



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

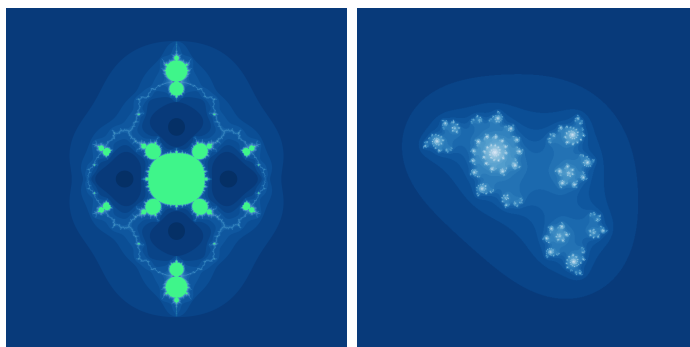
TESIS DE MAGÍSTER

Irreductibilidad de curvas de polinomios cúbicos con punto crítico marcado prefijo

Autoría: Daniel Gajardo

Supervisor: [Jan Kiwi](#)

*Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad
Católica de Chile para optar al grado de Magíster en Matemática*



Comisión:

Daniel Coronel (Pontificia Universidad Católica de Chile),
Matthieu Arfeux (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso).

Abril 2022
Santiago, Chile

*“The thing about life is, every time you learn a lesson,
another one is waiting right at the corner.”
~ Dr. Taylor Swift*

Agradecimientos

Este trabajo no llegó aquí solo, tampoco yo. A lo largo de este largo camino he tenido la compañía de muchas personas, que en mayor o menor medida son la razón de que esta tesis haya salido a la luz, y que de alguna forma haya llegado hasta quien la esté leyendo ahora.

Quiero agradecer en primer lugar a mi profesor Jan Kiwi, quien me estuvo acompañando en cada paso de este desafío. Me introdujo a este emocionante mundo de la dinámica compleja, y me enseñó paso a paso a navegar a través de sus no poco complejas herramientas. Siempre empujando a sacar lo mejor de mi, pero nunca presionando. Sin él, absolutamente nada de esto hubiera sido escrito por mi parte.

Quiero agradecer a David, mi amada pareja. Me vio sufrir y alegrarme, me vio estancarme y salir adelante, y en cada momento me acompañó, me brindó apoyo y por sobretodo su amor. Tan distinto que es escribir a su lado, donde toda dificultad parece una nimiedad, donde la frustración es dejada de lado por la tranquilidad de que junto a él todo saldrá bien. Sé que en cada trabajo que se venga estará también ahí, y yo junto a él.

Quiero agradecer a mi familia, a mi padre y mi madre que desde mi nacimiento que me han acompañado en todos los aspectos de la vida. Me brindaron una impecable educación, me dieron cada una de las herramientas con las que he llegado hasta donde estoy hoy. Agradecer también de forma particular a mi queridísima abuelita, la profesora Herminia. Modelo de vida, modelo a seguir. Es viéndola a ella que la pasión por las matemáticas apareció en mi vida. Sé lo orgullosa que está de donde estoy yo, y me hace enormemente feliz compartir este camino con ella.

Quiero agradecer finalmente a todes quienes han sido parte de este paso por la universidad. A mis profesores, a mis amigos, a toda la comunidad de la facultad. Cada uno de ustedes entregó su granito de arena en mi vida. Somos nuestras relaciones, y por tanto sin cada uno de ustedes no sería quien soy hoy.

Este trabajo trata de conectar y armar caminos. Así como en esta tesis, estamos conectades con todes quienes han pasado en nuestras vidas. Sin nuestras conexiones, perdemos nuestra identidad. Somos conexión, somos relación, somos sociedad, somos comunidad. Sin las conexiones con quienes me han acompañado en este camino, nada de esto existiría. Gracias a todes.

Este magíster (y por tanto la realización de esta tesis) fue financiado parcialmente por CONICYT-PFCHA/Magíster Nacional/2020-22201426.

Índice

1. Introducción	4
2. Preliminares	6
2.1. Clasificación de puntos fijos y comportamiento local	6
2.2. Conjuntos de Fatou y Julia	7
2.3. Coordenadas de Böttcher en ∞ y función de Green	7
2.4. Rayos dinámicos.	8
2.5. Polinomios cuadráticos y conjunto de Mandelbrot	10
3. Estructura general	12
4. Regiones de Escape	16
4.1. Rayos de parámetro	16
4.2. Kneading	18
4.3. Discos de nivel k	19
4.4. Regiones con kneading $\bar{0}$	20
5. Acumulación de Rayos	22
5.1. Variando en regiones de escape	22
5.2. Variando dentro de un rayo	27
5.3. Aproximándonos al locus de conexidad	28
6. R-conexiones	33
6.1. Aterrizaje de rayos $R_{\theta}^{\mp}(\theta \pm 1/3)$	34
6.2. R-conexión con $\mu > 1$	35
6.3. R-conexión cuando $\mu = 1$	38
6.4. R-conexión con punto fijo	41
7. Aterrizaje	44
7.1. Acumulación de rayos racionales	45
7.2. Aterrizaje en mapeos pcf	46
7.3. Aterrizaje en parabólico	48
8. Transitando entre regiones	51
9. Demostración final	56
Referencias	59

1. Introducción

En el desarrollo de la dinámica compleja, un objetivo importante ha sido comprender la estructura de distintos espacios de polinomios complejos. Ampliamente se ha estudiado el espacio de polinomios cuadráticos, isomorfo a \mathbb{C} , y dentro de él al conjunto de Mandelbrot. El paso siguiente es estudiar el espacio de polinomios cúbicos bajo conjugaciones afines. En [BH88] y [BH92], Branner y Hubbard iniciaron un estudio sistemático de este espacio, probando en particular que resulta ser una variedad compleja bidimensional. Para comprender su estructura con mayor detalle, es útil tomar curvas unidimensionales dentro de él, especialmente aquellas generadas por relaciones en las órbitas de los puntos críticos. En este trabajo, nos interesará estudiar aquellas donde uno de los puntos críticos es eventualmente mapeado a un punto fijo.

Consideremos así el espacio

$$\text{poly}_3^{cm} := \{(f, a) : f \text{ polinomio cúbico y } f'(a) = 0\} / \sim$$

donde $(f, a) \sim (g, a')$ si y solo si existe cambio de coordenadas afín φ tal que $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ y $\varphi(a) = a'$. Llamamos a poly_3^{cm} el espacio de moduli de polinomios cúbicos con punto crítico marcado, y dado un par (f, a) diremos que a es el punto crítico marcado de f .

Dados naturales $\ell \geq 0$, $p \geq 1$, podemos definir los conjuntos $\mathcal{S}_{\ell, p} \subseteq \text{poly}_3^{cm}$ dados por los polinomios cuyo punto crítico marcado es mapeado en exactamente ℓ iteraciones a un punto periódico de periodo exactamente p . Esta condición se puede presentar como una ecuación sobre los coeficientes de los polinomios, por lo que su clausura $\overline{\mathcal{S}_{\ell, p}}$ corresponde a una curva algebraica.

Estas curvas, en especial aquellas con $\ell = 0$, han sido estudiadas sistemáticamente por Milnor, Bonifant y Kiwi en [Mil09], [BKM10] y [BM10]. Se conjetura que las curvas $\overline{\mathcal{S}_{\ell, p}}$ son irreducibles para todo ℓ y todo p , sin embargo aún no se ha probado en completa generalidad. En este trabajo, buscaremos probar la irreducibilidad de las curvas $\overline{\mathcal{S}_{\ell, 1}}$, dadas por aquellos polinomios cuyo punto crítico marcado es mapeado en exactamente ℓ iteraciones en un punto fijo.

Teorema: *Para todo $\ell \geq 0$, la curva $\overline{\mathcal{S}_{\ell, 1}}$ es irreducible.*

Es conocido que $\mathcal{S}_{\ell, 1}$ es suave, por lo que la pregunta sobre la irreducibilidad de $\overline{\mathcal{S}_{\ell, 1}}$ será equivalente a la de la conexidad de $\mathcal{S}_{\ell, 1}$.

La irreducibilidad de las curvas $\overline{\mathcal{S}_{\ell, 1}}$ ya fue probada por Buff, Epstein y Koch en [BEK18]. Sin embargo, su demostración se basa en técnicas algebraicas, similares a las usadas por Bousch en [Bou92] para demostrar la irreducibilidad de otras curvas dinámicas conocidas como *curvas dinatómicas*. Nuestra demostración, en cambio, utilizará las herramientas dinámicas que fueron usadas por Arfeux y Kiwi en [AK20] para probar la irreducibilidad de las curvas $\mathcal{S}_{0, p}$ de polinomios con punto crítico marcado periódico con periodo p . La demostración de Arfeux y Kiwi, a su vez, está basada en las demostraciones de la irreducibilidad de las curvas dinatómicas dadas por Buff-Tan ([BT14]) y Schleider-Lau ([Sch94]).

Estudiar las curvas $\mathcal{S}_{\ell, p}$, en general, es relevante en cuanto tales curvas son consideradas un tipo *curvas especiales*, que aparecen de forma importante en el análogo dinámico de la conjetura de André-Oort. Tal conjetura fue demostrada para el caso cúbico en [FG16] y [GY17], y más recientemente para grados superiores en [FG20]. Por otro lado, probar la irreducibilidad de las

curvas $\overline{\mathcal{S}_{\ell,1}}$ usando las técnicas de Arfeux y Kiwi, puede ser primer paso para poder adaptar su argumento al caso general, y así probar la irreductibilidad de las curvas $\overline{\mathcal{S}_{\ell,p}}$.

2. Preliminares

Para iniciar nuestro trabajo, haremos un resumen de aquellos preliminares utilizados, tanto para introducir conceptos y resultados conocidos, como para fijar notaciones.

2.1. Clasificación de puntos fijos y comportamiento local

Partiremos entregando resultados clásicos sobre la clasificación de puntos fijos de funciones analíticas. Para información más detallada, se puede revisar en [Mil06, Capítulos 8, 9 y 10] y [CG93, Capítulo II].

Sea $O \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y $z_0 \in O$ tal que $f(z_0) = z_0$. El *multiplicador* de z_0 se define por $\lambda = f'(z_0)$, y nos permite clasificar los puntos fijos: decimos que z_0 es

- *superatractor*, si $f'(z_0) = 0$,
- *atractor*, si $0 < |f'(z_0)| < 1$,
- *repulsor*, si $|f'(z_0)| > 1$,
- *parabólico*, si $f'(z_0)$ es una raíz de la unidad,
- *irracionalmente neutral*, si $|f'(z_0)| = 1$ pero $f'(z_0)$ no es una raíz de la unidad.

Notemos que si z_0 es un punto superatractor, entonces es un punto crítico de f_0 , y por tanto un cero de orden $n - 1$ de $f'(z)$ para algún $n \geq 2$.

El siguiente teorema nos refleja el comportamiento local del mapeo f cerca de un punto fijo atractor, superatractor o repulsor.

Teorema A. *Sea $f : O \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica y $z_0 \in O$ un punto fijo de f .*

- *Si z_0 es un punto fijo atractor o repulsor con multiplicador λ , entonces existen vecindades U y V de z_0 y 0 respectivamente, y un isomorfismo conforme $h : U \rightarrow V$ tal que $(h \circ f)(z) = \lambda \cdot h(z)$ para todo $z \in U$. El mapeo h es único salvo multiplicación por constantes distintas de 0 .*
- *Si z_0 es un punto fijo superatractor y z_0 es un cero de orden $n - 1$ de $f'(z)$, entonces existen vecindades U y V de z_0 y 0 respectivamente, y un isomorfismo conforme $h : U \rightarrow V$, tal que $h(z_0) = 0$ y $(h \circ f \circ h^{-1})(w) = w^n$. Más aún, h es único salvo multiplicación por raíces $(n - 1)$ -ésimas de la unidad.*

Cuando z_0 es un punto fijo atractor o repulsor, el mapeo h del teorema anterior es llamado *la linealización de Koenigs* de f en z_0 . En el caso que z_0 sea un punto fijo superatractor, llamamos al correspondiente mapeo h la *coordenada de Böttcher* de f cerca de z_0 .

Las linealizaciones de Koenigs y las coordenadas de Böttcher se mueven suavemente junto con f , en el siguiente sentido. Considere \mathcal{V} un abierto en \mathbb{C} y $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{V}}$ una familia de funciones desde un abierto O a \mathbb{C} . Suponga que el mapeo $(z, \alpha) \mapsto f_\alpha(z)$ es holomorfo en $O \times \mathcal{V}$, y que $z(\alpha)$ es un punto fijo de f_α dependiendo analíticamente de α . Si $|\lambda(\alpha)| \neq 0, 1$, entonces para cada α_0 existe una vecindad \mathcal{W} de α_0 y un abierto $V \subseteq \mathbb{C}$ tal que para todo $\alpha \in \mathcal{W}$, $z(\alpha) \in V$, y la linealización de Koenigs h_α está definida en V . Más aún, V y \mathcal{W} pueden ser elegidos tal que el

mapeo $(z, \alpha) \mapsto h_\alpha(z)$ sea holomorfo en $V \times \mathcal{W}$. Del mismo modo, si $|\lambda(\alpha)| = 0$ y $z(\alpha)$ es un cero del mismo orden de $f'_\alpha(z)$, entonces para cada α_0 existe una vecindad \mathcal{W} de α_0 y un abierto $V \subseteq \mathbb{C}$ tal que para todo $\alpha \in \mathcal{W}$, $z(\alpha) \in V$, y la coordenada de Böttcher h_α está definida en V . Más aún, V y \mathcal{W} pueden ser elegidos tal que el mapeo $(z, \alpha) \mapsto h_\alpha(z)$ sea holomorfo en $V \times \mathcal{W}$.

Si z_0 es punto periódico de una función f , con periodo q , entonces z_0 es punto fijo de f^q y las definiciones y propiedades anteriores se trasladan. Es decir, el multiplicador de z_0 será $|(f^q)'(z_0)|$, se clasificará de acuerdo a su comportamiento como punto fijo de f^q , etc.

2.2. Conjuntos de Fatou y Julia

Dos conjuntos claves en el estudio de la dinámica compleja son los conjuntos de Fatou y Julia, llamados así por el gran aporte de Pierre Fatou y Gaston Julia a principios del siglo XX en el área. Los resultados expuestos en esta sección pueden encontrarse en [Mil06, Capítulos 4 y 8].

Dado $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ polinomio de grado $d \geq 2$, podemos definir los conjuntos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_f(\infty) &= \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \rightarrow \infty\}, \\ K(f) &= \mathbb{C} \setminus \mathcal{A}_f(\infty), \\ J(f) &= \partial K(f) = \partial \mathcal{A}_f(\infty), \\ \mathcal{F}(f) &= \mathbb{C} \setminus J(f).\end{aligned}$$

Llamamos $J(f)$ el *conjunto de Julia*, $K(f)$ el *conjunto lleno de Julia*, $\mathcal{F}(f)$ el *conjunto de Fatou* y $\mathcal{A}_f(\infty)$ la *cuenca de infinito*.

Todo punto periódico repulsor o parabólico pertenece a $J(f)$, y los puntos periódicos repulsores son densos en $J(f)$.

El conjunto de Julia $J(f)$, así como el conjunto lleno de Julia $K(f)$, son conexos si y solo si todos los puntos críticos de f pertenecen a $K(f)$.

Una *componente de Fatou* V es una componente conexa del conjunto de Fatou. Dado $z \in \mathcal{F}(f)$, llamaremos $V_f(z)$ a la componente de Fatou conteniendo a z . Si V es una componente de Fatou, entonces $f(V)$ también lo es. V se dice que *periódica* si existe m tal que $f^m(V) = V$. Dennis Sullivan ([Sul85, Teorema 1]), demostró el Teorema del Dominio no Errante:

Teorema B. *Si f es una función racional, toda componente de Fatou V es eventualmente periódica*

2.3. Coordenadas de Böttcher en ∞ y función de Green

Estudiaremos ahora el comportamiento de un polinomio f cerca de ∞ , y cómo esto influye en su dinámica. Las ideas y resultados mencionados acá pueden encontrarse en [Mil06, Capítulo 9] y [BH88, Sección 1].

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ polinomio de grado d . Consideremos $F(z) = \frac{1}{f(1/z)}$, con $F(0) = 0$. Entonces F está bien definida y es holomorfa en una vecindad de 0, y 0 es un punto fijo superatractor de

F . Existe entonces coordenada de Böttcher h_F conjugando F por el mapeo $z \mapsto z^d$, con $h'(0) = 1$. Definimos

$$\phi_f(z) = \frac{1}{h_F(1/z)}.$$

De esta forma, obtenemos coordenadas ϕ_f cerca de infinito, asintótica a la identidad en infinito, tal que $\phi_f(f(z)) = (\phi_f(z))^d$. Diremos, sin que induzca a confusión, que ϕ_f es la *Coordenada de Böttcher* de f (cerca de ∞).

Si \mathcal{V} es abierto de \mathbb{C} y $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{V}}$ es una familia de polinomios de grado d tal que el mapeo $(z, \alpha) \mapsto f_\alpha(z)$ es holomorfo, entonces dado α_0 podemos encontrar vecindad \mathcal{W} de α_0 y $R > 0$ tal que para todo $\alpha \in \mathcal{W}$, se tiene que ϕ_{f_α} está definido en $V = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_R}$, donde $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Más aún, \mathcal{W} y R pueden ser elegidos de manera que el mapeo $(z, \alpha) \mapsto \phi_{f_\alpha}(z)$ sea holomorfo en $V \times \mathcal{W}$.

Existe una única extensión de $|\phi_f|$ a $\mathcal{A}_f(\infty)$ cumpliendo la ecuación funcional

$$|\phi_f(f(z))| = |\phi_f(z)|^d.$$

Definimos la *función de Green* g_f de f por

$$g_f : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$$

$$z \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z \in K(f) \\ \log |\phi_f(z)| & \text{si } z \in \mathcal{A}_f(\infty). \end{cases}$$

El siguiente teorema corresponde a las proposiciones 1.1 y 1.2 en [BH88]:

Teorema C. *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ polinomio de grado d y g_f su función de Green, entonces:*

- g_f es continua en todo \mathbb{C} ,
- para todo $z \in \mathbb{C}$, $g_f(f(z)) = d \cdot g_f(z)$,
- $g_f(z) = 0$ si y solo si $z \in K(f)$,
- g_f es armónica en $\mathcal{A}_f(\infty)$ y los puntos críticos de g_f son precisamente las preimágenes iteradas de los puntos críticos de f en $\mathbb{C} \setminus K(f)$,
- si $d = 3$, entonces el mapeo $(f, z) \mapsto g_f(z)$ es continuo en $\text{poly}_3^m \times \mathbb{C}$.

El último punto del teorema anterior es cierto también para polinomios de grado superior, pero debe tenerse cuidado al definir el dominio con el que trabajamos.

2.4. Rayos dinámicos.

Una forma clásica de estudiar la dinámica de un polinomio f fuera de $K(f)$ es a través de los *rayos dinámicos*. Para los resultados cuando $K(f)$ es conexo, se puede revisar [Mil06, Capítulo 18]. Los resultados cuando $K(f)$ es desconexo se pueden encontrar en [BKM10] y [GM93, Apéndice A]. Adoptaremos la misma notación y nos aproximaremos a estos rayos de la misma forma que en el artículo de Arfeux y Kiwi.

Sea f polinomio de grado $d \geq 2$. Llamaremos *líneas de Green* a las líneas de flujo de $-\nabla g_f$. Usando la ecuación funcional

$$\phi_f(f(z)) = (\phi_f(z))^d,$$

podemos extender la coordenada de Böttcher ϕ_f a través de las líneas de Green a la cuenca de infinito bajo el flujo de $-\nabla g_f$, que denotaremos $\mathcal{A}_f^*(\infty)$.

Si $K(f)$ es conexo, entonces $\mathcal{A}_f(\infty) = \mathcal{A}_f^*(\infty)$, por lo que ϕ_f se extiende de forma analítica a todo $\mathcal{A}_f(\infty)$. Más aún, si

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

entonces

$$\phi_f : \mathcal{A}_f(\infty) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

es isomorfismo conforme. Para cada $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ llamamos

$$R_f(t) = \phi_f^{-1}(]1, \infty[e^{2\pi it})$$

el *rayo dinámico de f con argumento t* .

Si $K(f)$ es desconexo, para cada $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ existe una única línea de Green maximal $R_f^*(t)$, y un número $\rho(t) \geq 1$ tal que ϕ_f se extiende a $R_f^*(t)$ y

$$\phi_f : R_f^*(t) \rightarrow]\rho(t), \infty[e^{2\pi it}$$

es homeomorfismo.

Si $\rho(t) = 1$, llamamos

$$R_f(t) = R_f^*(t) = \phi_f^{-1}(]1, \infty[e^{2\pi it})$$

el *rayo externo de f con argumento t* . Para cada $r > 0$, denotaremos $R_f(t)(r) = \phi_f^{-1}(e^{r+2\pi it})$.

Si $\rho(t) > 1$, tenemos que a medida que $r \searrow \rho(t)$, el punto $\phi_f^{-1}(re^{2\pi it})$ converge a un punto crítico w de g_f . Decimos que $R_f^*(t)$ *termina* en w . En tal caso, podemos considerar los rayos *derecho* e *izquierdo* con argumento t , denotados por $R_f^+(t)$ y $R_f^-(t)$ respectivamente, como el límite de $R_f(s)$ cuando $s \rightarrow t$ por la derecha y por la izquierda respectivamente al considerarlos como arcos parametrizados por $|\phi_f|$. Es decir, para cada $r > 0$, se define

$$R_f^\pm(t)(r) = \lim_{s \rightarrow t^\pm} R_f(s)(r).$$

Estos límites no son suaves, y se les llamará *rayos singulares*. De esta forma, si seguimos una línea de flujo gradiente de g_f desde infinito, podemos llegar hasta $K(f)$ (en cuyo caso el rayo $R_f(t)$ es suave), o terminar en algún punto crítico de g_f . Si continuamos siguiendo la línea de flujo gradiente hacia la izquierda en cada uno de estos puntos, obtenemos $R_f^-(t)$. Si por el contrario, continuamos siguiendo la línea de flujo gradiente hacia la derecha, obtenemos $R_f^+(t)$.

Si ω_0 es el punto crítico que maximiza $g_f(\omega)$ entre los puntos críticos de f , entonces ϕ_f se extiende a todo el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : g_f(z) > g_f(\omega_0)\}.$$

Si el rayo $R_f(t)$ es suave, las expresiones $R_f^+(t)$ y $R_f^-(t)$ denotarán ambas al rayo $R_f(t)$.

Consideremos $m_d : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la multiplicación por d . los mapeos m_d y f están relacionados de la siguiente manera:

Teorema D. Para todo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $f(R_f^\pm(t)) = R_f^\pm(m_d(t))$.

Si un rayo $R_f^\pm(t)$ tiene un límite bien definido cuando se aproxima a $J(f)$, decimos que $R_f^\pm(t)$ aterriza en este punto. Todo rayo con argumento racional aterriza. Más aún, si t es periódico bajo multiplicación por d en \mathbb{R}/\mathbb{Z} , entonces el rayo $R_f^\pm(t)$ aterriza en un punto periódico repulsor o parabólico.

Dado un $z \in J(f)$, definimos

$$\Lambda(z) = \{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : R_f^\pm(t) \text{ aterriza en } z\}$$

Se tiene el siguiente teorema demostrado por Genadi Levin y Feliks Przytycki en [LP96, Teorema 1].

Teorema E. Si z es un punto periódico repulsor o parabólico, entonces $\Lambda(z)$ es compacto no vacío. Más aún, si $\{z\}$ no es una componente conexa de $J(f)$, entonces $\Lambda(z)$ es finito.

En general, si $z \in J(f)$, entonces $m_d(\Lambda(z)) = \Lambda(f(z))$. Más aún, si un rayo $R_f^\pm(dt)$ aterriza en un punto $f(z)$ y z no es crítico, entonces solo uno de los rayos $R_f^\pm(t + j/d)$ aterriza en z . Si z es crítico con grado local n , entonces n de esos rayos aterrizan en z .

Si el conjunto

$$\{f^n(\omega) : n \geq 0, f'(\omega) = 0\}$$

es finito, entonces f se llama *geométricamente finito* y todos los rayos $R_f^\pm(t)$ (suaves o singulares) aterrizan. En el caso que $f \in \mathcal{S}_{\ell,1}$ tenga un conjunto de Julia disconexo, tenga un punto periódico parabólico o todos sus puntos críticos sean preperiódicos, f es geométricamente finito.

2.5. Polinomios cuadráticos y conjunto de Mandelbrot

El espacio de polinomios más estudiado ha sido el de polinomios cuadráticos. Las ideas y resultados acá serán útiles al momento de estudiar las curvas $\mathcal{S}_{\ell,1}$. Se puede revisar más información en [CG93, Capítulo VIII]

Todo polinomio cuadrático es conjugado a un único polinomio de la forma $Q_c(z) = z^2 + c$. El *conjunto de Mandelbrot* corresponde al conjunto

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} : K(Q_c) \text{ es conexo}\},$$

equivalentemente, \mathcal{M} es el conjunto de los c para los cuales $Q_c^n(0) \not\rightarrow \infty$.

Llamemos ϕ_c a la coordenada de Böttcher de Q_c . Para cada $c \notin \mathcal{M}$, ϕ_c está bien definida en c . Más aún, gracias a Adrien Douady y John H. Hubbard ([DH09, Teorema 8.1]), se tiene el siguiente resultado:

Teorema F. El mapeo $\Phi_{\mathcal{M}} : \mathbb{C} \setminus \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ dado por $\Phi_{\mathcal{M}}(c) = \phi_c(c)$ es un isomorfismo conforme.

Para cada $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definimos el *rayo de parámetro* de Mandelbrot

$$\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(\theta) = \Phi_{\mathcal{M}}^{-1}([1, \infty[e^{2\pi i\theta})).$$

Notemos que $c \in \mathcal{R}_{\mathcal{M}}(\theta)$ si y solo si $c \in R_{Q_c}(\theta)$. Si $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(\theta)$ tiene un límite $c \in \mathcal{M}$ bien definido al acercarnos a \mathcal{M} , decimos que este rayo *aterriza* en c . Rayos de parámetro con argumentos racionales aterrizan.

Si 0 es estrictamente preperiódico bajo Q_c , decimos que c es un *punto Misiurewicz*. En tal caso, existen finitos rayos dinámicos $R_{Q_c}(\theta_j)$ aterrizando en $c \in J(Q_c)$. Cada θ_j es racional y estrictamente preperiódico bajo multiplicación por 2. Más aún, cada rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(\theta_j)$ aterriza en $c \in \mathcal{M}$.

3. Estructura general

La demostración de irreductibilidad de la curva $\overline{\mathcal{S}_{\ell,1}}$ seguirá una estructura similar a la dada por Arfeux y Kiwi para el caso de las curvas $\overline{\mathcal{S}_{0,p}}$.

Todo polinomio cúbico es afínmente conjugado a algún polinomio de la forma

$$f_{a,b}(z) = (z - a)^2(z + 2a) + b$$

Los puntos críticos de $f_{a,b}$ son $\pm a$. Decimos que a es el *punto crítico marcado* y $-a$ el *punto crítico libre*. Dos polinomios distintos de la forma $f_{a,b}$ y $f_{a',b'}$ son afínmente conjugados bajo una conjugación afín que envía a a a' , si y solo si $a' = -a$ y $b' = -b$. De esta forma, el espacio de moduli $\text{poly}_3^{\text{cm}}$ puede ser identificado con el cociente \mathbb{C}^2/\mathcal{I} , donde $\mathcal{I} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ es la involución $\mathcal{I}(a, b) = (-a, -b)$.

Podemos considerar la curva $\mathcal{S}_{\ell,1} \subseteq \mathbb{C}^2$ de polinomios $f_{a,b}$ tal que a es punto fijo con preperiodo exactamente ℓ . Se sigue que $\mathcal{S}_{\ell,1}$ es un cubrimiento doble de $\mathcal{S}_{\ell,1}$. Por tanto, para probar que $\mathcal{S}_{\ell,1}$ es conexa, basta probar que $\mathcal{S}_{\ell,1}$ es conexa. De esta forma, será conveniente trabajar con la curva $\mathcal{S}_{\ell,1}$. El caso $\ell = 0$ viene dado por la curva $\{a - b = 0\}$ y el caso $\ell = 1$ está dado por la curva $\{2a + b = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$. Ambas curvas son conexas, por lo que nos remitiremos a probar el caso $\ell \geq 2$.

Será útil eliminar el subíndice de los polinomios en $\mathcal{S}_{\ell,1}$. Por tanto, dado $f \in \mathcal{S}_{\ell,1}$, llamaremos $a(f)$ a su punto crítico marcado, $-a(f)$ su punto crítico libre, y $a_j(f) = f^j(a(f))$.

Podemos considerar en \mathbb{C}^2 el *locus de conexidad* \mathcal{C} definido por los (a, b) tal que el conjunto de Julia de $f_{a,b}$ es conexo. Separaremos la curva $\mathcal{S}_{\ell,1}$ en el locus de conexidad de $\mathcal{S}_{\ell,1}$, definido por $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1}) := \mathcal{C} \cap \mathcal{S}_{\ell,1}$, y su complemento $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\ell,1})$, llamado *locus de escape*. Se puede deducir de [BH88, Corolario 3.8] que $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ es acotado. Luego, como toda componente de una curva algebraica es no acotada, entonces debe intersectar a $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\ell,1})$. Por lo tanto, para probar la conexidad de $\mathcal{S}_{\ell,1}$ (y por consiguiente de $\mathcal{S}_{\ell,1}$), basta con probar que todas las componentes conexas de $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ pueden ser conectadas a través de un camino en $\mathcal{S}_{\ell,1}$. A cada componente conexa \mathcal{U} de $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ la llamaremos una *región de escape*.

