



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Inferencia estadística de procesos estocásticos clásicos derivados de sistemas cuánticos abiertos.

Tesis
entregada a la
Pontificia Universidad Católica de Chile
en cumplimiento parcial de los requisitos
para optar al grado de
Doctor en Estadística

Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

por
Mallén Arenas Carmona

Agosto de 2007

Director de Tesis: Dr. Rolando Rebolledo

Tesis financiada por
Conicyt

AGRADECIMIENTOS

Ahora por fin tranquila tengo que pensar a quienes debería agradecerle. Los primeros que se me vienen a la mente son Ramón y Mónica, mis padres ya que sin su esfuerzo y fascinación por el conocimiento no estaría aquí. A mis hermanos, Luis por saber demasiado y sacarme de muchos apuros, y Manuel por ser tan amoroso. A Pablo, mi compañero, simplemente por quererme. A mis amigas (Pinky, Andrea y Paula) y familiares (Abuela Pochita, el Pulento, y demás) por esa confianza incondicional depositada en mi. A mi prima Catty que, aunque está lejos, siempre la siento cerca y apoyándome. Al Profesor Rebolledo por la paciencia y confianza que manifestó en mi desde el primer día. Por último a todos esos pequeños seres que me alegran la vida y me dan motivos para luchar cada día (Magda, Poli, Cleo, Mafalda, Poroto y la blanquita), también a los que se fueron en el camino (Cochón, Pato, Mefi, Demito, Negrito, Manchitas, mefi 2, Miau y Pillín), a los que quizás regresen y a todos los que vendrán.

RESUMEN

Este trabajo presenta un método para hacer inferencia estadística en sistemas cuánticos abiertos descritos por semigrupos markovianos cuánticos. En este estudio tomamos en cuenta que, al observar en uno de estos sistemas, necesitamos un instrumento, el cual lo modifica. Es por esto que utilizamos los conceptos de medición e instrumento como entidades que están interactuando con el sistema.

Principalmente nos concentramos en encontrar mediciones que coincidan con la medida espectral de un operador autoadjunto K que reduzca al semigrupo antes mencionado, en el sentido que su álgebra de von Neumann generada quede invariante bajo la acción de este semigrupo. Restringiéndose a esta álgebra abeliana podemos realizar inferencia estadística de procesos estocásticos clásicos.

ABSTRACT

A major problem to perform statistical inference in open quantum systems is the perturbation induced by the measurement process. However, at least theoretically, a suitable choice of the measurement process could provide a consistent approach through classical stochastic processes. This work proposes a method to perform statistical inference on open quantum systems represented by quantum Markov semigroups having a suitable reduction. The method is based on measurements associated to observables generating invariant abelian algebras.

ÍNDICE GENERAL

1..	<i>Introducción</i>	7
1.1.	Inferencia estadística sobre un sistema dinámico	7
1.2.	Tipos de espacios de probabilidades y variables aleatorias	9
1.3.	Noción de sistema cuántico abierto	11
1.4.	Problemas de la inferencia estadística en dichos sistemas	16
1.4.1.	Principio de incertidumbre de Heisenberg	16
1.4.2.	Carencia del teorema de Bayes	17
1.4.3.	Violación de la desigualdad de Bell	17
1.5.	Propuestas de modelación matemática de la inferencia estadística cuántica	19
1.6.	Objetivo	23
2..	<i>Modelo Cuántico</i>	25
2.1.	Modelo de Laser	25
2.2.	Modelo del micromaser de Jaynes y Cummings	27
2.3.	Reducción clásica de semigrupos markovianos cuánticos mediante mediciones compatibles	28
2.3.1.	Reducción clásica	28
2.3.2.	Condiciones suficientes para la compatibilidad de mediciones	31
2.3.3.	Decoherencia	33
2.4.	Ejemplos de Reducción	36
2.4.1.	Proceso de nacimiento y muerte	36
2.4.2.	Proceso de Ornstein Uhlenbeck	38
2.5.	¿Como aprovechar la reducción clásica para inferir clásicamente sobre modelos cuánticos?	40
3..	<i>Proceso de nacimiento y muerte</i>	41
3.1.	Estimación de parámetros.	42

3.1.1.	Propiedades asintóticas	44
3.1.2.	Consistencia del estimador Nelson Aalen	45
3.1.3.	Distribución asintótica del estimador de Nelson Aalen.	46
3.2.	Simulación	50
3.2.1.	Simulación para el modelo del Laser	50
3.2.2.	Simulación para el modelo de Jaynes y Cummings	51
4..	<i>Procesos de difusión</i>	56
4.1.	Estimación de parámetros.	57
4.2.	Estimación paramétrica en procesos de difusión	58
4.3.	Estimación del coeficiente de deriva	60
4.3.1.	Ley fuerte de los grandes números	60
4.3.2.	Teorema central del límite	62
4.4.	Simulación	63
5..	<i>Comparación de estimaciones</i>	65
5.1.	Simulación y comparación de trayectorias	65
5.1.1.	Test de hipótesis	65
5.1.2.	Cómo construir un test con mejor discriminación	68
6..	<i>Conclusiones</i>	72
7..	<i>Preguntas abiertas</i>	73
	<i>Referencias</i>	75

1. INTRODUCCIÓN

El mayor problema al cual nos enfrentamos cuando queremos realizar inferencia estadística en sistemas cuánticos abiertos es la perturbación producida por el proceso de medición. Sin embargo, al menos teóricamente, una buena elección de las mediciones puede dar una aproximación consistente mediante procesos estocásticos clásicos. Este trabajo desarrolla una manera de hacer inferencia estadística en estas reducciones clásicas consistentes provenientes de semigrupos markovianos cuánticos que modelan sistemas cuánticos abiertos.

En adición a lo anterior, este trabajo incluye una revisión de los métodos de estimación que existen para realizar inferencia estadística paramétrica, tanto en procesos de difusión (en particular en procesos de Ornstein Uhlenbeck), como en procesos discontinuos (específicamente estudiaremos un proceso de nacimiento y muerte).

En este primer capítulo comenzaremos por introducir algunos conceptos necesarios para explicar nuestra propuesta. Comenzaremos con una discusión acerca de por qué basaremos nuestro estudio en el semigrupo. En segundo lugar se discutirá con más detalles que es un sistema cuántico abierto y de qué manera es representado por un semigrupo dinámico cuántico. Para discutir nuestra propuesta debemos introducir una noción más general de espacio de probabilidad junto con explicar cuáles son los problemas que se presentan cuando uno quiere realizar inferencia estadística en estos sistemas. Por último, detallaremos los objetivos principales de este trabajo.

1.1. Inferencia estadística sobre un sistema dinámico

Consideremos un sistema dinámico markoviano $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (X_t)_{t \geq 0}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$, donde Ω es el espacio muestral, \mathcal{F} es la σ -álgebra asociada al espacio muestral, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ es una filtración, $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso estocástico de Markov adaptado a la filtración, donde cada X_t toma valores en un espacio estado (E, \mathcal{E}) , con E un espacio polaco dotado de la σ -álgebra de los

borelianos de E ($\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$) y $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ es una familia de medidas de probabilidad indexadas por un parámetro θ . Supongamos que estamos interesados en conocer la probabilidad \mathbb{P}_θ dada alguna muestra y definamos:

$$T_t^\theta f(x) = \mathbb{E}_x^\theta(f(X_t)) = \int f(y)P_t^\theta(x, dy), \quad \text{para } t \geq 0, \quad (1.1)$$

para cada función medible f positiva o acotada, donde $\{P_t^\theta(x, dy)\}_{t \geq 0}$ es la familia de núcleos de probabilidades de transición correspondiente al proceso X_t . La familia $(T_t^\theta)_{t \geq 0}$ así definida es un semigrupo markoviano para cada θ , es decir:

1. $T_0^\theta = 1$ donde 1 es el operador identidad,
2. para cada $s, t > 0$ se tiene que $T_{t+s}^\theta f(x) = \mathbb{E}_x^\theta(f(X_{s+t})) = \mathbb{E}_x^\theta \mathbb{E}_{X_s}^\theta(f(X_s)) = \mathbb{E}_x^\theta(T_s^\theta f(X_t)) = T_t^\theta \circ T_s^\theta f(x)$, para toda función f medible positiva o acotada,
3. $T_t^\theta 1 = 1$.

Recíprocamente, dado un semigrupo markoviano $\{T_t^\theta\}_{t \geq 0}$, existe un sistema dinámico markoviano $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (X_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}_\theta)$ que satisface (1.1). Más precisamente, podemos tomar $\Omega = E^{\mathbb{R}^+}$, con el proceso canónico $X_t(\omega) = \omega_t$, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; s \leq t)$ para todo $t \geq 0$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \sigma(X_t; t \geq 0)$. Luego, la probabilidad \mathbb{P}_θ queda plenamente determinada por el semigrupo $(T_t^\theta)_{t \geq 0}$, el cual también depende del parámetro θ .

El generador infinitesimal L del semigrupo $\{T_t\}_{t \geq 0}$ se define como:

$$L(f) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T_t f - f}{t},$$

para toda f tal que el límite existe. En particular,

$$e^{tL} f(x) = T_t f(x),$$

cuando e^{tL} tiene sentido, es decir, la serie que define a la exponencial es convergente. Conocer el generador es equivalente a conocer el semigrupo.

Es por lo expuesto hasta este punto, que al realizar inferencia estadística en sistemas cuánticos abiertos representados por semigrupos markovianos cuánticos nos concentraremos en trabajar directamente con el semigrupo. En particular utilizaremos el hecho de que bajo ciertas condiciones estos pueden ser reducidos a un semigrupo markoviano clásico.

1.2. Tipos de espacios de probabilidades y variables aleatorias

En el contexto de probabilidades clásicas, es bien conocido que un espacio de probabilidad se define como un triple $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde Ω es el espacio muestral, \mathcal{F} es la σ -álgebra, y \mathbb{P} es la medida de probabilidad en \mathcal{F} . Sin embargo en el mundo cuántico tenemos que trabajar con otro tipo de espacios. Estos son los espacios de von Neumann, también conocidos como espacios de probabilidad cuánticos, y los espacios de probabilidad algebraicos. De hecho, tanto los espacios de probabilidad clásicos como los de von Neumann son casos particulares del concepto más general de espacios de probabilidad algebraicos. En lo que sigue definiremos estos conceptos.

Definición 1. Un espacio de probabilidad de von Neumann es un par (\mathfrak{h}, ρ) donde \mathfrak{h} es un espacio de Hilbert complejo separable y ρ es un operador positivo en \mathfrak{h} con traza, tal que $\text{Tr}(\rho) = 1$. Un operador de traza 1 recibe el nombre de estado del sistema.

En un espacio de von Neumann una variable aleatoria u observable es un operador autoadjunto X de \mathfrak{h} en si mismo y su esperanza matemática en el estado ρ es:

$$\mathbb{E}_\rho(X) = \text{Tr}(\rho X).$$

En este contexto un suceso (evento) cuántico es una proyección ortogonal y la probabilidad de un evento π esta dada por

$$\mathbb{P}_\rho(\pi) = \mathbb{E}_\rho(\pi) = \text{Tr}(\rho\pi).$$

Los valores del observable X corresponde a los valores de su espectro $\sigma(X)$, el cual es real por ser X un operador autoadjunto.

Antes de definir los espacios de probabilidad algebraicos, necesitamos introducir los conceptos de $*$ -álgebras y estados en estas.

Definición 2. Una $*$ -álgebra es un álgebra asociativa compleja \mathcal{A} con una involución $*$, la cual cumple las siguientes propiedades.

- $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda}a^* + \bar{\mu}b^*$
 - $(a^*)^* = a$
 - $(ab)^* = b^*a^*$
- para todo $a, b \in \mathcal{A}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Ejemplos de *-álgebras son las C^* -álgebras y las álgebras de von Neumann o también llamadas W^* -álgebras. Nosotros trabajaremos con las álgebras de von Neumann, las cuales se definen a continuación.

Definición 3. Una álgebra de von Neumann sobre \mathfrak{h} es una *-subálgebra \mathfrak{M} de $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ tal que

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'',$$

donde $\mathfrak{M}' = \{y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) : [y, x] = 0, \forall x \in \mathfrak{M}\}$ con $[y, x] = yx - xy$.

Observación. En la definición anterior $[y, x]$ está bien definido para $x, y \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$, el algebra de los operadores acotados en \mathfrak{h} . Sin embargo, hay que tener más cuidado en extender su definición cuando tenemos operadores no acotados.

En particular, se tiene que $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ es un álgebra de von Neumann.

Definición 4. Un estado φ en una *-álgebra es una función lineal $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

- (a) $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ y
- (b) para todo $a \in \mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A}; a = b^*b \text{ para algún } b \in \mathcal{A}\}$ se tiene que $\varphi(a) \geq 0$.

Definición 5. Un espacio de probabilidad algebraico es el par (\mathcal{A}, φ) donde \mathcal{A} es una *-álgebra y φ un estado en \mathcal{A} . En este espacio, una variable aleatoria con valores en una *-álgebra \mathcal{B} es un *-homomorfismo $j : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, en particular una variable aleatoria real es un *-homomorfismo $j : \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{A}$.

Un ejemplo de variable aleatoria algebraica es el siguiente: dados dos espacios de Hilbert \mathfrak{h} y \mathfrak{k} consideramos el homomorfismo $j : \mathfrak{B}(\mathfrak{k}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$, definido por

$$j(x) = V^*xV,$$

donde $V : \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un operador acotado.

Observación. Dos ejemplos principales de espacios de probabilidad algebraicos son los espacios de probabilidades clásicos y los de von Neumann.

En el caso de los espacios clásicos basta tomar

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}_\mathbb{C}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \quad \varphi(f) = \int_\Omega f(\omega) \mathbb{P}(d\omega).$$

Aquí una variable aleatoria V en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ induce el homomorfismo

$$j : \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_\mathbb{C}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \quad j(f) = f(V).$$

Para un espacio de von Neumann tomamos

$$\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathfrak{h}), \quad \varphi(x) = \text{Tr}(\rho x).$$

Una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad de von Neumann (\mathfrak{h}, ρ) induce el homomorfismo

$$j : \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{h}), \quad j(f) = f(X).$$

El objetivo principal de este trabajo es encontrar una manera de hacer inferencia estadística en estos tipos de espacios, lo cual no es inmediatamente obvio, ya que muchas de las propiedades usadas en estadística clásica no tienen validez en este nuevo contexto. De hecho es posible ver que en esta teoría el análogo al teorema de Bayes carece de sentido, ya que siendo los eventos proyecciones el análogo a la intersección no posee las propiedades necesarias. En una próxima sección trataremos algunos de los problemas principales que surgen cuando uno quiere realizar inferencia estadística en estos espacios, para luego plantear algunos elementos útiles que nos ayudarán a resolverlos.

