m d\rho = \frac{1}{\rho((a, 1])} < \infty,$$

y esto último es una contradicción. Por lo tanto, δ_0 es el único estado de equilibrio ergódico para el potencial $\phi = -\log f'$. Finalmente, por el Teorema 5.3.1 concluímos que δ_0 es el único estado de equilibrio para $\phi = -\log f'$. Esto completa la demostración del Teorema 5.3.8 $\square$

El último resultado de este capítulo establece que para $t > 1$ también se tiene la existencia de un único estado de equilibrio.

Teorema 5.3.9. *Si $t > 1$, entonces $P(t) = 0$ y δ_0 es el único estado de equilibrio para $\phi_t = -t \log f'$.*

Demostración. Sea $t > 1$. Por el Corolario 5.1.7 sabemos que $\mathcal{P}(t, 0) < 0$. Luego, el Teorema 5.2.6 nos dice que $P(t) \leq 0$. Por otro lado,

$$h_{\delta_0} - t \int \log f' d\delta_0 = 0.$$

Esto implica que $P(t) = 0$ y que δ_0 es un estado de equilibrio.

Supongamos que $\rho \neq \delta_0$ es un estado de equilibrio para ϕ_t, entonces por el Lema 5.3.3 se tiene que $\rho((a, 1]) > 0$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\rho((a_n, a_{n-1}]) > 0$. Recordemos que $P(1) = 0$ y notemos que, como $\log f' \geq 0$ y $\log f'(x) > \log(f'(a)) > 0$ para todo $x \in (a, 1]$, se tiene

$$(t-1) \int \log f' d\rho \geq (t-1) \int_{(a_n, a_{n-1}]} \log f' d\rho \geq (t-1)\rho((a_n, a_{n-1}]) \inf_{(a_n, a_{n-1}]} \log f' > 0.$$

Por lo tanto,

$$\int \log f' d\rho < t \int \log f' d\rho.$$

Como ρ es un estado de equilibrio para ϕ_t, esto último implica que

$$P(1) = 0 = P(t) = h_\mu - t \int \log f' d\rho < h_\mu - \int \log f' d\mu,$$

lo cual es una contradicción. Así, concluímos que δ_0 es el único estado de equilibrio para ϕ_t. $\square$

Capítulo 6

Dos puntos fijos indiferentes

En este capítulo, inspirados en la construcción dada en en Capítulo 4, estudiaremos la existencia y unicidad de estados de equilibrio para un sistema simbólico que sirve como modelo para una dinámica con dos puntos fijos indiferentes. Para eso, vamos a trabajar sobre el full-shift en 3 símbolos $\Sigma_3 := \{0,1,2\}^{\mathbb{N}_0}$ y la función shift $\sigma : \Sigma_3 \to \Sigma_3$. De forma similar a lo hecho en el Capítulo 4 definiremos un potencial $\phi : \Sigma_3 \to \mathbb{R}$ menor o igual que 0, de manera que $\phi(\overline{0}) = \phi(\overline{2}) = 0$, donde $\overline{0}$ denota la sucesión constante igual a 0 y $\overline{2}$ denota la sucesión constante igual a 2.

Definamos las colecciones $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$M_n := \{x \in \Sigma_3 : x_i = 0 \text{ para } 0 \leq i \leq n-1, x_n \neq 0\},$$
$$N_n := \{x \in \Sigma_3 : x_i = 2 \text{ para } 0 \leq i \leq n-1, x_n \neq 2\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forman una partición de $[0]\backslash\{\overline{0}\}$ y $[2]\backslash\{\overline{2}\}$ respectivamente. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales que convergen a 0. Dado $A > 0$, definimos el potencial $\phi : \Sigma_3 \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} a_n & \text{si } x \in M_n, \\ b_n & \text{si } x \in N_n, \\ -A & \text{si } x \in [1], \\ 0 & \text{si } x \in \{\overline{0}, \overline{2}\}. \end{cases}$$

Consideremos el conjunto

$$D = [1] \setminus \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in [1] : \text{ para algún } N \in \mathbb{N}, x_n \neq 1 \text{ para todo } n \geq N\},$$

el tiempo de primer retorno $m : D \to \mathbb{N}$ y la función de primer retorno $F : D \to D$. Notemos que F está bien definida en todo el conjunto D. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos el conjunto

$$E_n := \{x \in \Sigma_3 : x_0 = x_n = 1, x_i \neq 1 \text{ para } 1 \leq i \leq n-1\}. \tag{6.1}$$

Luego, si $x \in D$

$$m(x) = n \iff x \in E_n.$$

De (6.1) es claro que cada E_n se puede escribir como unión disjunta de 2^{n-1} cilindros que denotaremos por $\{A_n^k\}_{k=1}^{2^{n-1}}$. Por ejemplo, $E_1 = [11] = A_1^1$ y $E_2 = [101] \cup [121]$.

Tal como en el Capítulo 4, el sistema (D, F) es conjugado al full-shift (Σ, σ), con $\Sigma = \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$. En este caso, los conjuntos A_n^k corresponden a los cilindros de largo 1 bajo la conjugación correspondiente.