En la sección 4 comentaremos y probaremos algunas propiedades básicas de las regiones de escape que eran conocidas para las curvas $\mathcal{S}_{0,p}$ y se mantienen acá. Será útil, dada f en una región de escape \mathcal{U} , definir su *kneading*. El conjunto $\{z \in \mathbb{C} : g_f(z) < g_f(-a(f))\}$ es la unión de dos discos topológicos, llamados $D_0(f)$ y $D_1(f)$ de manera que $a(f) \in D_0(f)$. Definimos así el *kneading* de f como la secuencia binaria $\iota_0 \iota_1 \iota_2 \dots \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$, donde $\iota_j = i$ si y solo si $a_j(f) \in D_i(f)$. En §4.2 se verá que el *kneading* no depende de la función f escogida, sino que depende solo de \mathcal{U} , por lo que podemos llamarlo el *kneading* de \mathcal{U} y denotarlo por $\kappa(\mathcal{U})$. Notemos que como $a_\ell(f)$ es fijo, entonces $\iota_j = \iota_{j+1} = \iota_{j+2} = \dots$, por lo que anotaremos $\kappa(\mathcal{U}) = 0\iota_1 \dots \iota_{\ell-1} \overline{\iota_\ell}$. Probaremos además que $\iota_\ell = 1$, entonces $\iota_{\ell-1} = 0$ (ver §4.2).

Para conectar las regiones de escape, dada una región \mathcal{U} con $\kappa(\mathcal{U}) = 0\iota_1 \dots \iota_{\ell-1} \overline{\iota_\ell}$, definiremos el concepto de tiempo de retorno a $D_0(f)$. Dado $j < \ell - 1$ tal que $\iota_j = 0$, definiremos el tiempo de retorno μ_j de $a_j(f)$ como el mínimo $k > 0$ tal que $f^k(a_j(f)) \in D_0(f)$. En otras palabras, $\mu_j = k$ si y solo si $\kappa(\mathcal{U}) = \iota_0 \dots \iota_{j-1} 01^{k-1} 0 \iota_{j+k+1} \dots$. Notemos que si $j < \ell - 1$ y $\iota_j = 0$, necesariamente debe existir tal k , pues o bien $\iota_{\ell-1} = 0$ o $\iota_\ell = 0$. Definimos el tiempo de retorno maximal μ de \mathcal{U} como el máximo de los μ_j entre los $j < \ell - 1$ tal que $\iota_j = 0$.

Nuestra estrategia será conectar cada región de escape \mathcal{U} con una región con *kneading* “más cerca” de las regiones cuyo *kneading* es $01^{\ell-2}0\bar{1}$, y todas estas con una única región con *kneading* $\bar{0}$. En concreto, dada una región \mathcal{U} con $\kappa(\mathcal{U}) \neq 01^{\ell-2}\iota_{\ell-1}\bar{\iota}_\ell$ y tiempo de retorno maximal μ , conectaremos \mathcal{U} con una región \mathcal{U}' tal que $\kappa(\mathcal{U}')$ se obtiene a partir de $\kappa(\mathcal{U})$ realizando uno de los siguientes movimientos:

- *Movimiento tipo A*: si se tiene

$$\kappa(\mathcal{U}) = 0 \cdot 1^{\mu-1} \cdot 0\iota_{\mu+1}\iota_{\mu+2} \dots$$

y

$$\kappa(\mathcal{U}') = 0 \cdot 0^{\mu-1} \cdot 1\iota'_{\mu+1}\iota'_{\mu+2} \dots$$

para algunos $\iota'_j \in \{0, 1\}$, $j > \mu$.

- *Movimiento tipo B*: si para algún $k \in \{1, \dots, \ell - 2\}$,

$$\kappa(\mathcal{U}) = 0\iota_1 \dots \iota_{k-1}0 \cdot 1^{\mu-1} \cdot 0\iota_{k+\mu}\iota_{k+\mu+1} \dots$$

y

$$\kappa(\mathcal{U}') = 0\iota_1 \dots \iota_{k-1}1 \cdot 1^{\mu-1} \cdot 0\iota_{k+\mu}\iota_{k+\mu+1} \dots$$

Es decir, el movimiento tipo B transforma ι_k , de un 0 a un 1, dejando el resto de los símbolos fijos. Por otro lado, el movimiento de tipo A cambia una cadena de 1's en el inicio por 0's, mientras que ι_μ pasa de 0 a 1 y el resto de los símbolos cambian de forma desconocida. Notemos que el movimiento de tipo A puede ocurrir solamente si el tiempo de retorno maximal μ corresponde al tiempo de retorno de $a(f)$ a $D_0(f)$.

Gracias al Lema 9.1, si pasamos repetidas veces desde una región \mathcal{U} a otra con *kneading* obtenido a partir de $\kappa(\mathcal{U})$ con un movimiento de tipo A o B, entonces después de un número finito de pasos es posible llegar a una región con *kneading* $01^{\ell-2}0\bar{1}$ o $01^{\ell-2}\iota_{\ell-1}\bar{0}$. En el último caso, daremos un argumento adhoc para conectar esta región con una cuyo *kneading* sea $01^{\ell-2}0\bar{1}$. Finalmente, probaremos que existe una única región con *kneading* $\bar{0}$ que podemos conectar con todas las regiones con *kneading* $01^{\ell-2}0\bar{1}$.

A medida que nos movemos a través de cada región de escape y conectamos distintas regiones, será necesario entender cómo varían los rayos dinámicos. Dedicaremos la sección 5 a estudiar esto. Con tales resultados, podremos iniciar con la travesía a través de la curva $\mathcal{S}_{\ell,1}$ para conectar las regiones de escape.

Dada región de escape \mathcal{U} , partiremos por encontrar un polinomio $f \in \mathcal{U}$ para el cual exista un rayo singular $R_f^\pm(t)$ con argumento racional conectando $-a(f)$ con algún $a_k(f) \in D_0(f)$ tal que $\mu = \mu_k$, o bien conectando $-a(f)$ con $a_\ell(f)$ si $\kappa(\mathcal{U}) = 01^{\ell-2}\iota_{\ell-1}\bar{0}$. Un rayo con tales características será llamado una *R-conexión*, las que serán definidas y estudiadas en la sección 6. El Teorema 6.2 será el principal de esa sección y nos asegurará la existencia de tales conexiones. Luego, a partir del polinomio f encontrado, nos acercaremos al locus de conexidad $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ a través de una curva llamada *rayo de parámetro* $\mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ (definido en §4.1), y en la sección 7 estudiaremos el aterrizaje de tal rayo en $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$. Probaremos que en el caso de tener una conexión con un $a_k(f)$ para $k < \ell - 1$, entonces el rayo $\mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ aterrizará en un mapeo f_0 *postcríticamente finito*, es decir, un mapeo tal que sus puntos críticos tienen órbita finita. En el caso de tener una conexión con $a_\ell(f)$, probaremos que

el rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ aterrizará en un mapeo f_0 *parabólico*, es decir, con un punto periódico parabólico. Ambos resultados están contenidos en el Teorema 7.2. Finalmente, en la sección 8, probaremos que en f_0 aterriza otro rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\vartheta)$ contenido en una región \mathcal{U}' cuyo *kneading* se obtiene a partir de un movimiento de tipo A si tenemos una R-conexión con $a_0(f)$ (Teorema 8.4), de tipo B si tenemos una R-conexión con algún $a_k(f)$ para $0 < k < \ell - 1$ (Teorema 8.3), o con *kneading* $01^{\ell-2}0\bar{1}$ si $\kappa(\mathcal{U}) = 01^{\ell-2}\iota_{\ell-1}\bar{0}$ y tenemos una R-conexión con $a_{\ell}(f)$ (Teorema 8.5). Finalmente, el mismo Teorema 8.4, nos permitirá pasar de las regiones con *kneading* $01^{\ell-2}0\bar{1}$ a una región con *kneading* $\bar{0}$. En la sección 9 terminaremos la demostración probando que la región con *kneading* $\bar{0}$ a la que llegamos es única.

En la figura 1 se muestra la curva $\mathcal{S}_{2,1}$, parametrizada con las variables $a = \frac{-w^5 - 3w}{3 - 3w^4}$, $b = \frac{-w^5 + 6w^3 + 3w}{3 - 3w^4}$, separada en el locus de conexidad y las regiones de escape. Cada región de escape está etiquetada según su *kneading* correspondiente. Se marcan dos secuencias de polinomios (1-2-3 y 4-5-6), que muestran cómo se conectan las regiones de escape. La secuencia 1-2-3 muestra la situación donde un rayo fijo conecta $-a(f)$ con el punto fijo $a_2(f)$, en cuyo caso el punto de aterrizaje del rayo de parámetro en el locus de conexidad (2) es un mapeo parabólico. En la secuencia 4-5-6 se ilustra la situación donde dos rayos conectan $-a(f)$ con el punto crítico $a_0(f)$, en cuyo caso punto de aterrizaje del rayo de parámetro (5) es un mapeo pcf, donde $-a(f) = a_0(f)$.

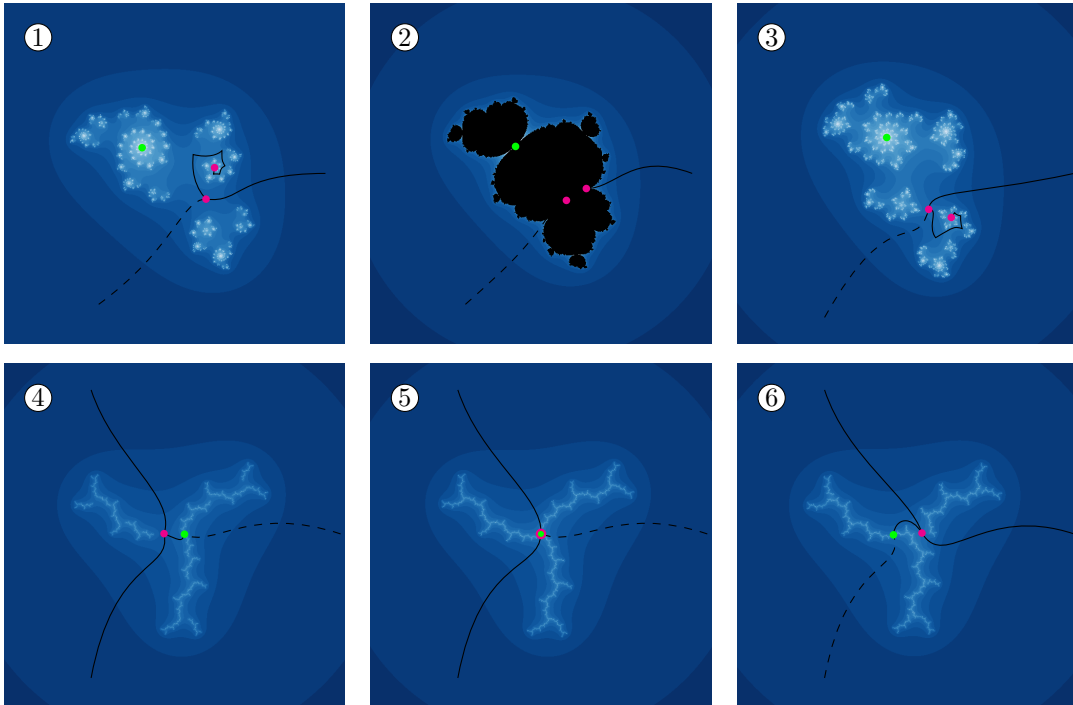
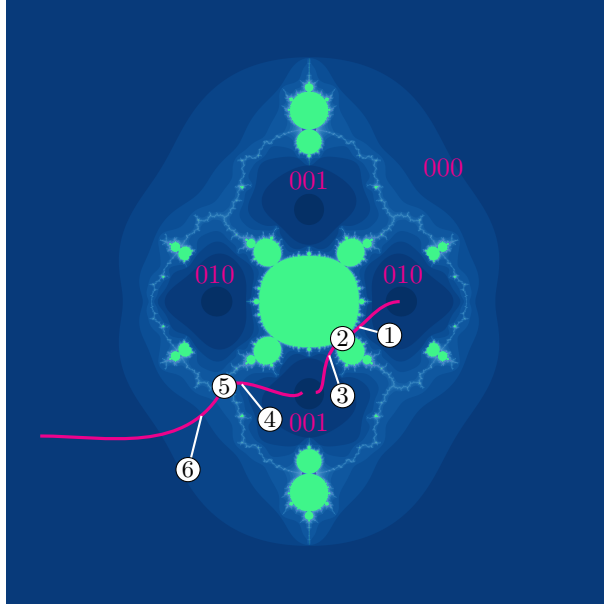


Figura 1: Arriba, la curva $\mathcal{S}_{2,1}$. Se marcan representaciones de los rayos conectando las regiones. En cada paso se marca un polinomio f . Abajo, el conjunto $K(f)$ para cada polinomio f marcado arriba, con una representación de los rayos conectando $-a(f)$ con un punto $a_k(f)$.

4. Regiones de Escape

Partiremos estudiando las regiones de escape de la curva $\mathcal{S}_{\ell,1}$. Recordemos que una región de escape corresponde a una componente conexa del locus de escape $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\ell,1})$. El trabajo acá realizado es análogo a aquel hecho en las curvas $\mathcal{S}_{0,p}$ descrito en [Mil09, Capítulo 5]. En §4.1, estudiaremos la suavidad del mapeo $f \mapsto \phi_f(2a(f))$ y definiremos los *rayos de parámetro* $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(t)$. En §4.2 recordaremos la definición de *kneading* de un polinomio $f \in \mathcal{E}(\mathcal{S}_{\ell,1})$, trabajaremos con ella y probaremos que sólo depende de la región \mathcal{U} donde vive f . En §4.3 introduciremos el concepto de discos de nivel k , que utilizaremos de forma posterior. Finalmente, en §4.4, probaremos que a cada región \mathcal{U} con *kneading* $\bar{0}$ se le puede asociar un polinomio Q_c cuadrático, de manera que cada $f \in \mathcal{U}$ sea conjugado (en cierta vecindad del punto crítico) a Q_c , a través de un mapeo cuasiconforme. Los resultados en esta sección serán utilizados a lo largo de esta tesis.

4.1. Rayos de parámetro

Dado f en una región de escape \mathcal{U} , no existen preimágenes iteradas ω de $-a(f)$ tal que $|\phi_f(\omega)| > |\phi_f(-a(f))| = |\phi_f(2a(f))|$. Luego, como $2a(f)$ tampoco es preimagen de $-a(f)$, entonces $\phi_f(2a(f))$ está bien definido. Podemos considerar, por tanto, el mapeo

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} \\ f &\mapsto \phi_f(2a(f)). \end{aligned}$$

Probaremos que $\Phi_{\mathcal{U}}$ es analítico, y más aún, un cubrimiento holomorfo de $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$. Pevio a eso, necesitaremos el siguiente lema. Recordemos que el locus de conexidad \mathcal{C} es el conjunto de los polinomios $f_{a,b}$ con conjunto lleno de Julia conexo, y su restricción en $\mathcal{S}_{\ell,1}$ era $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$.

Lema 4.1. *Sea $f_0 \in \overline{\mathcal{S}_{\ell,1}} \setminus \mathcal{S}_{\ell,1}$. Entonces f_0 está en el interior del locus de conexidad \mathcal{C} .*

Demostración. Consideremos una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_{\ell,1}$ convergiendo a f_0 . Tenemos entonces que $a_{\ell}(f_n) = a_{\ell+1}(f_n)$, y por tanto $a_{\ell}(f_0) = a_{\ell+1}(f_0)$. Como $f_0 \notin \mathcal{S}_{\ell,1}$, entonces existe algún $j < \ell$ tal que $a_j(f_0)$ es un punto fijo, y por tanto $a_{\ell-1}(f_0) = a_{\ell}(f_0)$. Para todo n se tiene que $a_{\ell-1}(f_n) \neq a_{\ell}(f_n)$, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\ell-1}(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\ell}(f_n)$, por lo que $a_{\ell-1}(f_0) = a_{\ell}(f_0)$ es un cero múltiple del mapeo $f_0(z) - a_{\ell}(f_0)$. Esto significa que $a_{\ell}(f_0)$ es un punto crítico de f_0 , y por tanto $f_0'(a_{\ell}(f_0)) = 0$. Ahora bien, si f_0 no estuviera en el interior de \mathcal{C} , la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ anterior puede ser tomada en el locus de escape. Luego, para todo n se tiene que $a_{\ell}(f_n)$ es un punto periódico repulsor, de donde $|f_n'(a_{\ell}(f_n))| > 1$, y por continuidad se tendría $|f_0'(a_{\ell}(f_0))| \geq 1$. Esto contradice que $f_0'(a_{\ell}(f_0)) = 0$, por lo que concluimos que f_0 debe estar en el interior de \mathcal{C} . \square

Podemos ahora probar el siguiente lema:

Lema 4.2. *$\Phi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ es un cubrimiento holomorfo sin puntos de ramificación.*

Demostración. Veamos primero que $\Phi_{\mathcal{U}}$ es holomorfa. Por continuidad de $g_f(z)$, se tiene que $|\Phi_{\mathcal{U}}|$ es continua. Más aún, el argumento de $\Phi_{\mathcal{U}}(f)$ depende de la línea de Green maximal conteniendo a $2a(f)$. Por la dependencia continua de las soluciones de ecuaciones diferenciales respecto a los

parámetros iniciales, se tiene que el argumento de $\Phi_{\mathcal{U}}(f)$ depende continuamente de f , y así $\Phi_{\mathcal{U}}$ es continua.

Dada $f_0 \in \mathcal{U}$, probaremos que existe una vecindad \mathcal{V} de f_0 para el cual $\Phi_{\mathcal{U}}|_{\mathcal{V}}$ es analítica. Podemos encontrar un $R > 0$ y una vecindad \mathcal{V} de f_0 tal que para todo $f \in \mathcal{U}$, el mapeo ϕ_f está definido en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_R$ y depende analíticamente de f . Existe $M > 0$ tal que $|f_0^M(2a(f_0))| > R$. Podemos restringir \mathcal{V} de manera que para todo $f \in \mathcal{V}$, $|f^M(2a(f))| > R$, teniendo así que el mapeo $f \mapsto (\phi_f(2a(f)))^{3^M} = \phi_f(f^M(2a(f)))$ es holomorfo en \mathcal{V} y la imagen de \mathcal{V} no contiene a 0. De este modo, podemos restringir más aún \mathcal{V} de manera que sea conexo y $\Phi_{\mathcal{U}}|_{\mathcal{V}}^{3^M}(\mathcal{V})$ esté contenido en un conjunto simplemente conexo de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Así, como $\Phi_{\mathcal{U}}^{3^M}|_{\mathcal{V}}$ es analítica y $\Phi_{\mathcal{U}}|_{\mathcal{V}}$ es continua, concluimos que $\Phi_{\mathcal{U}}|_{\mathcal{V}}$ es analítica.

Para probar que $\Phi_{\mathcal{U}}$ es un cubrimiento, basta ver que es localmente invertible y propia. Que sea localmente invertible se sigue de la misma demostración que para el caso de las curvas $\mathcal{S}_{0,p}$. Para ver que es propia, basta estudiar el comportamiento de $\Phi_{\mathcal{U}}$ cerca de ∞ y en la frontera de \mathcal{U} . Cualquier punto en la frontera de \mathcal{U} está en $\overline{\mathcal{S}_{\ell,1}}$. Sin embargo, si no estuviese en la curva misma, por el Lema 4.1, tendría que estar en el interior de $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$, y por tanto no puede estar en $\overline{\mathcal{U}}$. Luego, todo punto en $\overline{\mathcal{U}}$ está en $\mathcal{S}_{\ell,1}$ y así dado un f_0 en la frontera de \mathcal{U} , este debe estar en $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$. Por tanto, si g_f es la función de Green de f , entonces $g_{f_0}(2a(f_0)) = 0$ y por continuidad de g_f (Teorema 2.3), se tiene que $g_f(2a(f)) \rightarrow g_{f_0}(2a(f_0)) = 0$ si $f \rightarrow f_0$. Concluimos así $|\Phi_{\mathcal{U}}(f)| \rightarrow 1$ si f converge a $\partial(\mathcal{U})$.

Para ver el comportamiento en el infinito, podemos usar (gracias a [BH88, Corolario 4.3]) que dado un $r > 1$, si $|\Phi_{\mathcal{U}}(f_{a,b})| = r$ y $|z| > 2r$, entonces $|\phi_{f_{a,b}}(z) - z| \leq 12r^2/|z|$. De esta forma, si tuviéramos que $|2a| > 4r$, entonces $|\phi_{f_{a,b}}(2a) - 2a| < 3r$, y por tanto

$$|\Phi_{\mathcal{U}}(f_{a,b})| = |\phi_{f_{a,b}}(2a)| > |2a| - 3r > r,$$

lo que contradice que $|\Phi_{\mathcal{U}}(f_{a,b})| = r$. De esta forma, siempre que $|\Phi_{\mathcal{U}}(f_{a,b})| = r$, se tiene que $|2a| \leq 4r$, y por tanto si $2a \rightarrow \infty$, entonces $\Phi_{\mathcal{U}}(f_{a,b}) \rightarrow \infty$.

Concluimos así que $\Phi_{\mathcal{U}}$ es propia, y por tanto un recubrimiento de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, con alguna multiplicidad μ . \square

A partir de $\Phi_{\mathcal{U}}$ podemos definir (de forma similar a los rayos externos del Mandelbrot), los rayos de parámetro en \mathcal{U} : dado $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, decimos que un *rayo de parámetro con argumento θ* , $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$, es una preimagen conexa de $]1, \infty[e^{2\pi i\theta}$ bajo $\Phi_{\mathcal{U}}$. En otras palabras, un arco mapeado biyectivamente a $]1, \infty[e^{2\pi i\theta}$. Si la multiplicidad de $\Phi_{\mathcal{U}}$ es μ , entonces existen μ rayos de parámetro $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$. Notemos que f pertenece a algún rayo de parámetro $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ si y solo si $\phi_f(2a(f)) = re^{2\pi i\theta}$ para algún $r > 1$, es decir, $2a(f) \in R_f^*(\theta)$. Esto ocurre si y solo si los rayos $R_f^*(\theta \pm 1/3)$ terminan en $-a(f)$. Además, si $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$, todo rayo singular es eventualmente mapeado a uno de los rayos $R_f^+(\theta + 1/3)$, $R_f^+(\theta - 1/3)$, $R_f^-(\theta + 1/3)$ o $R_f^-(\theta - 1/3)$.

A partir del Lema 4.2 podemos concluir además que toda región de escape es no acotada. Por tanto, tenemos el siguiente resultado:

Lema 4.3. *Existen finitas regiones de escape en $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\ell,1})$.*

Demostración. Consideremos R suficientemente grande de manera que para todo $(a, b) \in \mathcal{C}$ se tenga que $|a| + |b| < R$. Luego la esfera $S = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : |a| + |b| = R\}$ separa a \mathbb{C}^2 en dos regiones,

una acotada donde está contenido el locus de conexidad \mathcal{C} y una no acotada. Como toda región de escape \mathcal{U} es no acotada, conexa y limita con el locus de conexidad, entonces debe intersectar a S . Más aún, como \mathcal{U} es un abierto de $\mathcal{S}_{\ell,1}$, entonces $\mathcal{U} \cap S$ es un abierto de $S \cap \mathcal{S}_{\ell,1}$. Sin embargo S es compacto, por lo que $S \cap \mathcal{S}_{\ell,1}$ es compacto, y cada $z \in S \cap \mathcal{S}_{\ell,1}$ pertenece a alguna región de escape \mathcal{U} . Así, la colección $\{\mathcal{U} \cap (S \cap \mathcal{S}_{\ell,1}) : \mathcal{U} \text{ es región de escape}\}$ forma un cubrimiento por abiertos de $S \cap \mathcal{S}_{\ell,1}$ y por tanto es finita, concluyendo que el número de regiones de escape es finito. \square

4.2. Kneading

Dado f en una región de escape \mathcal{U} , recordemos que el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : g_f(z) < g_f(-a(f))\}$ es la unión de dos discos topológicos, llamados $D_0(f)$ y $D_1(f)$ de manera que $a(f) \in D_0(f)$. Si f pertenece a un rayo de parámetro $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$, entonces para todo $t \in]\theta - 1/3, \theta + 1/3[$, los rayos $R_f^\pm(t)$ aterrizan en $D_0(f)$, y para todo $t \in]\theta + 1/3, \theta - 1/3[$ los rayos $R_f^\pm(t)$ aterrizan en $D_1(f)$. El disco $D_1(f)$ es mapeado de forma biyectiva al conjunto $\{z \in \mathbb{C} : g_f(z) < 3g_f(a(f))\}$, mientras que el disco $D_0(f)$ es mapeado de forma $2 - 1$ al mismo conjunto.

Notemos que para todo $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $g_f(a_j(z)) = 0$, por lo que $a_j(f) \in D_0(f) \cup D_1(f)$. Recordemos entonces que el *kneading* de f corresponde a la secuencia binaria de ceros y unos $\kappa(f) = \iota_0 \iota_1 \iota_2 \dots$, donde $\iota_j = i$ si y solo si $a_j(f) \in D_i(f)$. Notemos que bajo esta definición, $\iota_0 = 0$, y $\iota_j = \iota_\ell$ para todo $j > \ell$. Más aún, el siguiente lema nos permite probar que si $\iota_\ell = 1$, entonces $\iota_{\ell-1} = 0$

Lema 4.4. *Sea f en una región de escape \mathcal{U} , con $\kappa(f) = \iota_0 \iota_1 \iota_2 \dots \iota_{\ell-1} \bar{\iota}_\ell$. Se tienen las siguientes*

- i) Existe un único $z \in \mathbb{C}$ tal que $f^j(z) \in D_1(f)$ para todo $j \geq 0$.*
- ii) Si $\iota_\ell = 1$, entonces $\iota_{\ell-1} = 0$.*
- iii) Para todo g en \mathcal{U} , $\kappa(g) = \kappa(f)$.*

Demostración. Para probar *i)*, recordemos que el disco $\overline{D_1(f)}$ es mapeado de forma biyectiva a $D' = f(\overline{D_1(f)}) = \{z \in \mathbb{C} : g_f(z) \leq 3g_f(-a(f))\}$. La inversa

$$\varphi = \left(f|_{\overline{D_1(f)}} \right)^{-1} : D' \rightarrow \overline{D_1(f)} \subseteq D'$$

es una contracción en la métrica hiperbólica de D' , por lo que contiene un único punto fijo z_0 , y $\varphi^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$ para todo $z \in D_1(f)$. Un punto $z \in D_1(f)$ cumple que $f^j(z) \in D_1(f)$ para todo $j \leq n$ si y solo si $z \in \varphi^n(D')$. Luego, $f^j(z) \in D_1(f)$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$ si y solo si $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^n(D') = \{z_0\}$.

Por tanto, $z = z_0$ es el único punto en \mathbb{C} tal que $f^j(z) \in D_1(f)$ para todo $j \geq 1$. Esto completa *i)*.

De esta forma, si $\iota_\ell = 1$, entonces $f^j(a_{\ell-1}(f)) = a_\ell(f) \in D_1(f)$ para todo $j \geq 1$. Si $a_{\ell-1}(f) \in D_1(f)$, entonces $a_{\ell-1}(f) = a_\ell(f)$, lo que es falso. Por tanto, si $\iota_\ell = 1$, entonces $a_{\ell-1}(f) \in D_0(f)$ y por tanto $\iota_{\ell-1} = 0$. Tenemos así *ii)*.

Por la continuidad de $a(g)$ y g_g respecto a g , los discos $D_0(g)$ y $D_1(g)$ dependen continuamente de g en el siguiente sentido: dado un mapeo f_0 y un compacto $K \subseteq D_i(f_0)$, entonces para todo g suficientemente cerca de f_0 se tendrá que $K \subseteq D_i(g)$. Por tanto, si para algún $f_0 \in \mathcal{E}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ se tiene

que $a_j(f_0) \in D_i(f_0)$, entonces para g cerca de f_0 se tiene que $a_j(f) \in D_i(g)$. Así, $\kappa(g)$ es localmente constante, y por tanto constante en \mathcal{U} , pues es conexo. Así $\kappa(g) = \kappa(f)$ y concluimos *iii*) \square

Debido a la parte *iii*) del lema anterior, podemos definir el *kneading* de una región de escape \mathcal{U} como el *kneading* de cualquiera de los mapeos contenidos en ella, y denotarlo por $\kappa(\mathcal{U})$.

4.3. Discos de nivel k

Siguiendo las ideas de Branner y Hubbard en [BH92], introduciremos para cada k el concepto de discos de nivel k . Se puede encontrar mayor información al respecto [BKM10]. Sin embargo, utilizaremos acá la notación usada por Arfeux y Kiwi.

Dado $k \geq 1$, el conjunto

$$L_f^{(k)} = \{z \in \mathbb{C} : f^j(z) \in D_0(f) \cup D_1(f), 0 \leq j < k\}$$

es el *conjunto de nivel k* de f . Cada componente conexa de $L_f^{(k)}$ es un disco topológico, y lo llamamos un *disco de nivel k* . Para $z \in L_f^{(k)}$ denotamos por $D_f^{(k)}(z)$ al disco de nivel k conteniendo a z . En tal caso, $f(D_f^{(k)}(z)) = D_f^{(k-1)}(f(z))$. Más aún, f es inyectiva en $D_f^{(k)}(z)$ si y solo si $a(f) \notin D_f^{(k)}(z)$.

Dada una palabra $\omega \in \{0, 1\}^k$, $\omega = i_0 \dots i_{k-1}$, definimos

$$L_f^{(k)}(\omega) = \{z \in \mathbb{C} : f^j(z) \in D_{i_j}(f), 0 \leq j < k\}.$$

Notemos que $L_f^{(1)}(0) = D_0(f)$ y $L_f^{(1)}(1) = D_1(f)$. En general, $L_f^{(k)}(\omega)$ es la unión de discos de nivel $k + 1$. En el caso particular de la palabra 1^k , se tiene que $L_f^{(k)}(1^k)$ es un solo disco de nivel k . Por tanto, o bien $L_f^{(k)}(01^{k-1}) = D_f^{(k)}(a(f))$, o $L_f^{(k)}(01^{k-1})$ es la unión de dos discos de nivel k disjuntos. La siguiente figura muestra esquemáticamente los conjuntos de nivel 1, 2 y 3.