A continuación daremos una idea de como los sistemas cuánticos abiertos son representados por un semigrupo dinámico cuántico.

1.3. Noción de sistema cuántico abierto

Un sistema cuántico cerrado es representado por un espacio de Hilbert \mathfrak{h} y un operador autoadjunto H (Hamiltoniano). Este define un grupo unitario de operadores en el álgebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ de operadores acotados en \mathfrak{h} mediante $U_t = \exp(-itH)$ (si uno asume que la constante de Planck es 1 por simplicidad). La evolución esta dada por el grupo de automorfismos de $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ $\alpha_t(x) = U_t^* x U_t, t \in \mathbb{R}$. El grupo $\alpha_{*t}(\sigma) = U_t \sigma U_t^*$ corresponde al grupo de transformaciones en el espacio predual $\mathfrak{T}_1(\mathfrak{h})$ de los operadores con traza, el cual describe la evolución de los estados mediante $\rho_t = \alpha_{*t}(\rho)$.

En un sistema cuántico abierto no sólo se considera el sistema en si mismo si no que también se considera un sistema más grande en el cual está inmerso y que llamamos baño o ambiente, el cual se encuentra en equilibrio, pero

que interactúa con el sistema más pequeño. El sistema requiere dos espacios de Hilbert, el primero que denotaremos por \mathfrak{h}_s corresponde al sistema y el segundo espacio \mathfrak{h}_a que representa al ambiente en el cual está el sistema a estudiar. El sistema total es representado por el espacio $\mathfrak{h}_T = \mathfrak{h}_s \otimes \mathfrak{h}_a$ y el operador $H_T = H_s \otimes \mathbb{I}_a + \mathbb{I}_s \otimes H_a + H_I$, donde H_s , H_a y H_I corresponden a los Hamiltonianos del sistema, del ambiente y de la interacción que existe entre ellos respectivamente.

Dado un un espacio algebraico de la forma $(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}), \varphi)$, donde φ es un estado normal en $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$, existe un operador con traza ρ , positivo con $\text{Tr}(\rho) = 1$, el cual se denomina operador densidad, tal que $\varphi(x) = \text{Tr}(\rho x)$ para todo $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$. Usando un poco de abuso de lenguaje llamaremos a tal ρ estado del sistema.

Ahora bien, si uno quiere conocer sólo la dinámica del sistema más pequeño y el estado del ambiente ρ_a es conocido, se puede obtener la dinámica en el predual tomando la traza parcial con respecto a ρ_a donde esta se define de la siguiente forma:

Definición 6. Sean \mathfrak{h}_1 y \mathfrak{h}_2 dos espacios de Hilbert con bases ortonormales (e_n) y (f_m) respectivamente, y consideremos el espacio tensor $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2$ y un estado $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$. La traza parcial de ρ_1 con respecto a ρ_2 está definida por:

$$\text{Tr}_{\rho_2}(\rho_1)e_n = \sum_m \langle e_n \otimes f_m, \rho e_n \otimes f_m \rangle.$$

Con esta definición la dinámica en el predual $\mathcal{T}_1(\mathfrak{h}_s)$ estará dada por:

$$\mathcal{T}_{*t}(\rho) = \text{Tr}_{\rho_a} (e^{-itH_T}(\rho \otimes \rho_a)e^{itH_T}),$$

donde Tr_{ρ_a} corresponde a la traza parcial. Ahora bien, mediante la ecuación de dualidad

$$\text{Tr}(\rho \mathcal{T}_t(x)) = \text{Tr}(\mathcal{T}_{*t}(\rho)x),$$

podemos obtener la evolución $\mathcal{T}_t(x)$ en el sistema de interés \mathfrak{h}_s .

En lo que sigue, estaremos interesados sólo en aquellos sistemas abiertos cuya dinámica corresponda a un semigrupo markoviano cuántico (SMC). Para definir estos sistemas necesitamos la definición de completa positividad la cual se da a continuación.

Definición 7. Dadas dos *-álgebras \mathfrak{A} y \mathfrak{B} . Una aplicación lineal $\Phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ es completamente positiva si para dos colecciones finitas cualesquiera

$a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ y $b_1, \dots, b_n \in \mathfrak{B}$, el elemento

$$\sum_{i,j=1}^n b_i^* \Phi(a_i^* a_j) b_j \in \mathfrak{B},$$

es positivo.

La definición de completa positividad es equivalente a la positividad cuando una de las dos álgebras es conmutativa. Esto fue demostrado por Stinespring (cuando \mathfrak{A} es conmutativa) y por Arveson (en el caso en que \mathfrak{B} es conmutativa). En general si tenemos una aplicación $\Phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, ésta se dice que es n -positiva si la aplicación $\Phi_n : \mathcal{M}_n(\mathfrak{A}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathfrak{B})$, definida por:

$$\Phi_n((a_{i,j})) = (\Phi(a_{i,j}))$$

es positiva. Como se muestra en [25] si \mathfrak{A} y \mathfrak{B} son C^* -álgebras se tiene que una aplicación es completamente positiva si y sólo si ésta es n -positiva para todo $n \geq 1$. Con esta caracterización podemos ver que en general una aplicación completamente positiva no es necesariamente positiva. Un ejemplo de aplicación positiva que no es 2-positiva, y por lo tanto no es completamente positiva, es la transposición en $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. A continuación mostraremos este hecho mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Sea $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ definida por

$$\Phi(a) = a^t$$

y consideremos la matriz

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta es una matriz positiva y si aplicamos Φ_2 es decir, transponemos en cada uno de los 4 bloques obtenemos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual no es positiva.

Teorema 1 (Kraus). *Dados dos espacios de Hilbert \mathfrak{h} , \mathfrak{k} y una algebra de von Neumann \mathfrak{A} de operadores en \mathfrak{h} . Entonces una aplicación lineal $\Phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{k})$ es normal y completamente positiva si y sólo si existe una secuencia de $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de operadores lineales acotados de \mathfrak{k} en \mathfrak{h} tal que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} V_j^* a V_j$ es fuertemente convergente para todo $a \in \mathfrak{A}$ y*

$$\Phi(a) = \sum_{j=1}^{\infty} V_j^* a V_j.$$

Definición 8. Un semigrupo markoviano cuántico (SMC), en una $*$ -álgebra \mathfrak{A} con unidad 1 , es una familia $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de operadores lineales $\mathcal{T}_t : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ que satisface:

- $\mathcal{T}_0(x) = x$, para todo $x \in \mathfrak{A}$;
- Cada \mathcal{T}_t es completamente positivo;
- $\mathcal{T}_t(\mathcal{T}_s(x)) = \mathcal{T}_{t+s}(x)$, para todo $t, s \geq 0, x \in \mathfrak{A}$;
- $\mathcal{T}_t(1) = 1$ para todo $t \geq 0$.

En adición a esto, si \mathfrak{A} es un álgebra de von Neumann el semigrupo debe cumplir las siguientes condiciones:

- para cada $x \in \mathfrak{A}$ la aplicación $t \rightarrow \mathcal{T}_t(x)$ es σ -débil continua sobre \mathfrak{A} , y
- $\mathcal{T}_t(\cdot)$ es normal o σ -débil continuo.

El generador infinitesimal de \mathcal{T} es el operador

$$\mathfrak{L}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}_t(a) - a}{t},$$

definido en el espacio vectorial $D(\mathfrak{L}) \subset \mathfrak{A}$ formado por todos los elementos a para los que el límite existe. No se conoce por el momento una caracterización de \mathfrak{L} . Salvo en ciertos casos particulares:

1. Sea (\mathcal{T}_t) un SMC sobre $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$. Si el semigrupo es continuo en norma, es decir $\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{T}_t - \mathcal{T}_0\| = 0$, entonces su generador \mathfrak{L} se representa en la forma:

$$\mathfrak{L}(x) = G^*x + \Phi(x) + xG,$$

donde $G \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ y Φ es una aplicación completamente positiva y normal.

Más aún, si se designa por $H = -\text{Im}G$, existen operadores $L_k \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$, para k en algún conjunto de índices, tales que $\sum_k L_k^* L_k$ sea un elemento de $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ y se tenga

$$G = -iH - \frac{1}{2} \sum_k L_k^* L_k, \quad \Phi(x) = \sum_k L_k^* x L_k \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}).$$

De aquí se obtiene que el generador tiene la siguiente forma:

$$\mathfrak{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k).$$

2. Sean G y $L_k, (k \geq 1)$ operadores en \mathfrak{h} que satisfacen la siguiente hipótesis:

(H-min) G es el generador infinitesimal de un semigrupo contracción fuertemente continuo en \mathfrak{h} , $D(G) \subset D(L_k)$ para todo $k \geq 1$, y para todo $u, v \in D(G)$ se tiene

$$\langle Gv, u \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle L_k v, L_k u \rangle + \langle v, Gu \rangle = 0.$$

Bajo la hipótesis (H-min), para cada $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ se define una forma sesquilinear $\mathfrak{L}(x)$ con dominio $D(G) \times D(G)$ definida por

$$\mathfrak{L}(x)(v, u) = \langle Gv, xu \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \langle L_k v, x L_k u \rangle + \langle v, x Gu \rangle.$$

Es conocido que dado un dominio $D \subset D(G)$, es posible construir un SMC minimal $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ que satisfaga la ecuación

$$\langle v, \mathcal{T}_t(x)u \rangle = \langle v, xu \rangle + \int_0^t \mathfrak{L}(\mathcal{T}_s(x))(v, u) ds,$$

para todo $v, u \in D$.

De lo anterior se tiene que nuestro modelo puede ser representado por un par (\mathfrak{h}, ρ) en donde \mathfrak{h} es el espacio de Hilbert del sistema pequeño y ρ es el estado del sistema cuya evolución es dada por un SMC. Dentro del SMC se está considerando el sistema que lo contiene y la respectiva interacción entre los sistemas.

El par (\mathfrak{h}, ρ) es nuestro espacio de probabilidad y el semigrupo está asociado a nuestras variables aleatorias o a nuestro proceso. En los casos que serán estudiados el SMC $(\mathcal{T}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ tiene un generador formal dado por:

$$\mathfrak{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k).$$

1.4. Problemas de la inferencia estadística en dichos sistemas

Hay muchas propiedades de la teoría de probabilidades clásicas que no se cumplen dentro del contexto cuántico. Esto acarrea una serie de problemas cuando se quiere realizar inferencia estadística en sistemas cuánticos. A modo de ejemplo mencionaremos tres de los principales inconvenientes que se producen.

1.4.1. Principio de incertidumbre de Heisenberg

Supongamos que tenemos un espacio cuántico $(\mathfrak{h}, \rho_\theta)$ o un espacio algebraico $(\mathcal{A}, \varphi_\theta)$, donde el estado está indexado por un parámetro $\theta \in \Theta$ y nuestro objetivo es estimar tal parámetro dado una observación del sistema. En estadística está bien estudiado el problema de estimar θ para un espacio de probabilidad clásico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\theta)$, sin embargo son pocos los estudios que existen tanto para espacios de von Neumann como para espacios algebraicos (Ver [2]).

El principal problema con el cual nos enfrentamos al querer realizar inferencia estadística en sistemas cuánticos en general, radica en el principio de incertidumbre de Heisenberg, según el cual, cuando observamos algún fenómeno en dicho sistema estamos interviniendo en el mismo. Por ejemplo si queremos observar la posición y el momento de una partícula, no es posible observar ambas cosas simultáneamente, ya que, si q es el observable posición y p es el observable momento, se tiene que estos observables no conmutan, es decir

$$[q, p] = qp - pq \neq 0.$$

El problema que presenta el principio de incertidumbre de Heisenberg para poder realizar inferencia estadística se basa principalmente en la siguiente proposición:

Proposición 1. Sea (\mathfrak{h}, ρ) un espacio de probabilidad de von Neumann con un estado puro, es decir $\rho = |u\rangle\langle u|$, donde la notación significa $|u\rangle\langle u|v = \langle u, v\rangle u$ y u es un vector unitario. Se tiene:

$$\text{Var}_\rho(X) \text{Var}_\rho(Y) \geq \frac{1}{4} \langle u, i[X, Y]u \rangle^2$$

para todo par de operadores autoadjuntos X e Y .

En resumen, si dos observables no conmutan no podemos observarlos a la vez sin estar cometiendo errores en la observación.

1.4.2. Carencia del teorema de Bayes

Otro problema con el cual nos encontramos es la ausencia de un análogo al teorema de Bayes. En los espacios de von Neumann nuestros eventos son proyecciones, y nuestros análogos a la intersección y unión de eventos pierden propiedades tan útiles como la distributividad. Es decir dadas dos proyecciones definimos la unión análoga $\pi_1 \vee \pi_2$, como la proyección en el espacio suma directa de las imágenes π_1 y π_2 , y la intersección análoga $\pi_1 \wedge \pi_2$, como la proyección en la intersección de los espacios en donde proyectan π_1 y π_2 . A continuación se muestra un ejemplo de tres proyecciones para las cuales no se cumple la distributividad.

Ejemplo. Consideremos $\mathfrak{h} = \mathbb{R}^2$ y definamos los eventos π_1, π_2 y π_3 como las siguientes proyecciones en este espacio:

$$\pi_1((x, y)) = (x, 0), \quad \pi_2((x, y)) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \quad \text{y} \quad \pi_3((x, y)) = (0, y)$$

Ahora para las proyecciones anteriormente definidas se tiene:

$$(\pi_1 \vee \pi_2) \wedge \pi_3 \neq (\pi_1 \wedge \pi_3) \vee (\pi_2 \wedge \pi_3).$$

1.4.3. Violación de la desigualdad de Bell

Proposición 2. (*Desigualdad de Bell*) Consideremos variables aleatorias X_i , $i = 1, 2, 3$, definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ y con valores en $[-1, 1]$. Entonces se tiene,

$$1 - \mathbb{E}(X_1 X_2) \geq |\mathbb{E}(X_1 X_3) - \mathbb{E}(X_2 X_3)| \quad (1.2)$$

Demostración. sean $x, y, z \in [-1, 1]$, entonces se tiene la siguiente desigualdad:

$$1 - xy \geq |y - x| \geq |z(y - x)|$$

ahora tomando $x = X_1, y = X_2, z = X_3$, y aplicando esperanza se obtiene (1.2).