Al igual que en el Capítulo 4, para cada $p \in \mathbb{R}$, vamos a denotar por Φ_p al potencial inducido

$$\Phi_p(x) = S_{m(x)}\phi(x) - pm(x) \quad \text{ para todo } x \in D.$$

$\mathcal{P}(p)$ denotará la presión del potencial Φ_p y escribiremos $Z_n(p)$ para referirnos a $Z_n(\Phi_p)$.

Como Φ_p es constante en cada A_n^k, por el Lema 4.0.1, se tiene que

$$Z_n(p) = Z_1(p)^n \tag{6.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, y

$$\mathcal{P}(p) = \log Z_1(p) \quad \text{ para todo } p \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

Esto además implica que Φ_p es localmente Hölder.

La demostración del siguiente teorema es análoga a la demostración del Teorema 4.0.5.

Teorema 6.0.1. *Sea satisface*

$$P(\phi) = \inf\{p \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(p) \leq 0\}.$$

En particular,

$$\mathcal{P}(p) = 0 \implies p = P(\phi).$$

Lema 6.0.2. *Supongamos que* $\mathcal{P}(P(\phi)) \leq 0$ *y sea* ρ *un estado de equilibrio para* ϕ*. Si* $\rho(\{\overline{0},\overline{2}\}) = 0$*, entonces* $\rho([1]) > 0$*.*

Demostración. Supongamos que $\rho([1]) = 0$. Como $\rho(\{\overline{0},\overline{2}\}) = 0$, existe, sin pérdida de generalidad, $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(M_k) > 0$. Dados $\overline{a}_k > a_k$ y $-\overline{A} < -A$, definimos el potencial

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \notin [1] \cup M_k, \\ \overline{a}_k & \text{si } x \in M_k, \\ -\overline{A} & \text{si } x \in [1]. \end{cases}$$

Denotamos por $\overline{\Phi}_{P(\phi)}$ al potencial inducido por $\overline{\phi}$ asociado a $P(\phi)$, y $P(\overline{\Phi}_{P(\phi)})$ es su presión. Por (6.3) podemos considerar $\overline{a}_k$ y $\overline{A}$ tal que

$$P(\overline{\Phi}_{P(\phi)}) = \mathcal{P}(P(\phi)) \leq 0.$$

Luego, como $P(\overline{\Phi}_{P(\phi)}) \leq 0$, aplicando el Teorema 6.0.1 al potencial $\overline{\phi}$ obtenemos que

$$P(\overline{\phi}) \leq P(\phi). \tag{6.4}$$

Por otro lado,

$$\int \overline{\phi} d\rho - \int \phi d\rho = \underbrace{\rho([1])}_{=0}(-\overline{A} - A) + \underbrace{\rho(M_k)(\overline{a}_k - a_k)}_{>0} > 0. \tag{6.5}$$

Por lo tanto, sigue de (6.4) y (6.5) que

$$P(\overline{\phi}) \leq P(\phi) = h_\rho(\sigma) + \int \phi d\rho < h_\rho(\sigma) + \int \overline{\phi} d\rho.$$

Esto último contradice el Principio variacional. Así, necesariamente $\rho([1]) > 0$. □

Corolario 6.0.3. *Suponga que* $\mathcal{P}(P(\phi)) \leq 0$ *y sea* ρ *un estado de equilibrio para* ϕ *tal que* $\rho(\{\overline{0},\overline{2}\}) = 0$*. Entonces* $\rho(D) > 0$*.*

Demostración. Por el Lema 6.0.2 tenemos que $\rho([1]) > 0$. Sigue del Teorema 1.1.2 que

$$\rho(D) = \rho([1] \setminus \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in [1] : \text{ para algún } N \in \mathbb{N}, x_n \neq 1 \text{ para todo } n \geq N\}) = \rho([1]) > 0.$$

□

En lo que sigue, vamos a denotar por P_2 a la presión del potencial $\phi|_{\{0,2\}^{\mathbb{N}_0}}$, es decir, la presión del potencial ϕ restringido al full-shift en 2 símbolos $\{0,2\}^{\mathbb{N}_0}$.

Proposición 6.0.4. *Dado $p \in \mathbb{R}$, se tiene que*

1. *Si $p < P_2$, entonces $Z_1(p) = \infty$.*
2. *Si $p > P_2$, entonces $Z_1(p) < \infty$.*

Además, si $Z_1(0) = \infty$, entonces $Z_1(P_2) = \infty$.

Demostración. Notemos que

$$Z_1(p) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \sup e^{S_n\phi|_{A_n^k}} = e^{-A}\left(e^{-p} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-pn} \sum_{\omega\in\{0,2\}^n} \sup e^{S_n\phi|_{[\omega 1]}}\right), \tag{6.6}$$

y por la Proposición 4.0.4,

$$\begin{aligned} P_2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{\omega\in\{0,2\}^n} \inf e^{S_n\phi|_{[\omega]}}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{\omega\in\{0,2\}^n} \sup e^{S_n\phi|_{[\omega 1]}}\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{\omega\in\{0,2\}^n} \sup e^{S_n\phi|_{[\omega]}}\right) = P_2. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Luego, de (6.7) sigue que

$$P_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{\omega\in\{0,2\}^n} \sup e^{S_n\phi|_{[\omega 1]}}\right).$$

Así, por (6.6) se tiene que $Z_1(p) = \infty$ si $p < P_2$ y $Z_1(p) < \infty$ si $p > P_2$.