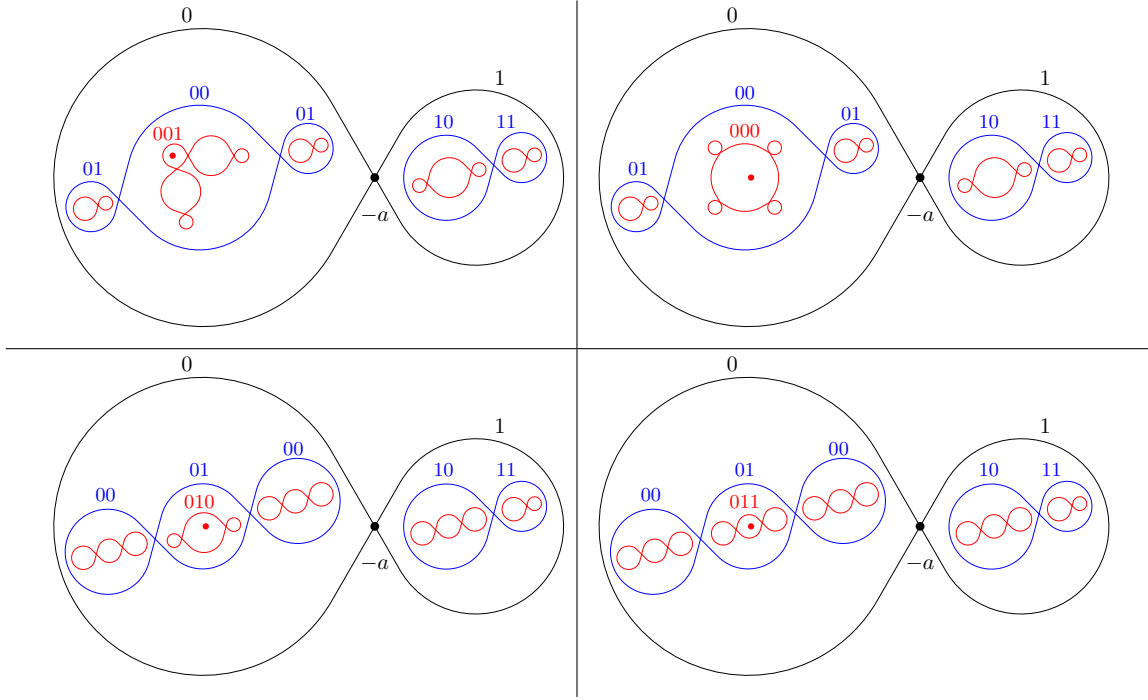


Figura 2: Esquema ilustrativo de los conjuntos y discos de nivel 1, 2 y 3, de acuerdo al disco de nivel 3 conteniendo al punto crítico $a = a(f)$ (marcado con el punto rojo). Los conjuntos de nivel 1, 2 y 3 están delimitados por las curvas negras, azules y rojas respectivamente. Cada disco de nivel 1 o 2 $D_f^{(k)}(\omega)$ está marcado con la palabra ω correspondiente. En el caso de los discos de nivel 3, sólo está marcada la palabra correspondiente al disco $D_f^{(3)}(a)$.

4.4. Regiones con kneading $\bar{0}$

Para concluir con esta sección, consideremos \mathcal{U} región de escape tal que $\kappa(\mathcal{U}) = \bar{0}$. Sea K la componente conexa de $K(f)$ conteniendo a $a_0(f)$. Para cualquier k , tenemos que $a_0(f) \in L_f^{(k)}(0^k)$, de donde $L_f^{(k)}(0^k) = D_f^{(k)}(a_0(f))$. Como $a_1(f) \in L_f^{(k)}(0^k)$ para todo k , entonces por [BKM10, Teorema 3.9] tenemos que existen vecindad U' de K , mapeo cuasiconforme φ y polinomio cuadrático $Q_c(z) = z^2 + c$ tal que $f = \varphi \circ Q_c \circ \varphi^{-1}$ en U' . En tal caso decimos que f es *híbridamente equivalente* a Q_c . El mapeo $f : U' \rightarrow f(U')$ es llamado un *quadratic like maps*. Tales mapeos han sido ampliamente estudiados y utilizados en la dinámica compleja (por ejemplo, ver [DH85]). Diremos que Q_c es el polinomio asociado a f . La conjugación nos muestra que 0 es punto prefijo de Q_c , por lo que c es un punto Misiurewicz (ver §2.5).

Lema 4.5. *Sea \mathcal{U} región de escape de la curva $\mathcal{S}(\ell, 1)$. Se tiene que el polinomio cuadrático asociado a cada $f \in \mathcal{U}$ es independiente de f .*

Demostración. Como \mathcal{U} es conexa, basta probar que para cada $\hat{f} \in \mathcal{U}$ existe vecindad \mathcal{V} tal que el

polinomio asociado a cada mapeo en \mathcal{V} es el único. Sea \mathcal{V} una copia de un disco en \mathbb{C} alrededor de \hat{f} . Luego, podemos escribir $\mathcal{V} = \{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, con Λ un disco de \mathbb{C} , de manera que f_λ depende analíticamente de λ . Para cada λ , llamemos $Q_{c(\lambda)}$ el polinomio asociado a f_λ . Como todos los puntos periódicos de cada $f \in \mathcal{U}$ son repulsores, por [DH85, Proposición 12] se tiene que $c(\lambda)$ depende analíticamente de λ . Ahora bien, cada $c(\lambda)$ es un punto Misiurewicz, con 0 prefijo para $Q_{c(\lambda)}$ con preperiodo ℓ . Estos puntos forman un conjunto discreto, y Λ es conexo, por lo que se deduce que $c(\lambda)$ es constante en Λ , y por tanto el polinomio asociado a cada f en \mathcal{V} es independiente de f . Por conexidad de \mathcal{U} se deduce que el polinomio asociado a cada $f \in \mathcal{U}$ es independiente de f . \square

Dado el lema anterior, podemos definir el polinomio cuadrático asociado a \mathcal{U} como el polinomio cuadrático asociado a cualquier $f \in \mathcal{U}$. Tenemos así un mapeo

$$c : \{\text{componentes conexas de } \mathcal{S}_{\ell,1}\} \rightarrow \mathbb{C}$$

que a cada componente \mathcal{U} le asocia un complejo $c(\mathcal{U})$, de manera que el polinomio cuadrático asociado a \mathcal{U} sea $z \mapsto z^2 + c(\mathcal{U})$. Este mapeo resulta ser inyectivo, por lo que dado un polinomio cuadrático Q , existe a lo más una región de escape cuyo polinomio asociado sea Q .

Lema 4.6. *El mapeo $\mathcal{U} \mapsto c(\mathcal{U})$ es inyectivo.*

Demostración. Fijemos $R > 1$ y consideremos Λ el conjunto de los polinomios cúbicos $f_{a,b}$ (no necesariamente en $\mathcal{S}_{\ell,0}$) tal que $g_{f_{a,b}}(a) < g_{f_{a,b}}(-a)$ y $\phi_{f_{a,b}}(2a) = R$. Branner y Hubbard demostraron que Λ es homeomorfo a \mathbb{D} (por ejemplo, ver [Bra93, Sección 7]). Para cada $\lambda = (a, b) \in \Lambda$ consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} U_\lambda &= \{z \in \mathbb{C} : g_{f_\lambda}(z) < 3g_{f_\lambda}(-a)\}, \\ U'_\lambda &= \{z \in \mathbb{C} : g_{f_\lambda}(z) < g_{f_\lambda}(-a)\}. \end{aligned}$$

Entonces cada $f_\lambda|_{U'_\lambda} : U'_\lambda \rightarrow U_\lambda$ es un *quadratic-like map* y la familia $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una *quadratic-like family*. Más aún, de acuerdo a [Bra93, Sección 7], esta familia es una *Mandelbrot-like family*. Esto es, si M_Λ es el conjunto de aquellos λ para los cuales el polinomio asociado a f_λ tiene su Conjunto de Julia conexo, entonces el mapeo $\chi : M_\Lambda \rightarrow \mathcal{M}$ tal que el polinomio asociado a f_λ es $Q(z) = z^2 + \chi(\lambda)$ es un homeomorfismo.

Ahora bien, cada región de escape $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ con *kneading* $\bar{0}$ posee al menos un polinomio $f_{a,b}$ tal que $(a, b) \in M_\Lambda$ (basta tomar algún punto en $\Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(R)$). Luego $c(\mathcal{U}) = \chi((a, b))$. Como χ es inyectiva, concluimos que si $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}'$, entonces $c(\mathcal{U}) \neq c(\mathcal{U}')$, por lo que c es inyectiva (y más aún, cada \mathcal{U} con *kneading* $\bar{0}$ posee un único punto en $\Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(R)$, por lo que tiene multiplicidad 1). \square

5. Acumulación de Rayos

Durante esta sección estudiaremos cómo varían los rayos dinámicos y sus puntos de aterrizaje a medida que hacemos variar de forma continua los polinomios en $\mathcal{S}_{\ell,1}$.

En §5.1 consideraremos una familia de polinomios en una región de escape dependiendo analíticamente de un $\theta \in \mathbb{R}$, y estudiaremos cómo varían los rayos dinámicos y sus puntos de aterrizaje a medida que varía el θ . En particular, estamos interesados en conocer el caso donde los rayos en cierto intervalo $]\theta_0, \theta_1[$ son suaves. En §5.2, nos centraremos en variar mapeos f dentro de un mismo rayo de parámetro. Finalmente, en §5.3 estudiaremos la convergencia de los rayos $R_f(t)$ a medida que f se acerca al locus de conexidad $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ a través de un rayo de parámetro. Para esto, introduciremos la noción de límite superior de rayos dinámicos.

5.1. Variando en regiones de escape

Partiremos considerando el caso en que nos movemos dentro de una región de escape \mathcal{U} . Para esto, consideremos una familia $\{f_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ tal que:

- $f_\theta = f_{a(\theta), b(\theta)}$, con $a(\theta), b(\theta)$ funciones analíticas,
- para todo $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que $f_\theta \in \mathcal{U}$,
- f_θ está en un rayo de parámetro con argumento θ ,
- $g_{f_\theta}(-a(\theta))$ es independiente de θ .

La existencia de tal familia se obtiene levantando la curva $\theta \mapsto re^{i\pi\theta}$ por el cubrimiento $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ de la subsección §4.1. Para simplificar la notación, denotaremos $R_\theta^\sigma(t)$ a $R_{f_\theta}^\sigma(t)$, $a_j(\theta)$ a $a_j(f_\theta)$, $\phi_\theta = \phi_{f_\theta}$, etc. Del mismo modo, cuando el contexto sea claro, haremos un abuso de notación utilizando θ tanto para el parámetro en \mathbb{R} como para su imagen en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. El siguiente teorema es el principal de esta subsección, y será fundamental especialmente durante la sección 6.

Teorema 5.1. *Sea $]\theta_0, \theta_1[$ intervalo acotado no trivial y $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que para todo $\theta \in]\theta_0, \theta_1[$, el rayo $R_\theta(t)$ es suave. Entonces se cumplen las siguientes:*

- i) *Para todo $r > 0$, se tiene que $\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} R_\theta(t)(r) = R_{\theta_1^+}^+(t)(r)$ y $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0^+} R_\theta(t)(r) = R_{\theta_0^-}^-(t)(r)$.*
- ii) *Si para algún $\bar{\theta} \in]\theta_0, \theta_1[$ y $k \geq 0$, el rayo $R_{\bar{\theta}}(t)$ aterriza en $a_k(\bar{\theta})$, entonces para todo $\theta \in]\theta_0, \theta_1[$ el rayo $R_\theta(t)$ aterriza en $a_k(\theta)$. Más aún, los rayos $R_{\theta_0^-}^-(t)$ y $R_{\theta_1^+}^+(t)$ también aterrizan en $a_k(\theta_0)$ y $a_k(\theta_1)$ respectivamente.*

La demostración de i) no presentará mayor dificultad y la haremos de inmediato. Sin embargo, para demostrar ii) será necesario trabajar con más herramientas, por lo que el resto de esta subsección se orientará en completar la demostración de esa afirmación.

Demostración de i). Probaremos el primer límite, pues el segundo es análogo. Dado $r > 0$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ suficientemente pequeños de manera que para todo $\theta \in]\theta_1 - \varepsilon, \theta_1[$ y

$s \in]t, t + \delta[$, la inversa de la coordenada de Böttcher, ϕ_θ^{-1} , está definida en $e^{r+2\pi is}$. Luego, tenemos que

$$R_{\theta_1}^+(r) = \lim_{s \rightarrow t^+} R_{\theta_1}(s)(r) = \lim_{s \rightarrow t^+} \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} R_\theta(s)(r)$$

y

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} R_\theta(t)(r) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \lim_{s \rightarrow t^+} R_\theta(s)(r).$$

Por tanto, para probar lo pedido basta con probar que si consideramos en $]t, t + \delta[\times]\theta_1 - \varepsilon, \theta_1[$ el mapeo $(s, \theta) \mapsto R_\theta(s)(r)$, entonces el siguiente límite existe:

$$\lim_{(s, \theta) \rightarrow (t, \theta_1)} R_\theta(s)(r).$$

Sea A el conjunto de puntos de acumulación en (t, θ_1) del mapeo mencionado, probaremos que A consta de solo un punto. Asumiendo que ε es suficientemente pequeño, podemos encontrar R tal que para todo $\theta \in]\theta_1 - \varepsilon, \theta_1[$, la coordenada de Böttcher ϕ_θ está bien definida y depende analíticamente de θ en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_R$. Consideremos N tal que $3^N r > \max(g_{\theta_1}(\mathbb{D}_R))$, de manera que si $g_{\theta_1}(z) = r$, entonces $g_{\theta_1}(f_{\theta_1}^N(z)) = 3^N g_{\theta_1}(z) = 3^N r$ y por tanto $f_{\theta_1}^N(z) \notin \mathbb{D}_R$. Luego, por definición de A , dado $z \in A$ podemos encontrar puntos $z_n = R_{\theta_n}(s_n)(r)$ tal que $\theta_n \rightarrow \theta_1^-$, $s_n \rightarrow t^+$ y $z_n \rightarrow z$. Se tiene que $g_{\theta_1}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{\theta_n}(z_n) = r > 0$, por lo que $|f_{\theta_1}^N(z)| > R$ y así para n suficientemente grande también se tiene que $|f_{\theta_n}^N(z_n)| > R$. De aquí que $e^{3^N r} e^{2\pi i 3^N s_n} = \phi_{\theta_n}(f_{\theta_n}^N(z_n)) \rightarrow \phi_{\theta_1}(f_{\theta_1}^N(z))$, concluyendo que $f_{\theta_1}^N(z) = R_{\theta_1}^*(3^N t)(3^N r)$. Concluimos así que $f_{\theta_1}^N(A) = \{R_{\theta_1}^*(3^N t)(3^N r)\}$ es un singleton, pero al ser A conexo deducimos que A es un singleton. Por tanto el límite $\lim_{(s, \theta) \rightarrow (t, \theta_1)} R_\theta(s)(r)$ existe. \square

Habiendo probado la afirmación *i)* del Teorema 5.1, procederemos a probar por etapas la afirmación *ii)*. Para probar la primera parte de esta afirmación, utilizaremos el siguiente lema, que por lo demás tendrá importancia en si mismo más adelante.

Lema 5.2. *Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}_{\ell, 1}$ copia de un abierto conexo de \mathbb{C} . Sea $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y supongamos que para todo $f \in \mathcal{V}$ se tiene que el rayo $R_f(t)$ es suave. Entonces el punto $z(f)$ donde aterriza $R_f(t)$ depende suavemente de f . Más aún, si para algún $k \geq 0$ y un $f_0 \in \mathcal{V}$ se tiene que $R_{f_0}(t)$ aterriza en $a_k(f_0)$, entonces para todo $f \in \mathcal{V}$ se tiene que $R_f(t)$ aterriza en $a_k(f)$.*

Demostración. Consideremos una sucesión $r_n \in (0, \infty)$ de manera que $r_n \rightarrow 0$, y definamos para cada n

$$\begin{aligned} \rho_n : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto R_f(t)(r_n). \end{aligned}$$

Por suavidad de los rayos, se tiene que ρ_n depende analíticamente de f . Además, para cada f , tenemos que $\rho_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z(f)$. Por tanto, para probar que $z(f)$ depende suavemente de f , basta que exista subsucesión ρ_{n_j} de ρ_n convergiendo uniformemente en compactos de \mathcal{V} a una función límite suave. Sin embargo, módulo cambio de coordenadas, podemos asumir que la familia $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ omite dos puntos de \mathbb{C} . Luego, por el Teorema de Montel concluimos lo buscado.

Si para $f_0 \in \mathcal{V}$ se tiene que $R_{f_0}(t)$ aterriza en $a_k(f_0)$, tenemos que los mapeos

$$\begin{aligned} T_j : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto \rho_{n_j}(f) - a_k(f) \end{aligned}$$

convergen (uniformemente en compactos) a $T(f) = z(f) - a_k(f)$. Este mapeo es suave y tiene un 0 en $f = f_0$. Por tanto, si no es idénticamente 0, entonces para j suficientemente grande se tiene que existe f_j tal que $T_j(f_j) = 0$. Sin embargo, de ocurrir esto se tendría que $a_k(f_j) = R_{f_j}(t)(r_{n_j}) \notin K(f_j)$, lo que es una contradicción. Luego, $T(f) = 0$ y por tanto $z(f) = a_k(f)$. \square

Con esto, tenemos como resultado la parte *ii*) del Teorema 5.1, que se refiere al aterrizaje de $R_\theta(t)$ para los $\theta \in]\theta_0, \theta_1[$:

Corolario 5.3. *Si para algún $\bar{\theta} \in]\theta_0, \theta_1[$ el rayo $R_{\bar{\theta}}(t)$ es suave y para un $\bar{\theta} \in]\theta_0, \theta_1[$ se tiene que $R_{\bar{\theta}}(t)$ aterriza en $a_k(\bar{\theta})$, entonces para todo $\theta \in]\theta_0, \theta_1[$ el rayo $R_\theta(t)$ aterriza en $a_k(\theta)$*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, separando $]\theta_0, \theta_1[$ en intervalos más pequeños superpuestos, podemos suponer que $]\theta_0, \theta_1[\subset]0, 1[$.

Sea $r = g_f(-a(\theta))$ (que no depende de θ). Podemos considerar

$$A = \{z \in \mathbb{C} : ||z| - r| < \varepsilon, \arg(z) \in]\theta_0, \theta_1[\}$$

y \mathcal{V} la componente conexa de $\Phi_U^{-1}(A)$ conteniendo a $\{f_\theta\}_{\theta \in]\theta_0, \theta_1[}$. Para cada $f \in \mathcal{V}$ se tiene que $f \in \mathcal{R}_U(\theta)$ para algún θ , y como el rayo $R_\theta(t)$ es suave, entonces $R_f(t)$ también lo es. Usando el lema anterior, se obtiene lo pedido. \square

Para terminar de probar la segunda parte del Teorema 5.1, falta considerar los rayos límite $R_{\theta_1}^+$ y $R_{\theta_0}^-$. Esto será consecuencia de la estabilidad que tienen los rayos aterrizando en puntos repulsores. El siguiente resultado demuestra el caso cuando los rayos límites son suaves. Si bien este hecho fue probado por Goldberg y Milnor ([GM93, Lema B.1]), utilizaremos el resultado más completo, que se puede encontrar en [BM10, Lema 2.6]. Para este lema, es conveniente considerar \mathcal{P}_d el espacio de polinomios mónicos de grado $d \geq 2$ tal que la suma de los puntos críticos considerando multiplicidad sea 0. Este espacio puede identificarse con \mathbb{C}^{d-1} . Además, dado $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, consideraremos el mapa

$$\begin{aligned} R_f(t) : [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{C} \\ r &\mapsto R_f(t)(r), \end{aligned}$$

donde $R_f(t)(0)$ es el punto de aterrizaje de $R_f(t)$.

Lema 5.4. *Sean $f_0 \in \mathcal{P}_d$ y t un ángulo periódico bajo multiplicación por d . Supongamos que el rayo $R_{f_0}(t)$ aterriza en un punto periódico repulsor $z(f_0) \in J(f_0)$. Entonces existe una vecindad $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}_d$ de f_0 tal que, para cualquier $f \in \mathcal{V}$, el rayo $R_f(t)$ correspondiente aterriza en un punto periódico $z(f) \in J(f)$. Más aún, este punto $z(f)$ es holomorfo como función de f , y el rayo dinámico entero $R_f(t) \subseteq \mathbb{C}$ junto con su punto de aterrizaje, varía continuamente con f en la topología compacto abierto.*

Corolario 5.5. *Suponga que para todo $\theta \in]\theta_0, \theta_1[$ el rayo $R_\theta(t)$ es suave, y que para algún $\bar{\theta}$ en este intervalo y $k \geq 0$ el rayo $R_{\bar{\theta}}(t)$ aterriza en $a_k(\bar{\theta})$. Para cada $i = 0, 1$, si el rayo $R_{\theta_i}(t)$ es suave, entonces aterriza en $a_k(\theta_i)$.*

Demostración. Bajo las condiciones del enunciado, por el Corolario 5.3, para todo $\theta \in]\theta_0, \theta_1[$ el rayo $R_\theta(t)$ aterriza en $a_k(\theta)$. Luego, para el caso $k = \ell$, se tiene por el lema anterior que si el rayo $R_{\theta_0}(t)$ es suave, entonces aterriza en $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0^+} a_\ell(\theta) = a_\ell(\theta_0)$.

Para el caso $k < \ell - 1$, basta considerar A el conjunto de puntos de acumulación del mapeo $(\theta, r) \mapsto R_\theta(t)(r)$ cuando $\theta \rightarrow \theta_0^+$ y $r \rightarrow 0^+$ simultáneamente. Tenemos que A es conexo y $f^{\ell-k}(A)$ pertenece al conjunto de puntos de acumulación del mapeo $(\theta, r) \mapsto R_\theta(3^{\ell-k}t)(r)$. Como el rayo $R_\theta(3^{\ell-k}t)$ es periódico, el lema anterior nos asegura que tal conjunto es $\{a_\ell(\theta_0)\}$, y por tanto A es un singleton. De aquí que $a_k(\theta_0)$ es el punto de aterrizaje de $R_{\theta_0}(t)$. El caso con θ_1 es análogo. \square

Ahora bien, este argumento no funciona cuando el rayo $R_{\theta_0}^-(t)$ o $R_{\theta_1}^+(t)$ no es suave. Probaremos el caso cuando $R_{\theta_1}^+(t)$ es singular, pues el otro caso es análogo. Para este caso, utilizaremos un “rayo auxiliar”, que cumplirá el rol de los rayos suaves del caso anterior. Consideremos V_θ el abierto de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ obtenido al eliminar los segmentos

$$]1, |\phi_\theta(-a(\theta))|[e^{2\pi i(\theta \pm 1/3)}$$

y sus preimágenes bajo el mapeo $z \mapsto z^3$. Sea \widetilde{V}_θ la preimagen de V_θ en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ bajo el mapeo $z \mapsto e^z$. Podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ y un $m > 0$ suficientemente pequeños tal que la recta

$$R(t) := \{x + (mx + t)i : x > 0\}$$

esté contenida en \widetilde{V}_θ para todo $\theta \in]\theta_1 - \varepsilon, \theta_1]$ (ver Figura 3). Consideremos la curva $C(t) \subseteq V_\theta$ dada por

$$C(t) = \{e^z : z \in R(t)\}.$$

Notemos que si t es periódico de periodo n bajo multiplicación por 3, entonces $C(t)$ también es periódica bajo $z \mapsto z^3$: un punto $e^{x+(mx+t)i}$ es mapeado después de n veces a $e^{3^n x + (3^n mx + 3^n t)i} = e^{3^n x + (m \cdot 3^n x + t)i} \in C(t)$.

Consideremos así, para cada $\theta \in]\theta_1 - \varepsilon, \theta_1]$, el “rayo auxiliar” $C_\theta(t) = \phi_\theta^{-1}(C(t))$, que es una curva suave. De forma análoga a la definición de los rayos, podemos llamar $C_\theta(t)(r)$ al punto de $C_\theta(t)$ que interseca a la curva de nivel $\{g_f = r\}$. Gracias a [Kiw04, Corolario 1.2], podemos deducir que $C_\theta(t)$ se acumula en el mismo punto donde aterriza $R_\theta(t)$ (diremos que aterriza en ese punto). Notemos que tal punto debe ser repulsor o prerrepuorsor para todo θ , pues $f_\theta \in \mathcal{E}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ y por tanto todo punto periódico es repulsor. De esta forma, podemos enunciar el análogo al Lema 5.4 en este contexto:

Lema 5.6. *Suponga que $C_{\theta_1}(t)$ aterriza en un punto periódico repulsor $z(f_{\theta_1})$. Entonces para todo θ suficientemente cerca de θ_1 en $]\theta_1 - \varepsilon, \theta_1]$, la curva $C_\theta(t)$ aterriza en un punto repulsor $z(f_\theta)$, que depende analíticamente de θ . Más aún, la curva entera $C_\theta(t)$ junto con su punto de aterrizaje dependen continuamente de θ .*

La demostración de este lema sigue la misma línea que la demostración del Lema 5.4 dada por Milnor y Bonifant. Por simplicidad, los detalles serán omitidos.

Demostración. Sea q el periodo de t bajo m_3 , de manera que $z(f_{\theta_1})$ y $C_{\theta_1}(t)$ son fijos bajo $f_{\theta_1}^q$. Para simplificar la notación, llamaremos $\varphi_\theta := \phi_{f_\theta}^q$

La curva $C_\theta(t)$ puede parametrizarse de forma suave por el mapeo

$$\begin{aligned} r_\theta : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto \varphi_\theta^{-1}(e^{3^{qs} + (3^{qs} + t)i}) \end{aligned}$$

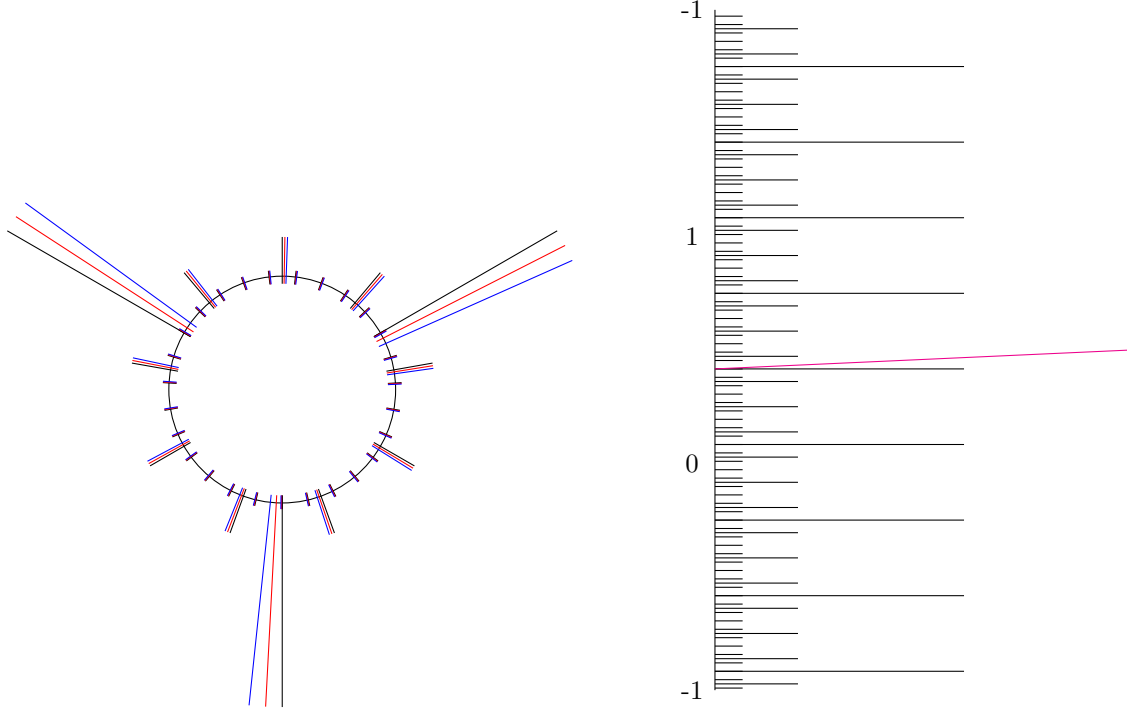


Figura 3: A la izquierda, segmentos extraídos para generar el conjunto V_θ , con $\theta = 1/3$ (en negro), $\theta = 3/40$ (en rojo), y $\theta = 1/15$ (en azul). A la derecha, segmentos extraídos para generar el conjunto \widetilde{V}_θ para $\theta = 1/3$. En rosa, la recta $R(t)$ para $t = 2/3$.

Notemos que

$$f_\theta^q(r_\theta(s)) = f_\theta^q(\varphi_\theta^{-1}(e^{3^{qs} + (3^{qs} + t)i})) = \varphi_\theta((e^{3^{qs} + (3^{qs} + t)i})3^q) = \varphi_\theta(e^{3^{q(s+1)} + (3^{q(s+1)} + t)i}) = r_\theta(s+1)$$

El mapeo $(\theta, s) \mapsto r_\theta(s)$ es suave en $]\theta_1 - \varepsilon, \theta_1[\times \mathbb{R}$ y continuo en $]\theta_1 - \varepsilon, \theta_1] \times \mathbb{R}$.