Consideremos ahora las matrices de Pauli, las cuales forman una base de $M_2(\mathbb{C})$, definidas como sigue:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y consideremos el estado

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Para simplificar notación, si $a \in \mathbb{R}^3$ denotemos por $\sigma(a) = a_1 \sigma_x + a_2 \sigma_y + a_3 \sigma_z$. Un pequeño cálculo nos muestra que si a es unitario, entonces $\sigma(a)$ tiene valores propios 1 y -1. Consideremos tres vectores unitarios $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$, $\langle x_1, x_3 \rangle = \cos(\alpha)$ y $\langle x_2, x_3 \rangle = \sin(\alpha)$.

Luego tomemos las variables aleatorias $\sigma(x_1), \sigma(x_2)$, y $\sigma(x_3)$, las que satisfacen

- $\mathbb{E}(\sigma(x_i)) = \text{Tr}(\rho \sigma(x_i)) = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}$,
- $\mathbb{E}(\sigma(x_i) \sigma(x_j)) = \text{Tr}(\rho \sigma(x_i) \sigma(x_j)) = \langle x_i, x_j \rangle$, para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Se sigue que la matriz de covarianzas es:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cos(\alpha) \\ 0 & 1 & \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego por desigualdad de Bell tendríamos que:

$$2 \sin^2(\alpha/2) = 1 - \cos(\alpha) \geq |\sin(\alpha)|,$$

o equivalentemente $\cos(\alpha/2) \leq \sin(\alpha/2)$, de donde la desigualdad falla si $\alpha \in (0, \pi/2)$. Es decir las variables aleatorias dadas no pueden ser parte de un proceso estocástico clásico X_t a los momentos t_1, t_2 y t_3 , dado que no podemos tener un espacio en el que existan tres variables aleatorias con distribución conjunta que implique las covarianzas dadas.

1.5. Propuestas de modelación matemática de la inferencia estadística cuántica

Los problemas descritos en la sección anterior se basan estrictamente en el hecho que, en general, en mecánica cuántica perdemos la propiedad de conmutatividad. Por ejemplo, la violación de la desigualdad de Bell no nos permite obtener un teorema tipo Kolmogorov para definir un proceso estocástico. Sin embargo, nosotros proponemos que, bajo ciertas condiciones, nos podemos restringir a trabajar en casos conmutativos, en donde podemos utilizar la inferencia estadística clásica. En algunos artículos de inferencia cuántica (ver [2]) se presentan ciertos conceptos que hay que tener en cuenta a la hora de realizar inferencia estadística. El primer concepto importante es el de medición en un sistema cuántico. Este concepto permite describir lo que se observa del sistema.

Definición 9. Sea (\mathfrak{h}, ρ) un espacio de probabilidad de von Neumann. Decimos que M es una medición del sistema en el estado ρ tomando valores en el espacio medible (Ω, \mathcal{F}) , si M es una función del σ -álgebra \mathcal{F} en $\text{Re}^+(\mathfrak{h})$, el conjunto de todos los operadores autoadjuntos no negativos en \mathfrak{h} , con las siguientes propiedades:

- $M(\Omega)$ es el operador identidad 1.
- $\sum_{i=1}^{\infty} M(A_i) = M(A)$, para cualquier secuencia $\{A_1, A_2, \dots\}$ de elementos disjuntos de \mathcal{F} que satisfacen $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

El resultado de una medición M en el sistema con estado ρ es una variable aleatoria X , tomando valores en (Ω, \mathcal{F}) con la siguiente ley de probabilidad:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \text{Tr}(\rho M(A)).$$

Definición 10. Diremos que una medición en un espacio (Ω, \mathcal{F}) es compatible con un SMC $(\mathcal{I}_t)_{t \geq 0}$, si y sólo si se cumple que:

$$[\mathcal{I}_t(M(A)), M(B)] = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall A, B \in \mathcal{F}.$$

Un ejemplo de medición es la medida espectral de un operador autoadjunto. En los ejemplos que veremos más adelante notaremos que contamos con operadores cuyas medidas espectrales son compatibles con el semigrupo. En general, la teoría a desarrollar se basará en mediciones que coincidan con la medida espectral de un operador. A las mediciones que cumplen esta propiedad le llamaremos mediciones simples, la definición formal se muestra a continuación.

Definición 11. Diremos que una medición en un espacio (Ω, \mathcal{F}) es simple si y sólo si $M(A)$ es una proyección autoadjunta para cada $A \in \mathcal{F}$, es decir,

$$M(A) = M(A)^* = M(A)^2, \quad \text{para todo } A \in \mathcal{F}.$$

En el caso en que Ω es \mathbb{R} o un boreliano de \mathbb{R} , toda medición simple corresponde a la medida espectral de un operador autoadjunto K el cual es un observable.

Las mediciones simples compatibles son aquellas que nos permitirán trabajar en un contexto conmutativo, en el cual es posible desarrollar la estadística clásica. Para esto necesitamos definir los siguientes conceptos:

Definición 12. Dado un espacio de Hilbert. Sea K un operador sobre \mathfrak{h} normal (no necesariamente acotado). Entonces definimos $W^*(K)$ el algebra generada por el operador K como:

$$W^*(K) = \{\{K\}' \cup \{K^*\}'\}',$$

donde $A' = \{Q \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) : [K, Q] = 0, \text{ para todo } K \in A\}$

Observación. 1. Si K es un operador autoadjunto. Entonces

$$W^*(K) = \{\{K\}'\}',$$

2. Dados K, Q operadores sobre \mathfrak{h} con $Q \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ y K no acotado entonces es posible definir el conmutador $[K, Q]$ para todo $u \in D(K)$ tal que $Qu \in D(K)$, donde $D(K)$ es el dominio del operador K . Esto nos permite definir $W^*(K)$ para operadores no acotados.

Proposición 3. Para todo operador normal K se tiene que $W^*(K)$ es un algebra de von Neumann, es decir, $W^*(K) \subseteq \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ y $W^*(K) = W^*(K)''$

Demostración. ver [24] teorema 4.6.7 o [23](teorema del doble conmutante).

Cuando una medición física es hecha en un sistema cuántico, el sistema usualmente cambia estocásticamente. Luego, una descripción completa de la medición no sólo especifica la distribución de probabilidades de la variable X , sino también, el nuevo estado del sistema cuando X es observado. En este contexto necesitamos introducir la noción de instrumento el cual es utilizado para realizar la medición.

Si nos referimos al sistema antes y después de la medición como el estado a priori y el estado a posteriori. Un instrumento \mathcal{J} es un *objeto* que permite, dado un estado a priori ρ y un evento A , calcular una probabilidad de obtener A , y un estado a posteriori asociado al evento A . Más formalmente:

Definición 13. Una función $\mathcal{J} : \Omega \times \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ es llamada instrumento para la medición M , si es un núcleo completamente positivo, es decir que cumple las siguientes condiciones:

- $\mathcal{J}(\cdot, a)$ es una medida con valores operadores e $\mathcal{J}(A, \mathbb{1}) = M(A)$.
- $\mathcal{J}(A, \cdot)$ es una aplicación completamente positiva sobre el álgebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$.

Luego la probabilidad de que de la medición del estado ρ resulte el evento A está dada por:

$$\pi(A; \rho, \mathcal{J}) = \text{Tr}(\rho \mathcal{J}(A, \mathbb{1})).$$

Si el sistema estaba en el estado ρ antes que la medición, entonces el estado después de la medición $\sigma(A; \rho, \mathcal{J})$ está dado por la ecuación:

$$\text{Tr}(\sigma(A; \rho, \mathcal{J})a) = \frac{\text{Tr}(\rho \mathcal{J}(A, a))}{\text{Tr}(\rho \mathcal{J}(A, \mathbb{1}))}, \quad a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}).$$

Teorema 2 (De representación). *Sea \mathcal{J} un instrumento en un espacio de Hilbert separable \mathfrak{h} con b.o. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Consideremos la familia de medidas $\Delta = \{\nu_a^u \text{ tal que } \nu_a^u(A) = \langle u, \mathcal{J}(A, a)u \rangle, \text{ con } a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) \text{ y } u \in \mathfrak{h}\}$. Entonces existe una medida de probabilidad que domina a Δ .*

Demostración. Consideremos las medidas con signo $\nu_a^{n,m}$ definidas por $\nu_a^{n,m} = \langle e_n, \mathcal{J}(A, a)e_m \rangle$ y definamos la siguiente medida

$$\mu(A) = \frac{1}{C} \sum_{n,m} c_{n,m} |\nu_1^{n,m}|(A),$$

donde $c_{n,m}$ son constantes reales positivas tales que $C = \sum_{n,m} c_{n,m} |\nu_1^{n,m}|(\Omega)$ es convergente.

Se sigue que $\nu_1^u \ll \mu$ para todo $u \in \mathfrak{h}$, ya que si $\mu(A) = 0$, entonces $\nu^{n,m}(A) = 0$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ y si $u = \sum \lambda_i e_i$ se tiene que

$$\nu_1^u(A) = \left\langle \sum_m \lambda_m e_m, \mathfrak{J}(A, \mathbf{1}) \sum_n \lambda_n e_n \right\rangle = \sum_{n,m} \lambda_m \overline{\lambda_n} \langle e_m, \mathfrak{J}(A, \mathbf{1}) e_n \rangle = 0.$$

Como la aplicación $\mathfrak{J}(A, \cdot)$ es completamente positiva se tiene por teorema 1 que existe una secuencia de operadores acotados $(V_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ que dependen de A tal que:

$$\mathfrak{J}(A, a) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i^*(A) a V_i(A).$$

Luego para cada elemento positivo $a = b^* b \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ se tiene

$$\begin{aligned} \left\langle u, \sum_i V_i^*(A) b^* b V_i(A) u \right\rangle &= \sum_i \langle b V_i(A) u, b V_i(A) u \rangle \\ &\leq \sum_i \|b\|^2 \langle V_i(A) u, V_i(A) u \rangle = \|b\|^2 \left\langle u, \sum_i V_i^*(A) V_i(A) u \right\rangle. \end{aligned}$$

Se sigue que ν_a^u es absolutamente continua con respecto a μ para todo elemento positivo $a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ y $u \in \mathfrak{h}$.

Finalmente para cualquier $a \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ descomponemos $a = \text{Re}^+(a) - \text{Re}^-(a) + i(\text{Im}^+(a) - \text{Im}^-(a))$, de donde se obtiene lo que se quiere probar.

Del teorema anterior obtenemos la siguiente representación para los instrumentos dada la medida de probabilidad μ en Ω :

$$\mathfrak{J}(dx, a) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x)^* a V_i(x) \mu(dx), \quad (1.3)$$

donde $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ son funciones medibles de Ω a $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ tales que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} V_i(x)^* V_i(x) \mu(dx) = 1.$$

Esto implica que el estado a posteriori está dado por

$$\sigma(x; \rho, \mathfrak{J}) = \frac{\sum_i V_i(x)^* \rho V_i(x)}{\sum_i \text{Tr}(\rho V_i(x) V_i(x)^*)}$$

y la distribución de probabilidad es

$$\pi(dx; \rho, \mathcal{J}) = \sum_i \text{Tr}(\rho V_i(x) V_i(x)^*) \nu(dx).$$

Dado un instrumento \mathcal{J} asociado a una medición M y una función f medible y acotada en (Ω, \mathcal{F}) , se tiene

$$\mathcal{J}(f, \mathbf{1}) = M(f) = \int_{\Omega} f(x) M(dx),$$

donde $M(f)$ es definida en general como el límite débil de integrales sobre funciones simples.

En particular, si M es la familia espectral de un operador K autoadjunto que reduce al SMC, se tiene por teorema espectral que

$$\mathcal{J}(f, \mathbf{1}) = f(K)$$

y

$$\mathcal{T}_t f(K) = \mathcal{T}_t \mathcal{J}(f, \mathbf{1}) = \mathcal{J}(\mathcal{T}_t f, \mathbf{1}),$$

donde \mathcal{T}_t está determinado por el teorema espectral como sigue:

$$\mathcal{T}_t f(K) = (T_t f)(K), \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

es decir, T_t es una aplicación de las funciones acotadas borelianas en ellas mismas para cada $t \geq 0$. No es difícil probar que T_t así definido resulta ser un semigrupo markoviano clásico ya que se tiene

1. $T_0 f(K) = f(K)$, lo cual implica que $T_0(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$,
2. $(T_{t+s} f)(K) = T_{t+s} f(K) = T_t \circ T_s f(K) = T_t(T_s f)(K) = (T_t \circ T_s f)(K)$,
3. $(T_t \mathbf{1})(K) = T_t \mathbf{1}(K) = T_t \mathbf{1} = \mathbf{1} = \mathbf{1}(K)$.

1.6. Objetivo

Este trabajo propone una metodología para realizar inferencia estadística en sistemas cuánticos abiertos descritos por semigrupos markovianos cuánticos (SMC). El método propuesto se fundamenta en la búsqueda de mediciones cuyas álgebras conmutativas asociadas permanezcan invariantes bajo la acción del semigrupo. En ese caso se dice que la medición reduce clásicamente

el semigrupo. En algunos casos se pueden encontrar mediciones diferentes -que no conmutan entre ellas- y que reducen el semigrupo. Es lo que ocurre en varios modelos de Óptica Cuántica (masers, lasers).

Las mediciones que reducen clásicamente el SMC se basan en distintos tipos de observables, para lo cual se necesita contar con distintos instrumentos a fin de realizar experimentalmente las mediciones. Para uno de los modelos a estudiar se tiene que una medición basada en el observable *número* genera un proceso estocástico clásico de Nacimiento y Muerte; otra medición, basada en el observable *campo electromagnético* determina un proceso de Ornstein Uhlenbeck. Tomados aisladamente estos procesos poseen generadores muy distintos. Sin embargo, ellos provienen de un mismo modelo cuántico subyacente. La estimación de parámetros se puede hacer siguiendo procedimientos clásicos diferentes, pero ellos debieran arrojar resultados idénticos. Aquí se quiere comparar las distintas estimaciones provenientes de cada reducción.

En este trabajo aplicaremos el método de reducción a dos modelos. Estos son un modelo de Laser y un modelo del micromaser propuesto por Jaynes y Cummings. El próximo capítulo se enfocará en dar más detalladamente los modelos en los que se basará el estudio y los parámetros involucrados en estos que son heredados en sus reducciones. También veremos de qué manera se obtienen las reducciones de estos modelos. Finalmente cuál es nuestra propuesta para realizar estimaciones de los parámetros involucrados, junto con estudiar las propiedades de dichas estimaciones.