Ahora, supongamos que $Z_1(0) = \infty$. Por (6.6), si $Z_1(P_2) < \infty$, entonces tomando A suficientemente grande se tiene que $Z_1(P_2) \leq 1$. Así, es suficiente probar que $Z_1(P_2) > 1$.

Supongamos por contradicción que $Z_1(P_2) \leq 1$, entonces $\mathcal{P}(P_2) \leq 0$. Luego, por la parte 1, y el Teorema 6.0.1 se tiene que

$$P_2 = \inf\{p \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(p) \leq 0\} = P(\phi). \tag{6.8}$$

En particular, $\mathcal{P}(P(\phi)) = \mathcal{P}(P_2) \leq 0$. Como σ es expansiva, existe un estado de equilibrio ergódico μ para el potencial $\phi|_{\{0,2\}^{\mathbb{N}_0}}$ (ver [VO16, Corollary 10.5.9]). Entonces,

$$P(\phi) = P_2 = h_\mu + \int \phi|_{\{0,2\}^{\mathbb{N}_0}} d\mu.$$

Esto implica que la medida $\overline{\mu}$ definida sobre $\{0,1,2\}^{\mathbb{N}_0}$, dada por $\overline{\mu}(B) = \mu(B \cap \{0,2\}^{\mathbb{N}_0})$ para cada boreliano $B \subset \Sigma_3$, es un estado de equilibrio para el potencial ϕ y satisface $\overline{\mu}([1]) = 0$. Luego, como $\mathcal{P}(P(\phi)) \leq 0$, por el Lema 6.0.2 tenemos que $\overline{\mu} \in \{\delta_{\overline{0}}, \delta_{\overline{2}}\}$, lo cual implica que $P(\phi) = 0$. Sigue de (6.8) que $Z_1(P_2) = Z_1(P(\phi)) = Z_1(0) = \infty$, y esto es una contradicción. Por lo tanto, $Z_1(P_2) > 1$. $\square$

6.1. Existencia de un único estado de equilibrio

El objetivo de esta sección es probar el teorema que enunciamos a continuación.

Teorema 6.1.1. *Si $Z_1(0) > 1$, existe un único estado de equilibrio para ϕ.*

Antes de comenzar a demostrar el Teorema 6.1.1, veamos una sencilla consecuencia. En lo que sigue, vamos a considerar $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ y $r_n = b_1 + \ldots b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Corolario 6.1.2. *Si*

$$\text{máx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} e^{s_n}, \sum_{n=1}^{\infty} e^{r_n}\right\} > e^A \quad \text{ó} \quad \text{mín}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} e^{s_n}, \sum_{n=1}^{\infty} e^{r_n}\right\} > \frac{e^A}{2}, \tag{6.9}$$

entonces $Z_1(0) > 1$. En particular, existe un único estado de equilibrio para ϕ.

Demostración. Recordemos que

$$Z_1(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \exp(\sup \Phi_0|_{A_n^k}). \tag{6.10}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $j \in \{1, \ldots, 2^n\}$ y $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tales que

$$A_{n+1}^j = \underbrace{[10\ldots01]}_{n \text{ ceros}} \quad \text{y} \quad A_{n+1}^k = \underbrace{[12\ldots21]}_{n \text{ doses}}.$$

Como $\Phi_0|_{A_{n+1}^j} \equiv -A + s_n$ y $\Phi_0|_{A_{n+1}^k} \equiv -A + r_n$, de (6.10) sigue que

$$e^{-A}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{s_n} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{r_n}\right) \leq Z_1(0).$$

Luego, si se verifica (6.9), entonces $Z_1(0) > 1$. Así, por el Teorema 6.1.1, existe un único estado de equilibrio para ϕ. □

Comencemos la demostración del Teorema 6.1.1 con la siguiente proposición.

Proposición 6.1.3. *Si $Z_1(0) > 1$, existen p y q positivos tales que*

$$0 < \mathcal{P}(p) < \infty \quad y \quad -\infty < \mathcal{P}(q) < 0. \tag{6.11}$$

Demostración. Primero, supongamos que $Z_1(0) = \infty$. Por la Proposición 6.0.4 se tiene que $Z_1(P_2) = \infty$ y $Z_1(p) < \infty$ para todo $p > P_2$, así que $\mathcal{P}(P_2) = \infty$ y $\mathcal{P}(p) < \infty$ para $p > P_2$. Por el Teorema de convergencia monótona tenemos que $\mathcal{P}(p) \xrightarrow{p \to P_2^+} \infty$ y $\mathcal{P}(p) \xrightarrow{p\to\infty} -\infty$. Luego, necesariamente existen p y q positivos satisfaciendo (6.11).