Para f en una vecindad de f_{θ_1} , existe un único punto fijo repulsor $z(f)$ de f^q cerca de $z(f_{\theta_1})$, variando analíticamente; asumiremos que ε es suficientemente pequeño para que f_θ esté en tal vecindad para todo $\theta \in]\theta_1 - \varepsilon, \theta_1]$. Para cada f en tal vecindad, sea $\lambda(f)$ el multiplicador de $z(f)$ como punto fijo de f^q . Podemos escoger coordenadas de Koenigs $\omega_f = h_{f^q}$ variando holomórficamente con f tal que $\omega_f(z) = 0$ solo en $z = z(f)$, de manera que $\omega_f(f^q(z)) = \lambda(f)\omega_f(z)$. Para $\theta \in]\theta_1 - \varepsilon, \theta_1]$, la curva $C_\theta(t)$ puede ser descrita en estas coordenadas por un mapeo $s \rightarrow \omega_\theta(s)$ para s cerca de infinito cumpliendo $\omega_\theta(s-n) = \omega_\theta(s)/\lambda(f_\theta)^n$. De aquí se deduce que $\omega_\theta(s)$ converge a 0 uniformemente cuando $s \rightarrow -\infty$. Luego $r_\theta(s) \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} z(f_\theta)$ uniformemente. Así, si s_0 está suficientemente cerca de $-\infty$ de manera que $r_{\theta_1}(s_0)$ está en el dominio de las coordenadas de Koenigs, entonces para θ cerca de θ_1 el punto $r_\theta(s_0)$ también lo está, y la curva $C_\theta(t)$ efectivamente aterriza en $z(f_\theta)$. \square

Corolario 5.7. *Suponga que para todo $\theta \in]\theta_0, \theta_1[$ el rayo $R_\theta(t)$ es suave, y que para algún $\bar{\theta}$ en este intervalo y $k \geq 0$ el rayo $R_{\bar{\theta}}(t)$ aterriza en $a_k(\bar{\theta})$. Para cada $i = 0, 1$, si el rayo $R_{\theta_i}(t)$ es singular, entonces aterriza en $a_k(\theta_i)$.*

Demostración. Cuando $k = \ell$, sabiendo que para $\theta \in]\theta_1 - \varepsilon, \theta_1[$ el punto donde aterriza $C_\theta(t)$ es $a_\ell(\theta)$, concluimos que $C_{\theta_1}(t)$ aterriza en $\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} a_\ell(\theta) = a_\ell(\theta_1)$.

Para el caso $k < \ell - 1$, de forma análoga al caso suave, podemos considerar A el conjunto de puntos de acumulación de $C_\theta(t)(r)$ cuando $\theta \rightarrow \theta_1^-$ y $r \rightarrow 0^+$ simultáneamente. Este conjunto es conexo y es mapeado por $f_\theta^{\ell-k}$ al conjunto de puntos de acumulación de $C_\theta(3^{\ell-k}t)(r)$ cuando $\theta \rightarrow \theta_1^-$ y $r \rightarrow 0^+$, que por el lema anterior es $a_\ell(\theta_1)$. Luego A es un singleton, y así $a_k(\theta_1)$ es el punto de aterrizaje de $C_{\theta_1}(t)$, que es igual al punto de aterrizaje de $R_{\theta_1}^+(t)$.

La demostración para el límite en θ_0 se obtiene de la misma forma. □

Los Corolarios 5.3, 5.5 y 5.7 completan la demostración del inciso *ii)* del Teorema 5.1.

5.2. Variando dentro de un rayo

Consideremos ahora un $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y un rayo $\mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ en particular. Nos interesa saber cómo varían los rayos dinámicos racionales a medida que nos movemos dentro del rayo $\mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$. En concreto, el teorema que demostraremos es el siguiente.

Teorema 5.8. *Sean $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ un rayo de parámetro, $f_0 \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ y $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

- i) Si el rayo $R_{f_0}(t)$ es suave y aterriza en $a_k(f_0)$ para algún $k \geq 0$, entonces para todo $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ el rayo correspondiente $R_f(t)$ es suave y aterriza en $a_k(f)$.*
- ii) Si para $\sigma \in \{+, -\}$ el rayo $R_{f_0}^\sigma(t)$ es singular y aterriza en $a_k(f_0)$ para algún $k \geq 0$, entonces para todo $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ el rayo correspondiente $R_f^\sigma(t)$ es singular y aterriza en $a_k(f)$.*

Demostración. Notemos que si $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$, entonces el rayo dinámico con argumento t es suave si y solo si ninguno de los ángulos $\theta + 1/3$ ó $\theta - 1/3$ está en la órbita de t bajo m_3 . Es decir, si $\mathcal{O} = \{3^n t : n \geq 0\}$, el rayo $R_f(t)$ es suave si y solo si $\mathcal{O} \cap \{\theta + 1/3, \theta - 1/3\} = \emptyset$. Luego, que tal rayo sea suave o singular se preserva a través del rayo $\mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$.

Ahora bien, supongamos que para todo $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ el rayo $R_f(t)$ es suave. Por tanto, $\mathcal{O} \cap \{\theta + 1/3, \theta - 1/3\} = \emptyset$. Como t es racional, \mathcal{O} es finita, por lo que podemos encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\vartheta \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[$, se tiene que $\mathcal{O} \cap \{\vartheta + 1/3, \vartheta - 1/3\} = \emptyset$. Consideremos \mathcal{V} un conexo conteniendo a $\mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ que sea mapeado por $\Phi_\mathcal{U}$ a $\{re^{2\pi i\vartheta} : r > 1 \text{ y } \vartheta \in]\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon[\}$. Se tiene que \mathcal{V} es abierto, $f_0 \in \mathcal{V}$, y para todo $f \in \mathcal{V}$ el rayo $R_f(t)$ es suave. Por el Lema 5.2 se tiene que para todo $f \in \mathcal{V}$, y en particular para todo $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$, el rayo $R_f(t)$ aterriza en $a_k(f)$, habiendo probado *i)*.

Para probar *ii)*, supongamos primero que $\sigma = +$. Como el rayo $R_{f_0}^+(t)$ es singular, entonces $\mathcal{O} \cap \{\theta + 1/3, \theta - 1/3\} \neq \emptyset$. Como t es racional, \mathcal{O} es finito, por lo que para ϑ cerca de θ esta intersección es vacía, y por tanto, si f está en un rayo $\mathcal{R}_\mathcal{U}(\vartheta)$, entonces el rayo $R_f(t)$ es suave. Consideremos $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ y familias $\{h_\vartheta\}_{\vartheta \in \mathbb{R}}$, $\{h'_\vartheta\}_{\vartheta \in \mathbb{R}}$ como en la sección anterior, con $f = h_\theta$ y $f_0 = h'_\theta$. Un mismo argumento que el de la parte *ii)* del Teorema 5.1 muestra que el punto

$z(\vartheta)$ donde aterriza el rayo suave $R_{h'_\vartheta}(t)$ (con $\vartheta < \theta$ suficientemente cerca) varía continuamente y converge al punto donde aterriza $R_{f_0}^+(t)$. Ahora bien, como este rayo aterriza en $a_k(f_0)$, entonces $3^{\ell-k}t$ es periódico para m_3 con algún periodo p , por lo que $h'_\vartheta{}^{\ell-k}(z(\vartheta))$ es periódico para h'_ϑ con algún periodo dividiendo a p . Sin embargo la función $h^p(h^{\ell-k}(z)) - h^{\ell-k}(z)$ se hace 0 cuando $h = f_0$, $z = a_k(f_0)$ y su derivada en ese punto no es 0 cuando $k \neq 0$. Luego, si $k \neq 0$, entonces para cada h cerca de f_0 existe un único punto $z(h)$ moviéndose continuamente con h que hace 0 a esa función, forzando a que $z(h) = a_k(h)$. De esa forma, los rayos $R_{h'_\vartheta}(t)$ aterrizan en $a_k(h'_\vartheta)$ cuando $k \neq 0$. Ahora bien, si $k = 0$, el mismo argumento nos dice que el rayo $R_{h'_\vartheta}(3t)$ aterriza en $a_1(h'_\vartheta)$ y uno de los rayos $R_{h'_\vartheta}(t \pm 1/3)$ aterriza en el punto cocrítico $-2a(h'_\vartheta)$, por lo que el rayo $R_{h'_\vartheta}(t)$ aterriza en $a_0(\vartheta)$.

Finalmente, la parte *i*) de este teorema nos dice que los rayos $R_{h_\vartheta}(t)$ aterrizan en $a_k(h_\vartheta)$, y tendiendo $\vartheta \rightarrow \theta^-$ concluimos, por el Teorema 5.1, que el rayo $R_f^+(t)$ aterriza en $a_k(f)$. Esto prueba *ii*) para rayos derechos. La demostración cuando $\sigma = -$ sigue la misma línea utilizando argumentos ϑ mayores a θ . \square

5.3. Aproximándonos al locus de conexidad

Estudiaremos ahora el movimiento de los rayos cuando nos aproximamos al locus de conexidad $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$. Consideremos $\mathcal{R}_U(\theta)$ un rayo en una región de escape U y f_0 un punto de acumulación de este rayo en $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$. Nos interesa conocer cómo se acumulan los rayos $R_f^\pm(t)$ y $R_f^*(t)$ a medida que nos acercamos a f_0 . Será necesario trabajar no solo con el límite puntual de los rayos, sino que con el conjunto de todos los puntos de acumulación. Para esto, introduciremos una noción de límite superior, y estudiaremos el límite superior de rayos (suaves o singulares) cuando f converge a $\mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$. El resultado principal, resumido en el Corolario 5.12, nos dice, en sencillo, que cuando nos acercamos a un f_0 en el locus de conexidad, para cada $\sigma \in \{+, -, *\}$, los rayos $R_f^\sigma(t)$ se acumulan en dos partes: el rayo límite correspondiente $R_{f_0}^\sigma(t)$, junto a un “resto” que queda contenido dentro del conjunto lleno de Julia. Este resto, además, será solo el punto de aterrizaje de $R_{f_0}^\sigma(t)$ si tal punto resulta ser un punto periódico repulsor.

Estudiemos primero la acumulación de curvas en general. Supongamos que para cada $f \in \mathcal{R}_U(\theta)$ tenemos una curva $\gamma(f)$ que depende continuamente de f . Definimos $\limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f)$ como el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \forall W \text{ vecindad de } z, \forall \mathcal{W} \text{ vecindad de } f_0, \exists f \in \mathcal{W} \cap \mathcal{R}_U(\theta) \text{ tal que } \gamma(f) \cap W \neq \emptyset\}.$$

Equivalentemente, $z \in \limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f)$ si y solo si existen $f_n \rightarrow f_0$ en $\mathcal{R}_U(\theta)$ y $z_n \in \gamma(f_n)$ tal que $z_n \rightarrow z$. El siguiente resultado nos entrega información relevante respecto a estos límites:

Lema 5.9. *Sea $f_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ un punto de acumulación de $\mathcal{R}_U(\theta)$. Sea $\gamma(f)$ una curva definida para cada $f \in \mathcal{R}_U(\theta)$, dependiendo continuamente de f . Se tienen las siguientes:*

$$i) \limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\bigcup_{\substack{f \in \mathcal{R}_U(\theta): \\ \|f - f_0\| < \varepsilon}} \gamma(f)}.$$

ii) Si existe $M > 0$ tal que $\gamma(f) \subseteq \mathbb{D}_M$ para todo f suficientemente cerca de f_0 , entonces $\limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f)$ es conexo.

iii) $f_0(\limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f)) = \limsup_{f \rightarrow f_0} f(\gamma(f))$.

Demostración. Para simplificar notación, para cada $\varepsilon > 0$ denotaremos

$$X_\varepsilon = \bigcup_{\substack{f \in \mathcal{R}_U(\theta): \\ \|f - f_0\| < \varepsilon}} \gamma(f).$$

De esta manera, la primera afirmación del lema corresponde a probar que

$$\limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{X_\varepsilon}.$$

Sea $z \in \limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f)$ y consideremos $\varepsilon > 0$. Definamos \mathcal{W} la bola abierta con centro f_0 y radio ε . Para cualquier vecindad W de z , existe $f \in \mathcal{W} \cap \mathcal{R}_U(\theta)$ tal que $\gamma(f) \cap W \neq \emptyset$. Luego, $X_\varepsilon \cap W \neq \emptyset$, y por tanto $z \in \overline{X_\varepsilon}$. Como esto es válido para todo $\varepsilon > 0$, concluimos que $\limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f) \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{X_\varepsilon}$.

Para la segunda contención, consideremos $z \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{X_\varepsilon}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos $\varepsilon = 1/n$. Se tiene que $\mathbb{D}_{1/n}(z) \cap X_{1/n} \neq \emptyset$, por lo que existen $f_n \in \mathcal{R}_U(\theta)$ y $z_n \in \mathbb{C}$ tal que $\|f_n - f_0\| < 1/n$ y $z_n \in \gamma(f_n)$. Tenemos sucesiones $f_n \rightarrow f_0$ y $z_n \rightarrow z$ tal que $z_n \in \gamma(f_n)$, por lo que $z \in \limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f)$.

Esto concluye i).

Para la segunda afirmación, llamemos $L = \limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f)$ y supongamos que no es conexo, es decir, existen A y B abiertos de \mathbb{C} tal que $L \subseteq A \cup B$, $A \cap L \neq \emptyset$, $B \cap L \neq \emptyset$ y $A \cap B \cap L = \emptyset$. Veamos que sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $A \cap B = \emptyset$: por parte i) sabemos que L es cerrado. Luego, $L \setminus A$ y $L \setminus B$ son cerrados, y por normalidad de \mathbb{C} (como espacio topológico), existen A' y B' abiertos disjuntos tal que $(L \setminus B) \subseteq A'$ y $(L \setminus A) \subseteq B'$. Reemplazando A por A' y B por B' tenemos abiertos disjuntos cuya unión cubre L .

Consideremos $f_n \rightarrow f_0$ en $\mathcal{R}_U(\theta)$. Como las curvas dependen continuamente de f , entonces para n suficientemente grande tenemos que $\gamma(f_n) \cap A \neq \emptyset$ y $\gamma(f_n) \cap B \neq \emptyset$. Como $\gamma(f_n)$ es conexa, entonces existe $z_n \notin A \cup B$ tal que $z_n \in \gamma(f_n)$. Por hipótesis, para n suficientemente grande se tiene que $\gamma(f_n) \subseteq \mathbb{D}_M$, por lo que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Por tanto tiene subsucesión $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergiendo a algún $z \in \mathbb{C}$. Dado que $f_{n_k} \rightarrow f_0$ y $z_{n_k} \rightarrow z$, entonces $z \in L$. Sin embargo, $z_n \in \mathbb{C} \setminus (A \cup B)$ que es cerrado, por lo que $z \in \mathbb{C} \setminus (A \cup B)$, lo que contradice nuestra hipótesis de que $L \subseteq A \cup B$. Por tanto $L = \limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f)$ es conexo y probamos ii).

Finalmente, consideremos $z \in f_0(\limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f))$, y sea $x \in \limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma(f)$ tal que $f_0(x) = z$. Consideremos $f_n \rightarrow f_0$ y $x_n \in \gamma(f_n)$ tal que $x_n \rightarrow x$. Luego $f_n(x_n) \in f_n(\gamma(f_n))$ y $f_n(x_n) \rightarrow f_0(x) = z$, por lo que $z \in \limsup_{f \rightarrow f_0} f(\gamma(f))$. Esto prueba la primera contención de iii) La igualdad de esta afirmación no será utilizada en este trabajo, por lo que no la demostraremos. \square

Pasemos a estudiar cómo se acumulan los rayos dinámicos a medida que nos acercamos al locus de conexidad. Como los rayos de parámetros están definidos por las coordenadas de Böttcher, el siguiente lema sobre convergencia de Carathéodory de las funciones ϕ_f nos será de utilidad:

Lema 5.10. *Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en \mathcal{U} convergiendo a $f_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$. Para $n \geq 0$ definamos $U_n = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : g_{f_n}(z) > g_{f_n}(-a(f_n))\}$ y $V_n = \phi_{f_n}(U_n)$. Del mismo modo, sean $U_0 = \widehat{\mathbb{C}} \setminus K(f_0)$ y $V_0 = \phi_{f_0}(U_0) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$. Se tiene que:*

- i) Si $K \subseteq U_0$ es compacto, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq U_n$ para todo $n \geq N$.*
- ii) Si $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ es abierto conexo conteniendo a ∞ y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \subseteq U_n$ para todo $n \geq N$, entonces $U \subseteq U_0$.*
- iii) Para todo compacto $K \subseteq U_0$, se tiene que $\phi_{f_n}|_K \rightarrow \phi_{f_0}|_K$ uniformemente.*
- iv) Para todo compacto $K \subseteq V_0$, se tiene que $K \subseteq V_n$ para n suficientemente grande, y $\phi_{f_n}^{-1}|_K \rightarrow \phi_{f_0}^{-1}|_K$ uniformemente.*

Demostración. Sea $K \subseteq U_0$ compacto. Como $U_0 \subseteq \widehat{\mathbb{C}} \setminus K(f_0)$, entonces para todo $z \in K$ se tiene que $g_{f_0}(z) > 0$. Más aún, por compacidad de K , existe $r > 0$ tal que $g_{f_0}(z) \geq 2r$ para todo $z \in K$. Nuevamente por compacidad de K , y por continuidad de $g_f(z)$ respecto a f , podemos encontrar N suficientemente grande tal que $g_{f_n}(z) > r$ para $n \geq N$ y $z \in K$. Del mismo modo, sabiendo que $g_{f_0}(-a(f_0)) = 0$, por continuidad de $-a(f)$ respecto a f y $g_f(z)$ respecto a f y z , podemos asumir que si N es suficientemente grande, entonces $g_{f_n}(-a(f_n)) < r$ para $n \geq N$. Juntando ambas, concluimos que $g_{f_n}(z) > g_{f_n}(-a(f_n))$ para todo $z \in K$, por lo que $K \subseteq U_n$ para $n \geq N$.

Para probar ii), supongamos que $U \cap K(f_0) \neq \emptyset$. Como U es conexo, $\infty \in U$ y $K(f_0)$ es cerrado, entonces $U \cap J(f_0) \neq \emptyset$. Más aún, como los puntos periódicos repulsores son densos en $J(f_0)$, entonces existe $z(f_0) \in U \cap J(f_0)$ periódico repulsor para f_0 . Pero entonces existe un correspondiente punto periódico $z(f_n)$ de f_n convergiendo a $z(f_0)$ cuando $n \rightarrow \infty$. De esta forma, para n suficientemente grande, $z(f_n) \in U$, y por tanto $z(f_n) \in U_n \subseteq \mathbb{C} \setminus K(f_n)$, lo que es un absurdo.

Las afirmaciones *i)* y *ii)* pueden interpretarse como que los dominios (U_n, ∞) convergen Carathéodory a (U, ∞) . Por [McM94, Teorema 5.1 y Teorema 5.4] tenemos que las aplicaciones de Riemann de U_n y sus inversas convergen uniformemente en compactos a la aplicación de Riemann de U (normalizadas con derivada positiva en 0). Reescalando y componiendo con $1/z$, tenemos que $(\phi_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en compactos a ϕ_0 , que los dominios de $(\phi_{f_n}^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergen Carathéodory al dominio de $\phi_{f_0}^{-1}$, y que $(\phi_{f_n}^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en compactos a $\phi_{f_0}^{-1}$, lo que prueba iii) y iv). \square

Gracias a este lema, tenemos un primer resultado sobre límite de rayos, necesario para probar más adelante los resultados buscados.

Lema 5.11. *Sean $f_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ un punto de acumulación de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$, $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y $\sigma \in \{+, -\}$. Llamemos*

$$\limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(t) = L^*,$$

$$\limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^\sigma(t) = L^\sigma.$$

Se tiene que $L^ \setminus K(f_0) = L^\sigma \setminus K(f_0) = R_{f_0}(t)$.*

Demostración. Probaremos $L^* \setminus K(f_0) \subseteq L^\sigma \setminus K(f_0) \subseteq R_{f_0}(t) \subseteq L^* \setminus K(f_0)$.

Como $R_f^*(t) \subseteq R_f^\sigma(t)$, primera contención es directa. Para la segunda, consideremos $z \in L^\sigma \setminus K(f_0)$. Existen por tanto sucesiones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n \rightarrow f_0$, $z_n \rightarrow z$ y $z_n \in R_{f_n}^\sigma(t)$. Llamemos $r_n = g_{f_n}(z_n)$ y $r = g_{f_0}(z)$. Por continuidad de la función de green, tenemos que $r_n \rightarrow r \neq 0$. Sea K compacto de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ conteniendo a $e^{r_n + 2\pi it}$ y a $e^{r + 2\pi it}$, por el Lema 5.10 tenemos que para n suficientemente grande, $\phi_{f_n}^{-1}$ está definido en K y converge uniformemente a $\phi_{f_0}^{-1}$. Así, $z_n = \phi_{f_n}^{-1}(e^{r_n + 2\pi it}) \rightarrow \phi_{f_0}^{-1}(e^{r + 2\pi it}) \in R_{f_0}(t)$. Como $z_n \rightarrow z$, concluimos que $z \in R_{f_0}(t)$.

Finalmente, para demostrar la última contención, consideremos $z \in R_{f_0}(t)$ y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}_U(\theta)$ convergiendo a f_0 . Definamos $u_0 = \phi_{f_0}(z) = |\phi_{f_0}(z)|e^{2\pi it}$ y $K = \{u_0\}$. Por el Lema 5.10, para n suficientemente grande tenemos que $\phi_{f_n}^{-1}$ está bien definido en u_0 y $\phi_{f_n}^{-1}(u_0) \rightarrow \phi_{f_0}^{-1}(u_0) = z$. Pero como $u_0 = |\phi_{f_0}(z)|e^{2\pi it}$, entonces $\phi_{f_n}^{-1}(u_0) \in R_{f_n}^*(t)$, por lo que $z \in \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(t)$. Evidentemente $z \notin K(f_0)$, pues $z \in R_{f_0}(t)$. \square

De esta forma tenemos el resultado principal de esta sección:

Corolario 5.12. *Sea $f_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ un punto de acumulación de $\mathcal{R}_U(\theta)$, y $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Llamemos*

$$\limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(t) = L^*,$$

$$\limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^\sigma(t) = L^\sigma.$$

Se tiene que:

i) $R_{f_0}(t) \subseteq L^*$

ii) $L^\sigma \setminus R_{f_0}(t) = L^\sigma \cap K(f_0)$.

iii) *Si para $f \in \mathcal{R}_U(\theta)$ se tiene que $R_f^\sigma(t)$ es singular, entonces $\limsup_{f \rightarrow f_0} (R_f^\sigma(t) \setminus R_f^*(t)) \subseteq K(f_0)$.*

iv) $L^* \cap K(f_0)$ y $L^\sigma \cap K(f_0)$ son conexos.

Demostración. i) y ii) son directas de la igualdad del lema anterior. Para probar iii), consideremos sucesiones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n \in \mathcal{R}_U(\theta)$, $f_n \rightarrow f_0$, $z_n \rightarrow z$ y $z_n \in R_{f_n}^\sigma(t) \setminus R_{f_n}^*(t)$. Existe pre-imagen iterada ω_n de $-a(f_n)$ donde termina $R_{f_n}^*(t)$, de manera que $0 < g_{f_n}(\omega_n) \leq g_{f_n}(-a(f_n)) \rightarrow 0$. Por tanto $g_{f_n}(\omega_n) \rightarrow 0$ y por tanto $g_{f_0}(z) = 0$, es decir, $z \in K(f_0)$.

Finalmente, si consideramos sucesiones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $f_n \in \mathcal{R}_U(\theta)$, $f_n \rightarrow f_0$, $z_n \rightarrow z$, $z_n \in R_{f_n}^*(t)$ y $g_{f_n}(z_n) < a$ para todo n , entonces $g_{f_0}(z) \leq a$. Por tanto, si llamamos

$$\gamma_a(f) = R_f^*(t) \cap \{z : g_{f_n}(z) \leq a\},$$

entonces

$$\limsup_{f \rightarrow f_0} \gamma_a(f) = \left(\limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(t) \right) \cap \{z : g_{f_0}(z) \leq a\}.$$

Llamemos Γ_a a este conjunto. De esta forma, para cada $a > 0$, Γ_a es conexo por el Lema 5.9, y si $a < b$, entonces $\Gamma_a \subseteq \Gamma_b$. Así, $L^* \cap K(f_0) = \bigcap_{a>0} \Gamma_a$ es conexo. Si para todo $f \in \mathcal{R}_U(\theta)$, el rayo

$R_f(t)$ es suave, esto termina de probar *iv*). Para el caso en que no, $\limsup_{f \rightarrow f_0} (R_f^\sigma(t) \setminus R_f^*(t))$ es conexo por el Lema 5.9, y tenemos que

$$L^\sigma \cap K(f_0) = (L^* \cap K(f_0)) \cup \limsup_{f \rightarrow f_0} (R_f^\sigma(t) \setminus R_f^*(t)).$$

Como ambos conjuntos en la unión son conexos y se intersecan (en los puntos de acumulación de los puntos donde termina $R_f^*(t)$), entonces $L^\sigma \cap K(f_0)$ es conexo, completando la demostración de *iv*) y del corolario. \square

Para el caso cuando $R_{f_0}(t)$ aterriza en un punto periódico repulsor, es posible determinar con mayor precisión cómo se acumulan los rayos $R_f(t)$. Esto es resultado inmediato de la estabilidad presentada en el Lema 5.4.

Lema 5.13. *Sea $f_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$ un punto de acumulación de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$. Si $R_{f_0}(t)$ aterriza en un punto periódico repulsor $z(f_0)$, entonces $\limsup_{f \rightarrow f_0} R_f(t) = R_{f_0}(t) \cup \{z_0\}$.*

Demostración. Se sigue directo de que $R_f(t)$ junto con su punto de aterrizaje varíe continuamente cerca de f_0 . \square

6. R-conexiones

Durante esta sección extenderemos la definición de *ray connection* utilizada por Kiwi y Arfeux para el caso de f en una región de escape de $S_{\ell,1}$, las que llamaremos *R-conexiones*. El objetivo de esta sección será probar la existencia de R-conexiones entre $-a(f)$ y puntos en la órbita del punto crítico prefijo que se encuentren en $D_0(f)$. Estas R-conexiones nos permitirán, en las secciones 7 y 8, “trasladar” aquel punto con el que conectamos hacia el disco $D_1(f)$, de esta forma uniendo regiones de escape cuyos *kneading* se relacionan a partir de los movimientos descritos en la sección 3.

Vamos a definir una *R-conexión* de la siguiente manera:

Definición 6.1. *Dados \mathcal{U} una región de escape, $f \in \mathcal{U}$, $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\sigma \in \{+, -\}$, decimos que $R_f^\sigma(\theta)$ es una R-conexión entre $-a(f)$ y $a_k(f)$ si:*

- $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,
- $-a(f) \in R_f^\sigma(\theta)$,
- $R_f^\sigma(\theta)$ aterriza en $a_k(f)$.

Bajo esta definición, buscaremos R-conexiones especiales que nos permitirán después transitar entre regiones. El teorema principal que buscaremos probar en esta sección es el siguiente:

Teorema 6.2. *Sea \mathcal{U} región de escape con kneading $\kappa(\mathcal{U})$. Sea μ el tiempo de retorno maximal de $f \in \mathcal{U}$. Luego:*

1. *Existen $k < \ell - 1$ y un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ tal que para todo $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$, los rayos $R_f^+(\theta_0 - 1/3)$ y $R_f^-(\theta_0 + 1/3)$ son R-conexiones entre $-a(f)$ y $a_k(f) \in D_0(f)$, donde $a_k(f)$ tiene tiempo de retorno μ .*
2. *Si $\kappa(\mathcal{U}) = 01^{\ell-2}\iota_{\ell-1}\bar{0}$, entonces existe un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ tal que para todo $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$, uno de los rayos $R_f^-(\theta_0 + 1/3)$ o $R_f^+(\theta_0 - 1/3)$ es fijo y es una R-conexión entre $-a(f)$ y $a_\ell(f)$.*

Una consecuencia directa del Teorema 5.8 es que dados una región de escape \mathcal{U} , $\sigma \in \{\pm\}$ y un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\vartheta)$, si para algún $f_0 \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\vartheta)$ el rayo $R_{f_0}^\sigma(\theta)$ es R-conexión entre $-a(f_0)$ y algún $a_k(f_0)$, entonces para todo $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\vartheta)$ el rayo $R_f^\sigma(\theta)$ es R-conexión entre $-a(f)$ y $a_k(f)$. Luego, para probar el Teorema 6.2, basta encontrar las R-conexiones para solo alguna f en un rayo de parámetro racional. Esto lo lograremos haciendo variar de manera suave las funciones entre los rayos de parámetro, y así perturbar de manera suave la dinámica en el plano. Consideremos así una familia $\{f_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ definida como en §5.1. Nuestro objetivo será encontrar algún $\theta_0 \in \mathbb{Q}$ para el cual el mapeo f_{θ_0} presenta una R-conexión con las propiedades buscadas.

Para poder trabajar en la demostración, estudiaremos primero la relación que existe entre la dinámica del círculo bajo m_3 y el aterrizaje de rayos dinámicos. Con esto podremos estudiar el aterrizaje de los rayos que contienen al punto $-a(\theta)$. Esto estará contenido en § 6.1. Luego, la demostración del Teorema 6.2 la separaremos en 3 partes. En § 6.2 demostraremos el primer punto del teorema para el caso donde el tiempo de retorno maximal μ es mayor que 1. Luego, veremos los casos donde $\mu = 0$ en § 6.3. Finalmente, el segundo punto del teorema será probado en § 6.4.

6.1. Aterrizaje de rayos $R_\theta^\mp(\theta \pm 1/3)$

En orden de probar el Teorema 6.2, en primer lugar analizaremos dónde aterrizan los rayos $R_\theta^\mp(\theta \pm 1/3)$. Para esto trabajaremos con la dinámica de $\theta \pm 1/3$ en el círculo bajo m_3 y cómo se ve esto reflejado en el aterrizaje de los rayos.

