



Pontificia Universidad Católica de Chile

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

SOLUCIONES AUTOSIMILARES PARA EL FLUJO POR CURVATURA MEDIA EN \mathbb{H}^2

*Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia
Universidad Católica de Chile para optar al grado académico de
Magíster en Matemática.*

Autor: Cristian Figueroa
Profesoras guías: Pilar Herreros - Mariel Sáez

2023

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 1. Introducción | 4 |
| 1.1. Flujos geométricos | 4 |
| 1.2. Tipos de geometría | 5 |
| 1.3. Geometría Hiperbólica | 6 |
| 1.3.1. Disco de Poincaré | 7 |
| 1.3.2. Modelo de Klein-Beltrami | 7 |
| 1.3.3. Semi-plano superior de Poincaré | 7 |
| 2. Geometría Riemanniana | 9 |
| 2.1. Variedad Riemanniana | 9 |
| 2.1.1. Campos vectoriales | 10 |
| 2.2. Métrica Riemanniana | 11 |
| 2.3. Conexión afín | 11 |
| 2.3.1. Conexión de Levi-Civita | 12 |
| 2.4. Geodésicas | 14 |
| 2.5. Curvatura media | 14 |
| 2.6. Curvatura media en espacio hiperbólico | 16 |
| 2.6.1. Gráficos en espacio hiperbólico. | 16 |
| 2.6.2. Curvatura media | 16 |
| 3. Superficies mínimas | 20 |
| 3.1. Ecuación de superficies mínimas | 20 |
| 3.2. Definiciones preliminares | 22 |
| 3.3. Ejemplos de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 | 23 |
| 3.3.1. Planos | 23 |
| 3.3.2. Helicoide. | 23 |
| 3.3.3. Catenoide | 23 |
| 3.3.4. Superficie de Scherk doblemente periódica | 24 |
| 3.3.5. Superficie simplemente periódica de Scherk | 24 |
| 3.3.6. Ejemplos de Riemann | 24 |
| 3.3.7. Superficie de Enneper | 25 |
| 3.4. Teorema de Bernstein | 25 |
| 3.5. Superficies mínimas en \mathbb{H}^{n+1} | 27 |
| 3.6. Teorema de Bernstein en \mathbb{H}^{n+1} | 28 |
| 4. Flujo por curvatura media en \mathbb{R}^{n+1}. | 29 |
| 4.1. Invariancia geométrica bajo perturbaciones tangenciales | 29 |
| 4.2. Existencia de soluciones para un tiempo corto del flujo | 31 |
| 4.3. Soluciones explícitas | 34 |
| 4.3.1. Superficies mínimas | 34 |
| 4.3.2. Esferas | 34 |
| 4.4. Soluciones autosimilares | 35 |
| 4.4.1. Soluciones homotécicas por contracción | 35 |
| 4.4.2. Soluciones por traslación | 36 |

| | |
|--|-----------|
| 4.5. Flujo por curvatura media para gráficos enteros | 38 |
| 4.6. Singularidades | 39 |
| 5. Flujo por curvatura media en espacio hiperbólico | 41 |
| 5.1. Soluciones por dilatación | 41 |
| 5.1.1. Existencia de soluciones | 43 |
| 5.1.2. Análisis numérico de soluciones | 45 |
| 5.2. Soluciones por traslación | 47 |
| 5.2.1. Existencia de soluciones | 48 |
| 5.2.2. Análisis numérico de soluciones | 48 |

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo nos enfocaremos en hacer las construcciones necesarias para encontrar soluciones autosimilares al flujo por curvatura media en \mathbb{H}^2 , para esto necesitamos dar una revisión a distintas definiciones y resultados conocidos de geometría Riemanniana, superficies mínimas y flujo por curvatura media.

Para comenzar, definiremos lo que es un flujo geométrico.

1.1. Flujos geométricos

Los flujos geométricos son ecuaciones de evolución las cuales son uno de los puntos de encuentro entre las ecuaciones en derivadas parciales y la geometría. Estos flujos se caracterizan por deformar objetos geométricos al hacer evolucionar alguna cantidad geométrica, como por ejemplo, la curvatura media. Estos flujos tienen diversas aplicaciones a problemas, ya sea en física, geometría, ciencia de materiales, entre otras.

Una forma de clasificar los flujos geométricos es: intrínsecos y extrínsecos.

Los flujos geométricos intrínsecos no dependen de un espacio ambiente donde esté la variedad, de hecho, hay variedades que no están definidas en un espacio ambiente. Lo que se busca es estudiar la variación de alguna de las cantidades geométricas que no dependa de un espacio ambiente, es decir, de alguna cantidad intrínseca a la variedad, como por ejemplo, la métrica. Un ejemplo conocido de este tipo de flujos es el de Ricci. Si consideramos una variedad Riemanniana M y un intervalo (a, b) , el flujo de Ricci asigna a cada $t \in (a, b)$ una métrica Riemanniana g_t en M , de tal manera que:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = -2Ric_M(g).$$

Este flujo es célebre, pues fue usado por Grigori Perelman para probar la conjetura de Poincaré, para ver la demostración de esto, ver [24] y [25].

Un flujo geométrico extrínseco, a diferencia del caso anterior, depende del espacio ambiente en el que ubicamos la variedad. Más formalmente, si tenemos una inmersión $X_0 : M \rightarrow N$, lo que nos interesa es encontrar una familia de inmersiones $X_t : M \rightarrow N$ satisfaciendo ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(p, t) &= f(p, t)\nu(p, t) \\ X(p, 0) &= X_0(p), \end{cases}$$

aquí f debe depender de cantidades geométricas extrínsecas a la variedad, dicho de otra manera, lo que sucede en este tipo de flujos es que estudiamos la variación de las inmersiones en el espacio ambiente, también debemos notar que en este caso estamos considerando subvariedades de codimensión 1. Esto da la posibilidad de generar variantes a un mismo problema, como por ejemplo,

cambiar el espacio ambiente en el que se trabaja.

Un ejemplo de un flujo extrínseco es el flujo por curvatura media. Para este flujo tenemos que considerar una variedad Riemanniana X_0 y diremos que su flujo por curvatura media es una familia de inmersiones suaves $X_t : M \rightarrow N$, donde M, N son variedades Riemannianas, esta familia de inmersiones es una solución suave del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(p, t) &= H(p, t)\nu(p, t) \\ X(p, 0) &= X_0(p), \end{cases}$$

donde que $H(p, t)$ representa la curvatura media, $\nu(p, t)$ es el vector normal unitario en el punto $p \in M$ y X_0 es la inmersión inicial, es decir, es la condición inicial de nuestro flujo y estamos en el caso de codimensión 1.

El flujo por curvatura media en \mathbb{R}^{n+1} será estudiado en el Capítulo 4, donde veremos definiciones básicas y mostraremos algunos resultados conocidos con respecto a este tema, todo esto hecho en \mathbb{R}^{n+1} y en el Capítulo 5 estudiaremos este flujo para el caso de \mathbb{H}^{n+1} y nos enfocaremos en encontrar soluciones autosimilares para el caso de \mathbb{H}^2 .

1.2. Tipos de geometría

En el presente trabajo usaremos el espacio hiperbólico como el espacio ambiente donde trabajaremos, en particular, nos restringiremos al caso de dos dimensiones, es decir, en $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Un buen punto de partida para introducir este espacio es hablar de dónde nace y de cuáles son las posibles geometrías que podemos encontrar en dos dimensiones, concepto que definiremos más adelante.

Los postulados de Euclides son un conjunto de enunciados considerados ciertos y que servirán como base para desarrollar una teoría. Cabe mencionar que en este conjunto cada enunciado es independiente del otro, es decir, ninguno de ellos puede ser obtenido como consecuencia de trabajar con los demás. Euclides enunció 5 postulados que son la base de la geometría Euclideana, estos postulados son los siguientes:

1. Dos puntos distintos cualesquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
3. Dados un centro y un radio se puede trazar una única circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única recta paralela.

El quinto postulado, originalmente no fue enunciado de esta forma. Sin embargo, es conocido como el postulado de las paralelas y de esta forma se entiende mejor el por qué es justamente este postulado el que estuvo en discusión durante siglos. Muchos matemáticos tenían la intuición de que este podría no ser un postulado, es decir, que puede ser obtenido a partir de los otros cuatro, también se creía que podría existir un tipo de geometría sin el quinto postulado. No fue hasta principios del siglo XIX cuando Gauss, Lobachevsky y Bolyai plantearon un tipo de geometría donde el quinto postulado no se cumple, esto es, por un punto exterior a una recta pasan infinitas rectas paralelas, dando origen así a la geometría hiperbólica. Otra geometría que se origina al no cumplirse el quinto postulado de Euclides, es la geometría esférica. En este caso, pasa todo lo contrario que en el caso hiperbólico, es decir, no pasa ninguna paralela por un punto externo a una recta.

En resumen si se cumple el postulado de las paralelas tenemos la geometría Euclideana y si no, se pueden obtener las geometrías hiperbólica y esférica.

Una pregunta natural en este punto es qué entenderemos como una geometría, sin embargo, no hay una única respuesta para esto. Según Klein, en su trabajo publicado en 1872, donde aparece el famoso Programa Erlangen y que sería refinado posteriormente por Cartan, nos dice que para definir, entender y estudiar una geometría, lo haremos mediante el grupo de simetrías del espacio y de las estructuras que se preservan via dicho grupo. Por lo tanto, una geometría es un triple (X, G, A) , donde X es un espacio topológico, G es un grupo con acción A en X .

La siguiente pregunta es, si es que existen otros tipos de geometría. Al menos, en dimensión 2, las que mencionamos son las únicas, en el sentido explicado a continuación.

Definimos una superficie de Riemann que, a grandes rasgos, podemos decir que se trata de una variedad suave dotada de una estructura compleja local y se puede mostrar que una superficie de Riemann es una variedad Riemanniana orientada y de dimensión 2, pero que el converso no es necesariamente cierto. Ahora, tenemos que el siguiente resultado conocido como el Teorema de uniformización nos da una clasificación de las geometrías posibles en dimensión 2.

Teorema 1.1. *Sea M una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces, M es difeomorfa a una de las tres siguientes:*

1. \mathbb{C}
2. $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
3. $D(0, 1)$,

aquí $D(0, 1)$ representa el disco unitario de radio 1 y centro en el origen.

De este teorema se obtiene que las únicas geometrías posibles son las de los espacios mencionados, esto es, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, llamada la esfera de Riemann que será nuestro modelo para geometría esférica. El plano complejo \mathbb{C} representará la geometría Euclideana. El disco $D(0, 1)$ representará la geometría hiperbólica.

Podemos darnos cuenta que en el teorema anterior solo se trabaja el caso de superficies simplemente conexas, sin embargo, también se puede dar una clasificación para las superficies que no son simplemente conexas. Para esto tenemos que si R es una superficie de Riemann, no necesariamente simplemente conexa, entonces admite un cubrimiento universal $\pi : Z \rightarrow R$, único salvo homeomorfismo, se puede demostrar que Z será una superficie de Riemann simplemente conexa. Entonces el tipo de geometría que tiene Z no dirá el tipo de geometría que tiene R . Diremos que R es esférica si es cubierta por $Z = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, Euclideana si $Z = \mathbb{C}$ e hiperbólica si $Z = D(0, 1)$.

Para conocer más sobre la historia de este teorema y de su demostración ver [7].

Este resultado de clasificación se puede generalizar a dimensión 3, es decir, a las 3-variedades. La conjetura de geometrización de Thurston da una clasificación topológica para las 3-variedades. Se sabe que este resultado no puede ser generalizado a dimensión mayor o igual que 4.

1.3. Geometría Hiperbólica

Ahora que sabemos cuáles son los tipos de geometría posibles en dos dimensiones, nos enfocaremos en la geometría hiperbólica que será nuestro espacio ambiente en el Capítulo 5. Lo que haremos a continuación es mostrar modelos de cómo representar este tipo de geometría, cabe mencionar que cada uno de los modelos describe la misma variedad, es decir, hay difeomorfismos entre los distintos modelos, sin embargo, para comprenderlos del todo, necesitaremos distintas definiciones de geometría Riemanniana, entre ellas, la definición de métrica Riemanniana y qué significa dotar de una métrica a un espacio. Estas definiciones serán tratadas en el capítulo 2.

1.3.1. Disco de Poincaré

El disco de Poincaré, fue introducido por Henry Poincaré en el 1882 y es uno de los posibles modelos para el espacio hiperbólico en dos dimensiones, este se obtiene al considerar un hiperboloide equilátero, con intersección con el plano $z = 0$ vacía, luego se considera la proyección estereográfica de la hoja superior desde el vértice de la hoja inferior, sobre el plano $z = 0$ y así se obtiene el disco de Poincaré.

1.3.2. Modelo de Klein-Beltrami

Este modelo es también llamado modelo proyectivo, en este los puntos son representados por puntos en el interior del disco y las líneas son representadas por cuerdas, es decir, líneas rectas en las que sus puntos en el infinito están sobre la frontera del círculo. Se puede tener una relación explícita entre el disco de Poincaré y el modelo de Klein-Beltrami: si consideramos un plano dentro del espacio Euclideo tridimensional y una esfera tangente a dicho plano y pedimos que la esfera tenga el mismo radio que el disco de Klein-Beltrami, luego proyectamos ortogonalmente el modelo sobre el hemisferio sur de la esfera. Mediante esta proyección, las cuerdas del disco se transforman en arcos de circunferencia ortogonales al ecuador de la esfera, obtenemos así una circunferencia de radio mayor que el disco de Klein-Beltrami. Utilizando la misma proyección pero del hemisferio sur, obtenemos el interior de dicha circunferencia. Si el disco original era el de Klein-Beltrami, el disco resultante tras las dos proyecciones representa al disco de Poincaré.

1.3.3. Semi-plano superior de Poincaré

Finalmente, el último modelo que veremos es el semi-plano superior de Poincaré y es el que usaremos a lo largo de este trabajo. Este modelo consiste en el conjunto:

$$\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}.$$

Este modelo se puede generalizar a dimensiones mayores como se ve en la siguiente definición.

Definición 1.1 (Modelo del semi-espacio superior). *El espacio hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} puede ser identificado como el subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} definido por*

$$\mathbb{H}^{n+1} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_n > 0\},$$

dotado con la métrica

$$ds^2 = \frac{1}{x_n^2} \sum_{i=0}^n dx_i^2.$$

Ahora tendremos una relación entre el producto interno del espacio hiperbólico y el producto interno del espacio Euclideo, dicha relación nos será de ayuda al momento de realizar cálculos. Supongamos que X, Y son campos vectoriales en \mathbb{R}^{n+1} , entonces se tiene la relación

$$\langle X, Y \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} = \frac{1}{x_n^2} \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Para una revisión histórica de los modelos de geometría hiperbólica y más detalle sobre dichos modelos ver [4].

Además de entender lo que es una métrica en una variedad Riemanniana, daremos otras definiciones que aplican a este caso. Una de las definiciones que nos será de interés es la curvatura media, ya que con ella podremos definir lo que es una superficie mínima; dichas superficies serán estudiadas en el Capítulo 3. La importancia de estudiar las superficies mínimas en este contexto es que nos darán los primeros y más sencillos ejemplos para el flujo por curvatura media, que será estudiado en el Capítulo 4, donde hablaremos sobre lo que se conoce acerca de este flujo, como definiciones, invarianzas y existencia de soluciones, todo esto apoyándonos en el trabajo de Mantegazza en [18].

Una vez que tengamos todas estas construcciones, estaremos en condiciones de hablar del flujo por curvatura media en \mathbb{H}^n y de esa forma enfocarnos en el principal objetivo de este trabajo que es estudiar la existencia de soluciones autosimilares para el flujo por curvatura media en \mathbb{H}^2 . Esto será estudiado en el capítulo 5.

Capítulo 2

Geometría Riemanniana

Durante el siguiente capítulo daremos una introducción a la geometría Riemanniana, dando definiciones básicas y presentando algunos resultados conocidos, para esto seguimos lo expuesto en [9], [13], [16] y también en [17].

2.1. Variedad Riemanniana

La idea de una variedad diferenciable nace al necesitar extender el cálculo diferencial en espacios más generales que \mathbb{R}^n . De una manera intuitiva las variedades diferenciables son espacios que localmente se parecen a \mathbb{R}^n y formalmente tenemos la siguiente definición:

Definición 2.1. Una variedad diferenciable de dimensión n , es un conjunto M y una familia de mapeos inyectivos $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, de abiertos U_α hacia M , tal que

1. $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para cada par de índices α, β con $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $X_\alpha^{-1}(W)$, $X_\beta^{-1}(W)$ son abiertos de \mathbb{R}^n y los mapeos $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ son diferenciables.

Como buscamos extender el cálculo diferencial a variedades, lo siguiente en definir es qué entenderemos por una función diferenciable entre variedades.

Definición 2.2. Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables. Un mapeo $\phi : M_1 \rightarrow M_2$ es diferenciable en $p \in M_1$ si dada una parametrización $G : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ en $\phi(p)$ existe parametrización $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ en p , de tal manera que $\phi(F(U)) \subset G(V)$ y el mapeo

$$G^{-1} \circ \phi \circ F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

es diferenciable en $F^{-1}(p)$.