Ahora, supongamos que $Z_1(0) \in (1, \infty)$. Entonces $\mathcal{P}(0) \in (0, \infty)$. Nuevamente por el Teorema de convergencia monótona se tiene que $\mathcal{P}(p) \xrightarrow{p\to 0^+} \mathcal{P}(0) \in (0,\infty)$ y $\mathcal{P}(p) \xrightarrow{p\to\infty} -\infty$. Así, en este caso tambien existen p y q positivos verificando (6.11). Esto completa la demostración. □

Proposición 6.1.4. *Suponga que $Z_1(0) > 1$. Entonces $P(\phi) > 0$ y $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$. Además, existe un único estado de Gibbs F-invariante para $\Phi_{P(\phi)}$.*

Demostración. Por la Proposición 6.1.3, existen $0 < p < q$ tales que

$$0 < \mathcal{P}(p) < \infty \quad \text{y} \quad -\infty < \mathcal{P}(q) < 0.$$

Luego, existe $p_0 \in (p, q)$ tal que $\mathcal{P}(p_0) = 0$, pues $p \mapsto \mathcal{P}(p)$ es continua donde es finita. Por lo tanto, por el Teorema 6.0.1 tenemos que $P(\phi) = p_0$. Es decir, se tiene que $P(\phi) > 0$ y $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$. Esto prueba la primera parte.

Finalmente, como $\Phi_{P(\phi)}$ es constante en cada A_n^k se tiene inmediatamente que $\Phi_{P(\phi)}$ es localmente Hölder. Además, como $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$, tenemos que $Z_1(P(\phi)) = 1$, en particular, $\Phi_{P(\phi)}$ es sumable. Por lo tanto, por el Teorema 2.3.1, existe un único estado de Gibbs F-invariante para $\Phi_{P(\phi)}$. Esto completa la demostración. □

Proposición 6.1.5. *Si $Z_1(0) > 1$ y μ es el estado de Gibbs F-invariante para $\Phi_{P(\phi)}$ dado por la Proposición 6.1.4, entonces μ es el único estado de equilibrio para el potencial $\Phi_{P(\phi)}$. Además, se tiene $\int m d\mu < \infty$.*

Demostración. Por la Proposición 6.1.4 tenemos que $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$. Luego, como μ es un estado de Gibbs y $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$, existe $C > 0$ tal que, para cada $n \geq 0$ y $1 \leq k \leq 2^{n-1}$, se tiene que

$$C^{-1} \leq \frac{\mu(A_n^k)}{\exp(\Phi_{P(\phi)}(x))} \leq C,$$

para todo $x \in A_n^k$. Sigue que

$$\mu(A_n^k) \leq C \exp(\sup \Phi_{P(\phi)}|_{A_n^k}).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int m d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{A_n^k} m d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} n\mu(A_n^k) \leq C \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} n \exp(\sup \Phi_{P(\phi)}|_{A_n^k}) \\ = C \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} n \exp\left(\sup\left(\sum_{j=0}^{n-1}(\phi\circ\sigma^j)|_{A_n^k}\right)\right) e^{-P(\phi)n}.\end{aligned}$$

Como $Z_1(0) > 1$ y $Z_1(P(\phi)) = 1$, por la Proposición 6.1.3, existe $0 < \delta < P(\phi)$ tal que $Z_1(\delta) \in (1, \infty)$. Luego,

$$\begin{aligned}\int m d\mu &\leq C \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} n \exp\left(\sup\left(\sum_{j=0}^{n-1}(\phi\circ\sigma^j)|_{A_n^k}\right)\right) e^{-P(\phi)n} \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{(P(\phi)-\delta)n}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \exp\left(\sup\left(\sum_{j=0}^{n-1}(\phi\circ\sigma^j)|_{A_n^k}\right)\right) e^{-\delta n} \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{(P(\phi)-\delta)n}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \exp(\sup \Phi_\delta|_{A_n^k}).\end{aligned}$$

Dado que $P(\phi) - \delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n}{e^{(P(\phi)-\delta)n}} \leq 1$ para todo $n \geq N$. Esto implica que,

$$\begin{aligned}\int m d\mu &\leq C \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{e^{(P(\phi)-\delta)n}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \exp(\sup \Phi_\delta|_{A_n^k}) + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n}{e^{(P(\phi)-\delta)n}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \exp(\sup \Phi_\delta|_{A_n^k})\right) \\ &\leq C \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{n}{e^{(P(\phi)-\delta)n}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \exp(\sup \Phi_\delta|_{A_n^k}) + Z_1(\delta)\right) < \infty.\end{aligned}$$

Para concluir, por el Teorema 2.3.2 es suficiente verificar que $\int \Phi_{P(\phi)} d\mu > -\infty$. Para esto, notemos que

$$\begin{aligned}\int \Phi_{P(\phi)} d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\int_{A_n^k} \Phi_{P(\phi)} d\mu \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\mu(A_n^k) \left(\sum_{j=0}^{n-1} (\phi \circ \sigma^j)|_{A_n^k} - P(\phi) n \right) \right) \\ &\geq (\inf_{n\in\mathbb{N}} \{a_n, b_n, -A\} - P(\phi)) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \mu(A_n^k) n \\ &= (\inf_{n\in\mathbb{N}} \{a_n, b_n, -A\} - P(\phi)) \int m d\mu > -\infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, μ es el único estado de equilibrio para $\Phi_{P(\phi)}$. □

La demostración del siguiente teorema es análoga a la demostración del Teorema 4.0.3.