Para estudiar la dinámica de $\theta \pm 1/3$, seguiremos el trabajo de Arfeux y Kiwi. Consideremos, para $k > 0$, los ángulos

$$\alpha_k := \frac{1}{3} - \frac{1}{3^k - 1},$$

$$\beta_k := \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3^k - 1)}.$$

Definimos el intervalo

$$I_k :=]\beta_k, \alpha_k[. \quad (1)$$

A su vez, dado $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definamos los intervalos

$$\mathcal{I}_0^+(\theta) := [\theta - 1/3, \theta + 1/3[,$$

$$\mathcal{I}_1^+(\theta) := [\theta + 1/3, \theta - 1/3[,$$

$$\mathcal{I}_0^-(\theta) :=]\theta - 1/3, \theta + 1/3],$$

$$\mathcal{I}_1^-(\theta) :=]\theta + 1/3, \theta - 1/3].$$

Cada par de intervalos $\{\mathcal{I}_0^\sigma, \mathcal{I}_1^\sigma\}$ genera una partición del círculo. La dinámica bajo m_3 de un ángulo $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ respecto a tales particiones está íntimamente relacionada con el aterrizaje de rayos dinámicos: un rayo $R_f^\sigma(t)$ aterriza en $D_i(\theta)$ si y solo si $t \in \mathcal{I}_i^\sigma(\theta)$.

Definamos la función

$$\text{itin}_\theta^\sigma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$$

$$t \mapsto \iota_0 \iota_1 \dots,$$

donde $\iota_j = 0$ o $\iota_j = 1$ de acuerdo a si $m_3^j(t) \in \mathcal{I}_0^\sigma(\theta)$ o $m_3^j(t) \in \mathcal{I}_1^\sigma(\theta)$, respectivamente.

Gracias a [AK20, Lema 4.4] conocemos el itinerario de $\theta \pm 1/3$ para $\theta \in I_k$ y $\theta \in -I_k$. Sabemos que para $\theta \in I_k \cup -I_k$,

$$\text{itin}_\theta^+(\theta - 1/3) = 01^{k-1}0\iota_{k+1}\iota_{k+2}\dots, \quad (2)$$

$$\text{itin}_\theta^-(\theta + 1/3) = 01^{k-1}0\iota'_{k+1}\iota'_{k+2}\dots, \quad (3)$$

para algunos ι_j, ι'_j . Sin embargo, revisando la demostración es posible precisar aún más el resultado:

Lema 6.3. *Si $\theta \in I_k$, entonces*

$$i) \theta + 1/3 < m_3^{k-1}(\theta - 1/3) < m_3^{k-2}(\theta - 1/3) < \dots < m_3(\theta - 1/3) < \theta - 1/3.$$

ii) $m_3^k(\theta \pm 1/3) \in \mathcal{I}_0^\mp(\theta)$.

iii) $\theta - 1/3 > m_3(\alpha_k) > m_3^2(\alpha_k) > \dots > m_3^{k-1}(\alpha_k) > \theta + 1/3$.

Si bien para esta sección basta con las igualdades en (2) y (3), más adelante será necesario conocer lo enunciado en el Lema 6.3. El análogo a este lema para $\theta \in -I_k$ también es verdadero, pero será suficiente con conocer las igualdades ya mencionadas.

Pasemos ahora a revisar cómo esta dinámica confluye con el aterrizaje de los rayos $R_\theta^\mp(\theta \pm 1/3)$. Esta dinámica está íntimamente relacionada con las preimágenes del único punto fijo en $D_1(\theta)$. Durante esta sección, llamaremos $z(\theta)$ al punto fijo en $D_1(\theta)$ y denotaremos por $z'(\theta)$ y $z''(\theta)$ a sus preimágenes, elegidas de manera que $R_{1/3}^-(2/3)$ aterrice en $z'(1/3)$, y que se muevan continuamente dependiendo de θ .

Recordemos acá que según § 4.3, el conjunto de nivel k , $L_\theta^{(k)}(01^{k-1})$, corresponde al conjunto de aquellos puntos en $D_0(\theta)$ cuyos primeros $k - 1$ iterados caen en $D_1(\theta)$. Este conjunto era igual a $D_\theta^{(k)}(a_0(\theta))$ si contiene al punto crítico marcado, o dos discos de nivel k distintos de lo contrario, cada uno de estos mapeados de forma inyectiva en su imagen. De esta forma, si μ_0 es el tiempo de retorno de $a_0(\theta)$ a $D_0(\theta)$ y $k < \mu_0$, entonces $L_\theta^{(k)}(01^{k-1}) = D_\theta^{(k)}(z'(\theta)) = D_\theta^{(k)}(z''(\theta)) = D_\theta^{(k)}(a_0(\theta))$, y si $k \geq \mu_0$, entonces $L_\theta^{(k)}(01^{k-1})$ es la unión disjunta de $D_\theta^{(k)}(z'(\theta))$ con $D_\theta^{(k)}(z''(\theta))$.

Es posible saber dónde aterrizan los rayos $R_\theta^\mp(\theta \pm 1/3)$ usando los discos $D_\theta^{(k)}(z'(\theta))$ y $D_\theta^{(k)}(z''(\theta))$. Para esto, invocaremos el siguiente resultado que se deduce de [AK20, Lema 4.5]:

Lema 6.4. Sean μ_0 el tiempo de retorno de $a_0(\theta)$, $k > \mu_0 \geq 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$.

i) Si $\theta \in I_k$, entonces los rayos $R_\theta^-(\theta + 1/3)$ y $R_\theta^+(\theta - 1/3)$ aterrizan en $D_\theta^{(k)}(z'(\theta))$.

ii) Si $\theta \in -I_k$, entonces los rayos $R_\theta^-(\theta + 1/3)$ y $R_\theta^+(\theta - 1/3)$ aterrizan en $D_\theta^{(k)}(z''(\theta))$.

Un último lema respecto al aterrizaje de $R_\theta^\mp(\theta \pm 1/3)$ que será importante es el siguiente:

Lema 6.5. Sea $\theta \in \mathbb{R}$ tal que 3θ no es periódico bajo m_3 . Entonces los rayos $R_\theta^+(\theta - 1/3)$ y $R_\theta^-(\theta + 1/3)$ aterrizan en el mismo punto.

Demostración. Para probar esto, basta probar que no existen preimágenes estrictas de $-a(\theta)$ en estos rayos, o equivalentemente que $R_\theta(3\theta)$ es suave. De no ser así, existiría $n \in \mathbb{N}$ tal que $R_\theta^+(3^n\theta)$ o $R_\theta^-(3^n\theta)$ contiene a $-a(\theta)$, y por tanto $m_3^n(\theta) = \theta - 1/3$ o $m_3^n(\theta) = \theta + 1/3$. Así $m_3^n(3\theta) = 3\theta$, lo que contradice la hipótesis. \square

6.2. R-conexión con $\mu > 1$

Consideremos ahora \mathcal{U} una región de escape tal que el tiempo maximal de retorno μ sea mayor a 1. Sabemos por la subsección anterior dónde aterrizan los rayos que contienen a $-a(\theta)$, por lo que podemos ahora estudiar qué rayos aterrizan en la órbita del punto crítico prefijo. Veremos

entonces el siguiente resultado, que dice relación con la existencia de rayos racionales aterrizando en esta órbita:

Lema 6.6. *Sea $\mu > 1$ y $\theta \in I_\mu \cup -I_\mu$. Entonces:*

- i) No existen rayos singulares aterrizando en $a_\ell(\theta)$.*
- ii) Si $R_\theta(t)$ aterriza en $a_\ell(\theta)$, entonces $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*
- iii) Para cada $j = 0, \dots, \ell$, existe un $t_j \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $R_\theta^+(t_j)$ o $R_\theta^-(t_j)$ aterriza en $a_j(\theta)$.*

Demostración. Para probar *i)*, supongamos que existe un rayo singular $R_\theta^\sigma(t)$, con $\sigma = +$ o $\sigma = -$, aterrizando en $a_\ell(\theta)$. Luego, para algún $k \in \mathbb{N}$, el rayo $R_\theta^\sigma(3^k t)$ contiene a $-a(\theta)$, de donde $m_3^k(t) = \theta + 1/3$ o $m_3^k(t) = \theta - 1/3$. Por Lema 6.3, sabemos que $R_\theta^\sigma(3^{k+1}t)$ aterriza en $D_1(\theta)$ y $R_\theta^\sigma(3^{k+\mu}t)$ aterriza en $D_0(\theta)$, lo que contradice que $a_\ell(\theta)$ sea fijo.

Sea ahora

$$X = \{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : R_\theta(t) \text{ aterriza en } a_\ell(\theta)\}.$$

Por la parte *i)*, este X es igual a

$$\Lambda(a_\ell(\theta)) = \{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : R_\theta^+(t) \text{ o } R_\theta^-(t) \text{ aterriza en } a_\ell(\theta)\}.$$

Sabemos que este conjunto es compacto no vacío (por ejemplo, ver el Teorema E). Más aún, si X es finito, entonces todo $t \in X$ es periódico, y en particular $X \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Por tanto, para demostrar *ii)* basta probar que X es finito. De no ser así, entonces por [Mil06, Lema 18.8], el mapeo $m_3|_X : X \rightarrow X$ no puede ser inyectivo, por lo que existirían $t \neq t'$ en X tal que $m_3(t) = m_3(t')$. De aquí que los rayos $R_\theta(t)$ y $R_\theta(t')$ son distintos (y como son suaves, no se intersecan), pero ambos son mapeados a $R_\theta(3t)$ por f_θ . Como f_θ es localmente invertible cerca de $a_\ell(\theta)$, esto es una contradicción. Por tanto $X \subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y completamos la demostración de *ii)*.

Finalmente, como X es no vacío, *ii)* nos garantiza la existencia de un $t_\ell \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $R_\theta(t_\ell)$ aterriza en $a_\ell(\theta)$. Tomando preimágenes de este rayo de forma inductiva, para cada $j < \ell$ podemos asegurar la existencia de $t_j \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $R_\theta^+(t_j)$ o $R_\theta^-(t_j)$ aterriza en $a_j(\theta)$ (ver §2.4). \square

Nuestra estrategia ahora para encontrar la R-conexión buscada parte por encontrar rayos singulares aterrizando en la órbita del punto crítico prefijo.

Lema 6.7. *Sea μ el tiempo de retorno maximal y supongamos que $\mu > 1$. Consideremos $j < \ell - 1$ tal que $a_j(\theta) \in D_0(\theta)$ tenga tiempo de retorno μ , escogiendo $j = 0$ si $\mu = \mu_0$. Entonces existe $\theta_0 \in I_\mu \cup -I_\mu$ y $t_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que para $\sigma = +$ o $\sigma = -$, el rayo $R_{\theta_0}^\sigma(t_0)$ es singular y aterriza en $a_j(\theta_0)$. Si $j = 0$, podemos escoger θ_0 de manera que $\theta_0 \in I_\mu$.*

Demostración. Como $a_j(\theta)$ tiene tiempo de retorno μ , entonces $a_j(\theta) \in L_\theta^{(\mu)}(01^{\mu-1})$. Así, tenemos que $a_j(\theta) \in D_\theta^{(\mu)}(z'(\theta))$ para todo θ , o $a_j(\theta) \in D_\theta^{(\mu)}(z''(\theta))$ para todo θ . En el primer caso encontraremos un $\theta_0 \in I_\mu$ cumpliendo lo pedido, y en el segundo un $\theta_0 \in -I_\mu$. Notemos que si $j = 0$ (es decir, si $\mu = \mu_0$), entonces $D_\theta^{(\mu)}(z'(\theta)) = D_\theta^{(\mu)}(z''(\theta))$, por lo que en particular podremos encontrar $\theta_0 \in I_\mu$ cumpliendo lo que buscamos.

Supongamos primero entonces que $a_j(\theta) \in D_{\bar{\theta}}^{(\mu)}(z'(\theta))$ para todo θ . Consideremos $\bar{\theta} \in I_\mu$ cualquiera, y $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que uno de los rayos (suave o singular) $R_{\bar{\theta}}^\pm(t)$ aterriza en $a_j(\bar{\theta})$ (que existe por Lema 6.6). Si los rayos $R_{\bar{\theta}}^\pm(t)$ son singulares, entonces basta tomar $\theta_0 = \bar{\theta}$, $t_0 = t$, y hemos probado el teorema. En caso contrario, tenemos dos posibilidades: que para todo $\theta \in I_\mu$ el rayo $R_\theta(t)$ es suave, o que exista un $\tau \in I_\mu$ tal que los rayos $R_\tau^\pm(t)$ son singulares.

Supongamos primero que para todo $\theta \in I_\mu$ el rayo $R_\theta(t)$ es suave. En tal caso, por el Teorema 5.1, estos rayos aterrizarían en $a_j(\theta)$ para todo θ . Probaremos que existe $\theta_0 \in I_\mu$ tal que $m_3^\mu(t) = m_3^\mu(\theta_0 - 1/3)$:

Consideremos las funciones $\delta : [\alpha_\mu, \beta_\mu] \rightarrow [0, \infty)$ y $\hat{\delta} : [\alpha_\mu, \beta_\mu] \rightarrow [0, \infty)$ dadas por

$$\begin{aligned}\delta(\theta) &= \text{largo}([\theta - 1/3, m_3^\mu(\theta - 1/3)]) \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \\ \hat{\delta}(\theta) &= \text{largo}([\theta - 1/3, m_3^\mu(t)]) \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Analizaremos los valores de estas funciones en los extremos y en el interior del intervalo $[\alpha_\mu, \beta_\mu]$ para utilizar el Teorema del Valor Intermedio y concluir la existencia de un $\theta_0 \in I_\mu$ tal que $\delta(\theta_0) = \hat{\delta}(\theta_0)$.

Para $\theta = \alpha_\mu$, $\delta(\alpha_\mu) = 0$, mientras que $\hat{\delta}(\alpha_\mu) > 0$, pues de no ser así $3^\mu t$ sería periódico con $\text{itin}_\theta^+(3^\mu t) = 01^{\mu-1}$. Sin embargo, haciendo tender $\theta \searrow \alpha_\mu$, tenemos por la segunda parte del Teorema 5.1 que $R_{\alpha_\mu}^+(3^\mu t)$ aterriza en $a_j(\alpha_\mu)$, que no es periódico.

Para $\theta \in I_\mu$, el rayo $R_\theta(t)$ es suave y aterriza en $a_j(\theta) \in D_0(\theta)$. Como $a_j(\theta)$ tiene tiempo de retorno μ , entonces $R_\theta(3^\mu t)$ aterriza también en $D_0(\theta)$, de donde $m_3^\mu(t) \in]\theta - 1/3, \theta + 1/3[$, y así $0 < \hat{\delta}(\theta) < 2/3$.

Para $\theta = \beta_\mu$, $\delta(\beta_\mu) = 2/3$, mientras que si tomamos $\theta' \in]\beta_\mu - \frac{1}{3^{\mu+1}}, \beta_\mu[$, entonces se tiene que $\beta_\mu - 1/3 < m_3^\mu(t) < \theta' + 1/3 < \beta_\mu + 1/3$, y así $\hat{\delta}(\beta_\mu) < 2/3$.

Juntando esto, por Teorema de Valor Intermedio, existe $\theta_0 \in I_\mu$ tal que $\delta(\theta_0) = \hat{\delta}(\theta_0)$, es decir, $m_3^\mu(t) = m_3^\mu(\theta_0 - 1/3)$. Notemos además que en particular, esto nos asegura que $\theta_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Con esto los rayos $R_{\theta_0}(t)$ y $R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$ son mapeados por $f_{\theta_0}^\mu$ al mismo rayo $R_{\theta_0}(3^\mu t)$. Se tiene por hipótesis que $R_{\theta_0}(t)$ aterriza en $D_{\theta_0}(z'(\theta_0))$. Sabemos por el Lema 6.4 para el caso $\mu > \mu_0$ que el rayo $R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$ aterriza en $D_{\theta_0}^{(\mu)}(z'(\theta_0))$. Del mismo modo, cuando $\mu = \mu_0$, se tiene que el punto donde aterriza $R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$ está en $L_{\theta_0}^{(\mu)}(01^{\mu-1}) = D_{\theta_0}^{(\mu)}(z'(\theta_0))$. Llamemos por tanto $\gamma = R_{\theta_0}(t) \cap D_{\theta_0}^{(\mu)}(z'(\theta_0))$ y $\gamma' = R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3) \cap D_{\theta_0}^{(\mu)}(z'(\theta_0))$, tenemos que $f_{\theta_0}(\gamma)$ y $f_{\theta_0}(\gamma')$ están contenidas en $f_{\theta_0}(D_{\theta_0}^{(\mu)}(z'(\theta_0))) = D_{\theta_0}^{(\mu-1)}(z(\theta_0))$, y que $f_{\theta_0}^{\mu-1}$ es inyectiva en este disco (ver §4.3). Luego, $f_{\theta_0}(\gamma) = f_{\theta_0}(\gamma')$, por lo que f_{θ_0} no es inyectiva en $D_{\theta_0}^{(\mu)}(z'(\theta_0))$. La única forma de que esto sea posible es que $a_0(\theta_0) \in D_{\theta_0}^{(\mu)}(z'(\theta_0))$, de donde $\mu_0 = \mu$ y $j = 0$. Pero en tal caso, las dos preimágenes de $f_{\theta_0}(\gamma)$ en $D_{\theta_0}^{(\mu)}(z'(\theta_0))$ se acumulan en $a_0(\theta_0)$, por lo que el rayo $R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$ aterriza en $a_0(\theta_0)$. Tomando $t_0 = \theta_0 - 1/3$ tenemos la existencia del rayo buscado.

En el otro caso, existe algún $\tau \in I_\mu$ tal que los rayos $R_\tau^\pm(t)$ son singulares. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\tau > \bar{\theta}$. Luego, podemos considerar $\theta_0 > \bar{\theta}$ minimal tal que los rayos $R_{\theta_0}^\pm(t)$ son singulares. Entonces para todo $\theta \in [\bar{\theta}, \theta_0[$ el rayo $R_\theta(t)$ es suave, y por el

Teorema 5.1 este rayo aterriza en $a_j(\theta)$. Por el mismo teorema, si $\theta \rightarrow \theta_0^-$, entonces concluimos que $R_{\theta_0}^+(t)$ aterriza en $a_j(\theta_0)$, y tomando $t_0 = t$ encontramos el rayo que buscábamos.

El caso en que $a_j(\theta) \in D_{\theta}^{(\mu)}(z''(\theta))$ es análogo. □

Con esto podemos encontrar la R-conexión buscada:

Corolario 6.8. *Sea μ el tiempo de retorno maximal y supongamos que $\mu > 1$. Entonces existe $\theta_0 \in I_{\mu} \cup -I_{\mu}$ tal que los rayos $R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$ y $R_{\theta_0}^-(\theta_0 + 1/3)$ son R-conexiones entre $-a(\theta_0)$ y un $a_k(\theta_0)$ en $D_0(\theta_0)$ con tiempo de retorno μ . Si $\mu = \mu_0$, podemos escoger $\theta_0 \in I_{\mu}$.*

Demostración. Consideremos $a_j(\theta)$ como en el enunciado del Lema 6.7, de donde existe $\theta_0 \in I_{\mu} \cup -I_{\mu}$ (o $\theta_0 \in I_{\mu}$ si $\mu = \mu_0$) y $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $R_{\theta_0}^+(t)$ o $R_{\theta_0}^-(t)$ es singular y aterriza en $a_j(\theta_0)$. Supongamos lo primero. Luego, para algún $j' \in \mathbb{N}_0$, el rayo $R_{\theta_0}^+(3^{j'}t)$ contiene a $-a(\theta_0)$, de donde $R_{\theta_0}^+(3^{j'}t) = R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$ o $R_{\theta_0}^+(3^{j'}t) = R_{\theta_0}^+(\theta_0 + 1/3)$, y aterriza en $a_{j+j'}(\theta_0)$. Como $\text{itin}_{\theta_0}^+(\theta_0 + 1/3) = 1^{\mu} 0 \iota_{\mu+1} \dots$ y μ es tiempo de retorno maximal, entonces $R_{\theta_0}^+(3^{j'}t) = R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$, y $a_{j+j'}(\theta_0) \in D_0(\theta_0)$. Por el Lema 6.4, $a_{j+j'}(\theta_0) \in D_{\theta_0}^{(\mu)}(z'(\theta_0))$ o $a_{j+j'}(\theta_0) \in D_{\theta_0}^{(\mu)}(z''(\theta_0))$, por lo que $a_{j+j'}(\theta_0)$ tiene tiempo de retorno μ . En particular $j + j' < \ell - 1$ (pues tiene tiempo de retorno finito y mayor que 1). Llamando $k = j + j'$, tenemos que $R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$ es R-conexión con $a_k(\theta_0)$, y en virtud del Lema 6.5, $R_{\theta_0}^-(\theta_0 + 1/3)$ también aterriza en $a_k(\theta_0)$, probando lo pedido. □

6.3. R-conexión cuando $\mu = 1$

A continuación probaremos el Teorema 6.2 para el caso $\mu = 1$. Separaremos la demostración para cuando $a_{\ell}(\theta) \in D_0(\theta)$ y cuando $a_{\ell}(\theta) \in D_1(\theta)$, pero en ambos casos la estructura será la misma: Encontrar rayos racionales aterrizando en la órbita de $a_0(\theta)$, para luego encontrar $\theta_0 \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que los rayos $R_{\theta_0}^+(t)$ y $R_{\theta_0}^-(t)$ sean singulares y uno de éstos aterrice en la órbita de $a_0(\theta_0)$, evitando que $3\theta_0$ sea periódico bajo m_3 .

Lema 6.9. *Supongamos que $\kappa(\mathcal{U}) = 0^{\ell-1}\bar{1}$. Existe $\theta_0 \in]1/3, 2/3[$ tal que los rayos $R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$ y $R_{\theta_0}^-(\theta_0 + 1/3)$ son R-conexiones entre $-a(\theta_0)$ y algún $a_k(\theta_0)$, con $k < \ell - 1$ (en particular $a_k(\theta_0) \in D_0(\theta_0)$).*

Demostración. Consideremos algún $\bar{\theta} \in]1/3, 2/3[$. El rayo $R_{\bar{\theta}}(0)$ es fijo, suave, y aterriza en $D_1(\bar{\theta})$. Como $a_{\ell}(\bar{\theta})$ es el único punto fijo en $D_1(\bar{\theta})$, entonces $R_{\bar{\theta}}(0)$ aterriza en $a_{\ell}(\bar{\theta})$.

Tomando preimágenes repetidas veces, podemos encontrar $s \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $3^{\ell}s = 0$ y rayos (suaves o singulares) con argumentos $s + 1/3$ y $s - 1/3$ aterrizan en $a_0(\bar{\theta})$. Como no pueden estar ambos argumentos en $]1/3, 2/3[$, esto nos da la existencia de algún $t \in [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ (con $t = s \pm 1/3$ según corresponda) tal que $3^{\ell}t = 0$ y al menos uno de los rayos $R_{\bar{\theta}}^+(t)$ o $R_{\bar{\theta}}^-(t)$ aterriza en $a_0(\bar{\theta})$ (o ambos en caso de ser suaves).

Si los rayos $R_{\bar{\theta}}^{\pm}(t)$ son singulares, fijemos $\theta_0 = \bar{\theta}$. De lo contrario, notemos que para $\theta = s$, los rayos $R_{\theta}^{\pm}(t)$ son singulares (pues $t = s + 1/3$ o $t = s - 1/3$), por lo que podemos encontrar un

$\theta_0 \in]1/3, 2/3[$ que minimice $\{|\theta - \bar{\theta}| : \theta \in]1/3, 2/3[\text{ y } R_{\theta}^{\pm}(t) \text{ son singulares}\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\theta_0 > \bar{\theta}$, de manera que para todo $\theta \in [\bar{\theta}, \theta_0[$, el rayo $R_{\theta}(t)$ es suave, y por el Teorema 5.1, aterriza en $a_0(\theta)$. Tendiendo $\theta \nearrow \theta_0$, tenemos que $R_{\theta}(t)$ converge a $R_{\theta_0}^+(t)$, que es singular y aterriza en $a_0(\theta_0)$ (nuevamente por el Teorema 5.1). Así, encontramos un $\theta_0 \in]1/3, 2/3[$ tal que los rayos $R_{\theta_0}^{\pm}(t)$ son singulares, y uno de estos dos aterriza en $a_0(\theta_0)$.

Finalmente, esto significa que existe un $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $R_{\theta_0}^+(3^k t)$ contiene a $-a(\theta_0)$ y aterriza en $a_k(\theta_0)$, de donde $3^k t = \theta_0 \pm 1/3$. Como $\theta_0 \in]1/3, 2/3[$, se tiene que $3\theta_0 \in]\theta_0 - 1/3, \theta_0 + 1/3[$, por lo que $a_{k+1}(\theta_0) \in D_0(\theta_0)$, concluyendo que $k < \ell - 1$, el rayo $R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$ aterriza en $a_k(\theta_0)$, y por Lema 6.5, el rayo $R_{\theta_0}^-(\theta_0 + 1/3)$ también lo hace. \square

Para el caso donde $\kappa(\mathcal{U}) = \bar{0}$, introduciremos un poco de notación respecto a conjuntos de rotación, ampliamente estudiados por Zakeri en [Zak18]. Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se dice *un conjunto de rotación* para m_d si $m_d(X) = X$ y $m_d|_X$ se puede extender a un mapeo monótono $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de grado 1. Dado que g es monótono de grado 1, puede ser levantado a una función monótona $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x+1) = G(x) + 1$. Definimos el *número de rotación de X* por

$$\rho(X) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G^n(x) - x}{n} \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Se puede probar que éste número no depende de la extensión g ni del levantamiento G . Nuestro interés estará en el caso que $\rho(X) = p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (con p, q coprimos, o $p = 0$ y $q = 1$ si $\rho(X) = 0$). En tal caso, toda órbita periódica de m_d en X tiene q elementos, y si son listados en orden cíclico como p_1, \dots, p_q , entonces $m_d(p_j) = p_{j+p}$ para todo j (donde el subíndice es tomado módulo q).

Volvamos a la situación en la que nos encontramos. Si $\kappa(\mathcal{U}) = \bar{0}$, tenemos por § 4.4 que f_{θ} es híbridamente equivalente a un polinomio cuadrático $Q(z) = z^2 + c$ en un abierto U' conteniendo a la componente conexa K_0 de $K(f_{\theta})$ donde está $a_0(\theta)$. Llamemos $z_1 := Q^{\ell}(0)$, que por la conjugación anterior es un punto fijo. Sabemos que

$$\{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : R_Q(t) \text{ aterriza en } z_1\}$$

es un conjunto de rotación para m_2 , con número de rotación $p/q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (por ejemplo, ver [Mil00, Lema 2.3]). Diremos en este caso que el *número de rotación* de z_1 es p/q . Así, siguiendo [PZ19, Teoremas A y B], existe una correspondencia continua de grado 1 entre los argumentos de rayos aterrizando en K_Q y los argumentos de rayos aterrizando en K_0 . De esta manera, el conjunto

$$\{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : R_{\theta}^{\pm}(t) \text{ aterriza en } a_{\ell}(\theta)\}$$

es conjunto de rotación para m_3 , con número de rotación p/q . En particular en $a_{\ell}(\theta)$ aterrizan rayos racionales (y tomando preimágenes, también en cada $a_j(\theta)$). El siguiente lema nos permitirá posteriormente encontrar rayos singulares aterrizando en la órbita de $a_0(\theta)$. Es importante notar que si $3\theta \in]\theta + 1/3, \theta - 1/3[$, todos los rayos aterrizando en la órbita de $a_0(\theta)$ son suaves (de lo contrario, algún iterado aterrizaría en $D_1(\theta)$).

Lema 6.10. *Supongamos $\kappa(\mathcal{U}) = \bar{0}$. Sean $\theta \in I_2$, y $t_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $R_{\theta}(t_0)$ aterriza en $a_{\ell-1}(\theta)$. Sean $t_1 < t_2 < \dots < t_q$ tal que $\{t_1, \dots, t_q\} = \{3^k t_0 : k \geq 1\}$ y $t_0 \in]t_q, t_1[$. Se tienen las siguientes*

- i)* Para cada i , existe un ángulo racional $s_i \in]t_i, t_{i+1}[$ (donde los subíndices son tomados modulo $q + 1$) tal que s_i es preimagen iterada de t_0 bajo m_3 y el rayo $R_\theta(s_i)$ aterriza en algún $a_{k_i}(\theta)$, con $k_i < \ell - 1$.
- ii)* Los ángulos $\theta \pm 1/3$ pertenecen ambos al mismo intervalo $]t_i, t_{i+1}[$.