2. MODELO CUÁNTICO

En este segundo capítulo presentaremos los modelos en los cuales realizaremos inferencia estadística, estos son un modelo de Laser y el modelo del Micromaser de Jaynes-Cammings. Además de identificar los parámetros involucrados en estos dos modelos, los cuales, posteriormente serán estimados usando las reducciones clásicas ya antes mencionadas, además explicaremos cuales son las condiciones para la existencia de estas reducciones y de qué manera se obtienen éstas para los dos modelos dados.

2.1. Modelo de Laser

El modelo de Laser (Light amplification by stimulated emission of radiation) corresponde a un átomo con dos niveles de energía que atraviesa un resonador ideal. Interactuando con el campo electromagnético de la cavidad, el átomo emite un fotón y su energía decae al nivel más bajo; enseguida, absorbe energía de la cavidad, alcanzando el nivel más alto; la repetición de este ciclo constituye el prototipo de un oscilador armónico cuántico.

Un modelo propuesto corresponde a un SMC $(\mathcal{T}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ sobre $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ con el siguiente generador formal:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(x) = & i[\omega N, x] - \frac{1}{2}A(\nu + 1)(a^\dagger a x - 2a^\dagger x a + x a^\dagger a) \\ & - \frac{1}{2}A\nu(aa^\dagger x - 2axa^\dagger + xaa^\dagger), \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde a^\dagger y a son los operadores de creación y aniquilación respectivamente, N es el operador número, sus definiciones más formales las explicaremos en detalle más adelante.

Las interpretaciones físicas de los parámetros involucrados son:

- A denota la tasa de decaimiento de la energía en la cavidad;
- ν corresponde al número de excitaciones termales;

- ω la frecuencia natural.

Definición 14. Dado un SMC $(T_t)_{t \geq 0}$ sobre el álgebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$. Consideremos el siguiente conjunto de los elementos invariantes bajo la acción del semigrupo:

$$\mathcal{F}(T) = \{x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h}) : T_t(x) = x\}.$$

Decimos que el SMC es ergódico si $\mathcal{F}(T) = \mathbb{C}1$.

La recurrencia de un SMC se define con respecto al potencial el cual definimos de la siguiente forma:

Definición 15. Dado un operador positivo $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$. Se define el potencial formal de x , como la forma cuadrática $\mathfrak{U}(x)$ con dominio:

$$D(\mathfrak{U}(x)) = \left\{ u \in \mathfrak{h} : \int_0^\infty \langle u, T_s(x)u \rangle ds < \infty \right\},$$

por

$$\mathfrak{U}(x)[u] = \int_0^\infty \langle u, T_s(x)u \rangle ds, \quad (u \in D(\mathfrak{U}(x))).$$

Un elemento positivo $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ tal que $D(\mathfrak{U}(x))$ es denso en \mathfrak{h} es llamado integrable. Sea $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})_{int}^+$ el cono de elementos integrables y positivos de $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$. Para todo $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})_{int}^+$, llamamos potencial de x al operador autoadjunto $\mathcal{U}(x)$, el cual representa a $\mathfrak{U}(x)$.

Definición 16. Decimos que un SMC sobre $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ es recurrente si se cumple alguna de las siguientes condiciones, las cuales son equivalentes.

- Para cada elemento positivo $x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ y $u \in \mathfrak{h}$ se tiene $u \notin D(\mathfrak{U}(x))$ o se cumple que $u \in D(\mathfrak{U}(x))$ y $\mathcal{U}(x)[u] = 0$;
- Para cada proyección p y $u \in \mathfrak{h}$ se tiene $u \notin D(\mathfrak{U}(p))$ o se cumple que $u \in D(\mathfrak{U}(p))$ y $\mathcal{U}(p)[u] = 0$.

Para ver la equivalencia de las condiciones ver [12].

Proposición 4. *El SMC correspondiente al Laser es ergódico y recurrente para todo $A, \nu \geq 0$.*

Para la demostración de esta proposición ver [12].

Observación. En la reducción clásica sólo podremos obtener las estimaciones de A y ν , sin embargo, el parámetro ω se pierde en esta reducción. En general nuestro procedimiento permite identificar la disipación de la energía, es decir si suponemos que la parte en el generador que representa al sistema cerrado es conocida (en este caso ω es conocido). Entonces podemos identificar el modelo estimando los parámetros que aparecen en la parte que representa la disipación dentro del generador.

2.2. Modelo del micromaser de Jaynes y Cummings

Similarmente al caso anterior el modelo del Micromaser (microwave amplification by stimulated emission of radiation) de Jaynes y Cummings corresponde a un SMC \mathcal{T} , con el siguiente generador infinitesimal.

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(x) = & -\frac{\mu^2}{2}(a^\dagger a x - 2a^\dagger x a + x a^\dagger a) - \frac{\lambda^2}{2}(a a^\dagger x - 2a x a^\dagger + x a a^\dagger) \\ & + R^2 \cos(\phi \sqrt{a a^\dagger}) x \cos(\phi \sqrt{a a^\dagger}) \\ & + R^2 (\sin(\phi \sqrt{a a^\dagger}) S^* x S \sin(\phi \sqrt{a a^\dagger}) - x), \end{aligned} \quad (2.2)$$

con $\mu^2 = \mu_c n_T$ y $\lambda^2 = \gamma_c (n_T + 1)$.

Proposición 5. *El SMC correspondiente al micromaser es ergódico y si $\lambda^2 < \mu^2$, entonces el SMC es recurrente. Además en los siguientes casos se tiene:*

- si $\lambda^2 > \mu^2$, el SMC es transiente,
- si $\lambda^2 = \mu^2$ tenemos dos posibilidades, $R\phi = 0$, lo cual implica que el SMC es recurrente o $R\phi \neq 0$ y el SMC es transiente.

Para la demostración de esta proposición ver [12].

En este modelo los parámetros involucrados son:

- μ_c es la tasa de decaimiento de la energía en el sistema libre;
- n_T corresponde al número de excitaciones termales;
- γ_c es la tasa de decaimiento de la energía en la cavidad;

- R es el coeficiente de saturación en la cavidad;
- ϕ corresponde a la fase o frecuencia natural.

Como veremos más adelante este modelo puede ser reducido a un proceso de nacimiento y muerte. Sin embargo, nos concentraremos en el caso $R\phi = 0$, ya que, como veremos más adelante, este modelo tendrá dos reducciones posibles. Considerando este hecho tendremos sólo tres parámetros a estimar, estos son el número de excitaciones termales y las tasas de decaimiento de la energía en la cavidad y en el sistema libre.

Observación. Las reducciones clásicas heredan estos tres parámetros, sin embargo, veremos más adelante que si consideramos estos tres parámetros por separados, entonces las reducciones clásicas no estarán identificadas, de hecho para estos parámetros el modelo cuántico no está identificado, por lo que consideraremos sólo dos parámetros estos son λ^2 y μ^2 , donde $\mu^2 = \mu_c n_T$ y $\lambda^2 = \gamma_c(n_T + 1)$.

2.3. Reducción clásica de semigrupos markovianos cuánticos mediante mediciones compatibles

En primer lugar, queremos ver de qué manera estas mediciones compatibles reducen clásicamente a un semigrupo, junto con establecer algunos criterios para la construcción de tales mediciones.

2.3.1. Reducción clásica

En esta parte explicaremos como utilizaremos las mediciones compatibles para obtener procesos estocásticos clásicos en donde se hará la estimación de parámetros. Para esto necesitamos introducir las siguientes definiciones:

Definición 17. Dado un sistema cuántico abierto, el cual queda representado por $(\mathfrak{B}(\mathfrak{h}), (\mathcal{T}_t)_{t \geq 0})$, decimos que un operador K reduce clásicamente a $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$, si:

$$\mathcal{T}_t(W^*(K)) \subset W^*(K), \quad \text{para todo } t \geq 0$$

Donde $W^*(K)$ corresponde al álgebra de von Neumann generada por el operador K . Es decir, el álgebra $W^*(K)$ queda invariante bajo la acción del semigrupo.

Definición 18. Dada una medición simple M , es decir, es la medida espectral de un operador K denotaremos como $W^*(M) = W^*(K)$. Luego diremos que la medición reduce clásicamente al semigrupo si el operador K lo hace.

Proposición 6. Sea M una medición simple asociada al operador K . La medición es compatible si y sólo si ésta reduce clásicamente al SMC.

Demostración. La implicación hacia la izquierda es obvia, ya que en particular $M(A) = f(K) \in W^*(K)$, $\forall A \in \mathcal{F}$ tomando $f = \mathbb{1}_A$.

Por otro lado si una medición M es compatible con el semigrupo se tiene que para $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$ y $g = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}$ funciones simples

$$[\mathcal{I}_t f(K), g(K)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j [\mathcal{I}_t M(A_i), M(B_j)] = 0.$$

Si $g \geq 0$ y acotada sabemos existe una sucesión de funciones simples tal que $g_n \uparrow g$ lo cual implica que $g_n(K)$ converge en el sentido débil a $g(K)$. Por lo que se tiene

$$[\mathcal{I}_t f(K), g(K)] = 0 \text{ para toda } g \geq 0.$$

Finalmente se tiene para toda $g = g^* - g^-$. En particular tomando g como la identidad obtenemos

$$[\mathcal{I}_t f(K), K] = 0.$$

Ahora dado $f \geq 0$ y tomando una sucesión de funciones simple tal que $f_n \uparrow f$, repitiendo el mismo procedimiento anterior junto con el hecho que el semigrupo es normal, es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_t f_n(K) = \mathcal{I}_t f(K)$ se tiene que

$$[\mathcal{I}_t f(K), K] = 0, \text{ para toda } f \text{ medible y acotada.}$$

Por lo tanto la medición reduce al semigrupo.

Proposición 7. Sea M una medición simple asociada al operador K , $W^*(M) = W^*(K)$ es maximal si y sólo si esta posee un vector cíclico, es decir, existe $\xi \in \mathfrak{h}$ tal que $\{f(K)\xi : f \in b\mathcal{F}\}$ es denso en \mathfrak{h} .

Demostración. Para la demostración ver [24](teorema 4.77, pag 183).

Teorema 3. *Dado un sistema cuántico abierto representado por un SMC $(\mathcal{T}_t^\theta)_{t \geq 0}$, el cual depende de un parámetro θ , y dado un estado inicial ρ . Sea M una medición simple asociada al operador autoadjunto K , la cual reduce clásicamente al semigrupo. Entonces existe un sistema markoviano clásico $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}_\theta, (X_t)_{t \geq 0})$ tal que para toda función $f : \text{Sp}(K) \rightarrow \mathbb{R}$ boreliana y acotada,*

$$T_t^\theta f(x) = \mathbb{E}_\rho^\theta(f(X_t)/X_0 = x), \quad (t \geq 0, x \in \text{Sp}(K)),$$

donde $T_t^\theta = \mathcal{T}_t^\theta|_{W^*(M)}$. En particular se tiene que

$$\mathbb{P}_\theta(X_t \in A) = \text{Tr}(\rho T_t^\theta(M(A))).$$

Demostración. Sea K un operador autoadjunto con espectro $\text{Sp}(K)$ y tomemos $\Omega = [\text{Sp}(K)]^{\mathbb{R}^+}$. Definamos el proceso $X_t(\omega) = \omega(t)$ para todo $\omega \in \Omega$, $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s; 0 \leq s \leq t)$ y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \sigma(X_t; t \geq 0)$.

En lo que sigue necesitamos construir una medida de probabilidad \mathbb{P}_ρ para la cual X_t sea un proceso de Markov. Para cada conjunto finito de enteros $[0, 1] = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ considere un conjunto ordenado de tiempos $t[0, n] = \{0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n\}$ y un operador $x[0, n] = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, donde $x_i \in \mathfrak{B}(\mathfrak{h})$, para todo $i \in [0, n]$. Luego definimos de manera recursiva la familia $K(t[0, n], x[0, n])$ de elementos en $W^*(M)$ por:

$$K(t[0, 1], x[0, 1]) = \mathcal{T}_t(x_1)$$

$$K(t[0, n], x[0, n]) = \mathcal{T}_{t_n - t_{n-1}}(x_n)K(t[0, n-1], x[0, n-1]),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, en cada espacio $[\text{Sp}(K)]^n$ introduzca la medida

$$\mu_{[0, n]}(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = \text{Tr}(\rho K(t[0, n], x[0, n])),$$

donde $x_k = f_k(K)$, siendo cada f_k función boreliana y acotada en el espectro de K , para todo $k \in [0, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Esta es una familia proyectiva de medidas de probabilidad ya que:

$$\mu_{[0, n-1]}(f_1 \otimes \dots \otimes f_{n-1}) = \mu_{[0, n]}(f_1 \otimes \dots \otimes f_{n-1} \otimes 1),$$

y $\mu_{[0, n-1]}$ coincide con la proyección $\pi_{n-1}(\mu_{[0, n]})$ de la medida $\mu_{[0, n]}$ en $[\text{Sp}(K)]^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como K es autoadjunto se tiene que $\text{Sp}(K) \subset \mathbb{R}$, luego por teorema de extensión de Kolmogorov el límite proyectivo de la familia $\mu_{[0, n]}$ existe y es una única medida de probabilidad \mathbb{P}_ρ en Ω tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu_{[0, n]} = \pi_n[\mathbb{P}_\rho]$.

2.3.2. Condiciones suficientes para la compatibilidad de mediciones

Con el fin de encontrar mediciones compatibles necesitamos introducir algo de notación, para presentar un teorema importante en este contexto.

Dado un operador Q acotado, denotaremos por $\text{ad}_Q(\cdot) = [\cdot, Q]$, es decir, dado otro operador K , se tiene que $\text{ad}_Q(K) = [K, Q]$. Además denotemos por $\text{ad}_Q^2 = \text{ad}_Q(\text{ad}_Q(\cdot))$, es decir, $\text{ad}_Q^2(K) = [[K, Q], Q]$.