Teorema 6.1.6. *Sea μ un estado de equilibrio para $\Phi_{P(\phi)}$ tal que $\int m\, d\mu < \infty$. Si $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$, entonces $\mu_m/\mu_m(\Sigma_3)$ es un estado de equilibrio para ϕ.*

Supongamos que $Z_1(0) > 1$. Sea μ el único estado de equilibrio para $\Phi_{P(\phi)}$ dado por la Proposición 6.1.5. Luego, μ satisface $\int m d\mu < \infty$. Como $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$ (ver Proposición 6.1.4), el Teorema 6.1.6 implica que $\nu := \mu_m/\mu_m(\Sigma_3)$ es un estado de equilibrio para ϕ.

Además, por el Teorema 2.3.1, la medida μ es ergódica. Así, ν también es ergódica en virtud de la Proposición 3.2.4.

Para concluir la demostración del Teorema 6.1.1, solamente falta probar la unicidad. Para eso, necesitamos la siguiente proposición, cuya demostración es análoga a la demostración de la Proposición 4.1.7

Proposición 6.1.7. *Si $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$ y ρ es un estado de equilibrio ergódico para ϕ tal que $\rho(D) > 0$, entonces $\rho_D = \rho|_D/\rho(D)$ es un estado de equilibrio para $\Phi_{P(\phi)}$. Además, existe a lo más un estado de equilibrio ergódico ρ tal que $\rho(D) > 0$.*

Ahora, recordemos que de la Proposición 6.1.4 se tiene que $P(\phi) > 0$, entonces $\nu \notin \{\delta_{\overline{0}}, \delta_{\overline{2}}\}$. Como ν es ergódica, tenemos que ν es mutuamente singular a $\delta_{\overline{0}}$ y a $\delta_{\overline{2}}$, así que $\nu(\{\overline{0}, \overline{2}\}) = 0$. Luego, como $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$, sigue del Corolario 6.0.3 que $\nu(D) > 0$.

Supongamos que $\rho \neq \nu$ es un estado de equilibrio ergódico para ϕ. Por el argumento anterior se tiene que $\rho(D) > 0$. Así, ν y ρ cumplen $\nu(D) > 0$ y $\rho(D) > 0$. La Proposición 6.1.7 implica que $\rho = \nu$.

Por lo tanto, ν es el único estado de equilibrio ergódico para ϕ. Finalmente, gracias a la Proposición 1.4.5 concluímos que ν es el único estado de equilibrio para ϕ. Esto completa la demostración del Teorema 6.1.1. □

6.2. Existencia de más de un estado de equilibrio

El objetivo de esta sección es probar el Teorema 6.2.1. Para enunciarlo, es necesario deducir algunas cosas.

A lo largo de esta sección siempre supondremos que $Z_1(0) = 0$. Note que por (6.3) esto es equivalente a $\mathcal{P}(0) = 0$, y por lo tanto, por el Teorema 6.0.1 se tiene que $P(\phi) = 0$. Así, $\delta_{\overline{0}}$ y $\delta_{\overline{2}}$ son estados de equilibrio para ϕ. Además, como Φ_0 es localmente Hölder y $Z_1(0) = 1 < \infty$, por el Teorema 2.3.1, existe un único estado de Gibbs F-invariante μ para el potencial Φ_0, y además, μ es ergódica.

Como μ es un estado de Gibbs y $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$, existe $C > 0$ tal que

$$C^{-1} \leq \frac{\mu(A_n^k)}{\exp(\Phi_0|_{A_n^k})} \leq C, \tag{6.12}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $0 < k < 2^{n-1}$. Ahora, podemos enunciar el Teorema 6.2.1.

Teorema 6.2.1. *Supongamos que $Z_1(0) = 1$.*

1. *Si $\int m d\mu < \infty$, existe un estado de equilibrio ergódico $\nu \notin \{\delta_{\overline{0}}, \delta_{\overline{2}}\}$ para el potencial ϕ. Además, ν, $\delta_{\overline{0}}$ y $\delta_{\overline{2}}$ son los únicos estados de equilibrio ergódicos para ϕ.*
2. *Si $\int m d\mu = \infty$, entonces $\delta_{\overline{0}}$ y $\delta_{\overline{2}}$ son los únicos estados de equilibrio ergódicos para ϕ.*

Demostración. Primero, supongamos que $\int m d\mu < \infty$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int \Phi_0 d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_{A_n^k} \Phi_0 d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \left(\mu(A_n^k) \sum_{j=0}^{n-1} (\phi \circ \sigma^j)|_{A_n^k} \right) \\
&\geq (\inf_{n\in\mathbb{N}} \{a_n, b_n, -A\}) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} n\mu(A_n^k) \right) \\
&= (\inf_{n\in\mathbb{N}} \{a_n, b_n, -A\}) \int m d\mu > -\infty.
\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema 2.3.2, μ es el único estado de equilibrio para $\Phi_0 = \Phi_{P(\phi)}$.