Ahora estamos en condiciones de definir un concepto clave para poder trabajar a cabalidad con variedades diferenciables, esto es, vectores tangentes y más en general definiremos lo que es el espacio tangente a una variedad en un punto.

Definición 2.3. Sea M una variedad diferenciable. Una función diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ es llamada una curva diferenciable en M . Supongamos que $\alpha(0) = p \in M$ y sea \mathcal{D} el conjunto de las funciones definidas en M que son diferenciables en p . El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es una función $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Un vector tangente en $p \in M$ es el vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se denotará mediante $T_p M$.

Cabe destacar que T_pM es un espacio vectorial de dimensión n , por ende podemos usar herramientas de álgebra lineal al trabajar con ellos.

Hemos definido el espacio tangente a una variedad solamente en un punto, sin embargo, también podemos reunir la información de los espacios tangentes de todos los puntos en la variedad M , de la siguiente manera

$$TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}.$$

Este conjunto TM es lo que denominaremos fibrado tangente de M , además si M tiene estructura diferencial, podemos mostrar que este conjunto puede ser dotado de una estructura diferencial, es decir, también es una variedad diferenciable.

Una vez que conocemos el concepto de espacio tangente podemos extender a variedades diferenciables el concepto de mapeo diferenciable y el de diferencial de un mapeo.

A continuación estamos en condiciones de extender el concepto de diferencial de un mapeo diferenciable en el contexto de variedades diferenciables.

Proposición 2.1. Sean M_1, M_2 variedades diferenciables y sea $f : M_1 \rightarrow M_2$ un mapeo diferenciable. Para cada $p \in M_1$ y para cada $v \in T_pM_1$, elegimos una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Tomemos $\beta = f \circ \alpha$. El mapeo

$$df_p : T_pM_1 \rightarrow T_{f(p)}M_2,$$

definido por $df_p(v) = \beta'(0)$ es un mapeo lineal que no depende de la elección de α .

Definición 2.4. El mapeo lineal df_p definido en la Proposición 2.1 es llamado el diferencial de f en p .

2.1.1. Campos vectoriales

El siguiente concepto que debemos definir y que será ampliamente usado durante el desarrollo del presente trabajo corresponde al concepto de campo vectorial. La primera idea que se tiene de un campo vectorial y como lo indica su nombre, es la de tener vectores distribuidos sobre alguna variedad. Esta idea se formaliza con la siguiente definición.

Definición 2.5. Un campo vectorial X en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un vector $X(p) \in T_pM$. En otras palabras, tenemos que X es un mapeo desde M hacia su fibrado tangente TM . Diremos que este campo vectorial es diferenciable si el mapeo $X : M \rightarrow TM$ es diferenciable.

Supongamos que $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es una parametrización, entonces podremos escribir

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en U y $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ es la base asociada a TM en $U \times \mathbb{R}^n$, aquí podemos notar que el campo vectorial X es diferenciable si y solo si las funciones a_i lo son. Notamos que esto nos sugiere la idea de pensar un campo vectorial como un mapeo $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$, donde \mathcal{D} es el conjunto de las funciones diferenciables definidas en M y \mathcal{F} es el conjunto de funciones definidas en M , definido de la siguiente forma,

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

donde f denota, por abuso de notación, la expresión de f en la parametrización F . Esta interpretación de X como un operador en \mathcal{D} nos permite considerar la idea de iterar X . Por ejemplo, si X, Y son campos vectoriales diferenciables y f es una función diferenciable en M podemos considerar las funciones $X(Yf)$ o $X(Yf)$, lo cual da origen al siguiente lema.

Lema 2.1. Sean X, Y campos vectoriales diferenciables en una variedad diferenciable M . Entonces existe un único campo vectorial Z , tal que, para cada $f \in \mathcal{D}$, $Zf = (XY - YX)f$.

El campo vectorial Z del que hablamos es llamado el bracket de X y Y y lo denotamos mediante $[X, Y] = XY - YX$. Este bracket satisface las siguientes propiedades:

Proposición 2.2. Sean X, Y, Z campos vectoriales diferenciables en M , $a, b \in \mathbb{R}$ y f, g funciones diferenciables, entonces

1. *Anticonmutatividad*
 $[X, Y] = -[Y, X]$,
2. *Linealidad*
 $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,
3. *Identidad de Jacobi*
 $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$,
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Una demostración de esto puede ser encontrada en [9].

2.2. Métrica Riemanniana

A continuación un camino que puede ser intuitivo de seguir al estudiar variedades diferenciables es tratar de entender cómo poder medir distancias, ángulos, entre otras cosas en la variedad en la que estemos trabajando. Aquí es donde aparece la definición de métrica Riemanniana, que es lo que nos ayudará a medir distancias y aparecerá en el cálculo de diversas cantidades que serán de interés más adelante.

Definición 2.6. Una métrica Riemanniana en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en el espacio tangente T_pM , la cual varía diferenciablemente en el siguiente sentido: Si $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es un sistema de coordenadas alrededor de p , con $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in F(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dF_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$, entonces $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ es una función diferenciable en (x_1, \dots, x_n)

Se puede ver de la definición que la métrica Riemanniana no depende del sistema de coordenadas que se elija.

Una variedad diferenciable dotada con una métrica Riemanniana es lo que conoceremos como una variedad Riemanniana.

Una pregunta que resulta natural llegado este punto es acerca de la existencia y unicidad de la métrica Riemanniana. Hasta ahora no habíamos discutido nada con respecto a la topología de una variedad diferenciable, para que la métrica Riemanniana exista se necesita que la variedad sea Hausdorff y que tenga base numerable de abiertos, esto nos asegura la existencia de particiones de la unidad, que es lo que permite demostrar la existencia de alguna métrica.

2.3. Conexión afín

Cuando estamos trabajando en el espacio Euclideo sabemos derivar un campo diferenciable en la dirección de otro campo vectorial, estas son las derivadas direccionales, pero si intentamos hacer lo mismo sobre alguna superficie, por ejemplo, $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, el resultado podría no ser tangente a la superficie, entonces podríamos tomar solo la parte tangente de dicha derivada. Todo esto se vuelve difícil de hacer si tenemos una variedad abstracta, es decir, no conocemos una estructura extrínseca, esto es, no tenemos un espacio ambiente donde tomar parte tangente de alguna derivada. Esto nos lleva a definir lo que es una conexión afín y en particular, nos llevará a definir la

conexión de Levi-Civita lo cual es compatible con la métrica de la variedad.

Sea M una variedad diferenciable, definiremos $\mathfrak{X}(M)$ como el conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^∞ en M y $\mathcal{D}(M)$ como el anillo de funciones reales de clase C^∞ definidas en M .

Definición 2.7. Una conexión afín en una variedad diferenciable M es un mapeo

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

que asigna un par de campos vectoriales (X, Y) un campo vectorial $\nabla_X Y$, satisfaciendo:

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definición 2.8. En una variedad diferenciable M con conexión afín ∇ , existe una única correspondencia que asocia un campo vectorial V sobre una curva $c : I \rightarrow M$ a otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ sobre c llamado derivada covariante de V sobre c que satisface:

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$.
3. Si V es inducido por un campo vectorial Y , es decir, si $V(t) = Y(c(t))$, entonces

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$$

Ahora si consideramos un sistema de coordenadas, podemos escribir la conexión en estos términos. Sea $p \in M$ y elegimos un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) alrededor de p , podemos escribir $X = \sum_i \alpha_i X_i$, $Y = \sum_j y_j X_j$, donde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, entonces

$$\nabla_X Y = \sum_i \alpha_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) = \sum_{i,j} \alpha_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j} \alpha_i X_i (y_j) X_j.$$

Como $\{X_i\}_{i=1}^n$ define una base de TM en una vecindad de p tenemos que existen coeficientes Γ_{ij}^k tales que

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k,$$

donde los términos $\Gamma_{ij}^k : M \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables y son llamados símbolos de Christoffel. Por lo tanto

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{i,j} \alpha_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k, \quad (2.1)$$

es decir, se tiene que por la linealidad de ∇ , la conexión ∇ queda totalmente definida por los Γ_{ij}^k .

2.3.1. Conexión de Levi-Civita

Una vez que tenemos la definición de conexión en una variedad diferenciable debemos mencionar que hay una conexión en particular que es de interés: la conexión de Levi-Civita o conexión Riemanniana, destaca por ser compatible con la métrica de la variedad y ser libre de torsión. En la siguiente proposición vemos lo que se entenderá por que la conexión sea compatible con la métrica.

Proposición 2.3. *Sea M una variedad Riemanniana, una conexión ∇ es compatible con la métrica si y solo si para cualquier par de campos vectoriales V, W a lo largo de una curva diferenciable $c : I \rightarrow M$ se tiene que*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle. \quad t \in I$$

Corolario 2.1. *Una conexión ∇ en una variedad Riemanniana es compatible con la métrica si y solo si*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Con esta proposición y con este corolario es evidente que el hecho de que una conexión sea compatible con la métrica de una variedad Riemanniana recupera la idea de derivar el producto interno siguiendo la regla del producto.

Teorema 2.1. *Dada una variedad Riemanniana M existe una única conexión afín ∇ en M que satisface*

1. ∇ es libre de torsión, es decir, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, donde $[,]$ representa el bracket de Lie de los campos vectoriales X e Y .
2. ∇ es compatible con la métrica Riemanniana en M .

La conexión que cumple con las condiciones de este teorema es lo que se conoce como conexión de Levi-Civita o conexión Riemanniana.

Se puede demostrar que una conexión es libre de torsión si y solo si $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ y si además dicha conexión es compatible con la métrica Riemanniana, entonces los símbolos de Christoffel están dados por la fórmula

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \left(\sum_k \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{km},$$

donde g_{ij} representan las entradas de la matriz asociada a la métrica de la variedad estudiada y los coeficientes (g^{km}) representan a las entradas de la matriz inversa a la recién mencionada.

Volviendo a nuestro contexto, es decir, al espacio \mathbb{H}^{n+1} y considerando el modelo del semi-plano superior, tenemos que los coeficientes asociados a la métrica son

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2},$$

por lo tanto, no es difícil observar que $g^{ij} = x_n^2 \delta_{ij}$, así podemos calcular explícitamente cómo serán los símbolos de Christoffel en esta variedad. Tenemos

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \left(\sum_k \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{km}$$

Como $g^{km} \neq 0$ si y solo si $k = m$, se tiene que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{x_n^2}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right).$$

Luego si todos los índices son distintos tendremos que $\Gamma_{ij}^k = 0$ y para el resto de los casos

$$\Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ij}^j = \frac{-1}{x_n}, \quad \Gamma_{ii}^j = \frac{1}{x_n}, \quad \Gamma_{ii}^i = \frac{-1}{x_n},$$

si $i \neq j$. Teniendo los símbolos de Christoffel podemos escribir la conexión de manera explícita en función de estos y además nos serán de utilidad para próximos cálculos.

2.4. Geodésicas

Dicho de manera sencilla, las geodésicas serán los caminos más cortos para llegar desde un punto a otro sobre una variedad. A continuación vemos una definición formal para esto y veremos como poder encontrar dichos caminos.

Definición 2.9. *Sea M una variedad Riemanniana. Sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva parametrizada, diremos que γ es una geodésica si cumple*

$$\frac{D}{dt}(\gamma') = 0,$$

para cada $t \in I$.

Si tenemos un sistema de coordenadas (U, x) alrededor de $\gamma(t_0)$, una curva sería de la forma $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ y esta es una geodésica, si y solo si

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

es decir, la curva será una geodésica si satisface el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Si nos restringimos al caso de \mathbb{H}^2 tenemos que las curvas serán de la forma $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, así podemos resolver el sistema de manera explícita, este es

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{2}{y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{y} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

En el caso que $\frac{dx}{dt} = 0$ tenemos como solución $(x(t), y(t)) = (k, e^{\alpha t})$, con k, α constantes. Es decir, para este caso vemos que las líneas verticales, perpendiculares al eje x son geodésicas.

Para el caso en que $\frac{dx}{dt} \neq 0$ se tiene que las soluciones cumplen que $x^2 + y^2 - ax = b$, es decir, los círculos con centro sobre el eje x , son geodésicas que, para el caso de \mathbb{H}^2 corresponden a semicírculos.

2.5. Curvatura media

Ahora lo que nos interesa es entender qué es la curvatura media de una cierta inmersión de una variedad en otra. Consideremos $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+m}$ una inmersión, tenemos que para cada $p \in M$ el producto interno en $T_p M$ separa a $T_p \bar{M}$ es la siguiente suma directa

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp.$$

Ahora si denotamos $\bar{\nabla}$ la conexión en \bar{M} , podemos ver que induce una conexión ∇ en M y si X, Y son campos vectoriales en M y \bar{X}, \bar{Y} son extensiones locales a \bar{M} podemos definir

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T.$$

En lo que sigue buscamos definir la segunda forma fundamental de $f : M \rightarrow \bar{M}$.

Definición 2.10. *Si X, Y son campos vectoriales locales en M , entonces*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y,$$

es un campo vectorial en \bar{M} que es normal a M .

Para ver que $B(X, Y)$ está bien definido consideremos \bar{X}_1 otra extensión local de X , entonces tenemos

$$(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y) - (\bar{\nabla}_{\bar{X}_1}\bar{Y} - \nabla_X Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X} - \bar{X}_1}\bar{Y},$$

lo cual es idénticamente cero, pues $\bar{X} - \bar{X}_1 = 0$ en M . Podemos mostrar lo mismo para otra extensión \bar{Y}_1 de Y . Con esto se ve que $B(X, Y)$ está bien definido. Denotaremos con $\mathfrak{X}(U)^\perp$ a los campos vectoriales diferenciables en U , que son normales a $f(U)$.

Proposición 2.4. *Si $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, entonces el mapeo $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ dado por,*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y$$

es bilineal y simétrico.

Ahora estamos en condiciones de definir la segunda forma fundamental.

Sea $p \in M$ y $\eta \in (T_p M)^\perp$, definimos el mapeo

$$A_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R},$$

dado por $A_\eta(X, Y) = \langle B(X, Y), \eta \rangle$, $X, Y \in T_p M$, notamos que por la Proposición 2.4, A_η es una forma bilineal simétrica.

Definición 2.11. *La segunda forma fundamental II_η definida en $T_p M$ por $II_\eta(X) = A_\eta(X, X)$, es llamada la segunda forma fundamental de f en p a lo largo del vector normal η , donde $f : M^n \rightarrow \bar{M}^k$ es una inmersión.*

Notemos que el mapeo A_η , al ser una forma bilineal simétrica, induce un operador lineal autoadjunto $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$ que coincide con $S_\eta(X) = \bar{\nabla}_X N$, donde $X \in T_p M$ y N es una extensión de η satisfaciendo $|N| = 1$ en una vecindad de p . Este operador está bien definido pues,

$$0 = \frac{1}{2} \bar{\nabla}_X |N|^2 = \langle \bar{\nabla}_X N, \eta \rangle,$$

y

$$\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle \eta, \nabla_X \bar{Y} \rangle = II_p(X, Y),$$

donde $X, Y \in T_p M$, \bar{Y} es una extensión de Y y N es una extensión de η satisfaciendo $|N| = 1$ en una vecindad de p .

El operador S_η es conocido como operador de forma u operador de Weingarten.

Definición 2.12. *Una inmersión $f : M \rightarrow \bar{M}$ es llamada minimal si para cada $p \in M$ y para cada $\eta \in (T_p M)^\perp$ la traza de $S_\eta = 0$.*

Si tomamos un sistema de referencia ortonormal E_1, \dots, E_n de vectores en $\mathfrak{X}(U)^\perp$, donde U es una vecindad de p en la cual f es un encaje, entonces podemos escribir

$$B(X, Y) = \sum_i H_i(X, Y) E_i, \quad X, Y \in T_p M$$

Donde $H_i = A_{E_i}$. Se puede notar que el vector normal dado por

$$\vec{H} = \sum_i (\text{traza } S_i) E_i,$$

donde $S_i = S_{E_i}$, no depende de la elección del sistema de referencia elegido. Así tenemos que \vec{H} es llamado el vector de curvatura media. Anteriormente habíamos definido una inmersión minimal como aquella donde la traza de $S_\eta = 0$ y podemos ver que es equivalente a $\vec{H}(p) = 0$ para cada $p \in M$.

Notemos que si la codimensión de la variedad es 1, como el caso en que nos enfocaremos, se tiene que hay solo un $E_i = \nu$ y $\vec{H} = H\nu$, donde $H = A_\nu$ se conoce como la curvatura media.

2.6. Curvatura media en espacio hiperbólico

A continuación veremos cómo se ven las construcciones generales que hicimos antes en el caso particular del espacio hiperbólico, cabe recordar que estaremos usando el modelo del semi-plano superior para representar el espacio hiperbólico. Para estos cálculos nos basamos en los trabajos de Barbosa y Sa Earp en [3] y [2].

2.6.1. Gráficos en espacio hiperbólico.

Debemos saber que existe más de una forma de definir un gráfico en el espacio hiperbólico, en este caso trabajaremos con lo que usualmente se llama gráfico horizontal y que definimos de la siguiente forma.