Demostración. Probaremos primero el equivalente a *i)* para el polinomio cuadrático Q_c asociado a \mathcal{U} . Consideremos $t^{(0)}$ el ángulo correspondiente a t_0 según la correspondencia de rayos aterrizando en K_0 y $K(Q)$. El punto $z_1 = Q^\ell(0)$ es fijo, y en él aterrizan q rayos $t^{(1)} < \dots < t^{(q)}$, todos en la órbita de $t^{(0)}$, y que los denotamos de manera que $t^{(0)} \in]t^{(q)}, t^{(1)}[$, teniendo así que cada $t^{(i)}$ es el ángulo correspondiente a t_i . Consideremos rayos $R_Q(s)$ y $R_Q(s + 1/2)$ aterrizando en 0 , donde $2^{\ell-1}s = t_0$ (ver Figura 4). La curva $R_Q(s) \cup \{0\} \cup R_Q(s + 1/2)$ divide al plano en dos componentes conexas, una de esas conteniendo a $Q^{\ell-1}(0)$ (y por tanto al rayo $R_Q(t^{(0)})$) y la otra conteniendo a z_1 (y por tanto a los rayos $R_Q(t^{(i)})$ para $i = 1, \dots, q$). Por tanto, uno de los ángulos $s, s + 1/2$ está en el intervalo $]t^{(q)}, t^{(0)}[$, y el otro en el intervalo $]t^{(0)}, t^{(1)}[$. Llamémoslos $s^{(q)}$ y $s^{(0)}$ respectivamente. Luego, el rayo $R_Q(3s)$ aterriza en c , y por [Mil00, Lema 2.8], se tiene que el ángulo $3s$ debe pertenecer al intervalo $]t^{(j)}, t^{(j+1)}[$ de menor largo. Como para cada $i = 1, \dots, q - 1$, el intervalo $]t^{(i)}, t^{(i+1)}[$ es mapeado biyectivamente a $]t^{(i+p)}, t^{(i+1+p)}[$ por m_2 , tenemos que los iterados $3^k s$ deben pasar por cada uno de esos intervalos. Concluimos así que para cada $i = 1, \dots, q - 1$, existe un ángulo $s^{(i)} = 3^{k_i} s$ en el intervalo $]t^{(i)}, t^{(i+1)}[$, de manera que el rayo $R_Q(s^{(i)})$ aterriza en $Q^{k_i}(0)$. Más aún, necesariamente $k_i < \ell - 1$, pues de lo contrario el ángulo $s^{(i)}$ sería igual a algún $t^{(j)}$ (si $k_i = \ell$), o pertenecería a $]t^{(q)}, t^{(0)}[$ (si $k_i = \ell - 1$), pero $s^{(i)} \in]t^{(i)}, t^{(i+1)}[$. Pasando bajo la correspondencia a rayos dinámicos de f_θ , y llamando s_i al ángulo correspondiente a $s^{(i)}$, concluimos *i)*.

Para concluir *ii)*, basta notar que $R_\theta^*(\theta - 1/3) \cup \{-a(\theta)\} \cup R_\theta^*(\theta + 1/3)$ es un conjunto conexo que no interseca a $\Gamma = K_0 \cup \bigcup_{i=0}^q R_\theta(t_i)$, por lo que debe estar contenido en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. De esa forma, los ángulos $\theta - 1/3$ y $\theta + 1/3$ deben estar contenidos en el mismo intervalo $]t_i, t_{i+1}[$. \square

A partir de este lema, seremos capaces de determinar la existencia un θ_0 para el cual alguno de los rayos obtenidos en el lema anterior sean singulares, y desde ahí encontrar la R-conexión buscada.

Corolario 6.11. *Si $\kappa(\mathcal{U}) = \bar{0}$, entonces existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que los rayos $R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$ y $R_{\theta_0}^-(\theta_0 + 1/3)$ son R-conexiones entre $-a(\theta_0)$ y algún $a_k(\theta_0)$, con $k < \ell - 1$ (en particular $a_k(\theta_0) \in D_0(\theta_0)$).*

Demostración. Fijemos $\bar{\theta} \in I_2$ y sean t_n y s_n como en el Lema 6.10. Sea i tal que los ángulos $\bar{\theta} \pm 1/3$ estén en el intervalo $]t_i, t_{i+1}[$, y sea $j < \ell - 1$ tal que $R_{\bar{\theta}}(s_i)$ aterrice en $a_j(\bar{\theta})$. Como $a_j(\bar{\theta}) \in D_0(\bar{\theta})$, entonces $s_i \notin [\bar{\theta} + 1/3, \bar{\theta} - 1/3]$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $t_i < s_i < \bar{\theta} \pm 1/3 < t_{i+1}$. Notemos que se tiene

$$t_i - 1/3 < s_i - 1/3 < \bar{\theta} < \bar{\theta} + 1/3 < t_{i+1} - 1/3. \quad (4)$$

Como para $\theta = s_i - 1/3$ los rayos $R_\theta^\pm(s_i)$ no son suaves, podemos considerar θ_0 máximo entre los $\theta < \bar{\theta}$ cumpliendo esto. De esta manera, para todo $\theta \in]\theta_0, \bar{\theta}[$ el rayo $R_\theta(s_i)$ es suave y

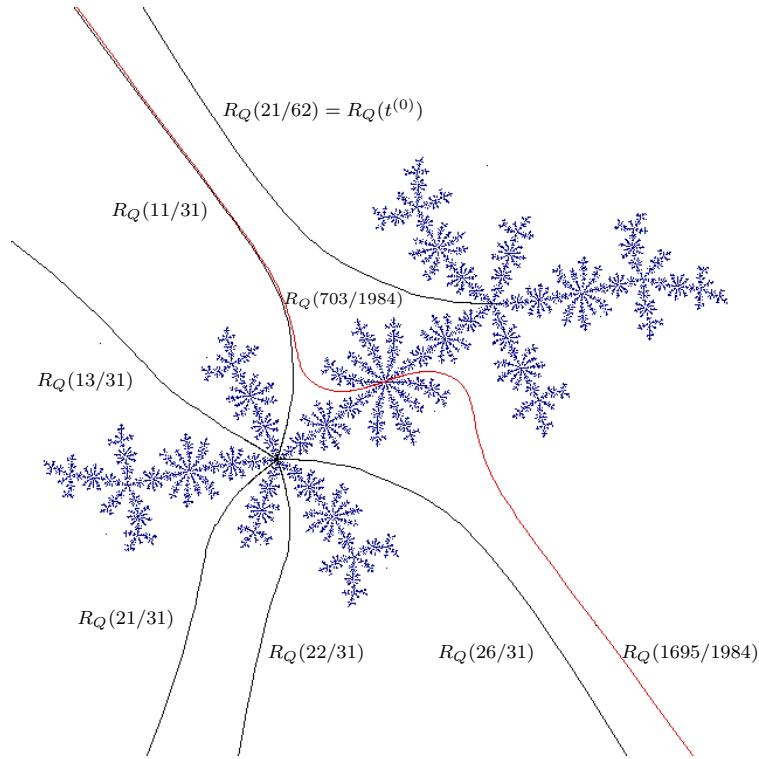


Figura 4: Situación descrita en la demostración del Lema 6.10 en el plano dinámico del polinomio cuadrático $Q(z) = z^2 - 0,5622\dots - 0,6428\dots i$, donde $Q^{(6)}(0)$ es punto fijo con número de rotación $3/5$. Se consideró el parámetro $t^{(0)} = 21/62$ según la notación de la demostración. En rojo, los rayos $R_Q(s)$ y $R_Q(s + 1/2)$.

aterrija en $a_j(\theta)$ (ver Corolario 5.3). Al tender $\theta \rightarrow \theta_0^+$, el rayo $R_\theta(s_i)$ converge a $R_{\theta_0}^-(s_i)$ y aterrija en $a_j(\theta_0)$. Luego, para algún iterado j' se tiene que $3^{j'} s_i = \theta_0 + 1/3$, y el rayo $R_{\theta_0}^-(\theta_0 + 1/3)$ aterrija en $a_k(\theta_0)$, donde $k = j + j'$. Por la desigualdad (4), como $s_i - 1/3 \leq \theta_0 < \bar{\theta}$, concluimos que $\theta_0 + 1/3 \in]t_i, t_{i+1}[$, por lo que $\theta_0 + 1/3 \neq t_n$ para todo n . Como los únicos iterados de $R_{\theta_0}^-(s_1)$ aterrizando en $a_{\ell-1}(\theta_0)$ o $a_\ell(\theta_0)$ son los rayos $R_{\theta_0}^-(t_n)$, concluimos que $k < \ell - 1$. De esta forma, $R_{\theta_0}^-(\theta_0 + 1/3)$ es una de las R-conexiones buscada. Por el Lema 6.5, el rayo $R_{\theta_0}^+(\theta_0 - 1/3)$ también es R-conexión entre $-a(\theta_0)$ y $a_k(\theta_0)$, concluyendo la demostración del corolario. \square

6.4. R-conexión con punto fijo

Finalmente, probaremos la segunda parte del teorema 6.2, a saber, que existe un θ_0 y un rayo fijo que es R-conexión entre $-a(\theta_0)$ y $a_\ell(\theta_0)$. Para eso usaremos el siguiente lema:

Lema 6.12. *Si $\mu_0 > 1$, entonces $R_{2/3}^-(0)$ y $R_{2/3}(1/2)$ aterrizan en puntos distintos.*

Demostración. Sean w_1, w_2 las preimágenes de $-a(2/3)$ en $D_0(2/3)$, numeradas de manera que $w_1 \in R_{2/3}^-(0)$. Consideremos $\Gamma_1 = R_{2/3}^*(1/3) \cup \{-a(2/3)\} \cup R_{2/3}^*(0)$, la preimagen de Γ_1 por $f_{2/3}$ debe contener a w_1 y a w_2 . Luego deben existir preimágenes de $R_{2/3}^*(1/3)$ y $R_{2/3}^*(0)$ terminando o acumulándose en estos puntos. Como $g_f(w_1) = g_f(w_2)$ y los rayos dinámicos siguen las líneas de flujo gradiente de g_f , ningún rayo puede contener a ambas preimágenes. Estudiaremos cuáles preimágenes de estos rayos se acumulan en cada w_i .

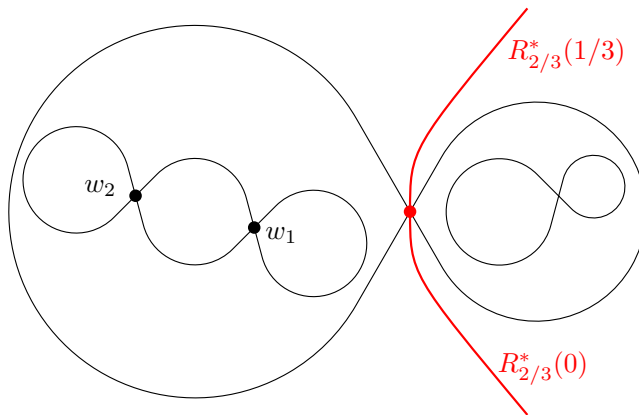


Figura 5: Representación de la curva Γ_1 y las preimágenes w_1, w_2 del punto $-a(2/3)$.

Las preimágenes de $R_{2/3}^*(0)$ corresponden a $R_{2/3}^*(2/3)$ y a los segmentos de los rayos $R_{2/3}^\pm(0)$ y $R_{2/3}^\pm(1/3)$ desde la primera preimagen de $-a(2/3)$ que contengan hacia infinito. Tanto $R_{2/3}^+(0)$ como $R_{2/3}^-(1/3)$ aterrizan en $D_1(2/3)$, mientras que $R_{2/3}^-(0)$ y $R_{2/3}^+(1/3)$ comparten un mismo segmento entre $-a(2/3)$ y w_1 , pues no hay más preimágenes de $-a(2/3)$ contenidas en tal segmento. De esta forma, la única preimagen de $R_{2/3}^*(0)$ que puede estar acumulándose en w_2 es $R_{2/3}^*(2/3)$.

Del mismo modo, las preimágenes de $R_{2/3}^*(1/3)$ son $R_{2/3}^*(1/9)$, $R_{2/3}^*(4/9)$ y $R_{2/3}^*(-2/9)$. El rayo $R_{2/3}^*(1/9)$ termina en $D_1(2/3)$, por lo que debemos determinar cuál otra preimagen de $R_{2/3}^*(1/3)$ termina en w_1 y cuál en w_2 . Veremos que $R_{2/3}^*(4/9)$ no puede terminar en w_1 .

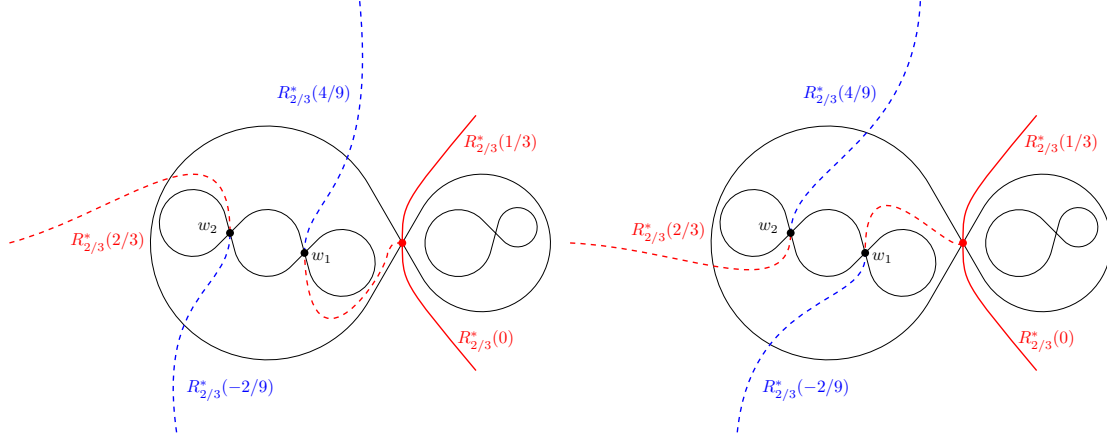


Figura 6: Posibles configuraciones de rayos terminando en w_1 y w_2 . En rojo las preimágenes de $R_{2/3}^*(0)$ y en azul las preimágenes de $R_{2/3}^*(1/3)$.

Si $w_1 \in R_{2/3}^\pm(4/9)$, podemos considerar Γ_2 la curva formada al unir $R_{2/3}^*(4/9)$, $\{w_1\}$ y el segmento de $R_{2/3}^-(0)$ desde w_1 hacia infinito. Esta curva divide al plano en 2 componentes conexas. Los rayos con argumentos en $]1/3, 4/9[$ aterrizan en una de estas componentes, y aquellos con argumentos entre $]2/3, -2/9[$ en la otra. Sin embargo, todos aquellos rayos son mapeados a $D_1(2/3)$, por lo que $L_{2/3}^{(2)}(01)$ tiene dos componentes conexas. Esto ocurre sólo si $2 > \mu_0$, lo que contradice nuestra hipótesis.

De esta forma, $R_{2/3}^*(4/9)$ termina en w_2 . Considerando $\Gamma_3 = \{w_2\} \cup R_{2/3}^*(2/3) \cup R_{2/3}^*(4/9)$, esta curva nuevamente divide al plano en 2 componentes conexas. El rayo $R_{2/3}^-(0)$ aterriza en una de estas mientras que $R_{2/3}(1/2)$ aterriza en la otra, lo que prueba el enunciado. \square

Corolario 6.13. Si $\kappa(U) = 01^{\ell-2}\iota_{\ell-1}\bar{0}$, entonces existe $\theta_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $\theta_0 + 1/3$ es fijo y el rayo $R_{\theta_0}^-(\theta_0 + 1/3)$ es una R -conexión entre $-a(\theta_0)$ y $a_\ell(\theta_0)$

Demostración. Tenemos que en $D_0(\theta)$ existen dos puntos fijos de f_θ , uno de esos $a_\ell(\theta)$. Si $R_{2/3}^-(0)$ aterriza en $a_\ell(2/3)$, entonces $\theta_0 = 2/3$ cumple lo pedido. Si no, por el Lema 6.12, $R_{2/3}(1/2)$ aterriza en $a_\ell(2/3)$. El rayo $R_\theta(1/2)$ es suave para $\theta \in]1/6, 5/6[$, por lo que aterriza en $a_\ell(\theta)$. Luego, si $\theta \searrow 1/6$, entonces $R_\theta(1/2)$ converge a $R_{1/6}^-(1/2)$, que aterrizaría en $a_\ell(1/6)$, y $\theta_0 = 1/6$ cumple lo buscado. \square

De esta forma, hemos completado la demostración del Teorema 6.2

7. Aterrizaje

En esta sección trabajaremos en lo que ocurre cuando nos movemos por un rayo de parámetro con una R -conexión a medida que nos acercamos al locus de conexidad. El objetivo será probar que este rayo aterriza en un mapeo parabólico o postcríticamente finito f_0 que mantiene el itinerario del punto crítico marcado. Para esto, es necesario definir a qué nos referimos con el itinerario para ese polinomio:

Definición 7.1.

- Sea f_0 un mapeo parabólico y $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $R_{f_0}(\theta + 1/3)$ y $R_{f_0}(\theta - 1/3)$ aterrizan en $\partial V_{f_0}(-a(f_0))$ (la componente de Fatou conteniendo a $-a(f_0)$). Sea

$$\Gamma = \overline{R_{f_0}(\theta - 1/3)} \cup V_{f_0}(-a(f_0)) \cup \overline{R_{f_0}(\theta + 1/3)}.$$

Entonces $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ está formada por 2 componentes conexas. Llamémoslas U_0 y U_1 de manera que los rayos con parámetro en $]\theta - 1/3, \theta + 1/3[$ estén contenidos en U_0 .

Definimos el kneading de f_0 con respecto a θ como

$$\kappa(f_0, \theta) := \iota_0 \iota_1, \dots,$$

donde

$$\iota_j := \begin{cases} i, & \text{si } a_j(f_0) \in U_i \\ * & \text{si } a_j(f_0) \in \Gamma. \end{cases}$$

- Sea f_0 un mapeo pcf y $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $R_{f_0}(\theta + 1/3)$ y $R_{f_0}(\theta - 1/3)$ aterrizan en $-a(f_0)$. Sea

$$\Gamma = R_{f_0}(\theta - 1/3) \cup \{-a(f_0)\} \cup R_{f_0}(\theta + 1/3).$$

Entonces $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ está formada por 2 componentes conexas. Llamémoslas U_0 y U_1 de manera que los rayos con parámetro en $]\theta - 1/3, \theta + 1/3[$ estén contenidos en U_0 .

Definimos el kneading de f_0 con respecto a θ como

$$\kappa(f_0, \theta) := \iota_0 \iota_1, \dots,$$

donde

$$\iota_j := \begin{cases} i, & \text{si } a_j(f_0) \in U_i \\ * & \text{si } a_j(f_0) \in \Gamma. \end{cases}$$

Bajo esta definición, durante esta sección buscaremos probar el siguiente teorema:

Teorema 7.2. Sea \mathcal{U} una región de escape con $\kappa(\mathcal{U}) = 0\iota_1\iota_2\dots\iota_{\ell-1}\bar{\iota}_\ell$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ un rayo de parámetro con $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

1. Si para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ existe una R -conexión entre $-a(f)$ y $a_k(f)$, con $k < \ell - 1$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ aterriza en un mapeo pcf f_0 . Más aún, los rayos $R_{f_0}(\theta \pm 1/3)$ aterrizan en $-a(f_0)$, y $\kappa(f_0, \theta) = \iota'_1\iota'_1\iota'_2\dots\iota'_{\ell-1}\bar{\iota}'_\ell$, donde $\iota'_j = \iota_j$ para $j \neq k$ y $\iota'_k = *$.

2. Si $\theta' = \theta + 1/3$ o $\theta' = \theta - 1/3$ es fijo y para $f \in \mathcal{R}_U(\theta)$, uno de los rayos $R_f^+(\theta')$ ó $R_f^-(\theta')$ es una R -conexión entre $-a(f)$ y $a_\ell(f)$, entonces $\mathcal{R}_U(\theta)$ aterriza en un mapeo parabólico f_0 . Más aún, los rayos $R_{f_0}(\theta \pm 1/3)$ aterrizan en $\partial V_{f_0}(-a(f_0))$ y $\kappa(f_0, \theta) = 0\iota_1 \dots \iota_{\ell-2}\iota'_{\ell-1}\iota'_\ell$ para algunos $\iota'_{\ell-1}, \iota'_\ell \in \{0, 1, *\}$.

La demostración de la primera parte del Teorema 7.2 está contenida en §7.2. La demostración del segundo punto está en §7.3. En ambas partes, será útil entender con mayor profundidad cómo se acumulan los rayos dinámicos racionales cuando nos acercamos al locus de conexidad a través de $\mathcal{R}_U(\theta)$, lo que estudiaremos en §7.1.

7.1. Acumulación de rayos racionales

Recordemos la definición de límite superior entregada en la sección 5. Sea $\mathcal{R}_U(\theta)$ un rayo de parámetro con f_0 un punto de acumulación de éste en el locus de conexidad. Para $\sigma \in \{+, -, *\}$, definimos el $\limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^\sigma(t)$ como el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \forall W \text{ vecindad de } z, \forall \mathcal{W} \text{ vecindad de } f_0, \exists f \in \mathcal{W} \cap \mathcal{R}_U(\theta) \text{ tal que } R_f^\sigma(t) \cap W \neq \emptyset\}.$$

Estudiaremos el caso donde los ángulos t y θ son racionales. El siguiente lema, análogo al correspondiente en el caso estudiado por Arfeux y Kiwi ([AK20, Lema 5.3]), nos dice $\mathcal{R}_U(\theta)$ debe aterrizar, y estudia el comportamiento de los límites de los rayos racionales en $J(f_0)$.

Lema 7.3. *Sea $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y $\mathcal{R}_U(\theta)$ un rayo de parámetro. Tenemos que:*

- i) $\mathcal{R}_U(\theta)$ aterriza en un mapeo parabólico o pcf f_0 .
- ii) Si $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es periódico, entonces $J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(t) = \{u_0\}$, donde u_0 es punto de aterrizaje de $R_{f_0}(t)$.
- iii) Si $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es estrictamente preperiódico y $w_0 \in J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(t)$, entonces w_0 es estrictamente preperiódico.
- iv) Si $\theta' = \theta + 1/3$ o $\theta' = \theta - 1/3$ es periódico, entonces f_0 es un mapeo parabólico y el rayo $R_{f_0}(\theta')$ aterriza en un punto parabólico z_0 .

Si bien en el trabajo de Arfeux y Kiwi se enmarca en el contexto de las curvas $\mathcal{S}_{0,p}$, la demostración de las partes ii), iii) y iv) para nuestro caso es completamente análoga. Solo la demostración de i) requiere una pequeña adaptación, por lo que nos remitiremos a probar este punto.

Demostración de i). Sea g un punto de acumulación de $\mathcal{R}_U(\theta)$ en el locus de conexidad. Supongamos que g no es parabólico, luego todos los puntos periódicos en $J(g)$ son repulsores. Como $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, existe $k \geq 0$ tal que $3^k(\theta + 1/3)$ es periódico bajo m_3 , por lo que $R_g(3^k(\theta + 1/3))$ aterriza en un punto periódico repulsor z_0 . Luego, por el Lema 5.4 y el Corolario 5.13, se tiene que para f cerca de g los rayos $R_f(3^k(\theta + 1/3))$ son suaves y $\limsup_{f \rightarrow g} R_f(3^k(\theta + 1/3)) = \{z_0\} \cup R_g(3^k(\theta + 1/3))$.

Ahora bien, para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$, se tiene que $-a(f) \in R_f^{\pm}(\theta + 1/3)$. Luego, si $f \rightarrow g$, obtenemos que $-a(g) \in K(g) \cap \limsup_{f \rightarrow g} R_f^{\pm}(\theta + 1/3)$. Sin embargo, por el Corolario 5.12 y el Lema 5.11, el límite $K(g) \cap \limsup_{f \rightarrow g} R_f^{\pm}(\theta + 1/3)$ es conexo y es mapeado por g^k dentro de $K(g) \cap \limsup_{f \rightarrow g} R_f(3^k(\theta + 1/3)) = \{z_0\}$, por lo que $K(g) \cap \limsup_{f \rightarrow g} R_f^{\pm}(\theta + 1/3)$ es un solo punto. Como el punto de aterrizaje de $R_g(\theta + 1/3)$ pertenece a este conjunto, concluimos que $R_g(\theta + 1/3)$ aterriza en $-a(g)$, que sería preperiódico, concluyendo que g es un mapeo *pcf*.

Así, todo punto de acumulación de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ en el locus de conexidad es parabólico o *pcf*. Como solo hay numerables mapeos parabólicos o *pcf* en $\overline{\mathcal{S}_{\ell,1}}$ y el conjunto de acumulación de este rayo es conexo, concluimos que dicho conjunto se reduce a un punto, es decir, $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ aterriza. \square

7.2. Aterrizaje en mapeos *pcf*

Consideremos ahora el caso donde $3\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no es periódico bajo m_3 . Veremos primero que el polinomio f_0 donde aterriza $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ es *pcf*. Luego, utilizaremos esto para probar el primer punto del Teorema 7.2.

Lema 7.4. *Sea $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que 3θ no es periódico bajo m_3 . Luego $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ aterriza en un mapeo *pcf* f_0 .*

Demostración. Supongamos que f_0 es un mapeo parabólico, con un punto periódico parabólico z_0 . Luego, para algún iterado q se tiene que $f_0^q(z_0) = z_0$ y $(f_0^q)'(z_0) = 1$, por lo que z_0 es un cero con multiplicidad mayor a 1 de $f_0^q(z) - z$. Así para f cerca de f_0 , deben existir $u(f), w(f)$ puntos periódicos de f que convergen a z_0 si $f \rightarrow f_0$. Más aún, para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ necesariamente estos puntos son distintos (de lo contrario tendrían multiplicador 1, y f tendría puntos parabólicos, lo que no ocurre en $\mathcal{E}(\mathcal{S}_{\ell,1})$).

Separaremos la demostración en dos casos: cuando $w(f)$ y $u(f)$ pertenecen a la misma componente conexa de $K(f)$ y cuando no. Veremos que ambos casos llevan a que z_0 es estrictamente preperiódico, lo que es un absurdo, concluyendo, por el Lema 7.3, que f_0 es *pcf*.

En el caso donde $u(f)$ y $w(f)$ pertenecen a componentes distintas de $K(f)$, existe un k para el cual el $D_f^{(k)}(u(f)) \neq D_f^{(k)}(w(f))$ (por ejemplo, ver [BKM10, Lema 3.8]). Podemos encontrar por tanto una preimagen $\xi(f)$ de $-a(f)$ y rayos singulares $R_f^*(s), R_f^*(s')$ terminando en $\xi(f)$, de manera que $u(f)$ y $w(f)$ están en componentes distintas de $R_f^*(s) \cup \{\xi\} \cup R_f^*(s')$. De esta forma, si $f \rightarrow f_0$, como $u(f)$ y $w(f)$ convergen al mismo punto, entonces z_0 debe pertenecer a $J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(s)$ o $J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(s')$. Como un iterado de s y s' es $\theta \pm 1/3$ y 3θ no es periódico, s y s' son estrictamente preperiódicos y por el Lema 7.3, z_0 es estrictamente preperiódico. Esto genera contradicción.

En el caso donde $w(f)$ y $u(f)$ pertenecen a la misma componente K de $K(f)$, tenemos que K no es un punto. Luego, por [BH92, Teoremas 5.2 y 5.3], la componente conexa K_0 de K_f conteniendo al punto crítico $a_0(f)$ es periódica, y K es eventualmente mapeada a K_0 . Como $a_0(f)$ es prefijo, tenemos que K_0 es fija y $\kappa(\mathcal{U}) = \bar{0}$. Como K es periódica pero es mapeada eventualmente a K_0 que es fija, entonces $K = K_0$. Deducimos que f cerca de K es híbridamente equivalente a un polinomio

cuadrático $Q(z) = z^2 + c$, cuyo punto crítico 0 es un punto eventualmente fijo. Consideremos rayos $R_Q(s)$, $R_Q(s+1/2)$ aterrizando en 0. Dados puntos $u' \neq w'$ distintos a 0 en K_Q , [BFH92, Teorema I] nos asegura la existencia de $n \geq 0$ y ángulos t_1 y t_2 tal que $R_Q(t_1)$ aterriza en u' , $R_Q(t_2)$ aterriza en w' , y los ángulos $2^n t_1$, $2^n t_2$ están en componentes distintas de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus \{s, s+1/2\}$. Luego, $Q^n(u')$ y $Q^n(w')$ están en componentes conexas distintas de $\mathbb{C} \setminus (R_Q(s) \cup \{0\} \cup R_Q(s+1/2))$. Así, por [PZ19, Teoremas A y B], encontramos rayos (suaves o singulares) $R_f^\sigma(t)$, $R_f^{\sigma'}(t+1/3)$ aterrizando en $a_0(f)$, tal que $f^n(u(f))$ y $f^n(w(f))$ están en componentes distintas de $\mathbb{C} \setminus (R_f^\sigma(t) \cup \{a_0(f)\} \cup R_f^{\sigma'}(t+1/3))$. Tendiendo $f \rightarrow f_0$, tenemos que $f^n(z_0) \in J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^\sigma(t)$ o $f^n(z_0) \in J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^{\sigma'}(t+1/3)$. Para algún iterado $k \geq 1$, el rayo $R_f(3^k t)$ es suave y estrictamente preperiódico: si los rayos ya eran suave, tomar $k = 1$, y es estrictamente preperiódico pues aterriza en $a_1(f) \neq a_\ell(f)$; de lo contrario, para algún $k \geq 1$, $3^k t = 3\theta$ que no es periódico, y por tanto $R_f(3^k t)$ es suave y estrictamente preperiódico. Como

$$f^k(J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^\sigma(t)) \subseteq J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f(3^k t)$$

y

$$f^k(J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^{\sigma'}(t+1/3)) \subseteq J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f(3^k t),$$

concluimos que $f^{n+k}(z_0) \in J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f(3^k t)$. Por el Lema 7.3, $f^{n+k}(z_0)$ es estrictamente preperiódico, y por tanto también z_0 . Esto contradice que z_0 sea un punto periódico parabólico. \square

Corolario 7.5. *Sea \mathcal{U} una región de escape con $\kappa(\mathcal{U}) = \iota_1 \iota_2 \dots \iota_{\ell-1} \bar{\iota}_\ell$, y sea $\mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ un rayo de parámetro con argumento racional. Si para $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ existe una R -conexión entre $-a(f)$ y $a_k(f)$, con $k < \ell - 1$, entonces $\mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ aterriza en un mapeo pcf f_0 . Más aún, los rayos $R_{f_0}(\theta \pm 1/3)$ aterrizan en $-a(f_0)$ y $\kappa(f_0, \theta) = \iota'_0 \iota'_1 \iota'_2 \dots \iota'_{\ell-1} \bar{\iota}'_\ell$, donde $\iota'_j = \iota_j$ para $j \neq k$ y $\iota'_k = *$.*

Demostración. Como $k < \ell - 1$ y para $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ al menos uno de los rayos $R_f^\mp(\theta \pm 1/3)$ aterriza en $a_k(f)$, entonces $R_f(3\theta)$ aterriza en $a_{k+1}(f) \neq a_\ell(f)$ y por tanto 3θ no es periódico. Usando el lema anterior, $\mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ aterriza en un mapeo pcf f_0 . Además, por el Lema 6.5, para $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ los rayos $R_f^+(\theta - 1/3)$ y $R_f^-(\theta + 1/3)$ aterrizan ambos en el mismo punto, en este caso $a_k(f)$.