Como $P(\phi) = 0$ y $\mathcal{P}(P(\phi)) = 0$, por el Teorema 6.1.6 se tiene que $\nu := \mu_m/\mu_m(\Sigma_3)$ es un estado de equilibrio para ϕ. Notemos que,

$$\nu(\{\overline{0},\overline{2}\}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k>n}\mu(\sigma^{-n}(\{\overline{0},\overline{2}\})\cap E_k) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k>n}\underbrace{\mu\left(\bigcup_{\omega\in\{0,1,2\}^n}(\{\omega\overline{0}\}\cup\{\omega\overline{2}\})\cap E_k\right)}_{=\emptyset} = 0.$$

Así, $\nu \notin \{\delta_{\overline{0}},\delta_{\overline{2}}\}$. Por otro lado, por la Proposición 3.2.4 tenemos que ν es ergódica, pues μ es ergódica.

Para ver que no hay más estados de equilibrio ergódicos, supongamos por contradicción que $\rho \notin \{\nu,\delta_{\overline{0}},\delta_{\overline{2}}\}$ es un estado de equilibrio ergódico para ϕ. Antes vimos que $\nu\{\overline{0},\overline{2}\} = 0$, y como ρ es mutuamente singular a $\delta_{\overline{0}}$ y a $\delta_{\overline{2}}$, también se tiene $\rho(\{\overline{0},\overline{2}\}) = 0$. Luego, gracias al Corolario 6.0.3 obtenemos que $\rho(D) > 0$ y $\nu(D) > 0$. Por la Proposición 6.1.7, se tiene que $\rho = \nu$, lo cual es una contradicción. Así, $\nu, \delta_{\overline{0}}$ y $\delta_{\overline{2}}$ son los únicos estados de equilibrio ergódicos para ϕ. Esto prueba la parte 1.

Ahora, supongamos que $\int m d\mu = \infty$. Si $\rho \notin \{\delta_{\overline{0}},\delta_{\overline{2}}\}$ es un estado de equilibrio ergódico para ϕ, entonces $\rho(\{\overline{0},\overline{2}\}) = 0$, pues ρ es mutuamente singular a $\delta_{\overline{0}}$ y a $\delta_{\overline{2}}$. De manera similar a lo hecho antes, el Corolario 6.0.3 implica que $\rho(D) > 0$, y por la Proposición 6.1.7 obtenemos que $\rho_D = \rho|_D/\rho(D)$ es un estado de equilibrio para $\Phi_{P(\phi)} = \Phi_0$. Luego, en virtud del Teorema 2.3.4 concluímos que $\rho_D = \mu$. Sin embargo, sigue del Corolario 3.1.3 que

$$\infty = \int m d\mu = \int m d(\rho_D) = \frac{1}{\rho(D)}\int_D m d\rho = \frac{1}{\rho(D)} < \infty,$$

y esto último es una contradicción. Por lo tanto, $\delta_{\overline{0}}$ y $\delta_{\overline{2}}$ son los únicos estados de equilibrio ergódicos para ϕ. Esto completa la demostración del Teorema 6.2.1. □

Terminamos esta sección, enunciando un par de consecuencias del Teorema 6.2.1.

Corolario 6.2.2. *Supongamos que $Z_1(0) = 1$. Si $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{s_n} < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{r_n} < 1$, entonces $\int m d\mu < \infty$. En particular, existe un estado de equilibrio ergódico para ϕ, distinto de $\delta_{\overline{0}}$ y $\delta_{\overline{2}}$.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{s_n} < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{r_n} < 1$. De (6.12) se tiene

$$\int m d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\int_{A_n^k} m d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} n\mu(A_n^k) \le C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} n\exp(\sup \Phi_0|_{A_n^k})$$

$$
\begin{aligned}
&= C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} n\exp\left(\sup\left(\sum_{j=0}^{n-1}(\phi\circ\sigma^j)|_{A_n^k}\right)\right)\\
&= Ce^{-A}\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} n\exp\left(\sup\left(\sum_{j=1}^{n-1}(\phi\circ\sigma^j)|_{A_n^k}\right)\right)\right)\\
&\le Ce^{-A}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)e^{s_k}\right)^n\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)e^{r_k}\right)^n\right]+\sum_{n=1}^{\infty}n(e^{s_n}+e^{r_n})\right)\\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