Definición 2.13 (Gráfico horizontal). *En el espacio \mathbb{H}^{n+1} consideremos un plano fijo P representado por $x_0 = 0$ y consideremos un conjunto D en dicho plano, así podemos considerar una función $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ y luego su gráfico está dado por el conjunto*

$$G(u) = \{(u(x_1, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n) \mid (0, x_1, \dots, x_n) \in D\}.$$

Un ejemplo en \mathbb{H}^2 de un gráfico horizontal se muestra en la figura 2.1.

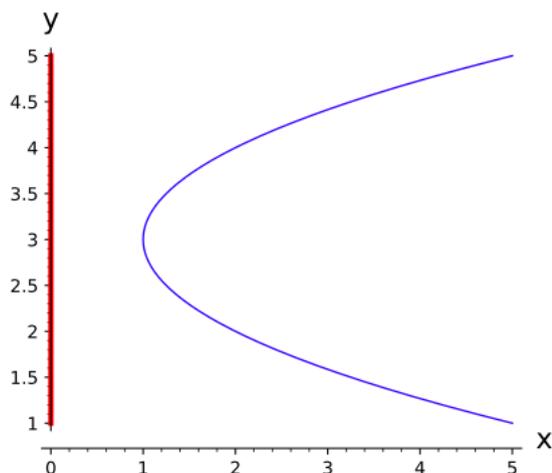


Figura 2.1: Ejemplo de un gráfico horizontal en el semiplano superior.

Podemos notar que en este caso el dominio donde está definida la función se encuentra sobre el eje y y corresponde al intervalo $(1, 5)$.

Una forma distinta de definir gráficos en el mismo modelo del espacio hiperbólico son lo que podemos denominar gráficos verticales y son más parecidos a lo que usualmente llamamos un gráfico. Consideremos dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{x_n = 0\}$ y definamos funciones positivas en este dominio, es decir, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que el gráfico de u está dado por

$$\text{Graph}(u) = \{(x_0, \dots, x_{n-1}, u(x_0, \dots, x_{n-1})) \mid (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \Omega, u > 0\}.$$

En la figura 2.2 vemos un ejemplo en dimensión 2 de este tipo de gráficos.

2.6.2. Curvatura media

En lo que sigue haremos los cálculos para encontrar una expresión para la curvatura media de un gráfico en este espacio, cabe mencionar que en lo que sigue de este trabajo utilizaremos gráficos

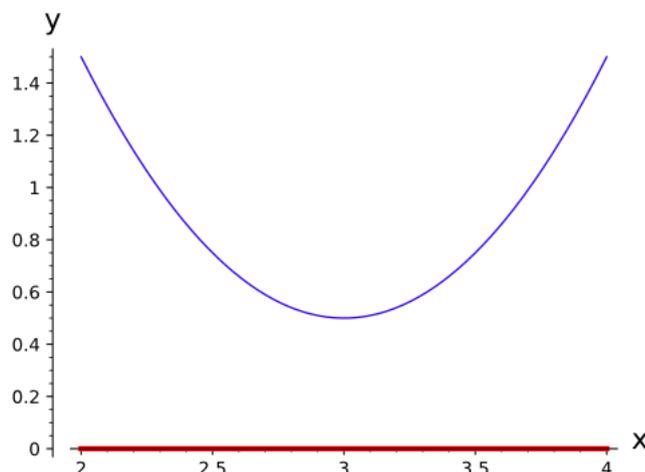


Figura 2.2: Ejemplo de gráfico vertical en el semiplano superior

horizontales. Sea η el vector normal al $G(u)$ en el sentido euclideo, es decir, podemos escribir

$$\eta = \frac{(1, -Du)}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

Entonces si ν es el vector normal a $G(u)$ en el sentido hiperbólico podemos escribir

$$\nu = \frac{(1, -Du)}{\sqrt{1 + |Du|^2}} x_n,$$

donde D denotará la derivada en sentido Euclideo.

Podemos notar que existe relación entre vectores normales en el sentido euclideo y vectores normales en el sentido hiperbólico que está dada por

$$\nu = x_n \eta.$$

Ahora consideremos una hipersuperficie $M \subset \mathbb{H}^{n+1}$, si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $\alpha(0) = p$ es una curva diferenciable parametrizada por longitud de arco en la métrica hiperbólica, entonces su curvatura normal, en sentido hiperbólico, está dada por

$$\bar{k} = \langle \nabla_{\alpha'} \alpha', \nu \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}},$$

donde $\nabla_X Y$ corresponde a la derivada covariante asociada a la métrica hiperbólica.

Similarmente si $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $\beta(0) = p$ es también una curva diferenciable parametrizada por longitud de arco, pero en este caso, según la métrica euclidea, entonces la curvatura normal en p , en el sentido euclideo, está dada por

$$k = \langle D_{\beta'} \beta', \eta \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}},$$

donde D denota la derivada covariante asociada a la métrica euclidea.

Sabiendo como definimos la curvatura normal en cada contexto nos gustaría encontrar una relación entre estas, dicha relación se muestra en el siguiente lema.

Lema 2.2. *Dada una curva en M tenemos que*

$$\bar{k} = kx_n + \eta_n,$$

donde η_n representa a la n -ésima componente de η .

Antes de demostrar este lema denotemos $D_X Y$ como la derivada covariante asociada a la métrica euclídeana y $\nabla_X Y$ como la derivada covariante asociada a la métrica hiperbólica. Veremos que estas dos derivadas están relacionadas como sigue.

Lema 2.3. *Para la conexión de Levi-Civita en \mathbb{H}^{n+1} se satisface:*

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} = \frac{1}{x_n^2} \langle Z, D_Y X \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \frac{1}{x_n^3} (\langle -X(x_n)Y, Z \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} - \langle Y(x_n)Z, X \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \langle Z(x_n)X, Y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}})$$

Demostración. Sabemos que $Y \langle Z, X \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} = \langle \nabla_Y Z, X \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} + \langle Z, \nabla_Y X \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}}$, por otro lado podemos escribir

$$\begin{aligned} Y \langle Z, X \rangle_{\mathbb{H}^n} &= Y \left[\frac{1}{x_n^2} \langle Z, X \rangle_{\mathbb{R}^n} \right] \\ &= \frac{-2}{x_n^3} \langle Y(x_n)Z, X \rangle_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{x_n^2} \langle D_Y Z, X \rangle_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{x_n^2} \langle D_Y X, Z \rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\langle \nabla_Y Z, X \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} + \langle Z, \nabla_Y X \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} = \frac{-2}{x_n^3} Y(x_n) \langle Z, X \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \frac{1}{x_n^2} \langle D_Y Z, X \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \langle Z, D_Y X \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}. \quad (2.2)$$

De la misma manera podemos obtener las ecuaciones

$$\langle \nabla_X Z, Y \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} + \langle Z, \nabla_X Y \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} = \frac{-2}{x_n^3} X(x_n) \langle Z, Y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \frac{1}{x_n^2} \langle D_X Z, Y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \langle Z, D_X Y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}, \quad (2.3)$$

$$\langle \nabla_Z X, Y \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} + \langle X, \nabla_Z Y \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} = \frac{-2}{x_n^3} Z(x_n) \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \frac{1}{x_n^2} \langle D_Z X, Y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \langle X, D_Z Y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}. \quad (2.4)$$

Si sumamos (2.2) y (2.3) y restamos (2.4) obtenemos,

$$\begin{aligned} \langle [Y, Z], X \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} + \langle [X, Z], Y \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} + \langle Z, \nabla_Y X \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} + \langle Z, \nabla_X Y \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} &= \frac{2}{x_n^3} Z(x_n) \langle Y, X \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &\quad - \frac{2}{x_n^3} Y(x_n) \langle Z, X \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} - \frac{2}{x_n^3} X(x_n) \langle Z, Y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \\ &\quad \frac{1}{x_n^2} \langle D_Y Z, X \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \frac{1}{x_n^2} \langle D_Y X, Z \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \frac{1}{x_n^2} \langle D_X Z, Y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &\quad + \frac{1}{x_n^2} \langle D_X Y, Z \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} - \frac{1}{x_n^2} \langle D_Z Y, X \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} - \frac{1}{x_n^2} \langle D_Z X, Y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}. \end{aligned}$$

A continuación usamos el hecho de que el corchete $[\cdot, \cdot]$ no depende de la métrica y además en este caso, ya sea, si vemos el semi-plano superior hiperbólico o si vemos el espacio Euclídeano, tenemos los mismos campos vectoriales, esto implica que $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = D_X Y - D_Y X$. Usando esto tenemos que se cancelan algunos términos en la última ecuación y se obtiene el resultado que buscábamos. \square

Ahora que tenemos este lema procederemos a probar el Lema 2.2.

Demostración. Dada una curva en M , representaremos por T su vector tangente unitario en el sentido hiperbólico y por t a su vector tangente unitario en sentido euclídeano, entonces tenemos que $N = x_n \eta$, que $T = x_n t$ y que $\langle N, T \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} = 0$. Usando el Lema 2.3 tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \langle \nabla_T T, N \rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} \\ &= \frac{1}{x_n^2} \langle D_T T, N \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \frac{1}{x_n^3} \langle N(x_n)T, T \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &= \frac{1}{x_n^2} \langle D_{(x_n t)}(x_n t), x_n \eta \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \frac{1}{x_n^3} \langle x_n \eta(x_n) x_n^2 t, t \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &= x_n \langle D_t t, \eta \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \langle t(x_n) t, \eta \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} + \eta(x_n) \\ &= x_n k + \eta(x_n) \\ &= x_n k + \eta_n, \end{aligned}$$

finalizando así la demostración. \square

Esta relación entre las curvaturas normales en los contextos trabajados nos permite encontrar una ecuación para la curvatura media. Sea h la curvatura media en el sentido euclideo y H la curvatura media en el sentido hiperbólico. Sea $\{e_0, \dots, e_n\}$ un marco de referencia ortonormal en sentido hiperbólico sobre M . Sea \bar{k}_i la curvatura normal de M en la dirección e_i , entonces por el Lema 2.2 tenemos que

$$\sum_i \bar{k}_i = x_n \sum_i k_i + n\eta_n,$$

y por lo tanto

$$H = x_n h - \frac{nu_n}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

Por lo tanto, si estamos trabajando con un gráfico, conocemos una expresión explícita para su curvatura media por lo tanto se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *La curvatura media de un gráfico horizontal en el espacio hiperbólico satisface la ecuación*

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \frac{1}{x_n} \left(H + \frac{nu_n}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right). \quad (2.5)$$

Aquí tanto divergencia como gradiente son euclideos, u_n indica la derivada parcial de u con respecto a la n -ésima variable mientras que x_n denota la n -ésima variable y H es la curvatura media en \mathbb{H}^n .

Capítulo 3

Superficies mínimas

Comenzaremos a hablar de superficies mínimas en un caso particular pero que es un buen punto de partida al ser un poco más simple, es decir, comenzaremos el estudio en \mathbb{R}^3 , siendo el punto de partida encontrar una ecuación que describa los gráficos que son superficies mínimas. Cabe destacar que durante este capítulo nos basaremos en el trabajo presentado por Colding y Minicozzi en [5] y por Osserman en [19].

3.1. Ecuación de superficies mínimas

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$, y diremos que M es una superficie mínima, si es un punto crítico del funcional de área asociado a variaciones con soporte compacto de una superficie, es decir, tenemos la siguiente definición.

Supongamos que $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 y consideremos el gráfico de esta función u , es decir,

$$Graph_u = \{(x, y, u(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}.$$

Teniendo esto podemos calcular el área de esta superficie

$$\begin{aligned} Area(Graph_u) &= \int_{\Omega} |(1, 0, u_x) \times (0, 1, u_y)| dA \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dA = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dA. \end{aligned}$$

Ahora calculamos el vector normal al gráfico, notemos que el gráfico de u puede ser parametrizado mediante $X(x, y) = (x, y, u(x, y))$, por lo tanto las derivadas de esta parametrización están dadas por $X_x = (1, 0, u_x)$, $X_y = (0, 1, u_y)$, luego el vector normal a este gráfico está dado por

$$N = \frac{(1, u_x, 0) \times (0, 1, u_y)}{|(1, u_x, 0) \times (0, 1, u_y)|} = \frac{(-u_x, -u_y, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}.$$

A continuación para poder obtener una ecuación para superficies mínimas lo que haremos será considerar un problema variacional, es decir, consideraremos una familia de gráficos $Graph_{u+t\eta}$, donde $\eta|_{\partial\Omega} = 0$ y t es un parámetro. De esto podemos obtener que

$$Area(Graph_{u+t\eta}) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u + t\nabla\eta|^2},$$

luego tendremos que la derivada direccional de este funcional de área en u , en la dirección η está dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Area(Graph_{u+t\eta}) &= \int_{\Omega} \frac{\langle \nabla u, \nabla \eta \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \\ &= - \int_{\Omega} \eta \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que el gráfico u es un punto crítico del funcional de área si satisface la ecuación

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0$$

A continuación trabajaremos en el caso general, esto es, variedades Riemannianas y veremos que también hay una ecuación para superficies mínimas. Consideraremos M^n una variedad Riemanniana y Σ^k una subvariedad encajada de M .

Antes de comenzar con los cálculos veamos una proposición que nos será de utilidad en lo que viene. Esta proposición es llamada la fórmula de Jacobi y muestra como derivar un determinante.

Proposición 3.1. *Sea A es un mapeo diferenciable que lleva un número t en una matriz de $n \times n$, entonces*

$$\frac{d}{dt} \det(A(t)) = \det(A(t)) \left(A^{-1}(t) \frac{d}{dt}(A(t)) \right)$$

Consideremos una variedad Riemanniana M^n y una subvariedad $\Sigma^k \subset M^n$. Consideremos una función $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una variación con soporte compacto de Σ y frontera fija, es decir, $F = I$ fuera de un conjunto compacto,

$$F(x, 0) = x$$

y para cada $x \in \partial\Sigma$,

$$F(x, t) = x$$

El campo vectorial $F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$ restringido a Σ es usualmente llamado el campo vectorial variacional. En lo que sigue buscamos calcular la primera variación del área de esta familia de superficies. Sean x_i coordenadas locales en Σ , escribamos

$$g_{ij}(t) = g(F_{x_i}, F_{x_j}),$$

$$\nu(t) = \sqrt{\det(g_{ij}(t))}.$$

Ahora tenemos que el volumen de la variedad está dado por

$$\operatorname{Vol}(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \nu(t).$$

Si derivamos con respecto a t obtenemos

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{Vol}(F(\Sigma, t)) = \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nu(t)$$

Para encontrar el valor de $d/dt|_{t=0}$ en algún punto x podemos elegir un sistema de coordenadas talque en x sea ortonormal, es decir, en tal punto x se tiene

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j, \\ 1 & si \quad i = j. \end{cases}$$

Usando el hecho de que $[F_t, F_{x_i}] = 0$ tenemos que en x

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nu(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle F_{x_i}, F_{x_i} \rangle = \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_t} F_{x_i}, F_{x_i} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_{x_i}} F_t, F_{x_i} \rangle = \operatorname{div}_{\Sigma} F_t. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ahora podemos relacionar esta derivada de ν con la curvatura media escribiendo el campo vectorial F_t como suma de su parte tangencial y su parte normal, obteniendo así,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \nu(t) &= \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \langle \nabla_{F_{x_i}} \langle F_t, N_l \rangle N_l, F_{x_i} \rangle + \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^T \\ &= \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{i=1}^k \langle F_t, N_l \rangle \langle \nabla_{F_{x_i}} N_l, F_{x_i} \rangle + \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^T \\ &= -\langle F_t, \vec{H} \rangle + \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^T. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Donde N_l es una base ortonormal para el fibrado normal de Σ en x . Integrando (3.1) y (3.2) obtenemos la que es llamada fórmula de primera variación:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{Vol}(F(\Sigma, t)) = - \int_{\Sigma} \langle F_t, \vec{H} \rangle = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma} F_t.$$

Cabe mencionar que se usó el teorema de Stokes para ver que $\int \operatorname{div}_{\Sigma} F_t^T = 0$. Llegado a este punto podemos ver que tenemos otra caracterización para las superficies mínimas que es tener curvatura media nula y podemos ver que es equivalente a ser un punto crítico del funcional de área que es como las habíamos definido anteriormente.

Definición 3.1 (Subvariedad mínima). *Una subvariedad inmersa $\Sigma^k \subset M^n$ se dice mínima si su curvatura media es idénticamente cero.*

3.2. Definiciones preliminares

Antes de comenzar a mostrar ejemplos de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 necesitamos dar algunas definiciones para comprender dichos ejemplos.

Definición 3.2 (Superficie reglada). *Sea $I \subset \mathbb{R}$. Una familia uniparamétrica de líneas $\{\alpha(t), w(t)\}$ es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$ un punto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ y un vector $w(t) \in \mathbb{R}^3$, con $w(t) \neq 0$ y tal que $\alpha(t)$ y $w(t)$ dependen diferenciablemente de t .*

Para cada $t \in I$, la línea L_t que pasa por $\alpha(t)$ y es paralela a $w(t)$ es llamada la línea de la familia en t .

Si consideramos una familia uniparamétrica de líneas $\{\alpha(t), w(t)\}$, la superficie parametrizada por

$$X(t, v) = \alpha(t) + vw(t),$$

con $t \in I$ y $v \in \mathbb{R}$, es llamada la superficie reglada, generada por la familia $\{\alpha(t), w(t)\}$.