Teorema 4. *Dado un SMC $(\mathcal{T}_t)_{t \geq 0}$ sobre $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$. Sea M una medición simple la cual está asociada a un operador autoadjunto K (no necesariamente acotado) y $W^*(M)$ es maximal, entonces las siguientes proposiciones son equivalentes*

- (i) M es compatible con el semigrupo.
- (ii) La variedad $D(\mathfrak{L}) \cap W^*(M)$ no es trivial y para cada $x \in D(\mathfrak{L}) \cap W^*(M)$, se tiene $\mathfrak{L}(x) \in W^*(M)$.
- (iii) Existe un semigrupo markoviano clásico $(T_t)_{t \geq 0}$ sobre $\mathbf{Sp}(K)$ tal que para todo $f \in L(\mathbf{Sp}(K))$,

$$T_t(f(K)) = \int_{\mathbf{Sp}(K)} M(dx) T_t f(x).$$

En particular si tenemos un semigrupo markoviano cuántico con generador de la forma:

$$\mathfrak{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k)$$

y existe una medición simple M tal que se cumplen las condiciones,

- (i) $\text{ad}_{M(A)}^2(H) = 0$, para todo $A \in \mathcal{F}$ y
- (ii) $\text{ad}_{M(A)}(L_k) = c_k(A)L_k$, donde $c_k(A) = c_k^*(A)$, y $\text{ad}_{M(A)}(c_k(A)) = 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Entonces se tiene que la medición M es compatible, es decir, la medición M reduce clásicamente al SMC.

Demostración. Si M es simple y $W^*(M)$ es maximal, es decir, $W^*(M) = W^*(M)'$. Entonces $\mathcal{L}(W^*(M)) \subset W^*(M)$ si y sólo si $\mathcal{L}(x)$ vive en $W^*(M)'$ para cualquier elemento $x \in W^*(M)$. (Para más detalles ver [25]).

En particular si se cumplen las condiciones (i) y (ii) para el generador dado se tiene que:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}(M(A)), M(A)] &= [i[H, M(A)] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k), M(A)] \\
&= \text{ad}_{M(A)}^2(H) - \frac{1}{2} \sum_k \left([L_k^* L_k M(A), M(A)] \right. \\
&\quad \left. - 2[L_k^* M(A) L_k, M(A)] + [M(A) L_k^* L_k, M(A)] \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_k \left([L_k^* L_k, M(A)] M(A) - 2[L_k^* M(A) L_k, M(A)] \right. \\
&\quad \left. + M(A) [L_k^* L_k, M(A)] \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_k \left((L_k^* [L_k, M(A)] + [L_k^*, M(A)] L_k) M(A) \right. \\
&\quad \left. - 2(L_k^* M(A) [L_k, M(A)] + [L_k^*, M(A)] M(A) L_k) \right. \\
&\quad \left. + M(A) (L_k^* [L_k, M(A)] + [L_k^*, M(A)] L_k) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_k \left((L_k^* c_k(A) L_k - L_k^* c_k(A) L_k) M(A) \right. \\
&\quad \left. - 2(L_k^* M(A) c_k(A) L_k - L_k^* c_k(A) M(A) L_k) \right. \\
&\quad \left. + M(A) (L_k^* c_k(A) L_k - L_k^* c_k(A), M(A) L_k) \right) \\
&= \sum_k (L_k^* M(A) c_k(A) L_k - L_k^* c_k(A) M(A) L_k) = 0
\end{aligned}$$

La idea es que podemos encontrar mediciones consistentes, en el sentido de que aunque el instrumento perturbe el sistema, la teoría nos indique que podemos tomar las mediciones como un sistema clásico. Esto se verifica en los ejemplos que veremos más adelante.

La reducción clásica de un SMC está relacionada, en algunos casos con el fenómeno de la decoherencia cuántica, según explicaremos a continuación.

2.3.3. Decoherencia

Dado un SMC \mathcal{T}_t , un espacio \mathfrak{h} y un estado ρ , la evolución de los estado es $\rho_t = \mathcal{T}_{*t}(\rho)$. Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal del espacio de Hilbert, luego los componentes de ρ son $\rho(m, n) = \langle e_m, \rho e_n \rangle$ y denotemos los componentes de ρ_t por $\rho_t(m, n)$ con $n, m \in \mathbb{N}$. Los elementos fuera de la diagonal, es decir $\rho_t(m, n)$ con $n \neq m$ son llamados las coherencias. La decoherencia es la desaparición de estos términos a medida que pasa el tiempo, es decir, diremos que hay decoherencia si $\rho_t(m, n) \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow \infty$

Ejemplo. Sea $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^2$ con la base $e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sea,

$$H = |e_1\rangle\langle e_1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La dinámica cuántica asociada al sistema cerrado con Hamiltoniano H , esta definida a través del grupo unitario

$$U_t = \exp(-itH) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Luego el semigrupo dinámico cuántico que actúa en $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ queda definido por:

$$\alpha_t(x) = U_t^* x U_t, \quad (\forall t \geq 0)$$

Lo anterior es llamado la representación de Heisenberg, mientras que su análogo dual $\alpha_{*t}(\rho) = U_t \rho U_t^*$, $(\forall t \geq 0)$ definida sobre los operadores ρ con traza unitaria es conocida como la representación de Shrödinger.

Sea

$$\rho = \begin{pmatrix} p & r e^{i\theta} \\ r e^{-i\theta} & q \end{pmatrix}$$

donde $r > 0$, $\theta \in [0; 2\pi]$, $0 \leq r \leq 1/2$ y $(p - q)^2 \leq 1 - 4r^2$, $p, q > 0$ y $p + q = 1$. ρ resulta ser un operador positivo con traza unitaria con su evolución a tiempo t dada por:

$$\rho_t = \alpha_{*t}(\rho) = \begin{pmatrix} p & r e^{i(t+\theta)} \\ r e^{-i(t+\theta)} & q \end{pmatrix}$$

En este caso tenemos que no hay decoherencia ya que los términos fuera de la diagonal no se van a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Los generadores de α y α_* son $\mathcal{L}(x) = i[H, x]$ y $\mathcal{L}_*(\rho) = i[\rho, H]$ respectivamente. Consideremos ahora el mismo sistema pero suponiendo que hay una interacción con el medio, es decir, existe otro sistema que lo contiene, el cual se supone en equilibrio, con estado de equilibrio ρ_a . Como ya habíamos visto antes, el nuevo semigrupo actuando en el dual, está dado por:

$$\mathcal{T}_{*t}(\rho) = \text{Tr}_{\rho_a} (e^{-itH_T}(\rho \otimes \rho_a)e^{itH_T})$$

La expresión dual de la evolución de $\mathcal{T}_t(x)$ mediante la relación

$$\text{Tr}(\mathcal{T}_{*t}(\rho)x) = \text{Tr}(\rho\mathcal{T}_t(x)) =, \quad (\forall t \geq 0)$$

En definitiva \mathcal{T}_t resulta ser un semigrupo con generador

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] + \mathcal{D}(x),$$

donde $\mathcal{D}(x)$ representa la disipación de energía dada por la interacción del sistema con el recipiente. Si asumimos que la disipación puede ser escrita como:

$$\mathcal{D}(x) = -\frac{1}{2}(\sigma_+\sigma_-x - 2\sigma_+x\sigma_- + x\sigma_+\sigma_-),$$

con

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces podemos ver que $\sigma_+\sigma_- = H = |e_1\rangle\langle e_1|$

Luego podemos ver que el estado $\rho_\infty = |e_0\rangle\langle e_0|$ es un estado \mathcal{T}_{*t} -invariante y por el siguiente teorema probado en [13].

Teorema 5. Sea \mathcal{T} un semigrupo dinámico cuántico con generador dado por:

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_k (L_k^* L_k x - 2L_k^* x L_k + x L_k^* L_k).$$

Supongamos que el semigrupo posee un estado normal invariante fiel y si se cumple alguna de estas condiciones:

(a) H es acotado, o

(b) H es autoadjunto y $e^{itH}(D) \subseteq D(G)$.

Entonces \mathcal{T}_t converge hacia el equilibrio si y sólo si

$$\{L_k, L_k^*, H; k \geq 1\}' = \{L_k, L_k^*; k \geq 1\}'$$

Obviamente en nuestro ejemplo estamos en el caso (a) y los elementos que conmutan con L_k y L_k^* además lo hacen con H , se tiene que

$$\langle e_0, \mathcal{T}_{*t}(\rho)e_1 \rangle \longrightarrow 0$$

$$\langle e_1, \mathcal{T}_{*t}(\rho)e_0 \rangle \longrightarrow 0$$

Luego en este caso se produce el fenómeno de decoherencia cuántica.

Es posible ver que el semigrupo aquí descrito es reducido por el operador H , es decir como H tiene valores propios 1 y 0, con vectores propios e_0 y e_1 , entonces la medida espectral esta dada por

$$M(\{0\}) = |e_0\rangle\langle e_0| \quad \text{y} \quad M(\{1\}) = |e_1\rangle\langle e_1|$$

Esta medición cumple las condiciones (i) y (ii) del teorema 4. La primera condición es obvia ya que tomamos la medida espectral de H . Para la segunda condición podemos ver, mediante un básico cálculo de matrices que:

$$\text{ad}_{M(A)}(\sigma_+) = c_+(A)\sigma_+ \quad \text{y} \quad \text{ad}_{M(A)}(\sigma_-) = c_-(A)\sigma_-,$$

donde $c_+(\{1\}) = 0$, $c_+(\{0\}) = 1$ y $c_-(\{1\}) = 1$, $c_-(\{0\}) = 0$

En general para un SMC sobre $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ se tiene que cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

1. El SMC es reducido por un operador K con espectro puntual;
2. existe un estado invariante que conmuta con K ;
3. el semigrupo es ergódico.

Entonces se produce el fenómeno de decoherencia y puede ser percibido tomando una base ortonormal de vectores propios de K .

Principalmente si se detecta experimentalmente la decoherencia, esto podría sugerir la existencia de un operador K , el cual reduzca al SMC.

2.4. Ejemplos de Reducción

2.4.1. Proceso de nacimiento y muerte

Tanto el modelo del Laser como el de Jaynes y Cumming pueden ser reducidos a un proceso clásico de nacimiento y muerte, veremos la reducción para el modelo de Laser ya que la segunda reducción se realiza de manera análoga.

Sea $\mathfrak{h} = l^2(\mathbb{N})$ con su base canónica ortonormal $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y sea \mathcal{T}_t un QMS sobre el álgebra de operadores acotados $\mathfrak{B}(\mathfrak{h})$ con generador:

$$\mathfrak{L}(x) = i[\omega N, x] - \frac{1}{2}A(\nu+1)(a^\dagger ax - 2a^\dagger xa + xa^\dagger a) - \frac{1}{2}A\nu(aa^\dagger x - 2axa^\dagger + xaa^\dagger),$$

donde a y a^\dagger son los operadores de aniquilación y creación respectivamente definidos por:

$$a^\dagger e_n = \sqrt{n+1}e_{n+1}, \quad ae_0 = 0, \quad ae_n = \sqrt{n}e_{n-1}, \quad \text{para } n \geq 1;$$

sea $N = a^\dagger a$ el operador número, entonces

$$Ne_n = ne_n, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Ahora, si consideramos la medición dada por la medida espectral correspondiente al operador número, entonces tenemos lo siguiente:

$$M(\{n\}) = |e_n\rangle\langle e_n|$$

y por definición

$$W^*(M) = W^*(N)$$

Además tomemos el instrumento:

$$\mathfrak{J}(\{n\}, x) = |e_n\rangle\langle e_n|x|e_n\rangle\langle e_n|.$$

Podemos ver que $\mathfrak{J}(\{n\}, \mathbb{1}) = |e_n\rangle\langle e_n||e_n\rangle\langle e_n| = |e_n\rangle\langle e_n| = M(\{n\})$, $\mathfrak{J}(\cdot, x)$ es una medida con valores operadores, e $\mathfrak{J}(A, x) = \sum_{n \in A} |e_n\rangle\langle e_n|x|e_n\rangle\langle e_n|$, para cada x , de lo que resulta ser una aplicación completamente positiva. Por lo tanto decimos que \mathfrak{J} es un instrumento para la medición M . Luego podemos ver que se cumplen las propiedades (i) y (ii) en el teorema 4,

- (i) Obviamente $\text{ad}_{M(A)}^2(N) = 0$, ya que M es la medida espectral de N ;

$$(ii) \text{ ad}_{M(\{n\})}(a^\dagger) = [a^\dagger, |e_n\rangle\langle e_n|] = (|e_{n+1}\rangle\langle e_{n+1}| - |e_n\rangle\langle e_n|) a^\dagger = c^\dagger(\{n\})a^\dagger$$

y

$$\text{ ad}_{M(\{n\})}(a) = [a, |e_n\rangle\langle e_n|] = (|e_{n-1}\rangle\langle e_{n-1}| - |e_n\rangle\langle e_n|) a = c(\{n\})a.$$

Por otro lado se tiene que el álgebra de von Neumann generada por el operador número es maximal, es decir, $W^*(M) = W^*(N) = W^*(N)'$.

Luego por teorema 4 se tiene que el operador número reduce al semigrupo. Consideremos $f(N) \in W^*(N)$. Se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(f(N)) = & i[\omega N, f(N)] - \frac{1}{2}A(\nu + 1)(a^\dagger a f(N) - 2a^\dagger f(N)a + f(N)a^\dagger a) \\ & - \frac{1}{2}A\nu(aa^\dagger f(N) - 2af(N)a^\dagger + f(N)aa^\dagger), \end{aligned} \quad (2.3)$$

ahora bien,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(f(N))e_n = & (A\nu(n + 1)(f(n + 1) - f(n)) \\ & - A(\nu + 1)n(f(n) - f(n - 1)))e_n, \end{aligned}$$

Esto muestra que el generador infinitesimal de $\mathcal{T}_t|_{W^*(N)}$ es el de un proceso de nacimiento y muerte, es decir, $\mathcal{T}_t|_{W^*(N)} = T_t$ donde T_t es el semigrupo de Markov correspondiente a un proceso de nacimiento y muerte con $\lambda_n = A\nu(n + 1)$ y $\mu_n = A(\nu + 1)n$ sus tasas de nacimiento y muerte respectivamente.

En el modelo de Jaynes-Cummings se tiene también la reducción a un proceso de nacimiento y muerte con tasas de nacimiento y muerte dadas por:

$$\lambda_k = \lambda^2(k + 1) + R^2 \sin^2(\phi\sqrt{k + 1}), \quad \mu_k = \mu^2 k. \quad (2.4)$$

Para detalles ver [12].

Podemos ver que esta reducción es recurrente en los siguientes casos:

- $\lambda^2 < \mu^2$
- $\lambda^2 = \mu^2$ y $R\phi = 0$

En ambos modelos podemos ver que también se produce el fenómeno de decoherencia al ser estos procesos ergódicos.