Así, por la parte 1 del Teorema 6.2.1, se tiene el Corolario 6.2.2. $\square$

Corolario 6.2.3. *Supongamos que $Z_1(0) = 1$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{s_n} = \infty$ o $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{r_n} = \infty$, entonces $\int m d\mu = \infty$. En particular, $\delta_{\overline{0}}$ y $\delta_{\overline{2}}$ son los únicos estados de equilibrio ergódicos para ϕ.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{s_n} = \infty$ o $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{r_n} = \infty$. Luego, de (6.12) sigue que

$$
\begin{aligned}
\int m d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} n\mu(A_n^k) \ge C^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} n\exp(\sup\Phi_0|_{A_n^k})\\
&\ge C^{-1}e^{-A}\left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{s_n}+\sum_{n=1}^{\infty} ne^{r_n}\right) = \infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, por la parte 2 del Teorema 6.2.1 concluímos que $\delta_{\overline{0}}$ y $\delta_{\overline{2}}$ son los únicos estados de equilibrio ergódicos para ϕ. $\square$

6.3. Caso $Z_1(0) < 1$ y ejemplos

Comenzamos esta sección caracterizando los estados de equilibrio para ϕ cuando $Z_1(0) < 1$.

Teorema 6.3.1. *Si $Z_1(0) < 1$, entonces $\delta_{\overline{0}}$ y $\delta_{\overline{2}}$ son los únicos estados de equilibrio ergódicos para ϕ.*

Demostración. En esta demostración vamos a considerar $a_0 = b_0 = -A$ y $M_0 = N_0 = [1]$. Primero, observemos que en este caso $\mathcal{P}(0) < 0$. Luego, por el Teorema 6.0.1 tenemos que $P(\phi) \le 0$. Por otro lado,

$$h_{\delta_{\overline{0}}} + \int \phi d\delta_{\overline{0}} = 0,$$

lo cual implica que $P(\phi) = 0$ y $\delta_{\overline{0}}$ es un estado de equilibrio para ϕ. Análogamente, tenemos que $\delta_{\overline{2}}$ también es un estado de equilibrio para ϕ.

Supongamos que $\rho \notin \{\delta_{\overline{0}}, \delta_{\overline{2}}\}$ es un estado de equilibrio ergódico, entonces $\rho(\{\overline{0}, \overline{2}\}) = 0$ pues ρ es mutuamente singular a $\delta_{\overline{0}}$ y a $\delta_{\overline{2}}$. Luego, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\rho(M_n \cup N_n) > 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\rho(M_n) > 0$. Dado $\overline{a}_n \in \mathbb{R}$, definimos el potencial

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{si } x \notin M_n, \\ \overline{a}_n & \text{si } x \in M_n. \end{cases}$$

Sea $\overline{\Phi}_0$ el potencial inducido por $\overline{\phi}$ asociado a $p = 0$, es decir, $\overline{\Phi}(x) = S_{m(x)}\overline{\phi}(x)$ para cada $x \in D$. También denotamos por $P(\overline{\Phi}_0)$ a la presión de $\overline{\Phi}_0$. Por (6.3) podemos escoger $\overline{a_n} > a_n$ de tal forma que $P(\overline{\Phi}_0) < 0$. Luego, aplicando el Teorema 6.0.1 al potencial $\overline{\phi}$ obtenemos que $P(\overline{\phi}) = 0 = P(\phi)$. Por otro lado,

$$\int \overline{\phi} d\rho - \int \phi d\rho = \rho(M_n)(\overline{a}_n - a_n) > 0.$$

Luego,

$$P(\overline{\phi}) = P(\phi) = h_\rho + \int \phi d\rho < h_\rho + \int \overline{\phi} d\rho,$$

lo cual contradice el Principio variacional. Esto termina la demostración. $\square$

Para finalizar este capítulo, daremos ejemplos de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que el potencial ϕ satisface las distintas hipótesis de los Teoremas 6.1.1, 6.2.1 y 6.3.1. Antes, necesitamos el siguiente lema.

Lema 6.3.2. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} e^{s_n} < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} e^{r_n} < 1$, entonces $Z_1(0) < \infty$.*

Demostración. Notemos que,

$$\begin{aligned} Z_1(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \exp\left(\sup\left(\sum_{j=0}^{n-1} (\phi \circ \sigma^j)|_{A_n^k}\right)\right) \\ &= e^{-A}\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \exp\left(\sup\left(\sum_{j=1}^{n-1} (\phi \circ \sigma^j)|_{A_n^k}\right)\right)\right) \\ &\leq e^{-A}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{s_k}\right)^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{r_k}\right)^n\right] + \sum_{n=1}^{\infty} e^{s_n} + e^{r_n}\right), \end{aligned}$$

y esto último es finito si $\sum_{n=1}^{\infty} e^{s_n} < 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} e^{r_n} < 1$. $\square$

Ejemplo 6.1. Sean α y β números positivos. Consideremos las sucesiones

$$a_n = \log\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1} \quad \text{y} \quad b_n = \log\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta+1},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$s_n = \log\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha+1} \quad \text{y} \quad r_n = \log\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\beta+1}.$$

Consideremos $\zeta(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma}$ para cada $\gamma > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} e^{s_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} = \zeta(\alpha+1) - 1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{r_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\beta+1}} = \zeta(\beta+1) - 1. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Sabemos que $\gamma \mapsto \zeta(\gamma)$ es finita y continua en $(1,\infty)$. Además, $\zeta(\gamma) \xrightarrow{\gamma\to 1^+} \infty$ y se tiene que $\zeta(2) - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1 \in (0,1)$. Por lo tanto, existe $\gamma \in (0,1)$ tal que

$$\zeta(\gamma+1) - 1 = 1. \tag{6.14}$$

Luego, si $\{\alpha,\beta\} \subset (\gamma,\infty)$, por (6.13) y el Lema 6.3.2 se tiene que $Z_1(0) < \infty$, independiente de la elección de A.