Definición 3.3 (Superficie de revolución). *Diremos que una superficie es de revolución si se obtiene al rotar una curva plana $\alpha(t)$, alrededor de un eje de revolución coplanario. Si suponemos que dicha curva está contenida en el plano $z = 0$ y el eje de revolución está determinado por la ecuaciones $y = 0, z = 0$, entonces una parametrización de dicha curva puede ser*

$$\alpha(t) = (f(t), g(t), 0),$$

donde f, g son funciones diferenciables en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, luego tendremos que una parametrización para dicha superficie está dada por

$$X(t, \theta) = (f(t), g(t)\cos(\theta), g(t)\sen(\theta)),$$

donde $t \in I$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Definición 3.4 (Periodicidad). *Diremos que una superficie mínima es n -periódica si es que es invariante bajo n traslaciones linealmente independientes. Durante los ejemplos veremos superficies simplemente y doblemente periódicas, es decir, superficies que son invariantes bajo una o dos traslaciones respectivamente.*

Definición 3.5 (Fines). Consideremos X un espacio topológico y supongamos que

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$$

es una sucesión ascendente de subconjuntos compactos de X cuyos interiores cubren X , es decir, $X = \bigcup_i \text{int}(K_i)$. Entonces diremos que X tiene un fin para cada sucesión

$$U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$$

donde cada U_i es una componente conexa de $X \setminus K_i$. El número de fines no depende de la sucesión $\{K_i\}_i$ escogida.

Tratando de simplificar la definición podemos decir que los fines son como se comporta cada componente conexa del espacio topológico hacia el infinito.

Se puede encontrar más desarrollo de este concepto y de sus usos en [21].

Ahora pasamos a ver algunos de los ejemplos conocidos de superficies mínimas en \mathbb{R}^3 .

3.3. Ejemplos de superficies mínimas en \mathbb{R}^3

3.3.1. Planos

El primer ejemplo viene de saber que una superficie mínima tiene curvatura media idénticamente cero, entonces el caso más simple es considerar cuando la segunda forma fundamental de esta superficie sea totalmente cero, es decir, cuando la superficie es totalmente geodésica. Como la segunda forma fundamental es la derivada del vector normal unitario, tenemos que este será constante y por lo tanto la superficie será un plano.

3.3.2. Helicoide.

El helicoide fue descubierto por Meusnier en 1776 y es una superficie completa, encajada, simplemente periódica y simplemente conexa. En 1842, Catalan mostró que el helicoide es la única superficie mínima reglada no plana. El helicoide es descrito por el siguiente conjunto

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \right\}$$

alternativamente el helicoide puede ser descrito de forma paramétrica como vemos a continuación

$$X(t, v) = (v \cos(t), v \sin(t), t),$$

donde $t, v \in \mathbb{R}$, de acá podemos notar que el helicoide es efectivamente una superficie reglada, pues podemos escribir

$$X(t, v) = (v \cos(t), v \sin(t), t) = (0, 0, t) + v(\cos(t), \sin(t), 0),$$

es decir, tenemos que $\alpha(t) = (0, 0, t)$ y $w(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$.

3.3.3. Catenoide

El catenoide fue descubierta por Euler en 1744 y Meusnier mostró que es una superficie mínima en 1766. El catenoide es la única superficie mínima de revolución, no plana. Esta se obtiene al rotar la curva conocida como catenaria dada por

$$\alpha(t) = (t, \cosh(t), 0),$$

y por lo visto en la definición, entonces la parametrización que describe el catenoide está dada por

$$X(t, \theta) = (t, \cosh(t)\cos(\theta), \cosh(t)\sin(\theta)),$$

con $t \in I$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

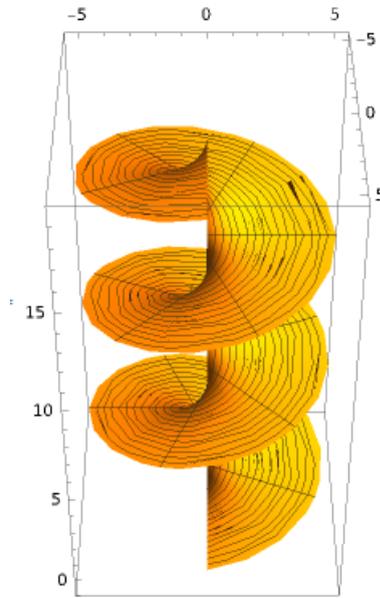


Figura 3.1: Gráfico de un helicoides

3.3.4. Superficie de Scherk doblemente periódica

Esta superficie fue descubierta por Scherk en 1835 y es una superficie mínima doblemente periódica definida como un gráfico sobre los cuadrados blancos de un tablero de ajedrez con líneas verticales en las esquinas. Un dominio fundamental de la superficie de Scherk es dado como un gráfico sobre el cuadrado $|x_1| < \pi/2$ y $|x_2| < \pi/2$ de

$$x_3 = \log \left(\frac{\cos(x_2)}{\cos(x_1)} \right).$$

3.3.5. Superficie simplemente periódica de Scherk

También en 1835, Scherk, descubrió una superficie mínima simplemente periódica que se ve como la desingularización de un par de planos ortogonales. Esta superficie es también uno de los ejemplos más importantes, ya que juega un rol crítico en el pegado y desingularización de construcciones de superficies mínimas y de superficies de curvatura media constante. Esta superficie puede ser expresada de forma implícita por la ecuación

$$\sinh(x_3) - \sinh(x_1)\sinh(x_2) = 0$$

3.3.6. Ejemplos de Riemann

Alrededor de 1860, Riemann, clasificó todas las superficies mínimas en \mathbb{R}^3 que son foliadas por círculos y líneas rectas en planos horizontales. Él mostró que las únicas de estas superficies son el plano, el catenoide, el helicoides y una familia biparamétrica que es conocida como los ejemplos de Riemann. Las superficies que descubrió forman una familia de superficies mínimas completas encajadas que son simplemente periódicas y con género cero. Cada una de estas superficies tienen infinitos fines planares paralelos conectados por cuellos. Módulo movimientos rígidos, esta es una familia biparamétrica de superficies mínimas. Los parámetros son:

- Tamaño de los cuellos.
- Ángulo entre el vector período y los fines.

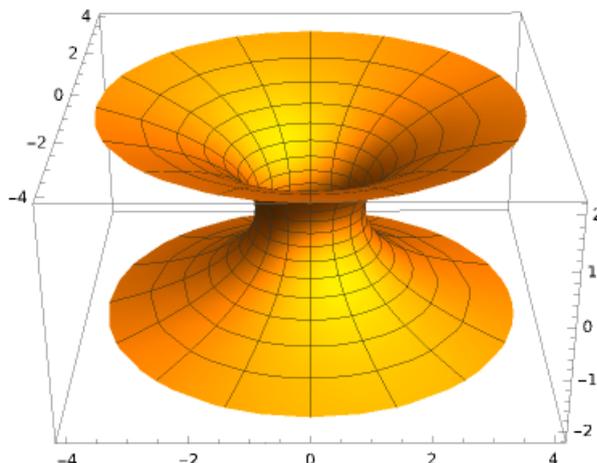


Figura 3.2: Gráfico de un Catenoide.

Si mantenemos el tamaño de los cuellos fijos y admitimos que el ángulo se vuelva vertical, es decir, perpendicular a los fines, esta familia se degenera en un par de helicoides orientados de forma opuesta. Por otro lado si, el ángulo se hace cero, la familia se degenera a un catenoide.

3.3.7. Superficie de Enneper

En 1864, Enneper, descubrió una superficie mínima parametrizada por

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(s - \frac{s^3}{3} + st^2, -t - s^2t + \frac{t^3}{3}, s^2 - t^2 \right),$$

donde $s, t \in \mathbb{R}$. A diferencia de los ejemplos anteriores, la superficie de Enneper no es encajada. La curvatura total de esta superficie es -4π , Osserman probó que una superficie mínima completa el \mathbb{R}^3 con curvatura total -4π es o bien el catenoide o la superficie de Enneper.

3.4. Teorema de Bernstein

El problema de Bernstein se puede enunciar de la siguiente forma.

Si el gráfico de una función en \mathbb{R}^{n-1} es una superficie mínima en \mathbb{R}^n , entonces, ¿es la función lineal?

Bernstein probó en 1914 que es verdadero para $n = 3$, es decir, mostró que si consideramos el gráfico de una función real en \mathbb{R}^2 que también es una superficie mínima en \mathbb{R}^3 entonces debe ser un plano.

Actualmente se sabe que este teorema se cumple si n es a lo más 8 y se sabe que es falso si n es a lo menos 9.

Para dar la demostración al teorema de Bernstein, en dimensión 2, primero obtendremos cotas para la curvatura total de un gráfico mínimo.

Lema 3.1. Si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución a la ecuación de superficie mínima, entonces para cada función Lipschitz no negativa η con soporte contenido en $\Omega \times \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\int_{Graph_u} |A|^2 \eta^2 \leq C \int_{Graph_u} |\nabla_{Graph_u} \eta|^2.$$

Donde $|A|^2$ representa la norma al cuadrado de la segunda forma fundamental y C es una constante.

Demostración. Consideremos ω la dos-forma de área en la esfera unitaria S^2 . Como la semi-esfera superior es contractible, entonces se tiene que ω es una forma exacta, es decir, podemos encontrar una 1-forma α en la semi-esfera superior de tal forma que $d\omega = \alpha$.

Sea N el mapeo de Gauss. Como Σ es una superficie mínima tenemos que

$$|A|^2 = k_1^2 + k_2^2 = -2k_1k_2 = -2K = -2\det(dN),$$

aquí k_1 y k_2 representan la curvaturas principales y K representa la curvatura de Gauss. Luego usando esto sumado al hecho que el diferencial conmuta con el pullback, obtenemos

$$|A|^2 dArea = -2K dArea = 2N^*\omega = 2dN^*\alpha.$$

Ahora como α es una 1-forma existe una constante C_α tal que

$$|N^*\alpha| \leq C_\alpha |dN| = C_\alpha |A|.$$

Sea $\Sigma = Graph_u$ y considerando el teorema de Stokes, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \eta^2 |A|^2 dArea &= 2 \int_{\Sigma} \eta^2 dN^*\alpha \\ &= -4 \int_{\Sigma} \eta d\eta \wedge N^*\alpha \\ &\leq 4C_\alpha \int_{\Sigma} \eta |\nabla_{\Sigma} \eta| |A| dArea \\ &\leq 4C_\alpha \left(\int_{\Sigma} \eta^2 |A|^2 dArea \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \eta|^2 dArea \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Notemos que en esta última desigualdad usamos Cauchy-Schwarz. Finalmente elevando al cuadrado y dividiendo cada lado de la desigualdad por $\int_{\Sigma} \eta^2 |A|^2 dArea$ obtenemos

$$\int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \eta|^2 dArea \leq 16C_\alpha^2 \int_{\Sigma} |\nabla_{\Sigma} \eta|^2 dArea.$$

Finalizando así la demostración. \square

Con el lema recién probado podemos acotar la curvatura total de una superficie por la energía de una cierta función η . Esto será importante a la hora de probar el teorema de Bernstein, pero primero debemos construir la función η adecuada para este propósito.

Sea m un entero fijo y suficientemente grande, definamos η en $B_{e^{2m}} \subset \mathbb{R}^2$ mediante

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq e^m, \\ 2 - \frac{\log(r)}{m} & \text{si } e^m < r \leq e^{2m} \\ 0 & \text{si } e^{2m} < r, \end{cases}$$

donde $r = |x|$, podemos notar que $|\nabla \eta| = \frac{1}{mr}$, es radial, entonces tenemos que la energía de η está dada por

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \eta|^2 dA &= 2\pi \int_{e^m}^{e^{2m}} \frac{1}{m^2 r^2} r dr \\ &= \frac{2\pi}{m^2} \int_{e^m}^{e^{2m}} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{2\pi}{m} \end{aligned}$$

Usando el lema anterior sumado a esta construcción de η obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1. Si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución a la ecuación de superficie mínima, $\kappa > 1$ y Ω contiene una bola de radio κR centrada en el origen, entonces

$$\int_{B_{\sqrt{\kappa}R} \cap \text{Graph}_u} |A|^2 dA \leq \frac{C}{\log(\kappa)}.$$

Como consecuencia de este corolario podemos dar la demostración al teorema de Bernstein.

Teorema 3.1 (Bernstein). Si $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución entera a la ecuación de superficie mínima, entonces, $u(x, y) = ax + by + c$, es decir, es un plano.

Demostración. Por el corolario anterior tenemos que para cada $R > 1$ se tiene que

$$\int_{B_{\sqrt{R}} \cap \text{Graph}_u} |A|^2 dA \leq \frac{C}{\log(R)}.$$

Tomando límite $R \rightarrow \infty$ podemos concluir que $|A|^2 \equiv 0$ y así $u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = 0$, luego $u(x, y) = ax + by + c$ para algunas constantes a, b, c . \square

3.5. Superficies mínimas en \mathbb{H}^{n+1}

Como vimos, una subvariedad es mínima si su curvatura media es idénticamente cero. Ahora nos interesa saber si los ejemplos que encontramos anteriormente de superficies mínimas siguen siendo mínimas en \mathbb{H}^{n+1} , para esto necesitamos conocer una ecuación para superficies mínimas y gracias a Barbosa en [2] sabemos cómo se verá esta ecuación para el caso de gráficos horizontales.

Como se mostró en el teorema 2.5, si $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, donde D es un conjunto en el plano P representado por $x_0 = 0$, entonces la curvatura media de el gráfico de esta función está dado por

$$H = x_n \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) - \frac{nu_n}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

Por lo tanto tenemos que la ecuación para gráficos horizontales que son superficies mínimas está dada por

$$x_n \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) - \frac{nu_n}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0.$$

Una discusión sobre la existencia de soluciones para esta ecuación está presente en [3] y [2].

A continuación veremos si alguna de las soluciones mostradas para el caso de \mathbb{R}^3 siguen siendo soluciones en \mathbb{H}^{n+1} . Para ayudarnos en cuanto a los cálculos, notemos que podemos escribir la ecuación como

$$x_n h - \frac{nu_n}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0,$$

donde h representa la curvatura media de la superficie en sentido Euclideo, que en nuestro caso sabemos que será igual a cero, pues queremos ver si superficies mínimas en \mathbb{R}^3 siguen funcionando en este caso, es decir, buscamos que

$$\frac{nu_n}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0.$$

Con este resultado tenemos que los únicos ejemplos que siguen siendo superficies mínimas en este espacio son los planos, sin embargo, de la ecuación desprende que

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

es decir, las soluciones que podemos obtener fácilmente son los que denominamos planos verticales.

La teoría de superficies mínimas en \mathbb{H}^{n+1} está bastante desarrollada, por ejemplo, se tiene existencia superficies mínimas para gráficos verticales [22], también hay bastante estudio de superficies mínimas en 3-variedades como puede verse en [6] y [14], también se pueden encontrar trabajos relacionados a la estabilidad de hipersuperficies mínimas en espacio hiperbólico en [23].

3.6. Teorema de Bernstein en \mathbb{H}^{n+1}

Una vez que estudiamos las superficies mínimas en \mathbb{H}^{n+1} nos gustaría ver si se cumplen algunas propiedades y teoremas que se cumplen en \mathbb{R}^{n+1} , uno de ellos es el Teorema de Bernstein, es decir, queremos saber si en \mathbb{H}^{n+1} las superficies mínimas que son gráficos completos son planos. Antes de responder a esto, necesitamos algunas definiciones preliminares para entender el teorema que nos habla de esto.

Definición 3.6 (Horofera). *En geometría hiperbólica se tiene que una horoesfera es la frontera de una horobola, es decir, es el límite de una sucesión creciente de bolas compartiendo un hiperplano tangente y su punto de tangencia. En dimensión 2, una horoesfera es llamada un horociclo.*

Definición 3.7 (Frontera asintótica de Σ en \mathbb{H}^{n+1}). *La compactificación de \mathbb{H}^{n+1} está dada por $\overline{\mathbb{H}^{n+1}} = \mathbb{H}^{n+1} \cup \mathbb{S}^n(\infty)$, donde los puntos de $\mathbb{S}^n(\infty)$ puede ser vistos como clases de rayos geodésicos en \mathbb{H}^{n+1} , dos rayos se identifican si la distancia entre ellos tiende a cero en el infinito. Si Σ es una subvariedad en \mathbb{H}^{n+1} , la frontera asintótica de Σ está definida como $\overline{\Sigma} \cap \mathbb{S}^n(\infty)$ y se denota como $\partial_\infty \Sigma$.*

Como mencionamos anteriormente, estamos interesados en saber si el Teorema de Bernstein se cumple o no en este espacio. La respuesta puede ser obtenida del trabajo de Do Carmo y Lawson, quienes demostraron en [8] que el teorema no se cumple en \mathbb{H}^{n+1} y esto se ve en el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sea S una hipersuperficie completa propiamente encajada en \mathbb{H}^{n+1} , con curvatura media constante y exactamente un punto en la frontera asintótica. Entonces S es una horoesfera.*

Llegado a este punto podemos notar que las superficies mínimas se comportan de manera distinta en estos espacios, vimos que los ejemplos obtenidos en \mathbb{R}^3 no son ejemplos de superficies mínimas en \mathbb{H}^3 y que el Teorema de Bernstein que se cumple en \mathbb{R}^n , con $n \leq 8$ pero no se cumple en \mathbb{H}^{n+1} .