Sea $q \geq 2$ tal que $t = 3^q \theta$ sea periódico (de manera que para $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ el rayo $R_f(t)$ aterriza en $a_\ell(f)$), y consideremos w el punto periódico donde aterriza $R_{f_0}(t)$. Como f_0 es pcf, entonces w es repulsor. Por el Lema 6.6 y el Corolario 5.13, para f cerca de f_0 el rayo $R_f(t)$ es suave y converge a $R_{f_0}(t)$ cuando $f \rightarrow f_0$. Pero como para $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$ el rayo $R_f(t)$ aterriza en $a_\ell(f)$, se tiene que $w = a_\ell(f_0)$ y $K(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f(t) = \{a_\ell(f_0)\}$.

Para cada $j < \ell - 1$, consideremos t_j una preimagen iterada de t tal que para todo $f \in \mathcal{R}_\mathcal{U}(\theta)$, uno de los rayos $R_f^\pm(t_j)$ aterriza en $a_j(f)$, pudiendo escoger $t_k = \theta + 1/3$ o $t_k = \theta - 1/3$. En orden de probar que $\iota_j = \iota'_j$ para $j \neq k$ y $\iota_k = *$, probaremos que $R_{f_0}(t_j)$ aterriza en $a_j(f_0)$. El argumento que se usará es análogo al usado en la demostración del Lema 7.3. Como para $\sigma = +$ o $\sigma = -$, el rayo $R_f^\sigma(t_j)$ aterriza en $a_j(f)$, entonces $a_j(f_0) \in K(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^\sigma(t_j)$. Sin embargo, por el Corolario 5.12 y el Lema 5.11, el limite $\limsup_{f \rightarrow f_0} K(f_0) \cap R_f^\sigma(t_j)$ es un conjunto conexo que

es mapeado por $f_0^{\ell-j}$ a $K(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f(t) = \{a_\ell(f_0)\}$, por lo que corresponde a un sólo punto.

De esta forma, $a_j(f_0)$ es punto de aterrizaje de $R_{f_0}(t_j)$, que es lo que buscábamos. Más aún, para $j = k$, el mismo argumento conduce a que $-a(f_0) \in K(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^\sigma(\theta \pm 1/3) = \{a_k(f_0)\}$, por lo que $-a(f_0) = a_k(f_0)$ y los rayos $R_{f_0}(\theta \pm 1/3)$ aterrizan en $-a(f_0)$.

Con esto, tenemos que se puede definir $\kappa(f_0, \theta)$, y más aún, si $\kappa(f_0, \theta) = \iota'_0 \iota'_1 \iota'_2 \dots \iota'_{\ell-1} \overline{\iota'_\ell}$, se obtiene que $\iota'_k = *$, mientras que para $j \neq k$, tanto ι_j como ι'_j toman el valor de 0 o 1 de acuerdo a si $t_j \in]\theta - 1/3, \theta + 1/3[$ o $t_j \in]\theta + 1/3, \theta - 1/3[$ respectivamente, deduciendo que $\iota'_j = \iota_j$. \square

7.3. Aterrizaje en parabólico

Enfoquémonos ahora en el segundo caso, a saber, cuando $\theta + 1/3$ o $\theta - 1/3$ es fijo. En este caso, tenemos ya que el punto de aterrizaje f_0 del rayo $\mathcal{R}_U(\theta)$ es un mapeo parabólico. Por tanto, durante esta sección estudiaremos el límite de los rayos $R_f(\theta \pm 1/3)$ y sus preimágenes. Los resultados principales están en el siguiente lema:

Lema 7.6. *Sea $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $\theta' = \theta + 1/3$ o $\theta' = \theta - 1/3$ es fijo y $\mathcal{R}_U(\theta)$ un rayo de parámetro tal que para todo $f \in \mathcal{R}_U(\theta)$ existe una R -conexión entre $-a(f)$ y $a_\ell(f)$. Sea f_0 el mapeo parabólico donde aterriza $\mathcal{R}_U(\theta)$. Entonces:*

- i) $R_{f_0}(\theta')$ aterriza en un punto fijo parabólico $z_0 \in \partial V_{f_0}(-a(f_0))$.
- ii) Si $\theta'' \in \{\theta + 1/3, \theta - 1/3\}$ no es fijo, entonces $R_{f_0}(\theta'')$ aterriza en un punto prefijo $w_0 \in \partial V_{f_0}(-a(f_0))$.
- iii) $R_{f_0}(\theta)$ no aterriza en $\partial V_{f_0}(-a(f_0))$.

Demostración. Sabemos por el Lema 7.3 que $R_{f_0}(\theta')$ aterriza en un punto fijo parabólico z_0 . Ahora bien, dado que $-a(f) \in \overline{R_f^*(\theta')}$ para todo $f \in \mathcal{R}_U(\theta)$, entonces $-a(f_0) \in \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(\theta')$. Como $\limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(\theta')$ es conexo, entonces debe contener un elemento en $\partial V_{f_0}(-a(f_0))$, pero sabemos por Lema 7.3 que $\limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(\theta') \cap J(f_0) = \{z_0\}$. Por tanto $z_0 \in \partial(V_{f_0}(-a(f_0)))$. Con esto probamos i).

De forma análoga a la anterior, $-a(f_0) \in \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(\theta'')$, que es conexo, por lo que $\limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(\theta'')$ debe intersectar a $\partial V_{f_0}(-a(f_0))$. Consideremos w_0 en esta intersección. Por el Lema 7.3, $w_0 \neq z_0$, pero

$$f_0(w_0) \in J(f_0) \cap f_0(\limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(\theta'')) \subseteq J(f_0) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(\theta') = \{z_0\},$$

por lo que $f_0(w_0) = z_0$. Sin embargo, como $V_{f_0}(-a(f_0))$ contiene un solo punto crítico, f_0 es 2-1 en esta componente. Como la frontera de $V_{f_0}(-a(f_0))$ es una curva de Jordan (por ejemplo, ver [RY08, Teorema 1]), entonces la extensión continua de f_0 en esta frontera es 2-1. Así, w_0 y z_0 son las únicas preimágenes de z_0 bajo f_0 en $\partial V_{f_0}(-a(f_0))$. Concluimos por lo tanto que

$$\partial V_{f_0}(-a(f_0)) \cap \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(\theta'') = \{w_0\}.$$

Para poder demostrar *ii*), probaremos que no existen más componentes acotadas de Fatou que contengan a w_0 en su frontera.

Veremos primero que no existe componente acotada de Fatou distinta a $V_{f_0}(-a(f_0))$ que contenga a z_0 en su frontera. Como z_0 es punto fijo, para toda componente acotada de Fatou P se tiene que si $z_0 \in \partial P$, entonces $z_0 \in \partial f_0(P)$. Además, dado que $R_{f_0}(\theta'')$ es fijo y aterriza en z_0 , por el Lema del Caracol se tiene que $f_0'(z_0) = 1$ (e.g. [GM93, Lema 16.3]), y $V_{f_0}(-a(f_0))$ es fija (ver [Mil06, Teorema 10.15]). Más aún, como $a(f_0)$ tiene órbita finita y $-a(f_0)$ es atraído por z_0 , no existen otros puntos periódicos parabólicos o atractores. Del mismo modo, cualquier disco de Siegel tiene su frontera contenida en la clausura de la órbita de los puntos críticos de f_0 (por ejemplo, [Mil06, Teorema 11.17]). Pero como ésta órbita es numerable, tampoco pueden existir discos de Siegel en $K(f_0)$. Por tanto, por la clasificación de componentes de Fatou periódicas (ver [Mil06, Teorema 16.1]), concluimos que $V_{f_0}(-a(f_0))$ es la única componente acotada de Fatou periódica. Más aún, por el Teorema del Dominio no Errante (Teorema B), toda componente acotada de Fatou P es eventualmente mapeada a $V_{f_0}(-a(f_0))$. Probaremos entonces que si $P \neq V_{f_0}(-a(f_0))$ es una componente acotada de Fatou tal que $z_0 \in \partial P$, entonces $f_0(P) \neq V_{f_0}(-a(f_0))$, lo que generará contradicción.

Sea $P \neq V_{f_0}(-a(f_0))$ es componente acotada de Fatou tal que $z_0 \in \partial P$. Para simplificar notación, llamaremos $V = V_{f_0}(-a(f_0))$. Como z_0 no es punto crítico, existen vecindades U y W de z_0 tal que $f_0|_U : U \rightarrow W$ es invertible. La frontera ∂V es una curva de Jordan (por ejemplo, revisar [RY08, Teorema 1]). Por tanto, podemos restringir W a un disco topológico suficientemente pequeño de manera que $W \cap V$ sea conexo. Luego, $(f_0|_U)^{-1}(W \cap V)$ debe ser conexo, y como todo punto en $U \cap V$ es mapeado a $W \cap V$, entonces $(f_0|_U)^{-1}(W \cap V) \subset V$. Así, ningún punto en $U \cap P$ es mapeado a $W \cap V$, y por tanto P no es mapeado a V . Como mencionamos anteriormente, esto es una contradicción.

Concluimos que la única componente acotada de Fatou que contiene a z_0 en su frontera es $V_{f_0}(-a(f_0))$. Finalmente, como w_0 no es crítico, entonces f_0 es localmente invertible cerca de w_0 , de manera que la única componente acotada del conjunto de Fatou que contiene a w_0 en su frontera es también $V_{f_0}(-a(f_0))$. De esta forma, el rayo $R_{f_0}(\theta'')$ aterriza en w_0 , con lo que probamos *iii*).

Finalmente, para probar *iii*), como $3\theta = \theta'$, entonces $R_{f_0}(\theta)$ debe aterrizar en una preimagen de z_0 . Ahora bien, solo existen dos preimágenes de z_0 en $\partial V_{f_0}(-a(f_0))$, por lo que existe preimagen z de z_0 tal que $z \notin \partial V_{f_0}(-a(f_0))$. Una preimagen del rayo $R_{f_0}(\theta')$ aterriza en este punto, pero $R_{f_0}(\theta')$ y $R_{f_0}(\theta'')$ aterrizan en z_0 y w_0 respectivamente, por lo que $R_{f_0}(\theta)$ aterriza en $z \notin \partial V_{f_0}(-a(f_0))$. Con esto concluimos la demostración de *iii*) y del lema. \square

Emplearemos ahora el lema anterior para probar la segunda parte del Teorema 7.2.

Corolario 7.7. *Sea $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y \mathcal{U} una región de escape con $\kappa(\mathcal{U}) = 0\nu_1\nu_2 \dots \nu_{\ell-1}\bar{\nu}_\ell$. Si $\theta' = \theta + 1/3$ o $\theta' = \theta - 1/3$ es fijo, y para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ el rayo $R_f^c(\theta')$ es R -conexión entre $-a(f)$ y $a_\ell(f)$, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ aterriza en un mapeo parabólico f_0 . Más aún, los rayos $R_{f_0}(\theta \pm 1/3)$ aterrizan en $\partial V_{f_0}(-a(f_0))$ y $\kappa(f_0, \theta) = 0\nu_1 \dots \nu_{\ell-2}\nu'_{\ell-1}\bar{\nu}'_\ell$ para algunos $\nu'_{\ell-1}, \nu'_\ell \in \{0, 1, *\}$.*

Demostración. Por el Lema 7.3, tenemos ya que $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ aterriza en un mapeo parabólico f_0 , y por el Lema 7.6 sabemos que los rayos $R_{f_0}(\theta + 1/3)$ y $R_{f_0}(\theta - 1/3)$ aterrizan en $\partial V_{f_0}(-a(f_0))$. Luego podemos considerar el *kneading* de f_0 con respecto a θ , $\kappa(f_0, \theta) = \nu'_0\nu'_1\nu'_2 \dots$. Sea $j < \ell - 1$.

Como $f_0(a_j(f_0)) = a_{j+1}(f_0)$ no es un punto fijo, entonces $a_j(f_0)$ no es el punto de aterrizaje de $R_{f_0}(\theta \pm 1/3)$. Luego $\iota'_j \neq *$. Supongamos que $\iota'_j = 0$, probaremos que $\iota_j = 0$. Como $a_j(f_0)$ es un punto eventualmente fijo y $K(f_0)$ es conexo, existe $t \in]\theta - 1/3, \theta + 1/3[$ racional tal que $R_{f_0}(t)$ aterriza en $a_j(f_0)$ (e.g. Teorema E). Como $a_j(f_0) \notin \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(\theta \pm 1/3)$, existen vecindades \mathcal{W} de f_0 y W de $a_j(f_0)$ tales que $R_f^*(\theta \pm 1/3) \cap W = \emptyset$ para todo $f \in \mathcal{W} \cap \mathcal{R}_U(\theta)$. Sea $\mathbb{D}_\varepsilon(a_j(f_0))$ un disco cuya clausura esté contenida en W . Restringamos \mathcal{W} a una vecindad \mathcal{W}' suficientemente pequeña tal que si $f \in \mathcal{W}'$, entonces $a_j(f) \in \mathbb{D}_\varepsilon(a_j(f_0))$. Como $a_j(f_0) \in \overline{R_{f_0}(t)} \subseteq \limsup_{f \rightarrow f_0} R_f^*(t)$, entonces existe $f \in \mathcal{W}' \cap \mathcal{R}_U(\theta)$ y $z \in R_f^*(t)$ tal que $z \in \mathbb{D}_\varepsilon(a_j(f_0))$. De esta manera, como $\mathbb{D}_\varepsilon(a_j(f_0))$ es un conjunto conexo que no interseca a $R_f^*(\theta + 1/3) \cup \{-a(f)\} \cup R_f^*(\theta - 1/3)$, entonces $\mathbb{D}_\varepsilon(a_j(f_0)) \subseteq D_0(f)$ o $\mathbb{D}_\varepsilon(a_j(f_0)) \subseteq D_1(f)$, pero como $\mathbb{D}_\varepsilon(a_j(f_0)) \cap R_f^*(t) \neq \emptyset$ y $t \in]\theta - 1/3, \theta + 1/3[$, entonces $\mathbb{D}_\varepsilon(a_j(f_0)) \subseteq D_0(f)$. Como $a_j(f) \in \mathbb{D}_\varepsilon(a_j(f_0))$, entonces $a_j(f) \in D_0(f)$ y así $\iota_j = 0$.

El caso $\iota'_j = 1$ es análogo, tomando $t \in]\theta + 1/3, \theta - 1/3[$. De esta forma, $\iota_j = \iota'_j$ para $j < \ell - 1$, por lo que $\kappa(f_0, \theta) = 0\iota_1 \dots \iota_{\ell-2}, \iota'_{\ell-1} \overline{\iota'_\ell}$. □

8. Transitando entre regiones

Hemos trabajado hasta ahora con aproximarnos al locus de conexidad desde rayos de parámetros en regiones de escapes. En esta sección probaremos que podemos transitar a través de los puntos de aterrizaje hacia una nueva región de escape, generando un cambio conveniente en sus *kneading*. Los resultados principales de esta sección son los teoremas 8.3, 8.4 y 8.5. Estos tratarán los casos cuando aterrizamos en el locus de conexidad desde un rayo con R-conexión con $a_k(f)$ para $0 < k < \ell$, $k = 0$ y $k = \ell$ respectivamente.

Durante esta sección, tendremos fijos \mathcal{U} una región de escape, $k \in \{0, 1, \dots, \ell - 2\} \cup \{\ell\}$, $\theta_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$, tal que para f en este rayo exista una R-conexión entre $-a(f)$ y $a_k(f) \in D_0(f)$. Para el caso $k = \ell$, asumiremos que $\theta'_0 = \theta_0 + 1/3$ o $\theta'_0 = \theta_0 - 1/3$ es fijo, y por tanto para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$, uno de los rayos $R_f^{\pm}(\theta'_0)$ es R-conexión entre $-a(f)$ y $a_{\ell}(f)$. Llamaremos f_0 al punto de aterrizaje de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$. Estudiaremos el comportamiento de los rayos dinámicos con argumentos θ_0 , $\theta_0 + 1/3$ y $\theta_0 - 1/3$ cerca de f_0 .

Lema 8.1. *Existe una vecindad \mathcal{V} de f_0 , copia de un abierto de \mathbb{C} , tal que:*

- i) *Cualquier rayo de parámetro con argumento θ_0 , $\theta_0 + 1/3$ y $\theta_0 - 1/3$ que interseque a \mathcal{V} , aterriza en f_0 .*
- ii) *Si $0 \leq k < \ell - 1$, entonces para $f \in \mathcal{V}$ el rayo $R_f(3\theta_0)$ es suave y aterriza en $a_{k+1}(f)$.*
- iii) *Si $0 < k < \ell - 1$, entonces para $f \in \mathcal{V}$ el rayo $R_f(\theta_0)$ es suave y no aterriza en $a_k(f)$.*

Demostración. Probaremos que podemos encontrar vecindades de f_0 cumpliendo cada punto pedido. Intersecándolas, y restringiéndolas para tener una copia de un abierto de \mathbb{C} , tendremos la vecindad \mathcal{V} pedida.

Dado que hay finitas regiones de escape (Lema 4.3), y en cada una existen finitos rayos de parámetro con argumento θ_0 , $\theta_0 + 1/3$ y $\theta_0 - 1/3$, si estos no aterrizan en f_0 podemos encontrar una vecindad suficientemente pequeña de f_0 que no los interseque.

Por otro lado, por lo probado en el Corolario 7.5 si $1 \leq k < \ell - 1$ entonces el rayo $R_{f_0}(3\theta_0)$ aterriza en $a_{k+1}(f_0)$. Como este punto es prefijo repulsor y no tiene puntos críticos en su órbita, entonces para f cerca de f_0 el rayo $R_f(3\theta_0)$ es suave y aterriza en $a_{k+1}(f)$ (pues es el punto prefijo repulsor que converge a $a_{k+1}(f_0)$ cuando $f \rightarrow f_0$).

Finalmente, si $1 < k < \ell - 1$, entonces nuevamente por el 7.5, los rayos $R_{f_0}(\theta_0 \pm 1/3)$ aterrizan en $a_k(f_0) = -a(f_0)$. Luego, el rayo $R_{f_0}(\theta_0)$ debe aterrizar en $2a(f_0) \neq a_k(f_0)$. Así, como este punto es prefijo repulsor y tiene órbita libre de puntos críticos, entonces existe vecindad suficientemente pequeña de f_0 tal que el rayo $R_f(\theta_0)$ es suave y aterriza en un punto prefijo repulsor que converge a $2a(f_0)$ cuando $f \rightarrow f_0$. Este punto donde aterriza no puede ser $a_k(f)$, pues $a_k(f)$ converge a $a_k(f_0) \neq 2a(f_0)$. \square

De ahora en adelante, denotaremos \mathcal{V}_0 a alguna vecindad cumpliendo con lo pedido en el lema anterior. Como $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{U}$ es abierto, podemos encontrar $0 < \varepsilon < 1/3$ suficientemente pequeño tal que para todo $\theta \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]$, exista un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ suficientemente cerca del rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ intersectando a $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{U}$.

Si $k < \ell - 1$, entonces consideremos $g_0 \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0 + \varepsilon) \cap \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{U}$, y definamos S_0 componente conexa de \mathcal{V}_0 sin los rayos de parámetro con ángulos θ_0 y $\theta_0 \pm 1/3$ (en cualquier región de escape), conteniendo a g_0 .

Si $k = \ell$ y $\theta'_0 = \theta_0 + 1/3$, entonces consideremos $g_0 \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0 + \varepsilon) \cap \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{U}$. Si $\theta'_0 = \theta_0 - 1/3$, entonces consideremos $g_0 \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0 - \varepsilon) \cap \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{U}$. En ambos casos, llamemos S_0 componente conexa de \mathcal{V}_0 sin los rayos de parámetro con ángulos $\theta'_0 \pm 1/3$, conteniendo a g_0 .

De esta manera, siempre tenemos que S_0 está contenida entre el rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ y algún otro rayo de parámetro (en \mathcal{U} o en otra región de escape), pudiendo este ser el mismo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$. El siguiente lema nos indica cómo se comportan los rayos involucrados dentro de S_0 .

Lema 8.2. *Sea S_0 definida como en el párrafo anterior. Se tienen las siguientes:*

- i) Si $0 \leq k < \ell - 1$, entonces para todo $f \in S_0$, el rayo $R_f(\theta_0 + 1/3)$ es suave y aterriza en $a_k(f)$*
- ii) Si $k = 0$, entonces para todo $f \in S_0$, el rayo $R_f(\theta_0)$ es suave y aterriza en $a_0(f)$.*
- iii) Si $k = \ell$, entonces para todo $f \in S_0$, el rayo $R_f(\theta'_0)$ es suave y aterriza en $a_\ell(f)$*

Demostración. Partamos primero viendo el caso $k < \ell - 1$. Por la definición de \mathcal{V}_0 y el Lema 8.1, para $f \in \mathcal{V}_0$ el rayo $R_f(3\theta_0)$ es suave. Por tanto, los rayos $R_f(\theta_0)$ y $R_f(\theta_0 \pm 1/3)$ son suaves salvo cuando f está en un rayo de parámetro con argumento θ_0 o $\theta_0 \pm 1/3$. Como S_0 está libre de tales rayos, entonces para todo $f \in S_0$ los rayos $R_f(\theta_0)$ y $R_f(\theta_0 \pm 1/3)$ son suaves, y por tanto el punto donde aterrizan depende suavemente de f .

Como para $f \in \mathcal{V}_0$, el rayo $R_f(3\theta_0)$ aterriza en $a_{k+1}(f)$, entonces debe haber una o dos preimágenes de este rayo aterrizando en $a_k(f)$ (dependiendo si $k > 0$ o $k = 0$, respectivamente). Como estos rayos son suaves, el o los rayos que aterrizan en $a_k(f)$ se mantienen a lo largo de S_0 . Por tanto, basta ver dónde aterrizan los rayos $R_{g_0}(\theta_0)$ y $R_{g_0}(\theta_0 \pm 1/3)$, con $g_0 \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0 + \varepsilon) \cap S_0$. Tenemos que $\theta_0 - 1/3 \in](\theta_0 + \varepsilon) + 1/3, (\theta_0 + \varepsilon) - 1/3[$, por lo que el rayo $R_{g_0}(\theta_0 - 1/3)$ aterriza en $D_1(g_0)$. Como $g_0 \in \mathcal{U}$, sabemos que $a_k(g_0) \in D_0(g_0)$, por lo que en este punto puede aterrizar $R_{g_0}(\theta_0 + 1/3)$ y $R_{g_0}(\theta_0)$. Para el caso $k = 0$, ambos deben aterrizar en $a_0(g_0)$, habiendo probado tanto *ii*), como el caso de *i*) donde $k = 0$. Para el caso $0 < k < \ell - 1$, por definición de \mathcal{V}_0 y el Lema 8.1, el rayo $R_{g_0}(\theta_0)$ no aterriza en $a_k(g_0)$. Por tanto el rayo $R_{g_0}(\theta_0 + 1/3)$ aterriza en $a_k(g_0)$, habiendo terminado de demostrar *i*).

Para el caso $k = \ell$, asumiremos $\theta'_0 = \theta_0 + 1/3$, pues el otro caso es análogo. Tenemos que el rayo $R_f(\theta'_0)$ es fijo, por lo que es suave salvo en los rayos de parámetro con argumentos $\theta'_0 \pm 1/3$, que no intersecan S_0 . Es decir, para todo $f \in S_0$, el rayo $R_f(\theta'_0)$ es suave, y por tanto el punto donde aterriza depende suavemente de f . Ahora bien, llamemos $z(f)$ el punto fijo en $D_0(f)$ distinto a $a_\ell(f)$. Como $\theta'_0 = \theta_0 + 1/3 \in](\theta_0 + \varepsilon) - 1/3, (\theta_0 + \varepsilon) + 1/3[$, entonces el rayo $R_{g_0}(\theta'_0)$ debe aterrizar en $z(g_0)$ o $a_\ell(g_0)$, y por consiguiente todo para todo $f \in S_0$ el correspondiente rayo aterriza en $z(f)$ o $a_\ell(f)$. Sin embargo, como S_0 contiene rayos suficientemente cerca de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ con parámetros en $]\theta_0, \theta_0 + \varepsilon[$, podemos considerar $\tilde{f} \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0) \cap \mathcal{V}_0$ y una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n \in \mathcal{U} \cap S_0$, f_n está en un rayo de parámetro θ_n con $\theta_n \rightarrow \theta_0^+$, y $f_n \rightarrow \tilde{f}$. Si los rayos $R_{f_n}(\theta'_0)$ aterrizan en $z(f_n)$, entonces al tender $f_n \rightarrow \tilde{f}$ estos rayos se aproximan a $R_{\tilde{f}}^-(\theta'_0)$, que debiese aterrizar en $z(\tilde{f})$. Pero como $\tilde{f} \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$, entonces el rayo $R_{\tilde{f}}^-(\theta'_0)$ es R-conexión con $a_\ell(\tilde{f})$, lo que contradice lo anterior.

Así, necesariamente los rayos $R_{f_n}(\theta'_0)$ aterrizaban en $a_\ell(f_n)$ y por consiguiente para todo $f \in S_0$, el rayo $R_f(\theta'_0)$ aterrizaba en $a_\ell(f)$, terminando la demostración de *iii*) y del lema. \square

Finalmente, estudiaremos en cada caso el *kneading* de la región donde vive el otro rayo donde limita S_0 , con lo que podremos probar los teoremas principales de esta sección. El primero de estos dice relación con el caso donde existe una R-conexión con algún $a_k(f)$, donde $1 < k < \ell - 1$.

Teorema 8.3. *Sea \mathcal{U} una región de escape y $\theta_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Supongamos que para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ existe una R-conexión entre $-a(f)$ y $a_k(f) \in D_0(f)$, con $1 < k < \ell - 1$. Sea f_0 el mapeo pcf donde aterriza $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$. Luego, existen una región de escape \mathcal{U}' y un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0)$ aterrizando en f_0 tal que si*

$$\kappa(\mathcal{U}) = 0\iota_1 \dots \iota_{k-1} 0 \iota_{k+1} \dots,$$

entonces

$$\kappa(\mathcal{U}') = 0\iota_1 \dots \iota_{k-1} 1 \iota_{k+1} \dots$$

En particular, si $a_k(f)$ tiene tiempo de retorno maximal, entonces $\kappa(\mathcal{U}')$ se obtiene de $\kappa(\mathcal{U})$ con un movimiento de tipo B.

Demostración. Sean \mathcal{V}_0 y S_0 como fueron definidas anteriormente. Como para $f \in \mathcal{V}_0$ el rayo $R_f(\theta_0)$ es suave, no existen rayos de parámetro con argumentos $\theta_0 \pm 1/3$ en \mathcal{V}_0 . Luego, S_0 se encuentra comprendida entre $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ y un rayo de parámetro $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0)$ en una región \mathcal{U}' . Probaremos que esta región \mathcal{U}' es la región buscada. Por el Lema 8.2, para $f \in S_0$, el rayo $R_f(\theta_0 + 1/3)$ aterriza en $a_k(\theta_0)$. Siguiendo el orden cíclico en \mathcal{V}_0 , podemos encontrar $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que para todo $\theta \in [\theta_0 - \delta, \theta_0]$, existe un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta)$ cerca de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0)$ intersecando a S_0 . Para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0 - \delta) \cap S_0$, tenemos que $\theta_0 + 1/3 \in]\theta_0 + 1/3 - \delta, \theta_0 - 1/3 - \delta[$, por lo que $R_f(\theta_0 + 1/3)$ aterriza en $D_1(f)$ y así $a_k(f) \in D_1(f)$. De esta forma, si $\kappa(\mathcal{U}') = 0\iota'_1 \iota'_2 \dots \iota'_{\ell-1} \overline{\iota'_\ell}$, entonces $\iota'_k = 1$.

Finalmente, si tomamos $\tilde{f} \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0) \cap \mathcal{V}_0$ y una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n \in \mathcal{U}' \cap S_0$, f_n está en un rayo de parámetro θ_n con $\theta_n \rightarrow \theta_0^-$, y $f_n \rightarrow \tilde{f}$, entonces tenemos que $R_{f_n}(\theta_0 + 1/3)$ converge a $R_{\tilde{f}}^+(\theta_0 + 1/3)$, y sigue aterrizando en $a_k(\tilde{f})$. De esta forma existe $\tilde{f} \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0)$ tal que se tiene una R-conexión entre $-a(\tilde{f})$ y $a_k(\tilde{f})$. Como el rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0)$ aterriza en f_0 , por el Teorema 7.2, se tiene que $\kappa(f_0, \theta_0) = 0\iota'_1 \dots \iota'_{k-1} * \iota'_{k+1} \dots$. Pero como $\kappa(f_0, \theta_0) = 0\iota_1 \dots \iota_{k-1} * \iota_{k+1} \dots$, concluimos que para $j \neq k$, $\iota'_j = \iota_j$, completando la demostración. \square

El segundo de los teoremas de esta sección se refiere al caso donde existe una R-conexión con el punto crítico $a_0(f)$:

Teorema 8.4. *Sea \mathcal{U} una región de escape con $\kappa(\mathcal{U}) = 0\iota_1 \iota_2 \dots \iota_{\ell-1} \overline{\iota_\ell}$ y $\theta_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Supongamos que para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ existe una R-conexión entre $-a(f)$ y $a_0(f)$. Sea f_0 el mapeo pcf donde aterriza $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$. Dado $m > 0$ con $\iota_m = 0$, existen regiones de escape $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$ y rayos $\mathcal{R}_{\mathcal{U}_0}(\vartheta_0), \mathcal{R}_{\mathcal{U}_1}(\vartheta_1)$ aterrizando en f_0 tal que*

$$\kappa(\mathcal{U}_i) = 0\iota_1^{(i)} \iota_2^{(i)} \dots \iota_{\ell-1}^{(i)} \overline{\iota_\ell^{(i)}}$$

con $\iota_j^{(i)} = 0$ si $\iota_j = 1$ y $\iota_m^{(i)} = i$. En particular, si $a_0(f)$ tiene tiempo de retorno maximal μ , y elegimos $m = \mu$ entonces $\kappa(\mathcal{U}_1)$ se obtiene de $\kappa(\mathcal{U})$ con un movimiento de tipo A.