2.4.2. Proceso de Ornstein Uhlenbeck

Consideremos ahora el modelo de Jaynes-Cummings con la representación en donde

$\mathfrak{h} = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2) dx)$ con el mismo generador dado en (2.2), pero considerando el caso en donde $R = 0$:

$$\mathfrak{L}(x) = -\frac{\mu^2}{2}(a^\dagger ax - 2a^\dagger xa + xa^\dagger a) - \frac{\lambda^2}{2}(aa^\dagger x - 2axa^\dagger + xaa^\dagger),$$

donde a y a^\dagger son los operadores de aniquilación y creación respectivamente que podemos definir por:

$$a^\dagger = \frac{q - ip}{\sqrt{2}}, \quad a = \frac{q + ip}{\sqrt{2}},$$

donde q y p corresponden a los operadores posición y momento, los cuales actúan de la siguiente forma:

$$qf(s) = sf(s), \quad pf(s) = -if'(s)$$

Consideremos la proyección E_λ definida por

$$E_\lambda f(s) = \begin{cases} f(s), & s < \lambda \\ 0, & s \geq \lambda \end{cases}$$

Se tiene que $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ es la familia espectral del operador q , es decir, q tiene la siguiente descomposición espectral:

$$q = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda.$$

Luego podemos definir la medición correspondiente a este operador $M(A)$ como:

$$M(A)f(s) = \begin{cases} f(s), & s \in A \\ 0, & s \in A^c \end{cases}$$

Finalmente mediante el teorema espectral obtenemos:

$$\mathfrak{J}(f, \mathbf{1}) = M(f) = f(q) = \int_{\mathbb{R}} f(x)M(dx)$$

Se verifica que $\mathbf{1}$ es un núcleo completamente positivo y $\mathcal{J}(A, \mathbb{I}) = M(A)^2 = M(A)$

Mediante las siguientes relaciones de conmutación $[a, f(q)] = (\sqrt{2})^{-1} f'(q)$ y $[a^\dagger, f(q)] = -(\sqrt{2})^{-1} f'(q)$ se obtiene mediante un cálculo directo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(q)) &= -\frac{\mu^2}{2} (a^\dagger a f(q) - 2a^\dagger f(q)a + f(q)a^\dagger a) \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{2} (aa^\dagger f(q) - 2af(q)a^\dagger + f(q)aa^\dagger), \\
&= -\frac{\mu^2}{2} (a^\dagger [a, f(q)] - [a^\dagger f(q)]a) - \frac{\lambda^2}{2} (a[a^\dagger, f(q)] - [a, f(q)]a^\dagger), \\
&= -\frac{\mu^2}{2} (a^\dagger (\sqrt{2})^{-1} f'(q) + (\sqrt{2})^{-1} f'(q)a) \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{2} (-a(\sqrt{2})^{-1} f'(q) - (\sqrt{2})^{-1} f'(q)a^\dagger), \\
&= -\frac{\mu^2}{2\sqrt{2}} (a^\dagger f'(q) + f'(q)a) - \frac{\lambda^2}{2\sqrt{2}} (-af'(q) - f'(q)a^\dagger), \\
&= -\frac{\mu^2}{2\sqrt{2}} (f'(q)a^\dagger - (\sqrt{2})^{-1} f''(q) + f'(q)a) \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{2\sqrt{2}} (f'(q)a + (\sqrt{2})^{-1} f''(q) + f'(q)a^\dagger), \\
&= -\frac{\mu^2}{2\sqrt{2}} \left(f'(q) \frac{2q}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2})^{-1} f''(q) \right) \\
&\quad + \frac{\lambda^2}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2q}{\sqrt{2}} f'(q) + (\sqrt{2})^{-1} f''(q) \right), \\
&= \frac{\lambda^2 - \mu^2}{2} q f'(q) + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{4} f''(q).
\end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene que $[\mathcal{L}(f(q)), f(q)] = 0$ y en adición tenemos que $W^*(q)$ es maximal, de lo que obtenemos que la medición antes definida reduce clásicamente al SMC. Más aún viendo la forma del generador restringido a $W^*(q)$ se tiene que la reducción del SMC corresponde al generador infinitesimal de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

2.5. *¿Como aprovechar la reducción clásica para inferir clásicamente sobre modelos cuánticos?*

Dado un SMC que representa a un sistema cuántico abierto hemos dicho que existe reducción clásica si existe un observable cuya algebra de von Neumann queda invariante bajo la acción del semigrupo. La propuesta es inferir clásicamente en dichas reducciones, y aprovechar que hay modelos con más de una reducción clásica para identificar el modelo cuántico en sus componentes disipativas (es decir, supondremos la dinámica hamiltoniana libre conocida).

En los casos que estamos estudiando, se quiere estimar ciertos parámetros involucrados en los modelos cuánticos, que siguen estando presentes en cada una de las reducciones clásicas.

Sea \mathcal{T}^θ un semigrupo markoviano cuántico y sean Q_1, Q_2, \dots, Q_n operadores tales que reducen clásicamente al semigrupo, es decir obtenemos semigrupos clásicos de la forma $T_i^\theta = \mathcal{T}^\theta|_{W^*(Q_i)}$, en cada uno de estos obtenemos un estimador para el parámetro θ .

En los dos capítulos siguientes se estudiará una manera clásica de realizar inferencia estadística en los modelos obtenidos mediante las reducciones. Principalmente estimaremos los parámetros heredados en las reducciones, junto con estudiar las propiedades de tales estimaciones como por ejemplo, si los estimadores encontrados son consistentes y si podemos encontrar la distribución asintótica de estos estimadores, esto último permitirá dar una medida aproximada del error cometido en dichas estimaciones.

3. PROCESO DE NACIMIENTO Y MUERTE

En este capítulo nos olvidaremos por un momento del modelo cuántico para detenernos a estudiar cómo hacer una buena estimación de parámetros en los procesos de nacimiento y muerte obtenidos mediante nuestras reducciones. Con este objetivo consideremos un proceso de nacimiento y muerte $(X_t)_{t \geq 0}$, con generador dado por:

$$L_\theta f(n) = \lambda_n(f(n+1) - f(n)) - \mu_n(f(n) - f(n-1)),$$

donde $\lambda_n = A\nu(n+1)$ y $\mu_n = A(\nu+1)n$, con constantes $A, \nu > 0$. En este caso nuestro proceso tiene la siguiente forma:

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n 1_{[T_n, T_{n+1}]}(t), \quad (3.1)$$

donde $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ es una cadena de Markov con probabilidad de transición

$$\Pi(n, n+1) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \mu_n} = 1 - \Pi(n, n-1),$$

y $\{T_n\}_{n \leq 0}$ corresponde a los tiempos de saltos del proceso cuyos incrementos son independientes y distribuidos exponencialmente con tasa $q(\xi_n) = \lambda_{\xi_n} + \mu_{\xi_n}$, es decir

$$(T_{n+1} - T_n) \sim \exp(\lambda_{\xi_n} + \mu_{\xi_n}).$$

Es ya estudiado que éste es un proceso recurrente, con medida invariante dada por:

$$\mu(\{n\}) = \frac{1}{\nu+1} \left(\frac{\nu}{\nu+1} \right)^n. \quad (3.2)$$

Nótese que podemos escribir este proceso como la diferencia de dos procesos crecientes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
X_t &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n 1_{[T_n, T_{n+1}]}(t) = \xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi_{n-1}) 1_{[T_n, \infty)}(t) \\
&= \xi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi_{n-1}) 1_{[T_n, \infty)}(t) 1_{\{\xi_n - \xi_{n-1} > 0\}} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi_{n-1}) 1_{[T_n, \infty)}(t) 1_{\{\xi_n - \xi_{n-1} < 0\}}.
\end{aligned}$$

Luego, se tiene la siguiente descomposición:

$$X_t = X_0 + N_t^+ - N_t^-, \quad \text{con } X_0 = \xi_0,$$

$$N_t^+ = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi_{n-1}) 1_{[T_n, \infty)}(t) 1_{\{\xi_n - \xi_{n-1} > 0\}},$$

y

$$N_t^- = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi_{n-1}) 1_{[T_n, \infty)}(t) 1_{\{\xi_n - \xi_{n-1} < 0\}}.$$

Los procesos $(N_t^+)_{t \geq 0}$ y $(N_t^-)_{t \geq 0}$ son puntuales y tienen los siguientes compensadores previsibles:

$$\tilde{N}_t^+ = \int_0^t A\nu(X_{s-} + 1) ds,$$

y

$$\tilde{N}_t^- = \int_0^t A(\nu + 1) X_{s-} I_{\{X_{s-} > 0\}} ds.$$

3.1. Estimación de parámetros.

Para el proceso descrito anteriormente se busca estimar $\theta = (A, \nu)$, suponiendo que podemos observar X_t . Para esto usaremos en primer lugar el estimador de Nelson-Aalen (ver [1]), el cual se puede encontrar de la siguiente manera:

Supongamos que tenemos un proceso puntual N_t con compensador previsible $\tilde{N}_t = \int_0^t \lambda(s) ds$. La función $\lambda(t)$ es conocida como

la intensidad previsible del proceso. Asumamos que la intensidad que depende del parámetro θ tiene una descomposición multiplicativa, es decir:

$$\lambda(t, \theta) = Y(t)\alpha_t(\theta),$$

donde $Y(t)$ es una función de las observaciones X_t y $\alpha_t(\theta)$ es una función del parámetro θ . Entonces podemos usar el hecho que $N_t - \widetilde{N}_t = M_t$ donde M_t es una martingala local. El compensador cumple que:

$$\mathbb{E}(N_\tau) = \mathbb{E}(\widetilde{N}_\tau), \quad \text{para todo tiempo de parada } \tau < \infty.$$

La martingala M_t tiene características de error al identificar \widetilde{N}_t con N_t y satisface

$$\mathbb{E}(M_\tau) = 0, \quad \text{para todo tiempo de parada finito.}$$

Es decir si definimos la relación de equivalencia entre procesos adaptados con variación finita de la forma:

$$X \sim Y \quad \text{si y sólo si} \quad X - Y = M,$$

donde M es una martingala local nula en cero. Se tiene en particular que

$$N \sim \int_0^\cdot Y(s)\alpha_s(\theta)ds.$$

Así mismo, si H es un proceso previsible obtenemos:

$$\int_0^\cdot H_s dN_s \sim \int_0^\cdot H_s Y(s)\alpha_s(\theta)ds.$$

Considerando este hecho y tomando $H_s = \frac{1}{Y(t)}1_{\{Y_s \neq 0\}}$, se propone como estimador de $\mathcal{A}(t) = \int_0^t \alpha_s(\theta) ds$ a

$$\widehat{\mathcal{A}}(t) = \int_0^t \frac{1_{\{Y_s \neq 0\}}}{Y(s)} dN_s,$$

donde el segundo termino corresponde a la integral estocástica de $\frac{1_{\{Y_s \neq 0\}}}{Y(t)}$ con respecto al proceso N_t . Este recibe el nombre de estimador de Nelson Aalen.

Ahora usaremos esta idea para estimar los parámetros de nuestro modelo. Sabemos que

$$\lambda_t^+ = A\nu(X_{s^-} + 1) \quad \text{y} \quad \lambda_t^- = A(\nu + 1)X_{s^-}I_{\{X_{s^-} > 0\}}$$

son las intensidades previsibles de N_t^+ y N_t^- respectivamente. Luego, a fin de estimar las cantidades

$$\mathcal{A}^+(t) = \int_0^t A\nu ds = A\nu t \quad \text{y} \quad \mathcal{A}^-(t) = \int_0^t A(\nu + 1) ds = A(\nu + 1)t,$$

puede usarse el estimador de Nelson Aalen obteniendo

$$\hat{\mathcal{A}}^+(t) = \int_0^t \frac{1}{(X_{s^-} + 1)} dN_s^+ \quad \text{y} \quad \hat{\mathcal{A}}^-(t) = \int_0^t \frac{I_{\{X_{s^-} > 0\}}}{X_{s^-}} dN_s^-.$$

3.1.1. Propiedades asintóticas

A fin de estudiar las propiedades asintóticas del estimador, comenzaremos por estudiar la convergencia de $\frac{X_t}{t}$, para lo cual utilizaremos el siguiente teorema ergódico:

Teorema 6. *Sea X_t un proceso de saltos markovianos en un espacio numerable E con medida invariante μ . Entonces,*

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(X_s) ds \xrightarrow{c.s.} \int_E f d\mu, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

Del teorema ergódico obtenemos los siguientes corolarios:

Corolario 1. *Para el proceso descrito en 3.1, se tiene*

$$\frac{X_t}{t} = \frac{X_0}{t} + \frac{N_t^+}{t} - \frac{N_t^-}{t} \xrightarrow{c.s.} 0.$$

Demostración. Aplicando el teorema ergódico con medida invariante dada en 3.2 se tienen las siguientes convergencias::

$$\frac{1}{t} \tilde{N}_t^+ = \frac{1}{t} \int_0^t A\nu(X_{s^-} + 1) ds \xrightarrow{c.s.} A\nu(\nu + 1);$$

y

$$\frac{1}{t} \tilde{N}_t^- = \frac{1}{t} \int_0^t A(\nu + 1) X_{s-} I_{\{X_{s-} > 0\}} ds \xrightarrow{c.s.} A\nu(\nu + 1).$$

Por consiguiente,

$$\frac{N_t^+}{t} \xrightarrow{c.s.} A\nu(\nu + 1) \quad y \quad \frac{N_t^-}{t} \xrightarrow{c.s.} A\nu(\nu + 1).$$

Lo cual implica

$$\frac{X_t}{t} = \frac{X_0}{t} + \frac{N_t^+}{t} - \frac{N_t^-}{t} \xrightarrow{c.s.} 0.$$

Corolario 2. Para el mismo proceso del corolario anterior se tienen los siguientes límites de las integrales dadas.

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{A\nu}{X_{s-} + 1} ds \rightarrow A \log(\nu + 1),$$

y

$$\frac{1}{t} \int_0^t \frac{A(\nu + 1) I_{\{X_{s-} > 0\}}}{X_{s-}} ds \rightarrow A \log(\nu + 1).$$

Nótese que la convergencia de las integrales sigue del teorema ergódico. Estas nos ayudarán en el estudio de las propiedades asintóticas del estimador de Nelson-Aalen.