Capítulo 4

Flujo por curvatura media en \mathbb{R}^{n+1} .

El flujo por curvatura media es uno de los flujos geométricos de una hipersuperficie dentro de una variedad Riemanniana. El flujo por curvatura media ha sido largamente estudiado teniendo diversas aplicaciones en matemática o incluso en física. Durante el presente capítulo haremos una introducción a este flujo mostrando definiciones formales, soluciones explícitas y daremos una mirada a lo que son singularidades para este flujo estudiando un tipo de soluciones al flujo que nos ayudarán a analizar dichas singularidades, todo esto en el caso de codimensión 1. Para esto nos apoyaremos en lo expuesto en [18] y en [1].

Definición 4.1 (Flujo por curvatura media). *Sea M una variedad Riemanniana de dimensión n , sea $X_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión suave. El flujo por curvatura media de X_0 es una familia de inmersiones $X : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que satisface el sistema de ecuaciones parciales*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(p, t) &= H(p, t)\nu(p, t) \\ X(p, 0) &= X_0(p), \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $H(p, t)$ representa la curvatura media de la superficie $X_t = X(\cdot, t)$ en el punto p y $\nu(p, t)$ representa el vector normal unitario a la superficie X_t en el punto p .

Como podemos darnos cuenta, una superficie puede ser descrita mediante distintas parametrizaciones, por lo tanto, si la ecuación (4.1) fuese geométrica, cualquier reparametrización debería ser una solución de (4.1). Sin embargo, esto requiere mayor análisis y será estudiado en la siguiente sección.

4.1. Invariancia geométrica bajo perturbaciones tangenciales

Como sugiere el título de esta sección veremos que el flujo por curvatura media puede presentar variaciones en la dirección tangencial a la hipersuperficie pero que, sin embargo, esto no afectará a la forma de esta durante el movimiento. Formalmente tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.1. *Si una familia $X : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de inmersiones suaves satisface el sistema de ecuaciones en derivadas parciales*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(p, t) &= H(p, t)\nu(p, t) + \varphi(p, t) \\ X(p, 0) &= X_0(p), \end{cases} \quad (4.2)$$

donde φ es un campo vectorial suave a lo largo de M y que depende del tiempo, de tal manera que $\varphi(p, t) \in dX_t(T_p M)$ para cada p en M y para cada tiempo $t \in [0, T)$, entonces localmente alrededor de cada punto y para cada tiempo, existe una familia de reparametrizaciones de los mapeos X_t que

satisfaces (4.1).

Si la hipersuperficie M es compacta, se puede encontrar de manera única una familia de reparametrizaciones globales de X_t para $t \geq 0$ dejando la inmersión inicial X_0 sin modificar y satisfaciendo el sistema (4.1).

Conversamente, si se tiene una familia de hipersuperficies $X : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que evolucionan y que pueden ser globalmente reparametrizadas para $t \geq 0$ de tal manera que se mueven por curvatura media, entonces el mapeo X satisface (4.2) para algún campo vectorial φ que depende del tiempo con $\varphi \in dX_t(T_pM)$.

Demostración. Para la demostración de esta proposición, primero asumiremos que M es compacta y encontraremos una reparametrización global y suave de los conjuntos que están evolucionando de manera que se pueda verificar la definición.

Por principio de tangencia, tenemos que el campo vectorial en M definido por $Y(q, t) = -[dX_t]^{-1}(\varphi(q, t))$ está bien definido y es suave.

Sea $\psi : M \times [0, T] \rightarrow M$ una familia de difeomorfismos de M con $\psi(p, 0) = p$ para cada $p \in M$ y satisfaciendo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(p, t) = Y(\psi(p, t), t). \quad (4.3)$$

Podemos notar que esta familia existe y es única por teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias, esto sumando la condición inicial $\psi(\cdot, 0) = Id_M$, de esta manera se tendrá que el mapeo X_0 no será modificado.

Considerando las reparametrizaciones $\tilde{X}(p, t) = X(\psi(p, t), t)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}(p, t) &= \frac{\partial X}{\partial t}(\psi(p, t), t) + dX_t(\psi(p, t)) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(p, t) \right) \\ &= H(\psi(p, t), t)\nu(\psi(p, t), t) + \varphi(\psi(p, t), t) + dX_t(\psi(p, t))(Y(\psi(p, t), t)) \\ &= H(\psi(p, t), t)\nu(\psi(p, t), t) + \varphi(\psi(p, t), t) \\ &\quad - dX_t(\psi(p, t))([dX_t(\psi(p, t))]^{-1}(X(\psi(p, t), t))) \\ &= H(\psi(p, t), t)\nu(\psi(p, t), t) \\ &= \tilde{H}(p, t)\tilde{\nu}(p, t). \end{aligned}$$

Así tenemos que \tilde{X} satisface el sistema (4.1) y $\tilde{X}_0 = X_0$, por lo tanto queda demostrada la primera afirmación.

Este cálculo también muestra que si $\tilde{X}(p, t) = X(\psi(p, t), t)$ satisface el sistema (4.1), la familia de difeomorfismos $\psi : M \times [0, T] \rightarrow M$ debe resolver la ecuación (4.3).

Para el caso no compacto, se debe trabajar de manera local en cuanto a espacio y tiempo, resolviendo el sistema de ecuaciones ordinarias anterior en algún intervalo de tiempo positivo en un abierto $\Omega \subset M$ con clausura compacta, entonces se obtiene una solución al sistema (4.1) en un conjunto abierto, posiblemente más pequeño que Ω y en algún intervalo de tiempo.

Cosideremos ahora que el mapeo reparametrizado $\tilde{X}(p, t) = X(\psi(p, t), t)$ es el flujo por curvatura media. Derivando obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}(p, t) &= \frac{\partial X}{\partial t}(\psi(p, t), t) + dX_t(\psi(p, t)) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(p, t) \right) \\ &= \tilde{H}(p, t)\tilde{\nu}(p, t) \\ &= H(\psi(p, t), t)\nu(\psi(p, t), t), \end{aligned}$$

esto nos dice que

$$\frac{\partial X}{\partial t}(q, t) = H(q, t)\nu(q, t) - dX_t \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(\psi^{-1}(q), t) \right),$$

para cada $q \in M$ y para $t \in [0, T)$. Entonces la última afirmación de la proposición se obtiene escribiendo $\varphi(q, t) = -dX_t(q) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(\psi^{-1}(q), t) \right)$ \square

Corolario 4.1. *Si una familia de hipersuperficies $X_t = X(\cdot, t)$ satisface $\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \nu \rangle = H$, entonces puede ser localmente reparametrizada a un flujo por curvatura media. Si M es compacta, esto puede ser hecho de manera única por reparametrizaciones globales sin modificar X_0 .*

Debido a la propiedad que acabamos de estudiar podemos pensar en el flujo por curvatura media de hipersuperficies considerándolas como subconjuntos de \mathbb{R}^{n+1} y olvidándonos un poco de sus parametrizaciones. En el caso de que las hipersuperficies sean encajadas sabemos que podemos identificar M con su imagen $X_t(M)$ y en el caso que no sean encajadas también funciona esta identificación localmente sabiendo que las inmersiones son localmente encajes.

Ahora podemos dar una definición más geométrica para el flujo por curvatura media.

Definición 4.2. *Diremos que una familia de inmersiones suaves $X_t : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ para $t \in [0, T)$ es un flujo por curvatura media, si localmente en cada punto existe una familia de reparametrizaciones que satisfacen el sistema (4.1).*

4.2. Existencia de soluciones para un tiempo corto del flujo

Ahora que conocemos la ecuación para el flujo por curvatura media, la pregunta que aparece inmediatamente es acerca de la existencia de soluciones para esta ecuación y sabemos que hay solución para un tiempo corto y esto se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Consideremos una hipersuperficie inicial suave y compacta para el flujo por curvatura media, dada por una inmersión $X_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces existe una única solución al sistema*

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(p, t) &= H(p, t)\nu(p, t) \\ X(p, 0) &= X_0(p), \end{cases}$$

para algún intervalo de tiempo positivo. Se tendrá que la solución depende continuamente de la inmersión inicial X_0 en C^∞ .

Este teorema ha sido demostrado de más de una manera.

La primera demostración que fue publicada fue gracias a Gage y Hamilton (ver [12]) quienes usaron el teorema de la función inversa de Nash-Moser, el cual es una herramienta fuerte para analizar existencia de soluciones de sistemas de EDP's parabólicas. Esta demostración funciona para el movimiento por curvatura media de una subvariedad compacta inmersa de cualquier codimensión en una variedad Riemanniana.

En el presente trabajo seguiremos la demostración que dieron Huisken y Polden en [15], lo que hicieron fue reducir un sistema parabólico degenerado a una ecuación parabólica no degenerada, representando las hipersuperficies que están evolucionando como gráficos sobre la hipersuperficie inicial en una vecindad tubular. Esta demostración se puede pensar como la más natural entre las que nombramos y de hecho puede ser adaptada a otros flujos de hipersuperficies y se puede generalizar para cualquier co-dimensión y para cualquier variedad ambiente.

Demostración. Sea $X_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión suave de una n -variedad compacta. Inicialmente asumiremos que la superficie es encajada, así podemos definir de forma global y suave el campo normal unitario interior ν_0 . Ahora estamos buscando una solución suave $X : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ para el problema parabólico,

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(p, t) &= H(p, t)\nu(p, t) \\ X(p, 0) &= X_0(p), \end{cases}$$

para algún tiempo $T > 0$. Como estamos interesados en encontrar soluciones para un tiempo corto, podemos olvidarnos de la condición de inmersión, es decir, dX_t es no singular, pues esto se tendrá

automáticamente por la suavidad de la solución y por el hecho de que X_0 es una inmersión compacta, cuando t está cerca de cero.

Tal y como hemos visto anteriormente, si encontramos soluciones para el problema

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(p, t), \nu(p, t) \right\rangle &= H(p, t) \\ X(p, 0) &= X_0(p), \end{cases} \quad (4.4)$$

la demostración estaría concluida.

Consideremos una vecindad tubular regular $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid d(x, X_0(M)) < \varepsilon\}$, la cual existe para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño. Notemos que para definir esta vecindad tubular estamos usando que M es compacta. Cuando decimos que esta vecindad es regular significa que el mapeo $\Psi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$, definido por, $\Psi(p, s) = X_0(p) + s\nu_0(p)$, es un difeomorfismo. Cualquier deformación pequeña de $X_0(M)$ dentro de Ω puede ser representada como el gráfico de una función altura f sobre $X_0(M)$ y conversamente, para cualquier función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ podemos asociar la hipersuperficie $M_f \subset \Omega$ dada por $X(p) = X_0(p) + f(p)\nu_0(p)$. Ahora queremos calcular la ecuación para la función suave f anterior, que depende del tiempo, de tal manera que X satisfaga el sistema (4.4).

Notemos que como $f(\cdot, 0)$ da como resultado la hipersuperficie inicial X_0 , tenemos que $f(p, 0) = 0$ para cada $p \in M$. Ahora procedemos a calcular la métrica y la normal unitaria de las hipersuperficies perturbadas, para simplicidad de notación denotaremos $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, también denotaremos como h_{ij} a los coeficientes de la segunda forma fundamental de M . entonces tenemos que

$$\begin{aligned} g_{ij}(p, t) &= \left\langle \frac{\partial X(p, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial X(p, t)}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial X_0}{\partial x_i} + f_i \nu_0 - \sum_{k,l} f h_{il}(p, 0) g^{lk} \frac{\partial X_0}{\partial x_k}, \frac{\partial X_0}{\partial x_j} + f_j \nu_0 - \sum_{s,m} f h_{js}(p, 0) g^{sm} \frac{\partial X_0}{\partial x_m} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial X_0}{\partial x_i} - \sum_k f h_{ik}(p, 0) \frac{\partial X_0}{\partial x_k}, \frac{\partial X_0}{\partial x_j} - \sum_s f h_{js}(p, 0) \frac{\partial X_0}{\partial x_s} \right\rangle + f_i f_j \\ &= g_{ij}(p, 0) - 2f(p, t) h_{ij}(p, 0) + f^2(p, t) h_{ik} g^{kl} h_{lj}(p, 0) + f_i(p, t) f_j(p, t). \end{aligned}$$

Cabe mencionar que en estos cálculos usamos la ecuaciones de Gauss-Weingarten. Esto es, consideramos una hipersuperficie $X : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial X}{\partial x_k} + h_{ij} \nu \\ \frac{\partial \nu}{\partial x_i} &= - \sum_{s,l} h_{il} g^{ls} \frac{\partial X}{\partial x_s}. \end{aligned}$$

En estas ecuaciones h_{ij} representa los coeficientes de la segunda forma fundamental de M y g^{ij} representan los coeficientes de la inversa de la primera forma fundamental de M .

Volviendo a la demostración, tenemos que los vectores que generan el espacio tangente son

$$\frac{\partial X(p, t)}{\partial x_i} = \frac{\partial X_0}{\partial x_i} + f_i(p, t) \nu_0(p) - \sum_{k,l} f(p, t) h_{il} g^{lk}(p, 0) \frac{\partial X_0}{\partial x_k}.$$

Por lo tanto tendremos que el vector normal unitario está dado por

$$\begin{aligned} \nu(p, t) &= \frac{\nu_0(p) - \left\langle \nu_0, \frac{\partial X}{\partial x_i}(p, t) \right\rangle g^{ij} \frac{\partial X}{\partial x_j}(p, t)}{\left| \nu_0(p) - \left\langle \nu_0, \frac{\partial X}{\partial x_i}(p, t) \right\rangle g^{ij} \frac{\partial X}{\partial x_j}(p, t) \right|} \\ &= \frac{\nu_0 - f_i g^{ij} \frac{\partial X}{\partial x_j}}{\left| \nu_0 - f_i g^{ij} \frac{\partial X}{\partial x_j} \right|} \end{aligned}$$

A continuación calcularemos la segunda forma fundamental, esto recordando que estamos en búsqueda de soluciones para la ecuación (4.4). La segunda forma fundamental está dada por

$$\begin{aligned} -h_{ij}(p, t) &= \left\langle \nu(p, t), f_{ij}\nu_0 + \frac{\partial^2 X_0}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k,s} f_i(p, t) h_{is}(0) g^{sk} \frac{\partial X_0}{\partial x_k} - \sum_{l,t} f_j(p, t) h_{it}(0) g^{tl} \frac{\partial X_0}{\partial x_l} + f(p, t) \frac{\partial^2 \nu_0}{\partial x_j \partial x_i} \right\rangle \\ &= \langle \nu(p, t), f_{ij}(p, t) \nu_0 \rangle + P_{ij}(p, f(p, t), \nabla f(p, t)), \end{aligned}$$

donde P_{ij} es una forma suave cuando f y ∇f son suaves, es decir, lo es para cuando t es pequeño. Ahora si calculamos en coordenadas normales alrededor de $p \in M$ con respecto a la métrica $g(t)$ tenemos que la curvatura media está dada por

$$\begin{aligned} H(p, t) &= \sum_{ij} g^{ij}(p, t) h_{ij}(p, t) \\ &= \langle \nu(p, t), \nu_0(p, t) \rangle f_{ij}(p, t) g^{ij}(p, t) + P_{ij}(p, f(p, t), \nabla f(p, t)) g^{ij}(p, t) \\ &= \langle \nu(p, t), \nu_0(p, t) \rangle \Delta_{g(t)} f + P(p, f(p, t), \nabla f(p, t)), \end{aligned}$$

donde P es una función suave, esto asumiendo que f y ∇f son pequeños.

Ahora podemos escribir la condición $\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \nu \rangle = H$, en términos de la función f , así obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(p, t)}{\partial t} \langle \nu_0, \nu(p, t) \rangle &= \left\langle \frac{\partial X(p, t)}{\partial t}, \nu(p, t) \right\rangle \\ &= H(p, t) \\ &= \langle \nu(p, t), \nu_0(p) \rangle \Delta_{g(t)} f + P(p, f(p, t), \nabla f(p, t)), \end{aligned}$$

si dividimos a ambos lados por $\langle \nu(p, t), \nu_0(p) \rangle$, lo cuál podemos asumir distinto de cero para un pequeño tiempo positivo, entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(p, t)}{\partial t} &= \Delta_{g(t)} f + \frac{P(p, f(p, t), \nabla f(p, t))}{\langle \nu(p, t), \nu_0(p) \rangle} \\ &= \Delta_{g(t)} f + Q(p, f(p, t), \nabla f(p, t)), \end{aligned}$$

donde Q es una función suave cuando sus argumentos son pequeños. También tenemos que, como los coeficientes de $\Delta_{g(t)}$ convergen suavemente a los coeficientes de $\Delta_{g(0)}$ cuando t se va a cero, para t pequeño los operadores $\Delta_{g(t)}$ son estrictamente uniformemente elípticos. Entonces si la función suave $f : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ resuelve la ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(p, t) &= \Delta_{g(t)} f + Q(p, f, \nabla f) \\ f(p, 0) &= f_0(p), \end{cases} \quad (4.5)$$

se tiene que $X(p, t) = X_0(p, t) + f(p, t)\nu_0(p)$ es una solución del sistema (4.4) para la superficie compacta encajada X_0 en algún tiempo positivo.