Demostración. Sean \mathcal{V}_0 y S_0 como fueron definidas anteriormente. El sector S_0 está comprendido entre rayos de parámetro $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\vartheta)$, con $\vartheta \in \{\theta_0, \theta_0 + 1/3, \theta_0 - 1/3\}$. Probaremos que $\vartheta = \theta_0 + 1/3$ y \mathcal{U}' es una de las regiones \mathcal{U}_i pedidas.

Al igual que antes, podemos encontrar $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que para todo $\theta \in [\vartheta - \delta, \vartheta]$, existe un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta)$ cerca de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\vartheta)$ intersecando a S_0 . Ahora bien, para $f \in S_0$ los rayos $R_f(\theta_0)$ y $R_f(\theta_0 + 1/3)$ son suaves y aterrizan en $a_0(f)$ (por el Lema 8.2), por lo que en particular ambos rayos aterrizan en $D_0(f)$. Para probar que $\vartheta = \theta_0 + 1/3$, supongamos primero que $\vartheta = \theta_0 - 1/3$. Luego, $\theta_0 \in]\theta_0 - \delta, \theta_0 - \delta + 1/3[=]\vartheta - \delta + 1/3, \vartheta - \delta - 1/3[$, lo que contradice que para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\vartheta - \delta) \cap S_0$, el rayo $R_f(\theta_0)$ aterrice en $D_0(f)$. Del mismo modo, si suponemos que $\vartheta = \theta_0$, entonces $\theta_0 + 1/3 \in]\theta_0 - \delta + 1/3, \theta_0 - \delta - 1/3[$, lo que contradice que $R_f(\theta_0 + 1/3)$ aterrice en $D_0(f)$ para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\vartheta - \delta) \cap S_0$. De esta forma, la única opción posible es que $\vartheta = \theta_0 + 1/3$.

Ahora bien, si tomamos $\tilde{f} \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0 + 1/3) \cap \mathcal{V}_0$ y una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n \in \mathcal{U}' \cap S_0$, f_n está en un rayo de parámetro θ_n con $\theta_n \rightarrow \theta_0 + 1/3^-$, y $f_n \rightarrow \tilde{f}$, entonces los rayos $R_{f_n}(\theta_0 + 1/3)$ y $R_{f_n}(\theta_0)$ converge a $R_{\tilde{f}}(\theta_0 + 1/3)$ y $R_{\tilde{f}}^+(\theta_0)$ respectivamente, y siguen aterrizando en $a_0(\tilde{f})$, por lo que existe $\tilde{f} \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0 + 1/3)$ tal que se tiene una R-conexión entre $-a(\tilde{f})$ y $a_0(\tilde{f})$.

Por el mismo argumento, cambiando \mathcal{U} por \mathcal{U}' y θ_0 por $\theta_0 + 1/3$, podemos encontrar una vecindad \mathcal{U}'' y un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}''}(\theta_0 + 2/3) = \mathcal{R}_{\mathcal{U}''}(\theta_0 - 1/3)$ aterrizando también en f_0 , tal que para f en este rayo se tiene una R-conexión entre $-a(f)$ y $a_0(f)$. Probaremos que las regiones \mathcal{U}' y \mathcal{U}'' cumplen lo pedido para las regiones \mathcal{U}_0 y \mathcal{U}_1 (no necesariamente en ese mismo orden).

Llamemos $\kappa(\mathcal{U}') = 0\iota'_1\iota'_2 \dots \iota'_{\ell-1}\overline{\iota'_\ell}$ y $\kappa(\mathcal{U}'') = 0\iota''_1\iota''_2 \dots \iota''_{\ell-1}\overline{\iota''_\ell}$. Como los rayos $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0 + 1/3)$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{U}''}(\theta_0 - 1/3)$ aterrizan en f_0 , sabemos por el Teorema 7.2, que $\kappa(f_0, \theta + 1/3) = *\iota'_1\iota'_2 \dots \iota'_{\ell-1}\overline{\iota'_\ell}$ y $\kappa(f_0, \theta - 1/3) = *\iota''_1\iota''_2 \dots \iota''_{\ell-1}\overline{\iota''_\ell}$. Si $\iota_j = 1$ y en $a_j(f_0)$ aterrizan un rayo $R_{f_0}(t_j)$, entonces $t_j \in]\theta_0 + 1/3, \theta_0 - 1/3[$, y así tenemos que $t_j \in]\theta_0, \theta_0 - 1/3[$ y $t_j \in]\theta_0 + 1/3, \theta_0[$, por lo que $\iota'_j = \iota''_j = 0$. Por otro lado, si $\iota_m = 0$, y t_m es tal que $R_{f_0}(t_m)$ aterrizan en $a_m(f_0)$, entonces $t_m \in]\theta_0 - 1/3, \theta_0 + 1/3[$. De esta manera, podemos tener o bien que $t_m \in]\theta_0 - 1/3, \theta_0[$ o $t_m \in]\theta_0, \theta_0 + 1/3[$. El primer caso implica que $\iota'_m = 1$ y $\iota''_m = 0$, mientras que el segundo implica que $\iota'_m = 0$ y $\iota''_m = 1$. En el primer caso, llamamos $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}_0$, mientras que en el segundo $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_0$ y $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}_1$, que son las regiones buscadas. \square

Finalmente, nuestro último teorema de la sección se refiere al caso donde existe una R-conexión con el punto fijo $a_\ell(f)$:

Teorema 8.5. *Sea \mathcal{U} una región de escape con $\kappa(\mathcal{U}) = 01^{\ell-2}\iota_{\ell-2}\overline{0}$ y $\theta_0 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $\theta'_0 = \theta_0 + 1/3$ o $\theta'_0 = \theta_0 - 1/3$ es fijo. Supongamos que para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ existe una R-conexión entre $-a(f)$ y $a_\ell(f)$. Sea f_0 el mapeo parabólico donde aterrizan $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$. Existen una región de escape \mathcal{U}' y un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0)$ aterrizando en f_0 tal que $\kappa(\mathcal{U}') = 01^{\ell-1}0\overline{1}$.*

Demostración. Consideremos \mathcal{V}_0 y S_0 como fueron definidas anteriormente. Asumiremos que $\theta'_0 = \theta_0 + 1/3$, pues la otra demostración es análoga. Tenemos que S_0 está comprendida entre $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\vartheta)$, con $\vartheta \in \{\theta_0, \theta_0 - 1/3\}$. Probaremos que $\vartheta = \theta_0$.

Como para $f \in S_0$, el rayo $R_f(\theta_0 + 1/3)$ aterrizan en $a_\ell(f)$, entonces al acercarnos a $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\vartheta)$ estos rayos se acercan a $R_{\tilde{f}}^+(\theta_0 + 1/3)$, que sigue aterrizando en $a_\ell(f)$. Luego, para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\vartheta)$

tenemos una R-conexión entre $-a(f)$ y $a_\ell(f)$. Sin embargo, si $\vartheta = \theta_0 - 1/3$, entonces al aterrizar en f_0 , el Lema 7.6 nos dice que $R_{f_0}(\theta_0 - 1/3 + 1/3) = R_{f_0}(\theta_0)$ aterriza en $\partial V(-a(f_0))$. Sin embargo, como $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ aterriza en f_0 , el mismo lema nos dice que esto no ocurre, lo que lleva a contradicción. Concluimos $\vartheta = \theta_0$.

Estudiaremos ahora el *kneading* de \mathcal{U}' . Llamemos $\kappa(\mathcal{U}') = 0\iota'_1\iota'_2 \dots \iota'_{\ell-1}\overline{\iota'_\ell}$. Como se mencionó en el párrafo anterior, se tiene que para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\vartheta)$ el rayo $R^+(\theta_0 + 1/3)$ aterriza en $a_\ell(f)$, de donde este punto está en $D_1(f)$ y así $\iota_\ell = 1$. Por el Lema 4.4, concluimos también que $\iota_{\ell-1} = 0$. Finalmente, como los rayos $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\theta_0)$ aterrizan en f_0 , el Teorema 7.7 nos dice que los primeros $\ell - 1$ símbolos de $\kappa(\mathcal{U})$ y $\kappa(\mathcal{U}')$ coinciden con aquellos en $\kappa(f_0, \theta_0)$, y por tanto coinciden entre ellos. Así, concluimos que para $0 < j < \ell - 1$, se tiene que $\iota'_j = 1$. De esta forma $\kappa(\mathcal{U}') = 01^{\ell-2}0\overline{1}$. \square

9. Demostración final

Habiendo trabajado hasta acá las distintas partes de la demostración, podremos ahora conectar las regiones de escape en $\mathcal{S}_{\ell,1}$ y así probar la conexidad de esta curva para todo $\ell \geq 2$. Separaremos la demostración en dos partes: primero probaremos que es posible conectar cualquier región de escape con alguna cuyo *kneading* es la secuencia $01^{\ell-2}0\bar{1}$. Luego, probaremos que todas las regiones con tal *kneading* pueden ser conectadas con una única región con *kneading* $\bar{0}$. Para probar lo primero, utilizaremos el siguiente lema:

Lema 9.1. *Si se parte de una secuencia $0\iota_1 \dots \iota_{\ell-1}\bar{\iota}_\ell$ y se realizan movimientos de tipo A y tipo B, entonces se llegará después de finitos pasos a $01^{\ell-2}\iota'_{\ell-1}\iota'_\ell$.*

Demostración. Si la secuencia original es $01^{\ell-2}\iota'_{\ell-1}\iota'_\ell$, no hay nada que demostrar. De lo contrario, definamos las funciones $u(\kappa), v(\kappa)$ de la siguiente forma. Para ambas funciones, consideremos los primeros $\ell - 1$ símbolos de κ , $K = 0\omega_1 \dots \omega_{\ell-2}$. La función $u(\kappa)$ se definirá como la cantidad de 1's que aparecen en K . Para la función $v(\kappa)$, si $K = 0^{\ell-1}$, entonces definimos $v(\kappa) = 0$. Si $K \neq 0$, dados $n \geq 0, m \geq 1$ tal que $K = 0 \cdot 0^n 1^m \omega_{n+m+1} \dots \omega_{\ell-2}$, definimos $v(\kappa) = n + m$. Vemos que $u(\kappa)$ y $v(\kappa)$ toman valores entre 0 y $\ell - 2$. Más aún, los movimientos de tipo A aumentan los valores de v , mientras que los movimientos de tipo B aumentan el valor de u y no disminuyen el de v . De esta forma, si κ' se obtiene a partir de κ luego de un movimiento de tipo A y B, entonces $(v(\kappa'), u(\kappa')) > (v(\kappa), u(\kappa))$ en el orden lexicográfico. Así, partiendo desde cualquier secuencia $0\iota_1 \dots \iota_{\ell-1}\bar{\iota}_\ell$, después de finitos movimientos se llega a una secuencia que maximiza el par $(v(\kappa), u(\kappa))$. El máximo de estos pares se da cuando $v(\kappa) = u(\kappa) = \ell - 2$, es decir, cuando κ es de la forma $01^{\ell-2}\iota'_{\ell-1}\bar{\iota}'_\ell$, probando lo buscado. \square

Con este resultado podremos unir cada región de escape con alguna con *kneading* $01^{\ell-2}0\bar{1}$. Sin embargo, para completar la demostración, necesitaremos indicar cuál será la región final a la que conectaremos todas las otras regiones de escape. Para esto, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 9.2. *Sea $\ell \geq 3$ y $0 < p < \ell - 1$. Entonces existe un único polinomio cuadrático $Q(z) = z^2 + c$ tal que 0 es mapeado en exactamente ℓ pasos a un punto fijo con número de rotación $p/(\ell - 1)$. Del mismo modo, existe un único polinomio cuadrático $Q(z) = z^2 + c$ tal que 0 es mapeado en exactamente dos pasos a un punto fijo.*

Demostración. Notemos que la condición $Q^3(0) = Q^2(0) \neq Q(0)$ exige que $c = -2$. Por tanto $Q(z) = z^2 - 2$ es el único polinomio cuadrático que mapea 0 en exactamente dos pasos a un punto fijo.

Sea ahora $\ell \geq 3$ y $0 < p < \ell - 1$. En primer lugar, se sabe por [Gol92, Corolario 8] que existe un único conjunto de rotación para m_2 con número de rotación $p/(\ell - 1)$. Sea \mathcal{P} este conjunto y t algún elemento cualquiera en \mathcal{P} . Existe un único intervalo de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus \mathcal{P}$ de largo mayor a $1/2$, y un único intervalo I de largo mínimo que es mapeado de forma biyectiva por $m_2^{\ell-2}$ al intervalo de largo mayor. De esta forma, existe un único $\theta \in I$ tal que $2^{\ell-2}\theta = t + 1/2$. Sea c_0 el punto de aterrizaje del rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(\theta)$. Probaremos que existe el único polinomio cuadrático que cumple lo pedido en el enunciado es $Q_{c_0}(z) = z^2 + c_0$.

Si un polinomio cuadrático $Q(z) = z^2 + c$ mapea 0 después de ℓ pasos a un punto fijo con número de rotación $p/(\ell - 1)$, entonces en este punto $Q^\ell(0)$ aterrizan los rayos $R_Q(s)$, con $s \in \mathcal{P}$.

De esta manera, el rayo $R_Q(t)$ aterriza en $Q^\ell(0)$ y por tanto $R_Q(t+1/2)$ en $Q^{\ell-1}(0)$. De acuerdo a [Mil00, Lema 2.8], si un rayo $R_Q(s)$ aterriza en $Q(0)$ entonces s debe estar en el intervalo I definido anteriormente. Debe existir un rayo $R_Q(s)$ aterrizando en $Q(0)$ que sea mapeado en $\ell - 2$ pasos a $R_Q(t+1/2)$, por lo que tal ángulo s debe estar en I y ser mapeado por $m_{2^{\ell-2}}$ a $t+1/2$. El único ángulo cumpliendo esto es θ , por lo que el rayo $R_Q(\theta)$ aterriza en $Q(0) = c$. De esta forma, c es el punto de aterrizaje de $\mathcal{R}_M(\theta)$, es decir, $c = c_0$ y $Q = Q_{c_0}$.

Para completar la demostración del lema, basta probar que Q_{c_0} cumple lo buscado. Ahora bien, como c_0 es el punto de aterrizaje del rayo $\mathcal{R}_M(\theta)$, entonces el rayo $R_{Q_{c_0}}(\theta)$ aterriza en $c_0 = Q_{c_0}(0)$. Como θ es mapeado en $\ell - 1$ pasos por m_2 a t , entonces 0 es mapeado en exactamente ℓ pasos al punto de aterrizaje de $R_{Q_{c_0}}(t)$. Basta probar que este punto es fijo, o equivalentemente, que todos los rayos con argumento en \mathcal{P} aterrizan en el mismo punto. Ahora bien, θ tiene únicas dos preimágenes $s, s+1/2$ bajo m_2 , ambas en el intervalo de mayor largo de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \setminus \mathcal{P}$, de manera que los rayos $R_{Q_{c_0}}(s)$ y $R_{Q_{c_0}}(s+1/2)$ aterrizan en 0 . Luego todos los ángulos de \mathcal{P} están en el mismo intervalo $]s, s+1/2[$ ó $]s+1/2, s[$. De acuerdo a [BFH92, Teorema I], y sabiendo que $m_2(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, esto implica que los rayos con argumento en \mathcal{P} aterrizan todos en el mismo punto. Esto termina la demostración del lema. \square

Finalmente, terminaremos la demostración de la conexidad de la curva $\mathcal{S}_{\ell,1}$ conectando todas las regiones de escape de $\mathcal{S}_{\ell,1}$ una única región de *kneading* $\bar{0}$

Teorema 9.3. *Sea $\ell \geq 2$. Se tiene que:*

- i) Toda región de escape \mathcal{U} de $\mathcal{S}_{\ell,1}$ con *kneading* $\kappa(\mathcal{U}) = 0\iota_1\iota_2 \dots \iota_{\ell-2}\bar{\iota}_\ell \neq 01^{\ell-2}\iota_{\ell-1}\bar{\iota}_\ell$ puede conectarse a una región de escape \mathcal{U}' cuyo *kneading* se obtiene a partir de $\kappa(\mathcal{U})$ con un movimiento del tipo A o B .*
- ii) Toda región \mathcal{U} de $\mathcal{S}_{\ell,1}$ con *kneading* $\kappa(\mathcal{U}) = 01^{\ell-2}\iota_{\ell-1}\bar{\iota}_\ell$ puede conectarse a una región de escape \mathcal{U}' cuyo *kneading* es $01^{\ell-2}0\bar{1}$.*
- iii) Existe una región \mathcal{U}_0 con *kneading* $\bar{0}$ de manera que toda región \mathcal{U} de $\mathcal{S}_{\ell,1}$ con *kneading* $\kappa(\mathcal{U}) = 01^{\ell-2}0\bar{1}$ puede conectarse con \mathcal{U}_0 .*
- iv) La curva $\mathcal{S}_{\ell,1}$ es conexa.*

Demostración. Consideremos \mathcal{U} una región de escape con *kneading* $0\iota_1 \dots \iota_{\ell-1}\bar{\iota}_\ell \neq 01^{\ell-2}\iota_{\ell-1}\bar{\iota}_\ell$. Por el Teorema 6.2, existe un rayo $\mathcal{R}_U(\theta_0)$ para el cual los rayos dinámicos con argumento $\theta_0 \pm 1/3$ son R-conexiones con algún $a_k(f)$ con tiempo de retorno maximal, con $k < \ell - 1$. Luego, por Teorema 7.2, este rayo aterriza en un mapeo *pcf* $f_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$. Más aún, por el Teorema 8.3 o 8.4, existen una región \mathcal{U}' y un rayo $\mathcal{R}_{U'}(\vartheta)$ aterrizando en f_0 , donde el *kneading* de \mathcal{U}' se obtiene a partir del *kneading* de \mathcal{U} con un movimiento de tipo B (en el caso $0 < k < \ell - 1$) o de tipo A (en el caso $k = 0$). Esto prueba *i*).

Sea ahora \mathcal{U} una región cuyo *kneading* es de la forma $01^{\ell-2}\iota_{\ell-1}\bar{\iota}_\ell$. Si $\iota_\ell = 1$, entonces $\iota_{\ell-1} = 0$ y no hay nada que probar. De lo contrario, por Teorema 6.2 podemos encontrar rayo $\mathcal{R}_U(\theta_0)$ tal que $\theta'_0 = \theta_0 + 1/3$ o $\theta'_0 = \theta_0 - 1/3$ es fijo y para $f \in \mathcal{R}_U(\theta_0)$ el rayo $R_f(\theta'_0)$ es R-conexión entre $-a(f)$ y $a_\ell(f)$. Por el Teorema 7.2, el rayo $\mathcal{R}_U(\theta_0)$ aterriza en un mapeo parabólico $f_0 \in \mathcal{C}(\mathcal{S}_{\ell,1})$, y más aún, por el Teorema 8.5 existe región de escape \mathcal{U}' y rayo $\mathcal{R}_{U'}(\theta_0)$ aterrizando en f_0 , tal que $\kappa(\mathcal{U}') = 01^{\ell-2}0\bar{1}$. Esto concluye *ii*).

Para probar *iii*), siguiendo el Lema 9.2, consideremos Q_{c_0} el único polinomio cuadrático de la forma $z^2 + c_0$ cumpliendo que 0 es mapeado después de exactamente ℓ pasos a un punto fijo repulsor con número de rotación $-1/(\ell - 1) = (\ell - 2)/(\ell - 1)$, y \mathcal{U}_0 la única región de escape con *kneading* $\bar{0}$ asociada a este polinomio (que es única por el Lema 4.6). Sea \mathcal{U} una región de escape con *kneading* $01^{\ell-2}0\bar{1}$. Probaremos que \mathcal{U} puede ser conectada con \mathcal{U}_0 . Como en \mathcal{U} el tiempo de retorno maximal es $\ell - 1 = \mu_0$, entonces por el Teorema 6.2 existen un $\theta_0 \in I_{\ell-1} =]\alpha_{\ell-1}, \beta_{\ell-1}[$ y un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ tal que para f en este rayo, los rayos dinámicos $R_f(\theta_0 \pm 1/3)$ son R-conexiones entre $-a(f)$ y $a_0(f)$. Como $\theta_0 \in I_{\ell-1}$, sabemos por el Lema 6.3 que

$$\theta_0 - 1/3 > \alpha_{\ell-1} - 1/3 = m_3^{\ell-1}(\alpha_{\ell-1}) > m_3(\alpha_{\ell-1}) > m_3^2(\alpha_{\ell-1}) > \dots > m_3^{\ell-2}(\alpha_{\ell-1}) > \theta_0 + 1/3.$$

Luego, para cada $k > 1$ el rayo $R_f(3^k \alpha_{\ell-1})$ es suave y aterriza en algún punto cuya órbita está contenida en $D_1(f)$. Por el Lema 4.4, el único punto con tal itinerario es el punto fijo en $D_1(f)$, es decir, $a_\ell(f)$, por lo que todos los rayos $R_f(3^k \alpha_{\ell-1})$ rayos aterrizan en tal punto.

Por el Teorema 7.2, el rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_0)$ aterriza en un mapeo *pcf* f_0 , y por el Teorema 8.4 (con $m = \ell - 1$), existen una región de escape \mathcal{U}' con *kneading* $\bar{0}$ y un rayo $\mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\vartheta)$ aterrizando en f_0 . Más aún, como para $k > 1$ los rayos $R_f(3^k \alpha_{\ell-1})$ aterrizan en el punto fijo repulsor $a_\ell(f)$, por [GM93, Teorema B.4] los rayos $R_{f_0}(3^k \alpha_{\ell-1})$ aterrizan en el punto fijo repulsor $a_\ell(f_0)$. Luego, para f cerca de f_0 lo mismo ocurre, y en particular para $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}'}(\vartheta)$ cerca de f_0 , los rayos $R_f(3^k \alpha_{\ell-1})$ son suaves y aterrizan en $a_\ell(f)$. Mostraremos con esto que la región \mathcal{U}' es la región \mathcal{U}_0 definida anteriormente.

Como $\kappa(\mathcal{U}') = \bar{0}$, dado $f \in \mathcal{U}'$, por §4.4 podemos encontrar abierto D conteniendo la componente conexa K_0 de $K(f)$ tal que $a_0(f) \in K_0$, cumpliendo que $f|_D$ es híbridamente equivalente a un polinomio $Q(z) = z^2 + c$. Por medio de la conjugación híbrida podemos deducir que $Q^\ell(0)$ es punto fijo, y es distinto a $Q^{\ell-1}(0)$. Además, dado que los rayos $R_f(3^k \alpha_{\ell-1})$ aterrizan en $a_\ell(f)$ y el conjunto $\{3\alpha_{\ell-1}, \dots, 3^{\ell-1}\alpha_{\ell-1}\}$ forma un conjunto de rotación para m_3 con número de rotación $-1/(\ell - 1)$, por la correspondencia de [PZ19, Teoremas A y B] se tiene que el conjunto

$$\{t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : R_Q(t) \text{ aterriza en } Q^\ell(0)\}$$

es conjunto de rotación para m_2 con número de rotación $-1/(\ell - 1)$. Es decir, $Q^\ell(0)$ tiene número de rotación $-1/(\ell - 1)$, por lo que 0 es mapeado por Q en exactamente ℓ pasos a un punto fijo con número de rotación $-1/(\ell - 1)$. De esta forma, Q es el polinomio Q_{c_0} definido anteriormente y así \mathcal{U}' es la única región \mathcal{U}_0 asociada a este polinomio. Con esto probamos *iii*).

Finalmente, para probar que $\mathcal{S}_{\ell-1}$ es una curva conexa, basta conectar cualquier región de escape con la región \mathcal{U}_0 de la parte anterior. Dada una región de escape \mathcal{U} , el Lema 9.1 junto con la parte *i*) de este teorema nos dice que podemos conectar \mathcal{U} con una región con *kneading* $01^{\ell-1}\iota_{\ell-1}\iota_\ell$. La parte *ii*) del teorema nos permite conectar esta región con una región con *kneading* $01^{\ell-2}0\bar{1}$. Finalmente la parte *iii*) nos permite conectar esta última región con una única región de escape \mathcal{U}_0 . Esto termina de probar el punto *iv*), este teorema, y por consiguiente, termina de demostrar el objetivo de esta tesis. □

Referencias

- [AK20] Matthieu Arfeux y Jan Kiwi. «Irreducibility of periodic curves in cubic polynomial moduli space». 2020.
- [BEK18] Xavier Buff, Adam L. Epstein y Sara Koch. «Rational Maps with a preperiodic critical point». 2018.
- [BFH92] Ben Bielefeld, Yuval Fisher y John H. Hubbard. «The classification of critically preperiodic polynomials as dynamical systems». En: *Journal of the American Mathematical Society* 5 (1992), págs. 721-762.
- [BH88] Bodil Branner y John H. Hubbard. «The iteration of cubic polynomials Part I: The global topology of parameter space». En: *Acta Mathematica* 160.3-4 (1988), págs. 143-206.
- [BH92] Bodil Branner y John H. Hubbard. «The iteration of cubic polynomials Part II: patterns and parapatterns». En: *Acta Mathematica* 169.3-4 (1992), págs. 229-325.
- [BKM10] Araceli Bonifant, Jan Kiwi y John Milnor. «Cubic polynomial maps with periodic critical orbit, Part II». En: *Conformal Geometry and Dynamics of The American Mathematical Society* 14 (mar. de 2010), págs. 68-112.
- [BM10] Araceli Bonifant y John Milnor. «Cubic polynomial maps with periodic critical orbit, Part III». 2010.
- [Bou92] Thierry Bousch. «Sur quelques problèmes de dynamique holomorphe». Tesis doct. Université de Paris-Sud, Orsay, 1992.
- [Bra93] Bodil Branner. «Cubic polynomials: turning around the connectedness locus». En: *Topological Methods in Modern Mathematics (Stony Brook, NY, 1991)*. Houston, TX: Publish or Perish, Inc, 1993, págs. 391-427.
- [BT14] Xavier Buff y Lei Tan. «The quadratic dynatomic curves are smooth and irreducible». En: *Frontiers in Complex Dynamics: In Celebration of John Milnor's 80th Birthday*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2014, págs. 49-72.
- [CG93] Lennart Carleson y Theodore W. Gamelin. *Complex Dynamics*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer, 1993.
- [DH09] Adrien Douady y John Hubbard. «Exploring the Mandelbrot set. The Orsay Notes.» En: (oct. de 2009).
- [DH85] Adrien Douady y John H. Hubbard. «On the dynamics of polynomial-like mappings». En: *Annales scientifiques de l'E.N.S. série* 18.2 (1985), págs. 287-343.
- [FG16] Charles Favre y Thomas Gauthier. «Classification of Special Curves in the Space of Cubic Polynomials». En: *International Mathematics Research Notices* 2018.2 (dic. de 2016), págs. 362-411.
- [FG20] Charles Favre y Thomas Gauthier. *The Arithmetic of Polynomial Dynamical Pairs*. 2020.
- [GM93] Lisa R. Goldberg y John Milnor. «Fixed points of polynomial maps. Part II. Fixed point portraits». eng. En: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 26.1 (1993), págs. 51-98.
- [Gol92] Lisa R. Goldberg. «Fixed points of polynomial maps. I : Rotation subsets of the circles». En: *Annales Scientifiques De L Ecole Normale Supérieure* 25 (1992), págs. 679-685.
- [GY17] Dragos Ghioca y Hexi Ye. «A Dynamical Variant of the André-Oort Conjecture». En: *International Mathematics Research Notices* 2018.8 (ene. de 2017), págs. 2447-2480.
- [Kiw04] Jan Kiwi. «Real laminations and the topological dynamics of complex polynomials». En: *Advances in Mathematics* 184 (2004), págs. 207-267.

- [LP96] Genadi Levin y Feliks Przytycki. «External rays to periodic points». En: *Israel Journal of Mathematics* 94 (1996), págs. 29-57.
- [McM94] Curtis T. McMullen. *Complex Dynamics and Renormalization*. Vol. 135. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.
- [Mil00] John Milnor. «Periodic orbits, external rays and the Mandelbrot set: an expository account». En: *Géométrie complexe et systèmes dynamiques - Colloque en l'honneur d'Adrien Douady Orsay, 1995*. Ed. por Flexor Marguerite, Sentenac Pierrette y Yoccoz Jean-Christophe. Astérisque 261. Société mathématique de France, 2000.
- [Mil06] John Milnor. *Dynamics in One Complex Variable*. 3rd. Vol. 160. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006.
- [Mil09] John Milnor. «Cubic polynomial maps with periodic critical orbit, part I». En: *Complex Dynamics: Families and Friends*. Wellesley, MA: A K Peters, 2009, págs. 333-412.
- [PZ19] Carsten Lunde Petersen y Saeed Zakeri. «On the correspondence of external rays under renormalization». Pendiente en *J. London Math. Soc.* 2019.
- [RY08] Pascale Roesch y Yongcheng Yin. «The boundary of bounded polynomial Fatou components». En: *Comptes Rendus Mathématique* 346 (2008), págs. 877-880.
- [Sch94] Dierk Schleicher. «Internal adresses in the Mandelbrot set and irreducibility of polynomials». Tesis doct. Cornell University, 1994.
- [Sul85] Dennis Sullivan. «Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics I. Solution of the Fatou-Julia Problem on Wandering Domains». En: *Annals of Mathematics* 122.2 (1985), págs. 401-418.
- [Zak18] Saeed Zakeri. *Rotation Sets and Complex Dynamics*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Cham, 2018.