3.1.2. Consistencia del estimador Nelson Aalen

Proposición 8. Tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$ el siguiente estimador:

$$\hat{A}^{(n)+}(t) = \frac{1}{n} \int_0^{nt} \frac{1}{X_{s-} + 1} dN_s^+. \quad (3.3)$$

Este estimador es uniformemente consistente.

Demostración. Podemos ver que el error cometido en la estimación es de nuevo una martingala, ya que es la integral de un proceso previsible con respecto a otra martingala. De hecho

$$\hat{A}^{(n)+}(t) - A^+(t) = \frac{1}{n} \int_0^{nt} \frac{1}{X_{s-} + 1} dM_s.$$

Se sigue que el proceso de variación cuadrática tiene la forma:

$$\langle \hat{\mathcal{A}}^{(n)+}(t) - \mathcal{A}^+(t) \rangle = \frac{1}{n^2} \int_0^{nt} \frac{A\nu}{X_{s-} + 1} ds \xrightarrow{P} 0.$$

Ahora, usando la desigualdad de Lenglart obtenemos que:

$$P \left(\sup_{s \in [0, t]} |\hat{\mathcal{A}}^{(n)+}(s) - \mathcal{A}^+(s)| > \eta \right) \leq \frac{\delta}{\eta^2} + P \left(\langle \hat{\mathcal{A}}^{(n)+}(t) - \mathcal{A}^+(t) \rangle > \delta \right).$$

Por lo tanto,

$$\sup_{s \in [0, t]} |\hat{\mathcal{A}}^{(n)+}(s) - \mathcal{A}^+(s)| \xrightarrow{P} 0.$$

Es decir, el estimador de Nelson Aalen para \mathcal{A}^+ es uniformemente consistente.

Por otro lado el estimador de Nelson Aalen propuesto para estimar \mathcal{A}^- no resulta ser consistente, por lo que sólo estaríamos estimando el producto $A\nu$. Para remediar esto vamos a proponer el siguiente estimador para ν :

Observemos que por el teorema ergódico tenemos que:

$$\frac{1}{t} \int_0^t I_{\{X_s=0\}} ds \xrightarrow{P} \frac{1}{\nu + 1}.$$

Luego, por construcción, tomando como estimador el lado izquierdo de la ecuación obtenemos un estimador consistente para el parámetro $\frac{1}{\nu+1}$.

3.1.3. Distribución asintótica del estimador de Nelson Aalen.

Existen ciertas hipótesis con las cuales es posible encontrar la distribución asintótica del estimador de Nelson-Aalen (ver [1]). Sin embargo, estas condiciones se basan principalmente en las hipótesis del siguiente Teorema (Teorema central del límite para martingalas locales localmente de cuadrado integrable, ver [1], [26] o [27]).

Teorema 7. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea M^n una martingala local localmente de cuadrado integrable, posiblemente definida en espacios de probabilidad y filtraciones que dependen de n . Dado $\varepsilon > 0$, sea M_ε^n la martingala local de cuadrado integrable, conteniendo solamente los saltos de M^n que son mayores en valor absoluto que ε . Ahora si:*

- $\langle M^n \rangle (t) \xrightarrow{P} V(t)$ para todo $t \in [0, T]$ cuando $n \rightarrow \infty$,
- $\langle M_\varepsilon^n \rangle (t) \xrightarrow{P} 0$ para todo $t \in [0, T]$ y $\varepsilon > 0$ cuando $n \rightarrow \infty$,

Entonces, M^n converge en ley a una martingala gaussiana continua M , con $\langle M \rangle = V$ y de incrementos independientes de la forma $M(t) - M(s) \sim \mathcal{N}(0, V(t) - V(s))$.

Mediante una aplicación directa del teorema anterior encontramos el siguiente corolario.

Corolario 3. Par el estimador propuesto en 3.3 se tiene que:

$$\sqrt{n} \left(\hat{\mathcal{A}}^{(n)+} - \mathcal{A}^+ \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \sqrt{A \log(\nu + 1)} W,$$

donde W representa el proceso de Wiener.

Demostración. Consideremos la siguiente martingala:

$$M^{(n)+} = \sqrt{n} \left(\hat{\mathcal{A}}^{(n)+}(s) - \mathcal{A}^+(s) \right).$$

Esta martingala tiene proceso de variación previsible dado por:

$$\begin{aligned} \langle M^{(n)+} \rangle &= \left\langle \sqrt{n} \left(\hat{\mathcal{A}}^{(n)+}(s) - \mathcal{A}^+(s) \right) \right\rangle = n \left\langle \hat{\mathcal{A}}^{(n)+}(s) - \mathcal{A}^+(s) \right\rangle \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{nt} \frac{A\nu}{X_{s-} + 1} ds \xrightarrow{P} t A \log(\nu + 1). \end{aligned}$$

Sea $M_\varepsilon^{(n)+}$ la martingala que contiene solamente los saltos de $M^{(n)+}$ que son mayores que ε en valor absoluto. Entonces

$$M_\varepsilon^{(n)+} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \frac{1}{X_{s-} + 1} I_{\left\{ \frac{1}{X_{s-} + 1} > n\varepsilon \right\}} dM_s.$$

Se sigue que

$$\langle M_\varepsilon^{(n)+} \rangle = \frac{1}{n} \int_0^{nt} \frac{A\nu}{X_{s-} + 1} I_{\left\{ \frac{1}{X_{s-} + 1} > n\varepsilon \right\}} ds,$$

donde sabemos que $X_{s-} + 1 > 1$, por lo que dado $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que $I_{\{(X_{s-} + 1)^{-1} > n\varepsilon\}} = 0$ para todo $n > n_0$. Así,

$$\langle M_\varepsilon^{(n)+} \rangle \xrightarrow{P} 0.$$

Ahora bien, sabemos que se cumplen las siguientes dos condiciones:

- (a) $\langle M^{(n)+} \rangle (t) \xrightarrow{P} V(t) = tA \log(\nu + 1)$, cuando $n \rightarrow \infty$,
- (b) $\langle M_e^{(n)+} \rangle (t) \xrightarrow{P} 0$, cuando $n \rightarrow \infty$,

por lo que se concluye mediante el teorema de convergencia de martingalas que:

$$M^{(n)+} = \sqrt{n} \left(\hat{\mathcal{A}}^{(n)+} - \mathcal{A}^+ \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \sqrt{A \log(\nu + 1)} W,$$

donde W representa el proceso de Wiener.

Para describir la distribución asintótica del error cometido en la estimación de ν utilizaremos el siguiente teorema ([16] teorema 3.65):

Teorema 8. *Sea X_t un proceso de Markov ergódico con medida invariante μ . Sea f una función Borel medible de la forma $f = Lg$, donde L es el generador infinitesimal, y las funciones g y g^2 pertenecen al dominio de L . Entonces se tiene:*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} f(X_s) ds \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\beta} W_t, \quad (3.4)$$

donde W es el proceso de Wiener y

$$\beta = -2 \int g(x) Lg(x) \mu(dx).$$

Corolario 4. *Para el proceso descrito en 3.1 se tiene lo siguiente*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \left(I_{\{X_s=0\}} - \frac{1}{\nu+1} \right) ds \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{2}{A(\nu+1)^2} \log(\nu+1)} W_t.$$

Para todo $t > 0$.

Demostración. Tomemos

$$g(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{1}{A(\nu+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, & n > 0, \end{cases}$$

de modo que

$$Lg(n) = I_{\{0\}}(n) - \frac{1}{\nu+1} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{2}{A(\nu+1)^2} \log(\nu+1).$$

De donde se concluye el corolario.

Teniendo un teorema central del límite para los dos estimadores propuestos, podemos obtener un error aproximado de nuestra estimación para $A\nu$ y ν . Esto nos permite encontrar el error de la estimación de A .

En el caso del modelo de Jaynes y Cummings con $R = 0$ se obtiene la reducción a un proceso de nacimiento y muerte con generador:

$$L_\theta f(n) = \lambda_n(f(n+1) - f(n)) - \mu_n(f(n) - f(n-1)), \quad (3.5)$$

con $\lambda_n = \lambda^2(n+1)$ y $\mu_n = \mu^2 n$. Este resulta ser un proceso recurrente cuando $\mu^2 > \lambda^2$, y en este caso su medida de probabilidad invariante está dada por:

$$\mu(\{n\}) = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2} \left(\frac{\lambda^2}{\mu^2} \right)^n.$$

Aquí el objetivo es estimar λ^2 y μ^2 . Podemos ver que mediante el procedimiento anterior se obtienen los siguientes estimadores:

$$\widehat{\lambda}^2 = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{dN_s^+}{X_{s^-} + 1} \quad \text{y} \quad \widehat{\left(\frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2} \right)} = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{I}_{\{X_s=0\}} ds$$

Corolario 5. *Con respecto a estos estimadores se tiene que ambos son consistentes. El primero es de hecho uniformemente consistente.*

El corolario se sigue de lo propuesto en la reducción para el modelo de Laser.

Con respecto a la distribución asintótica del error para la estimaciones propuestas se tiene el siguiente corolario:

Corolario 6. *Para la estimación de λ^2 se cumple que*

$$\sqrt{n} \left(\frac{1}{n} \int_0^{nt} \frac{dN_s^+}{X_{s^-} + 1} - \lambda^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{(\mu^2 - \lambda^2) \log \left(\frac{\mu^2}{\mu^2 - \lambda^2} \right)} W_t.$$

Para todo $t \geq 0$.

Luego el error cometido en la estimación de λ^2 es aproximadamente

$$\sqrt{\frac{(\mu^2 - \lambda^2) \log \left(\frac{\mu^2}{\mu^2 - \lambda^2} \right)}{nt}} Z,$$

donde $Z \sim N(0, 1)$.

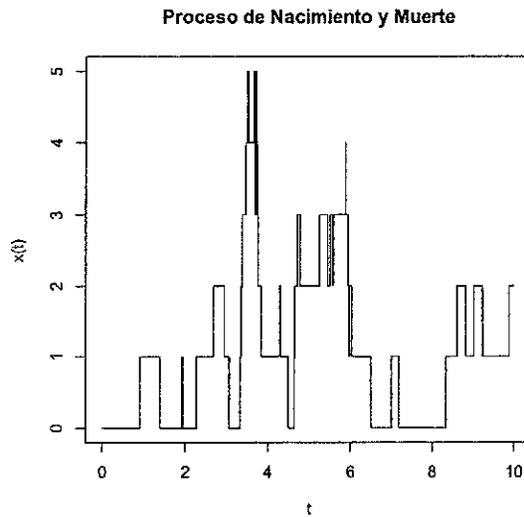


Fig. 3.1: $x_0 = 0$, $A = 1$, $\nu = 1$ y $T = 10$

Corolario 7. Para el proceso con generador dado en 3.5 se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \left(I_{\{X_s=0\}} - \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\mu^2} \right) ds \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{2(\mu^2 - \lambda^2)}{\mu^4} \log \left(\frac{\mu^2}{\mu^2 - \lambda^2} \right)} W_t.$$

Para todo $t \geq 0$, donde W es el proceso de Wiener.

Con estas formulas podemos estimar el error estándar, tanto para las estimaciones propuestas en el modelo de Jaynes-Cumming, como para las realizadas en el modelo del Laser.

3.2. Simulación

3.2.1. Simulación para el modelo del Laser

En la figura 3.1 se muestra el gráfico del proceso para los valores de los parámetros A y ν dados, con un tiempo de observación $T = 10$.

A	ν	T	\hat{A}	$\hat{\nu}$	$sd(\hat{A})$	$sd(\hat{\nu})$
1	1	1	1.6367	1.4257	3.1752	2.3548
1	1	10	0.6754	1.6262	0.8138	0.7447
1	1	100	1.0935	0.8793	0.2505	0.2355
1	1	1000	1.0486	0.9192	0.0790	0.0745
1	1	10000	1.0235	0.9771	0.0250	0.0235

Tab. 3.1:

En la figura 3.2 se muestran los gráficos para valores dados de los parámetros, cambiando el valor inicial del proceso. Como podemos ver el proceso decae rápidamente a 0, por lo que no influirá mucho en la estimación el valor inicial del proceso. Es por esta razón que las estimaciones se realizaron con valor inicial 0.

En las figuras 3.3 y 3.4 se ve como varía este proceso para distintos valores de A y ν respectivamente. Se observa que tanto al aumentar A como al aumentar ν los tiempos de saltos ocurren más a menudo.

En la Tabla 3.1 se simula el proceso de nacimiento y muerte para $A = 1$ y $\nu = 1$. Se observa que al aumentar el tiempo de observación se mejora la estimación de los parámetros. A un tiempo de observación $T = 10000$ se tiene que la desviación estándar es menor a 0,05.

Ahora, si variamos los valores de A y ν podemos obtener las estimaciones tanto para A , ν y $A\nu$, que aparecen en la tabla 3.2, con sus respectivas aproximaciones del error estándar. Esto se realizó para $T = 10000$.

3.2.2. Simulación para el modelo de Jaynes y Cummings

La tabla 3.3 muestra como mejora la estimación a medida que aumentamos el tiempo de observación.

En la tabla 3.4 se muestra la estimación para distintos valores de λ^2 y μ^2 y la correspondiente desviación estándar aproximada de estas estimaciones. Todas con el mismo tiempo de observación $T = 10000$.

Observación. Cuando los valores de λ^2 , μ^2 aumentan, los incrementos de los tiempos de saltos son menores, por lo que tenemos muchos más saltos para un mismo tiempo de observación T .