Conversamente, si tenemos un flujo por curvatura media X de X_0 y para tiempo pequeño las hipersuperficies X_t son encajadas en la vecindad tubular Ω de $X_0(M)$, entonces la función $f(p, t) = \pi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}[\Psi^{-1}(X(p, t))]$ es suave y $f(p, 0) = \pi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}[\Psi^{-1}(X_0(p))] = \pi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(p, 0) = 0$, donde $\pi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}$ es el mapeo que proyecta en el segundo factor de $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, luego, por los cálculos anteriores f debe satisfacer la ecuación (4.5).

La ecuación en derivadas parciales que obtuvimos es una ecuación estrictamente parabólica cuasilineal, en particular, es no degenerada, entonces podemos aplicar la teoría clásica para EDP's parabólicas cuasilineales. La demostración de un teorema general de existencia, unicidad y dependencia continua de una solución para una clase de problemas, incluyendo (4.5) puede ser encontrada en el Apéndice A en [15].

Usando la solución única del problema (4.5) consideramos el mapeo asociado $X = X_0 + f\nu_0$, posiblemente restringiendo el intervalo de tiempo de tal manera que X_t sean todas immersiones y aplicando el Corolario 4.1 para reparametrizar globalmente la hipersuperficie de una única manera para obtener una solución al sistema (4.1). Esta relación es uno a uno mientras nos mantengamos dentro de la vecindad tubular regular Ω , así existencia, unicidad, suavidad y dependencia continua de la condición inicial de una solución del sistema (4.1) se sigue de un resultado análogo para EDP's parabólicas.

Si la hipersuperficie no es encajada, es decir, tiene intersecciones, como localmente una inmersión es un encaje, solo se debe tener un poco más de cuidado en la definición de la función altura asociada al flujo por curvatura media, de tal forma que la correspondencia entre el mapeo X y su función altura f sea una biyección, entonces los mismos argumentos se mantienen para el caso no encajado. \square

Hacemos especial énfasis que el teorema que acabamos de demostrar solo sirve para el caso en que la hipersuperficie inicial sea compacta, en el caso de que no lo sea, se necesitan más condiciones para probar existencia y unicidad de las soluciones. Una posible condición puede ser tener un control uniforme de la norma de la segunda forma fundamental de la hipersuperficie inicial. De hecho, mediante estimaciones interiores Ecker y Huisken mostraron que la condición de ser localmente uniformemente Lipchitz para la hipersuperficie inicial es suficiente para demostrar existencia en un tiempo corto. Otra consecuencia conocida de su trabajo está en el estudio de la evolución de gráficos enteros por curvatura media, por ejemplo, mostraron que el gráfico de una función $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que es entera, tiene una evolución por curvatura media para todo tiempo, manteniéndose siempre como un gráfico, para detalles de esto puede revisar [10] y [11].

4.3. Soluciones explícitas

4.3.1. Superficies mínimas

Como vimos anteriormente la curvatura media en la superficies mínimas es $H \equiv 0$, estas superficies son soluciones triviales para el flujo por curvatura media, cabe mencionar que son soluciones estacionarias, es decir, son soluciones que no evolucionan con el tiempo. Así tenemos como primeras soluciones explícitas al flujo todas las superficies mínimas mostradas en el capítulo anterior.

4.3.2. Esferas

Una idea que podría nacer naturalmente al estudiar el flujo por curvatura media es suponer que se parte de una esfera y tratar de intuir como se moverá bajo este flujo. Una suposición razonable para este caso es que para cada tiempo se seguirá teniendo una esfera. Sin pérdida de generalidad, supongamos que nuestra esfera de radio r está centrada en el origen. Como estamos haciendo lo suposición que la superficie evoluciona como una esfera para cada tiempo lo único que varía es el radio de esta, entonces podemos parametrizarlas mediante $X(x, t) = r(t)x$, con $x \in \mathbb{S}^n$. De aquí tendremos que el vector normal exterior está dado por $\nu(x, t) = x$, mientras que la curvatura media está dada por $H(x, t) = \frac{n}{r(t)}$, por lo tanto tendremos que

$$\frac{dr(t)}{dt}x = \frac{\partial X}{\partial t}(x, t) = -H(x, t)\nu(x, t) = \frac{-nx}{r(t)},$$

por lo tanto tendremos que X_t satisface el flujo por curvatura media si y solo si

$$\frac{dr(t)}{dt} = \frac{-n}{r(t)},$$

lo cual es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Luego si fijamos una condición inicial $r(0) = r_0$, tendremos que la solución es

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 - 2nt}.$$

Así tenemos que las esferas

$$X(x, t) = \sqrt{r_0^2 - 2nt} x,$$

son soluciones al flujo por curvatura media con $x \in \mathbb{S}^n$ y notamos que no existen para cualquier tiempo t , es fácil notar que $t \in \left[0, \frac{r_0^2}{2n}\right)$. También es fácil ver que si $t \rightarrow T = \frac{r_0^2}{2n}$, entonces el radio converge a cero y que por lo tanto las esferas se vuelven un punto, a este suceso lo denominaremos una singularidad, más adelante desarrollaremos esto con más profundidad. Esta evolución que acabamos de encontrar para las esferas es lo que llamaremos solución homotéticas para el flujo por curvatura media, es decir, son soluciones que evolucionan solamente por contracción de la hipersuperficie inicial.

4.4. Soluciones autosimilares

Como vimos con el ejemplo de las esferas en la sección anterior es posible encontrar soluciones al flujo por curvatura media que evolucionen manteniendo su forma, es decir, que geoméricamente preserva la misma hipersuperficie salvo por alguna transformación. Veremos cómo estas soluciones autosimilares nos serán de ayuda al momento de querer estudiar flujos por curvatura media de alguna hipersuperficie y saber si es que esta desarrollará o no alguna singularidad.

4.4.1. Soluciones homotéticas por contracción

Ya vimos un ejemplo de este tipo de solución autosimilar, las esferas, sin embargo se puede hablar más en general de este tipo de soluciones.

Proposición 4.2. *Si una hipersuperficie $X_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisface la ecuación*

$$H(p) + \lambda \langle X_0(p) - x_0, \nu_0(p) \rangle = 0$$

en cada $p \in M$ y para alguna constante $\lambda > 0$ y algún $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces dicha hipersuperficie genera una flujo por curvatura media homotéticamente contractivo.

Conversamente, si $X : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es un flujo por curvatura media homotéticamente contractivo alrededor de algún punto $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ en un intervalo de tiempo maximal, entonces H es idénticamente cero o satisface

$$H(p, t) + \frac{\langle X(p, t) - x_0, \nu(p, t) \rangle}{2(T - t)} = 0,$$

para cada punto $p \in M$ y cada tiempo $t \in [0, T)$.

Demostración. Primero supongamos que la hipersuperficie $X_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisface la ecuación

$$H(p) + \lambda \langle X_0(p) - x_0, \nu_0(p) \rangle = 0,$$

para cada $p \in M$, para algún $\lambda > 0$ y para $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Queremos demostrar que a partir de X_0 se genera una solución homotética contractiva para el flujo por curvatura media.

Consideremos el flujo homotético contractivo

$$X(p, t) = x_0 + \sqrt{1 - 2\lambda t} (X_0(p) - x_0),$$

notemos que se tiene

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(p, t), \nu(p, t) \right\rangle = \frac{-\lambda \langle X_0(p) - x_0, \nu_0(p) \rangle}{\sqrt{1 - 2\lambda t}} = \frac{H(p, 0)}{\sqrt{1 - 2\lambda t}} = H(p, t).$$

Por esta igualdad obtenida, usando el Corolario 4.1 sabemos que esta familia de hipersuperficies evoluciona por curvatura media con X_0 como hipersuperficie inicial.

Para el converso, si las hipersuperficies que evolucionan homotéticamente por contracción

$$X(p, t) = x_0 + f(t)(X_0(p) - x_0),$$

es un flujo por curvatura media, para alguna función $f(t) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo $f(0) = 1$, $\lim_{t \rightarrow T} f(t) = 0$ y $f'(t) \leq 0$. Por el corolario 4.1 tenemos que se cumple $\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \nu \rangle = H$, entonces

$$\begin{aligned} H(p, 0) &= f(t)H(p, t) \\ &= f(t) \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(p, t), \nu(p, t) \right\rangle \\ &= f(t)f'(t) \langle X_0(p) - x_0, \nu(p, t) \rangle \\ &= f'(t) \langle X(p, t), \nu(p, t) \rangle. \end{aligned}$$

Ahora si $H \neq 0$ y como se tiene que $\nu(p, t) = \nu_0(p)$ se tiene que $f(t)f'(t) = C$, con C una constante, esto es ya que de las igualdades anteriores se desprende que

$$H(p, 0) = f(t)f'(t) \langle X_0(p) - x_0, \nu_0(p) \rangle.$$

Al considerar que $f(t)f'(t) = C$ tenemos una ecuación diferencial ordinaria que puede ser resuelta fácilmente y sumado a la condición inicial $f(0) = 1$, tenemos que $f(t) = \sqrt{2Ct + 1}$ y usando que $\lim_{t \rightarrow T} f(t) = 0$ se tiene que $f(t) = \sqrt{1 - \frac{t}{T}}$.

Usando esta forma que obtuvimos para f y usando la igualdad

$$f(t)H(p, t) = f'(t) \langle X(p, t) - x_0, \nu(p, t) \rangle.$$

Y así finalmente tenemos que se satisface la ecuación

$$H(p, t) + \frac{\langle X(p, t) - x_0, \nu(p, t) \rangle}{2(T - t)} = 0,$$

y por lo tanto concluimos la demostración de ambas afirmaciones. \square

Es posible mostrar que aplicando movimientos rígidos y haciendo reescalamientos, la ecuación satisfecha en (4.2) puede ser escrita como $H + \langle X_0, \nu_0 \rangle = 0$, por lo tanto encontrar soluciones a esta ecuación es equivalente a encontrar soluciones homotéticas contractivas para el flujo por curvatura media.

Así como tenemos homotecias contractivas, también es posible encontrar soluciones homotéticas expansivas al flujo por curvatura media, las cuales pueden ser caracterizadas por la misma ecuación que las contractivas, es decir, $H + \lambda \langle X_0, \nu_0 \rangle = 0$ con la diferencia que para este caso se tendrá que $\lambda < 0$. Estas soluciones serán no compactas.

4.4.2. Soluciones por traslación

Otra familia notable de hipersuperficies que evolucionan por curvatura media son aquellas que son generadas por traslación, es decir, buscaremos hipersuperficies que durante su flujo no vean modificada su forma y solo se trasladen en una dirección fija. Este tipo de solución también pueden ser caracterizadas como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 4.3. *Si una hipersuperficie inicial $X_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisface la ecuación $H(p) = \langle v, \nu_0(p) \rangle$, para cada $p \in M$ y para algún vector constante $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces dicha hipersuperficie genera un flujo por curvatura media que evoluciona por traslación.*

Conversamente, si $X : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es un flujo por curvatura media que evoluciona por traslación, entonces existe un vector $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, tal que, $H(p, t) = \langle v, \nu(p, t) \rangle$ para cada $p \in M$ y $t \in [0, T)$.

Demostración. Primero suponderemos que la hipersuperficie $X_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ satisface la ecuación

$$H(p) = \langle v, \nu_0(p) \rangle,$$

para cada $p \in M$ y para algún vector constante $v \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Ahora consideraremos el flujo que evoluciona por traslación dado por $X(p, t) = X_0(p) + tv$ y podemos ver que

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(p, t), \nu(p, t) \right\rangle = \langle v, \nu(p, t) \rangle = \langle v, \nu_0(p) \rangle = H(p, 0) = H(p, t),$$

esto pues podemos notar que $\nu(p, t) = \nu_0(p)$. Entonces por el Corolario 4.1 este flujo por traslación es un flujo por curvatura media de la hipersuperficie inicial X_0 .

Conversamente, suponemos que el flujo por traslación dado por $X(p, t) = X_0(p) + w(t)$ es un flujo por curvatura media, para alguna función suave $w : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con $w(0) = 0$, por el Corolario 4.1 tenemos que $\left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \nu \right\rangle = H$, por lo tanto se tiene que

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(p, t), \nu(p, t) \right\rangle = \langle w'(t), \nu(p, t) \rangle = H(p, t) = H(p, 0).$$

Supongamos ahora que al variar p dentro de M , la imagen del vector normal unitario ν es un subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} el cual genera todo \mathbb{R}^{n+1} , entonces como $\nu(p, t) = \nu_0(p)$ procedemos a derivar la ecuación $\langle w'(t), \nu(p, t) \rangle = H(p, 0)$ y así obtenemos que

$$\langle w''(t), \nu_0(p) \rangle = 0,$$

esto implica que $w''(t) = 0$, luego $w'(t) = v$ con $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ algún vector constante. De esta forma vemos que para X_0 se cumple la ecuación

$$H(p) = \langle v, \nu_0(p) \rangle.$$

En el caso en que el generado por el vector normal unitario no sea todo \mathbb{R}^{n+1} , se tiene que todos los espacios tangentes $T_p M$ a X_0 tienen en común un subespacio vectorial no trivial $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Descomponiendo $w(t) = l(t) + z(t)$ con $l(t) \in L$ y $z(t) \in L^\perp$, se tiene que $l(0) = z(0) = 0$ pues $w(0) = 0$, además como se tiene que $l'(t), l''(t) \in L$ y que $z'(t), z''(t) \in L^\perp$, podemos concluir que $z''(t) = 0$, luego que $z'(t)$ es constante y que por lo tanto se tiene que

$$H(p, t) = \langle w'(t), \nu(p, t) \rangle = \langle z'(t), \nu(p, t) \rangle = \langle v, \nu(p, t) \rangle,$$

donde $v = z'(t)$. Es decir, también se satisface la ecuación que buscábamos, por lo tanto finalizamos la demostración. \square

Un ejemplo conocido de un gráfico que evolucione por traslación en \mathbb{R}^2 es la curva *grim reaper*, para poder encontrarla explícitamente, se tiene que la ecuación que describe la evolución de un gráfico de una función u mediante el flujo por curvatura media es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{1 + |Du|^2} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

El detalle de como se obtiene esta ecuación se explica en la siguiente sección. Teniendo esta ecuación podemos proceder a encontrar una solución explícita por traslación para el flujo por curvatura media. Supongamos que tenemos al gráfico de una función u_0 como la hipersuperficie inicial del flujo y como estamos buscando que evolucione por traslación tendremos que el flujo va a ser de la forma $X(x, t) = (x, u_0(x) + t)$, donde $v \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces tenemos que

$$\sqrt{1 + |Du_0|^2} \operatorname{div} \left(\frac{Du_0}{\sqrt{1 + |Du_0|^2}} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} = 1,$$

y si nos restringimos al caso $n = 1$, es decir, en \mathbb{R}^2 , obtenemos la ecuación anterior puede ser escrita como

$$1 = \left(1 - \frac{u_0'^2}{1 + u_0'^2}\right) u_0'' = \frac{u_0''}{1 + u_0'^2} = \arctan'(u_0').$$

Esto último corresponde a una ecuación diferencial ordinaria que puede ser fácilmente resuelta, obtenemos que

$$u_0(x) = -\log(\cos(x)),$$

lo cuál está bien definido para $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y es la curva conocida como *grim reaper*. Luego tenemos que el flujo va a estar dado por $X(x, t) = (x, -\log(\cos(x)) + t)$.

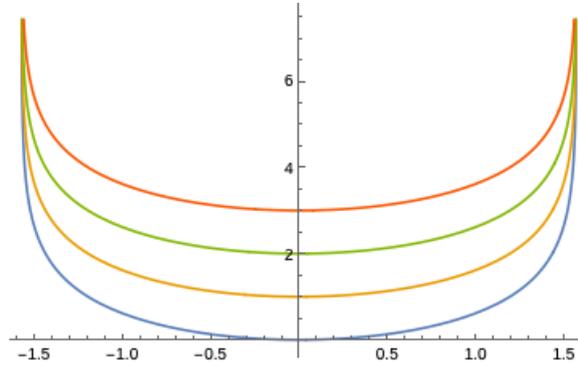


Figura 4.1: Gráfico de la curva de grim reaper.

4.5. Flujo por curvatura media para gráficos enteros

Un tipo de soluciones para el flujo por curvatura media que merece y es relevante estudiar por separado, son los gráficos enteros.

Consideremos una función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos que el gráfico de u está dado por el conjunto

$$Graph(u) = \{(x, u(x)) \mid x \in \Omega\}.$$

Cabe mencionar que, gracias al teorema de la función implícita, cada hipersuperficie suave puede ser representada localmente como un gráfico. Diremos que el gráfico es entero si u es una función entera, esto es, $\Omega = \mathbb{R}^n$.

El gráfico de una función u puede ser parametrizado mediante

$$X(x) = (x, u(x)).$$

Derivando en las direcciones x_i obtenemos que

$$\frac{\partial X}{\partial x_i} = \left(e_i, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

donde e_i representa al i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n . Entonces se tiene que $\left\{ \frac{\partial X}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial X}{\partial x_n} \right\}$ es una base para cada espacio tangente de $Graph(u)$, así tenemos que el vector normal unitario, salvo signo, está dado por

$$\nu = \frac{(Du, -1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \quad (4.6)$$

donde D representa el gradiente en sentido euclideo.