Supongamos que $\{\alpha,\beta\} \subset (\gamma,\infty)$. Consideremos

$$A = \log\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \exp\left(\sup\left(\sum_{j=1}^{n-1}(\phi\circ\sigma^j)|_{A_n^k}\right)\right)\right).$$

Notemos que $A \in (0,\infty)$ pues $Z_1(0) < \infty$. Luego,

$$\begin{aligned} Z_1(0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \exp\left(\sup\left(\sum_{j=0}^{n-1}(\phi\circ\sigma^j)|_{A_n^k}\right)\right) \\ &= e^{-A}\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \exp\left(\sup\left(\sum_{j=1}^{n-1}(\phi\circ\sigma^j)|_{A_n^k}\right)\right)\right) = 1. \end{aligned}$$

Así, si $t \in (0,1)$, el potencial $t\phi$ satisface la hipótesis del Teorema 6.1.1, y si $t \in (1,\infty)$, el potencial $t\phi$ satisface la hipótesis del Teorema 6.3.1.

Ahora, observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{s_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} = \zeta(\alpha) - 1,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{r_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{\beta}} = \zeta(\beta) - 1.$$

Entonces, por (6.14), si $\{\alpha, \beta\} \subset (\gamma + 1, \infty)$, se tiene

$$\text{máx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{s_n}, \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{r_n}\right\} < 1.$$

Por el Corolario 6.2.2 tenemos que ϕ cumple las hipótesis del Teorema 6.2.1, parte 1. Por otro lado, si $\alpha \in (\gamma, 1]$ ó $\beta \in (\gamma, 1]$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{s_n} = \infty \quad \text{ó} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{r_n} = \infty,$$

y por el Corolario 6.2.3 concluímos que ϕ satisface las hipótesis del Teorema 6.2.1, parte 2.

Observación 6.3.1. En el caso en que $(\alpha, \beta) \in ((1, \gamma + 1] \times (1, \infty)) \cup ((1, \infty) \times (1, \gamma + 1])$ no sabemos si el tiempo de primer retorno es integrable con respecto al estado de Gibbs F-invariante correspondiente. Por lo tanto, en este caso no sabemos si hay unicidad o multiplicidad de estados de equilibrio para el potencial ϕ.

Bibliografía

[Bow75] Rufus Bowen. Equilibrium states and the ergodic theory of anosov diffeomorphisms. *Lect. Notes Math*, 1975.

[EW11] Manfred Einsiedler and Thomas Ward. *Ergodic theory with a view towards number theory*, volume 259 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

[Hof77] Franz Hofbauer. Examples for the nonuniqueness of the equilibrium state. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1977.

[Kel98] Gerhard Keller. *Equilibrium states in ergodic theory*, volume 42. Cambridge university press, 1998.

[Lop93] AO Lopes. The zeta function, non-differentiability of pressure, and the critical exponent of transition. *Advances in Mathematics*, 1993.

[MU01] R. Daniel Mauldin and Mariusz Urbański. Gibbs states on the symbolic space over an infinite alphabet. *Israel J. Math.*, pages 93–130, 2001.

[MU03] R Daniel Mauldin and Mariusz Urbanski. *Graph directed Markov systems: geometry and dynamics of limit sets*, volume 148. Cambridge University Press, 2003.

[Mun00] James R Munkres. Topology (2nd edn), 2000.

[PM80] Yves Pomeau and Paul Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Comm. Math. Phys.*, 74:189–197, 1980.

[PS92] Thomas Prellberg and Joseph Slawny. Maps of intervals with indifferent fixed points: thermodynamic formalism and phase transitions. *Journal of Statistical Physics*, 66:503–514, 1992.

[Rue78] David Ruelle. *Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibrium statistical mechanics. With a foreword by Giovanni Gallavotti and Gian-Carlo Rota.* 1978.

[Sar99] Omri M. Sarig. Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(6):1565–1593, 1999.

[Sar01] Omri M. Sarig. Phase transitions for countable Markov shifts. *Comm. Math. Phys.*, 217:555–577, 2001.

[Sar15] Omri M. Sarig. Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. In *Hyperbolic dynamics, fluctuations and large deviations*, volume 89 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 81–117. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[Sar20] Omri Sarig. Lecture notes on ergodic theory. 2020.

[VO16] Marcelo Viana and Krerley Oliveira. *Foundations of ergodic theory*, volume 151 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[Wal82] Peter Walters. *An introduction to ergodic theory.* Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.