Conociendo la definición de gráfico, ahora podemos escribir la ecuación que define la evolución de esta superficie, y está dada por

$$\begin{cases} X_t(x) &= (x, u(x, t)) \\ X_0(x) &= (x, u_0(x)), \end{cases}$$

donde u_0 sería el gráfico inicial en esta evolución.

Ahora al igual que antes, tenemos que el vector normal unitario, salvo signo, a estas superficies es

$$\nu(x, t) = \frac{(Du(x, t), -1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

Podemos notar que

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} e_{n+1},$$

donde e_{n+1} representa al vector $(n+1)$ -ésimo de la base canónica de \mathbb{R}^{n+1} , luego tenemos que

$$\begin{aligned} H &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \nu \right\rangle \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} \langle e_{n+1}, \nu \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned}$$

y por lo tanto obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{1 + |Du|^2} H.$$

Además sabemos que H puede ser escrita como la divergencia del vector ν , así podemos escribir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{1 + |Du|^2} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

Así obtenemos la ecuación que describe el flujo por curvatura media para gráficos.

4.6. Singularidades

Gracias a conocer las esferas como solución del flujo por curvatura media se logró ver por primera vez en este trabajo lo que es una singularidad, en dicho caso la singularidad se trata de cuando el flujo colapsa en un punto sin embargo esto no es el caso general. Las singularidades se forman cuando la superficie que está evolucionando o una parte de ella colapsa y deja de existir. El flujo por curvatura media suele estar definido entre un tiempo 0 y un tiempo T que es el primer tiempo en que se vuelve singular. A continuación, basándonos en lo expuesto en [18], usaremos el modelo de soluciones que nos dió la esfera para estudiar cuando otras hipersuperficies se vuelven singulares, para esto necesitamos algunos preliminares que vemos a continuación.

Teorema 4.2 (Principio de comparación para el flujo por curvatura media). *Sean $X : M_1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $Y : M_2 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dos hipersuperficies que evolucionan por curvatura media, con M_1 compacta. Entonces la distancia entre estas dos hipersuperficies es no decreciente en el tiempo.*

Conociendo este teorema podemos ver como una consecuencia clara el siguiente corolario.

Corolario 4.2. Sean $X : M_1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $Y : M_2 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dos hipersuperficies que evolucionan por curvatura media, tales que, M_1 es compacta, M_2 es encajada y $X(M_1, 0)$ está estrictamente al interior de $Y(M_2, 0)$. Entonces $X(M_1, t)$ se mantiene estrictamente al interior de $Y(M_2, t)$ para todo tiempo $t \in [0, T)$

Aplicando este corolario veremos que el caso en que $Y(M_2, 0)$ es una esfera de radio R nos permite afirmar que una hipersuperficie que se encuentre dentro de la esfera deberá desarrollar una singularidad en un tiempo finito, también podremos encontrar una cota para el tiempo en que ocurre dicha singularidad.

Corolario 4.3. Sea $X : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ el flujo por curvatura media de una hipersuperficie compacta. Si $X(M_1, 0) \subset B_R(x_0)$ entonces el flujo está contenido dentro de $B_R(x_0)$ para cada tiempo y $T \leq \frac{R^2}{2n}$.

Así tenemos que el flujo por curvatura media de una hipersuperficie inmersa y compacta desarrolla una singularidad en un tiempo finito. En particular si T_{max} es el tiempo maximal en que el flujo existe, entonces $T_{max} \leq \frac{\text{diam}_{\mathbb{R}^{n+1}}^2(X(M, 0))}{2n}$.

A continuación daremos una definición más formal para singularidades, cabe mencionar que tendremos dos tipos de singularidades dependiendo de su comportamiento. Primero se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4.4. Si la segunda forma fundamental A durante el flujo por curvatura media de una hipersuperficie compacta no es acotada cuando $t \rightarrow T < \infty$, entonces se debe satisfacer la siguiente cota inferior

$$\max_{p \in M} |A(p, t)| \geq \frac{1}{\sqrt{2(T-t)}},$$

para cada $t \in [0, T)$.

Y en el caso contrario, es decir, para el caso en que la segunda forma fundamental se mantenga acotada, también podremos decir algo con respecto al desarrollo de singularidades.

Proposición 4.5. Si la segunda forma fundamental está acotada en el intervalo $[0, T)$ con $T < \infty$, entonces T no puede ser un tiempo singular para el flujo por curvatura media de una hipersuperficie compacta.

Ahora que conocemos una cota inferior para la norma de la segunda forma fundamental para los casos en que no se mantiene acotada durante el flujo por curvatura media entonces podemos dar una definición para singularidades.

Definición 4.3. Sea T el tiempo maximal de existencia del flujo por curvatura media. Si existe una constante $C > 1$ tal que se cumple la cota superior

$$\max_{p \in M} |A(p, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{2(T-t)}},$$

entonces diremos que el flujo desarrolla una singularidad de tipo I en el tiempo T .

Si tal constante no existe, es decir, se tiene

$$\limsup_{t \rightarrow T} \max_{p \in M} |A(p, t)| \sqrt{T-t} = +\infty,$$

entonces diremos que hay una singularidad de tipo II.

Capítulo 5

Flujo por curvatura media en espacio hiperbólico

Lo que hemos desarrollado en capítulos anteriores ya nos permite hablar del flujo por curvatura media en el espacio hiperbólico, más específicamente estamos interesados en encontrar soluciones autosimilares que evolucionen por dilatación y por traslación.

5.1. Soluciones por dilatación

En este caso en particular buscamos soluciones al flujo por curvatura media que sean gráficos y que evolucionen por dilatación, es decir, queremos que la ecuación que describe el flujo sea de la forma

$$\begin{cases} X(x, t) = \left(\lambda(t)u\left(\frac{x}{\lambda(t)}\right), x \right) \\ X(x, 0) = (u(x), x). \end{cases}$$

Podemos notar que el vector normal unitario a las superficies obtenidas por la evolución anterior serán

$$\nu = \frac{(1, -Du)}{\sqrt{1 + |Du|^2}} x_n.$$

Por otra parte, podemos ver que

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \left(\frac{d\lambda}{dt} u - \sum_i y_i \frac{du}{dy_i} \frac{d\lambda}{dt}, 0 \right),$$

donde $y_i = \frac{x_i}{\lambda(t)}$.

Así podemos ver que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dX}{dt}, \nu \right\rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} &= \frac{1}{x_n^2} \left\langle \frac{dX}{dt}, \nu \right\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &= \frac{1}{x_n \sqrt{1 + |Du|^2}} \left(u_0 - \sum_i y_i \frac{du}{dy_i} \right) \frac{d\lambda}{dt}. \end{aligned}$$

Así tenemos que la fórmula que describe el flujo por curvatura media para este caso es

$$\frac{1}{x_n \sqrt{1 + |Du|^2}} \left(u - \sum_i y_i u_i \right) \frac{d\lambda}{dt} = x_n \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) - \frac{nu_n}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

O equivalentemente tenemos

$$\left(u - \sum_i y_i u_i\right) \frac{d\lambda}{dt} = \lambda \left(y_n^2 \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1 + |\nabla u|^2}\right) u_{ij} - n y_n u_n\right).$$

Para poder desacoplar esta ecuación necesitamos la condición $\frac{d\lambda}{dt} = c\lambda$, lo que nos da como resultado

$$c \left(u - \sum_i y_i u_i\right) = y_n^2 \left(\delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1 + |\nabla u|^2}\right) u_{ij} - n y_n u_n.$$

Notemos que toda la construcción del problema es independiente de la dimensión, entonces si pedimos $n = 1$, es decir, trabajamos en el semiplano superior \mathbb{H}^2 la ecuación que modela el flujo por curvatura media por dilatación queda de la siguiente forma.

$$c(u - yu') = y^2 \left(1 - \frac{u'^2}{1 + u'^2}\right) u'' - uy'.$$

Aquí debemos mencionar que por la notación que habíamos tenido $u_i = \frac{\partial u}{\partial y_i}$ y al reducir la dimensión tenemos que $u_i = u'$. Ahora de manera más ordenada la ecuación a estudiar es

$$c(u - yu') = y^2 \frac{u''}{1 + u'^2} - yu'.$$

Inicialmente podemos estudiar el caso cuando $H = 0$, es decir, cuando la curvatura media es igual a cero, esto se traduce en la ecuación (??) tomando $c = 0$, es decir,

$$0 = y^2 \frac{u''}{1 + u'^2} - yu'. \quad (5.1)$$

Una vez tenemos la ecuación (5.1) podemos notar que $u_0 = \sqrt{r^2 - y^2}$ es una solución, es decir tenemos que los semicírculos son soluciones a este flujo, pero como estamos trabajando con gráficos tenemos que considerar solamente el cuarto de circunferencia como solución.

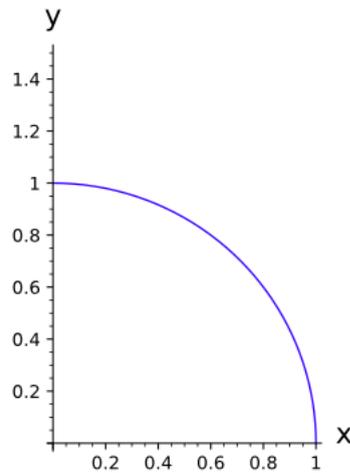


Figura 5.1: Solución del flujo caso $c=0$

También podemos ver que $u_0 = k$ también soluciona trivialmente la ecuación (5.1), así vemos que las geodésicas son soluciones para el flujo en el caso de curvatura media igual a cero.

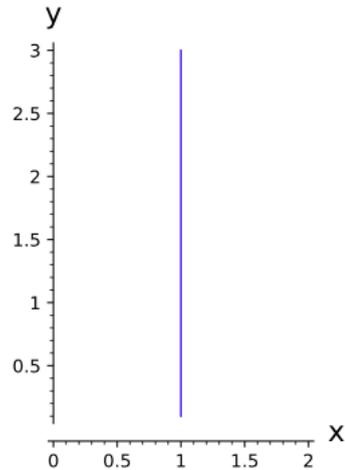


Figura 5.2: Función constante $u_0 = 1$ como solución del FCM.

Por otro lado, si consideramos el caso $c = \infty$ en la ecuación (??) obtenemos la ecuación

$$u - yu' = 0.$$

Esta ecuación podemos resolverla de manera directa obteniendo

$$u(y) = ky,$$

donde k es una constante que depende de la condición inicial que tengamos para la ecuación. Se puede apreciar que geoméricamente que las soluciones para este caso corresponden a rectas.

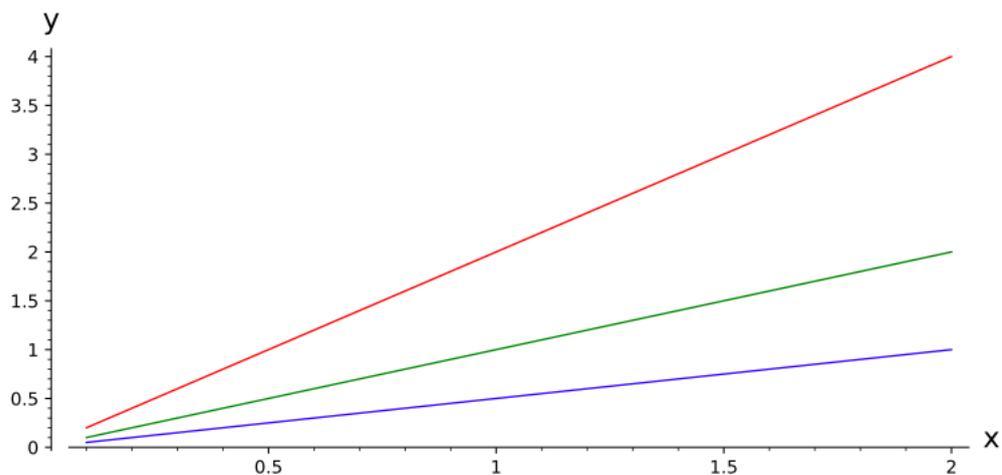


Figura 5.3: Soluciones para el caso $c = \infty$.

5.1.1. Existencia de soluciones

En el desarrollo de los cálculos notamos que estudiar la existencia de soluciones que evolucionen por dilatación se reduce a estudiar la existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo tanto, usaremos el teorema de Picard-Lindelöf, ver [20], y que se enuncia

a continuación.

Teorema 5.1. *Sea $f : \Omega \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde Ω es abierto, una función $f(t, x)$, continua en t y localmente Lipschitz continua con respecto a x . Entonces dado $(t_0, x_0) \in \Omega$, existe un $\varepsilon > 0$, tal que el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (5.2)$$

tiene una única solución $x(t)$ en el intervalo $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$

Se puede notar que este teorema solo nos garantiza la existencia local de soluciones.

Ahora para hablar de la existencia de soluciones para el flujo que estamos estudiando consideraremos la ecuación que lo describe de manera general, es decir,

$$c(u - yu') = y^2 \frac{u''}{1 + u'^2} - yu'.$$

Luego, reordenando la expresión obtenemos

$$u'' = \frac{(c(u - yu') + yu')(1 + u'^2)}{y^2}. \quad (5.3)$$

Notamos que se tiene una ecuación de la forma

$$u''(y) = f(y, u(y), u'(y)),$$

es decir, una ecuación diferencial de segundo orden. Para establecer la existencia de soluciones a esta ODE necesitamos condiciones iniciales tanto para u y para u' , digamos que en un valor inicial y_0 se cumple que $u(y_0) = x_0$, $u'(y_0) = x_1$.

Sea $v = u'$, entonces podemos reescribir el problema de la siguiente forma

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{(c(u-yv)+yv)(1+v^2)}{y^2} = f(y, u, v). \end{cases}$$

Probaremos la existencia de soluciones para el caso en que $c = 1$, podemos notar que al tomar este caso la ecuación se simplifica bastante. Como consideramos $c = 1$, tenemos el problema

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{u(1+v^2)}{y^2} = f(y, u, v). \end{cases} \quad (5.4)$$

Ahora si escribimos $z(y) = (u(y), v(y))$, tenemos que

$$z'(y) = (u'(y), v'(y)) = \left(v(y), \frac{u(1+v^2)}{y^2} \right) = g(y, z(y)).$$

Ahora que tenemos escrita la ecuación de la forma que se pide en el Teorema 5.2, debemos mostrar que g es continua para y y que es localmente Lipschitz para z . La continuidad con respecto a y es directa, pues $y > 0$ y u, v son continuas en y . Para verificar que g es localmente Lipschitz mostraremos que $\frac{\partial g}{\partial z}$ es acotada. Para mostrar esto necesitamos que las funciones u pertenezca al conjunto

$B := \{u \mid u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, u \text{ es continua y } \exists C_u, \text{ contante que depende de } u \text{ tal que } |u| \leq C_u \text{ en } [a, b]\}$.

Que $u \in B$ nos dice que es una función que se mantiene acotada en un intervalo de la forma $[a, b]$. Esta condición nos dará como consecuencia que v también se mantiene acotada en un intervalo de la forma $[a, b]$, esto se puede ver considerando la ecuación (5.3) y usando que $c = 1$, es decir

$$u'' = \frac{u(1 + u'^2)}{y^2},$$

trabajando con esta ecuación y usando que $y \in [a, b]$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{u''u'}{1+u'^2} &= \frac{uu'}{y^2} \\ \int \frac{u''u'}{1+u'^2} dy &= \int \frac{uu'}{y^2} dy \\ \ln(1+u'^2) &= \int \frac{uu'}{y^2} dy \\ &\leq \frac{1}{a^2} \int uu' dy \\ &= \frac{1}{a^2} u^2. \end{aligned}$$

Con esto hemos obtenido una relación entre u y u' dada por

$$|u'| \leq e^{\frac{u^2}{2a^2}} - 1.$$

Por lo tanto se ve que el hecho de que $u \in B$ implica que u' se mantiene acotada.

Esta relación será usada a continuación para demostrar que g es localmente Lipschitz y que, por lo tanto, el problema (5.4) tiene solución única.

Notemos que

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1+v^2}{y^2} & \frac{2uv}{y^2} \end{pmatrix}$$

Como en la última ecuación obtuvimos una matriz y necesitamos que sea acotada en norma, debemos recordar como es una norma matricial, en particular, veremos como son las p -normas matriciales que denotaremos como $\|A\|_p$, con A una matriz de $m \times n$, entonces tenemos que

$$\|A\|_p = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p},$$

donde $x \in K^n$, donde K es el cuerpo donde está definida la matriz. Luego para el caso particular de $p = 1$ tenemos

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|,$$

donde $A = a_{ij}$, es decir, es la máxima suma absoluta de las columnas de la matriz. Entonces en nuestro caso tenemos que

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right\| = \max \left\{ \frac{1+v^2}{y^2}, 1 + \frac{2uv}{y^2} \right\},$$

es decir, como $u \in B$ tenemos que existe K , tal que

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right\| \leq K.$$

Por lo tanto tenemos que g es localmente Lipschitz en la variable z y por lo tanto (5.4) tiene solución única, al menos de manera local.

5.1.2. Análisis numérico de soluciones

Como vimos en la sección anterior se sabe de la existencia de solución local para (5.4), sin embargo, nos interesa saber como se comportará la solución de manera global, entonces recurrimos a un software para calcular de manera numérica dicha solución.

Como hemos dicho a lo largo de todo el presente trabajo, estamos considerando gráficos horizontales en el espacio \mathbb{H}^2 , sin embargo en la siguiente sección se mostrarán gráficos verticales, pero esto es solo por facilitar el uso del software, los resultados obtenidos deben ser interpretados como gráficos horizontales.

Antes de ingresar datos al software debemos analizar la información que le entregaremos, en este caso, nos referimos a las condiciones iniciales para la ecuación diferencial, esto porque posiblemente al variar dichas condiciones se obtenga una solución distinta. Primero analizamos la condición para u , es decir, si $u(y_0) = x_0$ cambia su valor, se tiene que no afecta a la solución. Notemos que la función $T : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por $T(x, y) = (x + t, y)$ es una isometría en \mathbb{H}^2 , que llamaremos traslación horizontal, y variar la condición x_0 se trata justamente de una traslación horizontal.

Lo siguiente que hacemos es analizar la condición inicial $u'(y_0) = x_1$, pero desde la ecuación no podemos obtener ninguna idea de si modificar esta condición afecta a la solución obtenida, entonces procedemos a graficar soluciones numéricas para condición inicial $u'(y_0) > 0$ en la figura 5.4 y graficamos con condición inicial $u'(y_0) < 0$ en la figura 5.5. Una vez que obtenemos estos

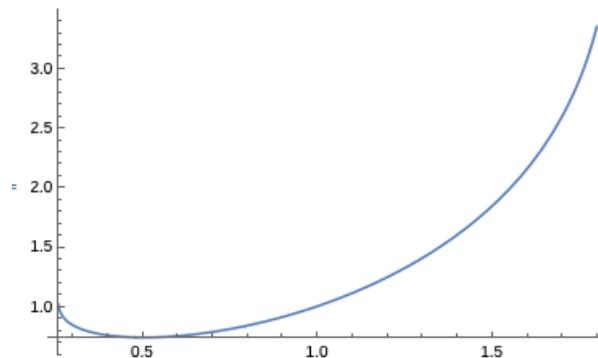


Figura 5.4: Solución por dilatación con $u'(y_0) > 0$. ($u'(1) = 1$)

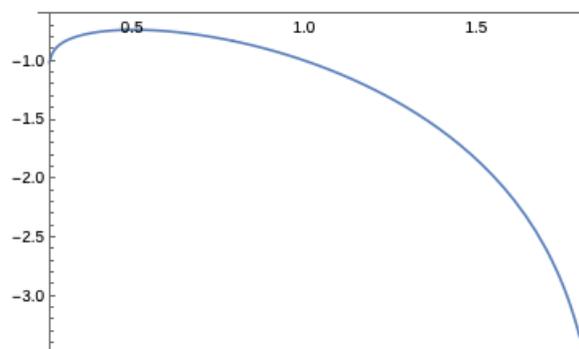


Figura 5.5: Solución por dilatación con $u'(y_0) < 0$. ($u'(1) = -1$)

gráficos podemos notar que las soluciones son similares entre ellas. Sea u_1 la solución de la figura 5.4 y sea u_2 la solución que se ve en la figura 5.5. Entonces se puede verificar que $u_1 = -u_2$, es decir, vemos que una de las soluciones es una reflexión de la otra con respecto a $x = 0$, esto se ve claramente en la ecuación (5.4), si u_1 es una solución entonces $u_2 = -u_1$ también lo es.

En la figura 5.6 se puede apreciar que la solución obtenida no es entera, es decir, que existe solo en un intervalo acotado.

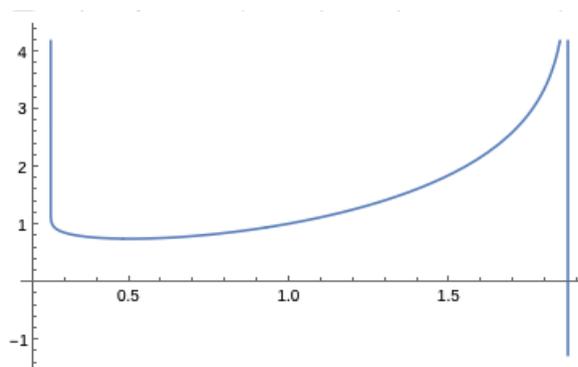


Figura 5.6: Gráfico donde se aprecia la existencia en un intervalo acotado.

5.2. Soluciones por traslación

A continuación buscaremos soluciones para el flujo por curvatura media que evolucionen solo por traslación. Primero debemos ser cuidadosos en la dirección en la que estaremos trasladando nuestro gráfico, ya que, no cualquier traslación es una isometría en este espacio. Consideraremos los gráficos igual que antes. Sea \mathbb{H}^{n+1} nuestro espacio ambiente, y consideremos un conjunto D contenido en el plano $\{x_0 = 0\}$ y sea $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, tenemos que el gráfico de u está dado por

$$\text{Graph}(u) = \{(u(x), x) \mid x \in D\}.$$

Ahora como el gráfico solo evolucionará por traslación tenemos que el vector normal unitario a esta superficie será siempre el mismo y está dado por

$$\nu = \frac{(1, Du)}{\sqrt{1 + |Du|^2}} x_n,$$

donde este vector normal está escrito en sentido hiperbólico. La traslación que consideraremos es de la siguiente forma

$$X(x, t) = (u(x) + t, x),$$

es decir, trasladamos en la dirección del eje x_0 . Ahora construimos la ecuación que modelará la evolución de estos gráficos.

Tenemos

$$\frac{\partial X}{\partial t} = (1, 0),$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \nu \right\rangle_{\mathbb{H}^{n+1}} &= \frac{1}{x_n^2} \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \nu \right\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &= \frac{1}{x_n} \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto y como conocemos la ecuación para la curvatura media de estos gráficos, tenemos que la evolución de esta superficie está dada por

$$\frac{1}{x_n} \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = x_n \text{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) - \frac{nu_n}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

Si nos vamos al caso particular de \mathbb{H}^2 tenemos que esta ecuación se ve como sigue

$$1 = y^2 \frac{u''}{1 + u'^2} - yu'.$$

A continuación al igual que con el caso por dilatación, estudiaremos la existencia de soluciones para esta ecuación.

5.2.1. Existencia de soluciones

Para mostrar la existencia local de soluciones que evolucionan por traslación en \mathbb{H}^2 vemos que la ecuación a estudiar es equivalente a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. La ecuación que estudiaremos es

$$1 = y^2 \frac{u''}{1 + u'^2} - yu',$$

reordenándola, obtenemos lo siguiente

$$u'' = \frac{(1 + yu')(1 + u'^2)}{y^2}. \quad (5.5)$$

Ahora se puede ver claramente que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y que la variable u no está presente en la ecuación, por ende, podemos hacer el cambio de variable $v = u'$, así la ecuación (5.5) queda de la forma

$$v' = \frac{(1 + yv)(1 + v^2)}{y^2}, \quad (5.6)$$

es decir, se transformó en una ecuación diferencial de primer orden.

Ahora podemos notar que la ecuación (5.6) puede ser escrita como, $v'(y) = f(y, v(y))$, donde $f(y, v) = \frac{(1 + yv)(1 + v^2)}{y^2}$. Consideremos ahora una condición inicial para v , digamos que

$$v(y_0) = v_0.$$

Para demostrar la existencia y unicidad de soluciones locales para este caso, al igual que en el caso por dilatación, usaremos el Teorema 5.2.

De inmediato podemos notar que f es continua en y y además vemos que

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{y(1 + v^2) + 2v(1 + yv)}{y^2},$$

y al igual que en el caso de dilatación necesitamos que $v \in B$, de esta manera tenemos que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v} \right| \leq C,$$

es decir, f es Lipschitz en la variable v y por lo tanto, podemos concluir que existe localmente una solución por traslación para el flujo por curvatura media.

5.2.2. Análisis numérico de soluciones

Con lo hecho en la sección anterior obtuvimos existencia local de la solución que evoluciona traslación, sin embargo, no encontramos de manera explícita la solución a la ecuación diferencial. Para poder entender de mejor manera la solución obtenida usaremos un software que nos dará una solución numérica lo cual nos permitirá ver cómo es dicha solución al momento de graficarla.

Notamos que el unico valor inicial que nos interesa variar en este caso es el de la derivada, es decir, podríamos obtener diferentes soluciones si cambia $u'(y_0) = v_0$. Al usar el software notamos que efectivamente se produce un cambio en la forma de la solución si cambiamos el signo de la condición inicial para la derivada, esto se ve en las figuras 5.7 y 5.8. Si bien las soluciones se ven distintas dependiendo de la condición inicial, tenemos que en ambos casos volvemos a encontrar que la solución existe para un intervalo acotado, es decir, no es una solución entera y esto puede ser visto en las figuras 5.9 y 5.10.

Finalmente podemos mencionar que mediante el trabajo realizado podemos asegurar la existencia local de soluciones autosimilares para el flujo por curvatura media en \mathbb{H}^2 , las cuales evolucionan por dilatación y traslación. También, gracias al estudio numérico podríamos esperar que las soluciones obtenidas anteriormente se puedan extender más allá del intervalo que se obtiene de la demostración de existencia local de las soluciones.

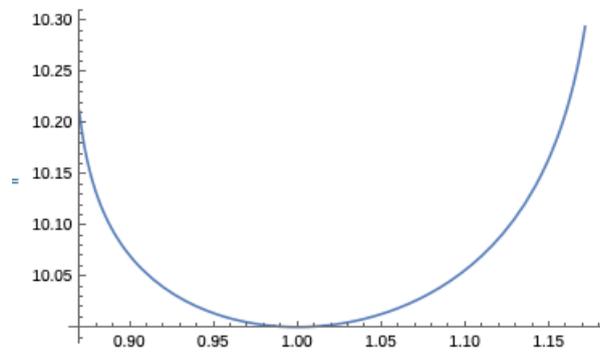


Figura 5.7: Solución por traslación para $u'(y_0) > 0$. ($u'(1) = 1$)

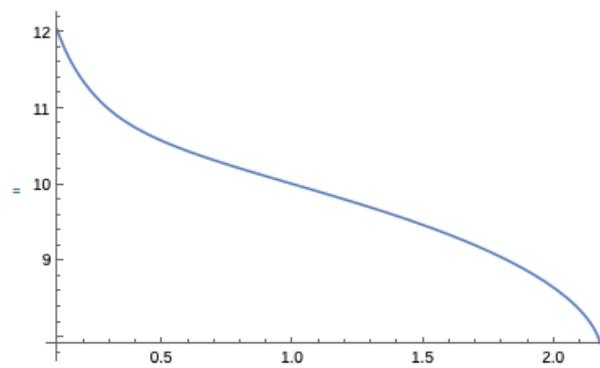


Figura 5.8: Solución por traslación para $u'(y_0) < 0$. ($u'(1) = -1$)

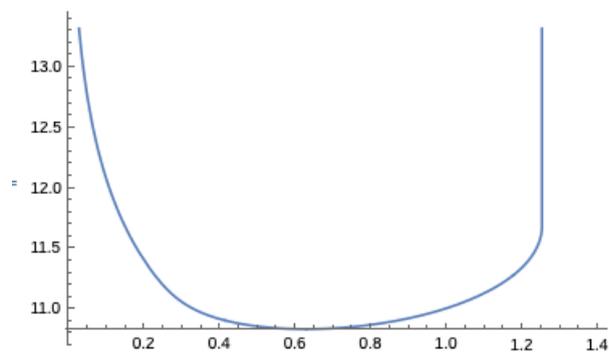


Figura 5.9: Gráfico donde se aprecia la existencia en un intervalo acotado para la condición inicial $u'(y_0) > 0$. ($u'(1) = 1$)

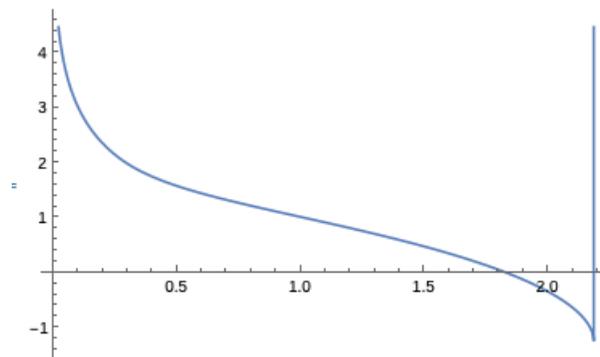


Figura 5.10: Gráfico donde se aprecia la existencia en un intervalo acotado para la condición inicial $u'(y_0) < 0$. ($u'(1) = -1$)

Bibliografía

- [1] B. ANDREWS, B. CHOW, C. GUENTHER, AND M. LANGFORD, *Extrinsic geometric flows*, vol. 206 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, [2020] ©2020.
- [2] J. A. L. M. BARBOSA AND R. SA EARP, *Prescribed mean curvature hypersurfaces in H^{n+1} with convex planar boundary. II*, in Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, Vol. 16, Année 1997–1998, vol. 16 of Sémin. Théor. Spectr. Géom., Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d’Hères, [1998], pp. 43–79.
- [3] J. L. M. BARBOSA AND R. SA EARP, *Prescribed mean curvature hypersurfaces in $H^{n+1}(-1)$ with convex planar boundary. I*, *Geom. Dedicata*, 71 (1998), pp. 61–74.
- [4] J. W. CANNON, W. J. FLOYD, R. KENYON, AND W. R. PARRY, *Hyperbolic geometry*, in *Flavors of geometry*, vol. 31 of Math. Sci. Res. Inst. Publ., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 59–115.
- [5] T. H. COLDING AND W. P. MINICOZZI, II, *A course in minimal surfaces*, vol. 121 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [6] B. COSKUNUZER, *Minimal surfaces in hyperbolic 3-manifolds*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 74 (2021), pp. 114–139.
- [7] H. P. DE SAINT-GERVAIS, *Uniformization of Riemann surfaces*, Heritage of European Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2016. Revisiting a hundred-year-old theorem, Translated from the 2010 French original [MR2768303] by Robert G. Burns, The name of Henri Paul de Saint-Gervais covers a group composed of fifteen mathematicians: Aurélien Alvarez, Christophe Bavard, François Béguin, Nicolas Bergeron, Maxime Bourrigon, Bertrand Deroin, Sorin Dumitrescu, Charles Frances, Étienne Ghys, Antonin Guilloux, Frank Loray, Patrick Popescu-Pampu, Pierre Py, Bruno Sévenec and Jean-Claude Sikorav.
- [8] M. P. DO CARMO AND H. B. LAWSON, JR., *On Alexandrov-Bernstein theorems in hyperbolic space*, *Duke Math. J.*, 50 (1983), pp. 995–1003.
- [9] M. P. A. DO CARMO, *Riemannian geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [10] K. ECKER AND G. HUISKEN, *Mean curvature evolution of entire graphs*, *Ann. of Math. (2)*, 130 (1989), pp. 453–471.
- [11] ———, *Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature*, *Invent. Math.*, 105 (1991), pp. 547–569.
- [12] M. GAGE AND R. S. HAMILTON, *The heat equation shrinking convex plane curves*, *J. Differential Geom.*, 23 (1986), pp. 69–96.
- [13] S. GALLOT, D. HULIN, AND J. LAFONTAINE, *Riemannian geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, third ed., 2004.

- [14] Z. HUANG AND B. WANG, *Closed minimal surfaces in cusped hyperbolic three-manifolds*, *Geom. Dedicata*, 189 (2017), pp. 17–37.
- [15] G. HUISKEN AND A. POLDEN, *Geometric evolution equations for hypersurfaces*, in *Calculus of variations and geometric evolution problems (Cetraro, 1996)*, vol. 1713 of *Lecture Notes in Math.*, Springer, Berlin, 1999, pp. 45–84.
- [16] J. JOST, *Riemannian geometry and geometric analysis*, *Universitext*, Springer-Verlag, Berlin, fifth ed., 2008.
- [17] J. M. LEE, *Introduction to smooth manifolds*, vol. 218 of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [18] C. MANTEGAZZA, *Lecture notes on mean curvature flow*, vol. 290 of *Progress in Mathematics*, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- [19] R. OSSERMAN, *A survey of minimal surfaces*, *Dover Publications, Inc.*, New York, second ed., 1986.
- [20] L. PERKO, *Differential equations and dynamical systems*, vol. 7 of *Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, third ed., 2001.
- [21] G. PESCHKE, *The theory of ends*, *Nieuw Arch. Wisk.* (4), 8 (1990), pp. 1–12.
- [22] R. SA EARP AND E. TOUBIANA, *Existence and uniqueness of minimal graphs in hyperbolic space*, *Asian J. Math.*, 4 (2000), pp. 669–693.
- [23] K. SEO, *Stable minimal hypersurfaces in the hyperbolic space*, *J. Korean Math. Soc.*, 48 (2011), pp. 253–266.
- [24] T. TAO, *Poincaré’s legacies, pages from year two of a mathematical blog. Part I*, *American Mathematical Society*, Providence, RI, 2009.
- [25] ———, *Poincaré’s legacies, pages from year two of a mathematical blog. Part II*, *American Mathematical Society*, Providence, RI, 2009.