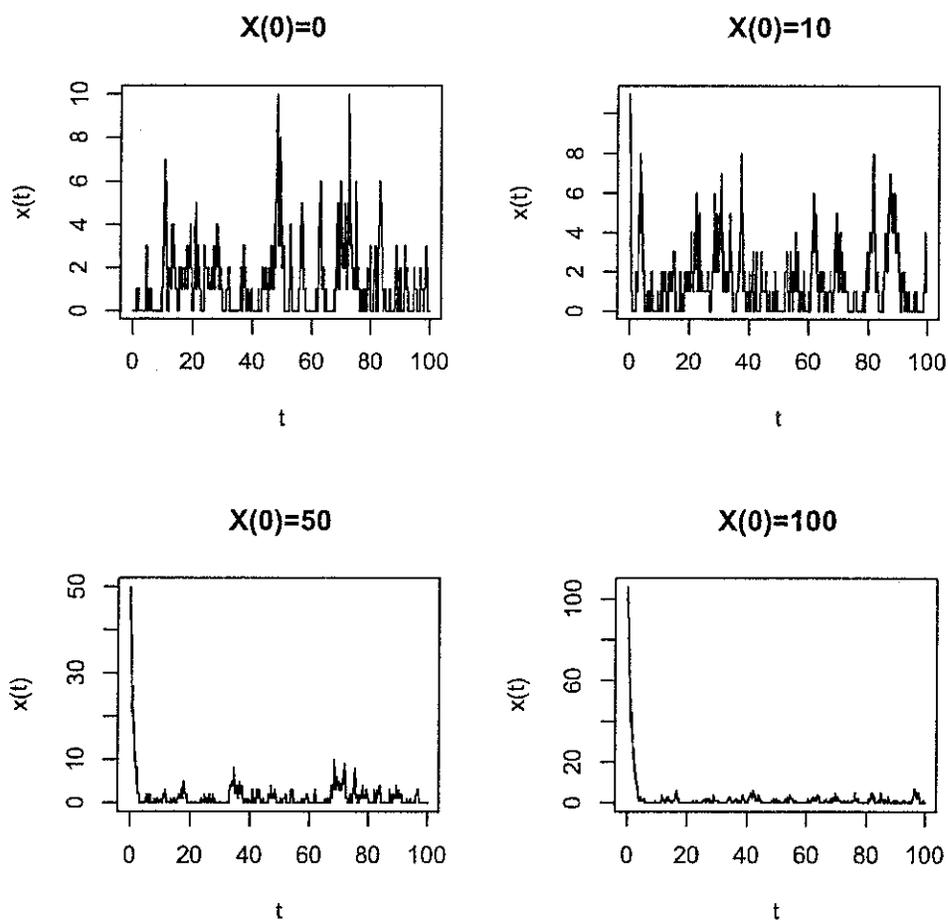


Fig. 3.2: $A = 1$, $\nu = 1$ y $T = 100$

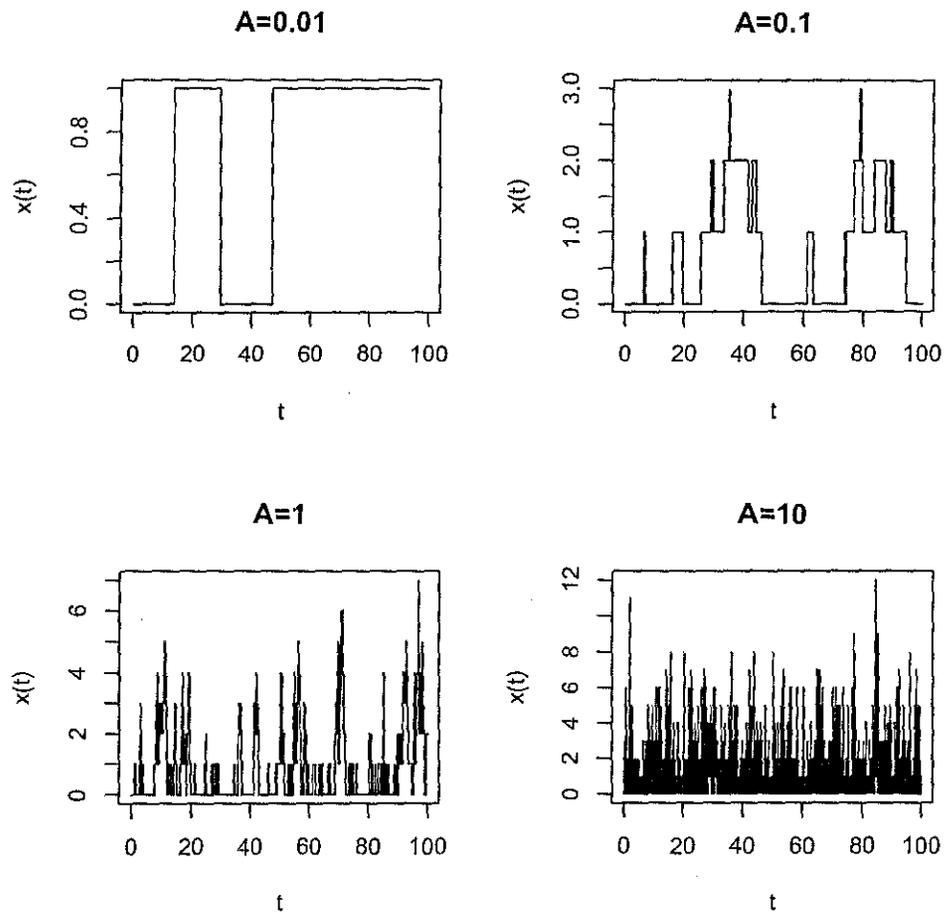


Fig. 3.3: $x_0 = 0$, $\nu = 1$ y $T = 100$

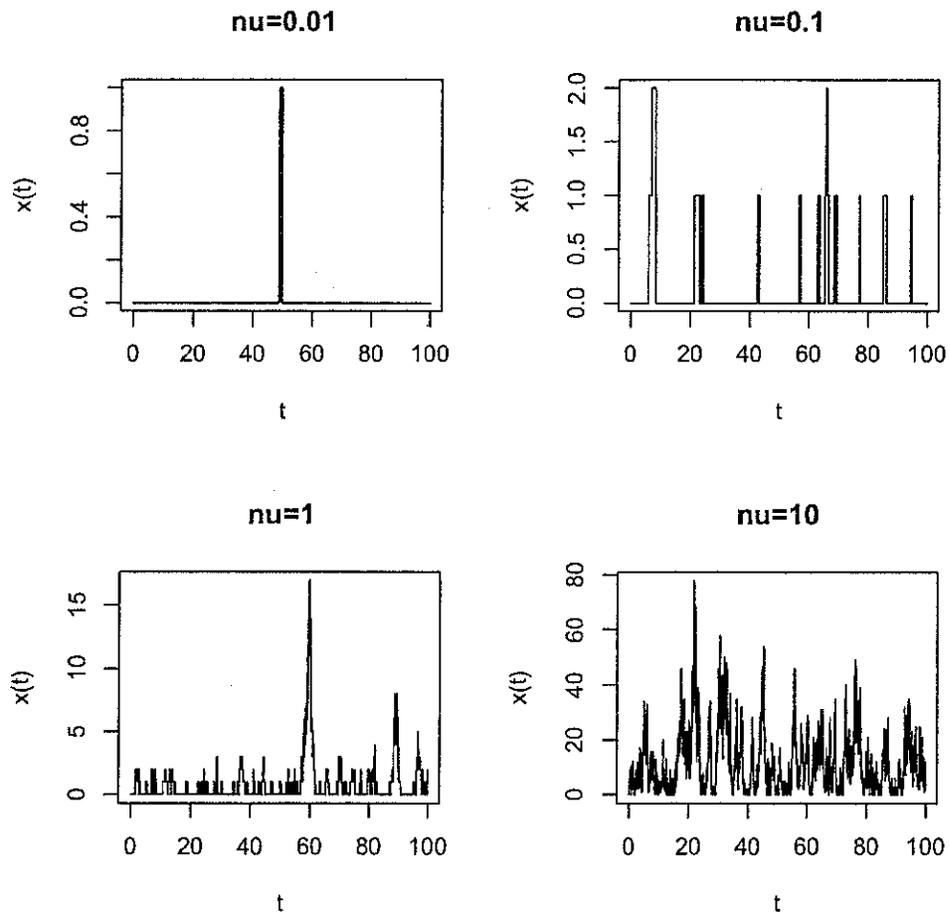


Fig. 3.4: $x_0 = 0$, $A = 1$ y $T = 100$

A	ν	$A\nu$	T	$\widehat{A\nu}$	\widehat{A}	$\widehat{\nu}$	$sd(\widehat{A\nu})$	$sd(\widehat{A})$	$sd(\widehat{\nu})$
0.1	0.1	0.01	10000	0.0080	0.1025	0.0784	0.0010	0.0181	0.0152
0.5	0.1	0.05	10000	0.0489	0.4909	0.0996	0.0022	0.0404	0.0068
0.1	0.5	0.05	10000	0.0471	0.1043	0.4518	0.0020	0.0095	0.0427
1	0.5	0.5	10000	0.5095	0.9916	0.5138	0.0064	0.0299	0.0135
1	0.1	0.1	10000	0.1017	1.0223	0.0995	0.0031	0.0571	0.0048
0.5	1	0.5	10000	0.5010	0.5032	0.9956	0.0059	0.0177	0.0333
0.1	1	0.1	10000	0.0995	0.0964	1.0320	0.0026	0.0079	0.0745
1	1	1	10000	0.9997	1.0234	0.9768	0.0083	0.0250	0.0235
1	5	5	10000	5.0177	1.0033	5.0013	0.0134	0.0229	0.1136
5	1	5	10000	5.0157	4.9982	1.0035	0.0186	0.0558	0.0105
0.5	5	2.5	10000	2.5050	0.5115	4.8972	0.0095	0.0162	0.1606
5	0.5	2.5	10000	2.4565	5.0669	0.4848	0.0142	0.0668	0.0060
5	0.1	0.5	10000	0.5162	5.0103	0.1030	0.0069	0.1277	0.0021
0.1	5	0.5	10000	0.5072	0.0989	5.1293	0.0042	0.0072	0.3592

Tab. 3.2:

λ^2	μ^2	T	$\widehat{\lambda^2}$	$\widehat{\mu^2}$	$sd(\widehat{\lambda^2})$	$sd(\widehat{\mu^2})$
1	3	1	3.3333	4.7489	0.9005	5.8079
1	3	10	1.2500	3.2484	0.2848	1.5192
1	3	100	1.0152	3.2543	0.0901	0.4692
1	3	1000	1.0174	2.9254	0.0285	0.1480
1	3	10000	1.0040	2.9936	0.0090	0.0468

Tab. 3.3:

λ^2	μ^2	T	$\widehat{\lambda^2}$	$\widehat{\mu^2}$	$sd(\widehat{\lambda^2})$	$sd(\widehat{\mu^2})$
1	3	10000	0.9914	3.0128	0.0090	0.0468
1	5	10000	1.0191	5.0887	0.0094	0.08182
6	10	10000	5.9932	10.0367	0.0191	0.0553
3	5	10000	2.9862	4.9874	0.0135	0.0391
0.5	1.5	10000	0.5089	1.5120	0.0064	0.0331
0.1	0.5	10000	0.1028	0.5015	0.0030	0.0259

Tab. 3.4:

4. PROCESOS DE DIFUSIÓN

Hay diversos estudios de como realizar estimación de parámetros en procesos descritos mediante ecuaciones diferenciales estocásticas o procesos de difusión. En este ámbito cabe destacar los trabajos realizados por Lipster y Shiryaev [21] y Kutoyanz [19]. En general estos trabajos consisten en estimar parámetros que aparecen en el coeficiente de difusión dentro de la ecuación diferencial. Estos resultados se han ampliado por diversos trabajos realizados por Danièle Florens [14], Didier Dacunha-Castelle [10] y Helle Sorensen [29], este último muestra un método en el que se estima primero el coeficiente de difusión y luego, siendo éste conocido podemos estimar el coeficiente de deriva mediante métodos de máxima verosimilitud.

Pera estimar los parámetros de interés, en este caso particular, usaremos diferentes métodos. El primero usando el hecho de que, en este caso, existe una medida invariante. El segundo se basa en lo propuesto por Sorensen.

Consideremos un proceso de Ornstein Uhlenbeck con el siguiente generador:

$$Lf(x) = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{4} f''(x) + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{2} x f'(x) \quad (4.1)$$

donde $\lambda^2 = \gamma_c(n_T + 1)$ y $\mu^2 = \mu_c n_T$. El objetivo es estimar los parámetros γ_c , μ_c y n_T . Además podemos ver que este modelo no está identificado, sin embargo, para que el modelo quede bien determinado es necesario solamente estimar los parámetros λ y μ .

Luego, este generador corresponde a un proceso ξ_t que satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$d\xi_t = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{2} \xi_t dt + \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}} dW_t,$$

donde W_t denota el proceso de Wiener.

La solución dada por

$$\xi_t = \exp\left(\frac{(\lambda^2 - \mu^2)t}{2}\right) \left(\xi_0 + \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}} \int_0^t \exp\left(\frac{(\mu^2 - \lambda^2)s}{2}\right) dW_s \right).$$

Y la esperanza y varianza de este proceso se pueden deducir usando integración por partes para integrales estocásticas, obteniéndose:

$$\mathbb{E}(\xi_t) = \exp\left(\frac{\lambda^2 - \mu^2}{2}t\right)\mathbb{E}(\xi_0) \quad (4.2)$$

$$\text{Var}(\xi_t) = \exp((\lambda^2 - \mu^2)t)\text{Var}(\xi_0) + \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2(\mu^2 - \lambda^2)}(1 - \exp((\lambda^2 - \mu^2)t)) \quad (4.3)$$

4.1. Estimación de parámetros.

Para la estimación del parámetro $\theta = (\lambda^2, \mu^2)$ necesitamos encontrar en primer lugar la medida invariante de este proceso, la cual existe bajo la condición $\mu^2 > \lambda^2$, en este caso podemos ver que este proceso tiene como medida de probabilidad invariante a la ley de una variable aleatoria normal de media 0 y varianza $\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2(\mu^2 - \lambda^2)}$. Esto nos sugiere proponer como estimador de $\theta_1 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2(\mu^2 - \lambda^2)}$ lo siguiente:

$$\hat{\theta}_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \xi_s^2 ds \quad (4.4)$$

Proposición 9. *El estimador propuesto es fuertemente consistente.*

Demostración. El resultado sigue del teorema ergódico y de la existencia de la medida invariante, obteniéndose

$$\frac{1}{t} \int_0^t \xi_s^2 ds \xrightarrow{\text{c.s.}} \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2(\mu^2 - \lambda^2)}, \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Para encontrar la convergencia asintótica de este estimador utilizaremos el teorema 8, del cual obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 8.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} \left(\xi_t^2 dt - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2(\mu^2 - \lambda^2)} \right) ds \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\lambda^2 + \mu^2}{(\mu^2 - \lambda^2)\sqrt{\mu^2 - \lambda^2}} W_t.$$

Demostración. Tomando $g(x) = \frac{x^2}{\lambda^2 - \mu^2}$, y sea $f(x) = \mathcal{L}(g(x)) = x^2 - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2(\mu^2 - \lambda^2)}$, se obtiene el resultado.

Sea $\theta_2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}$, luego para la estimación de θ_2 podemos usar el hecho de que el proceso de covariación cuadrática tiene la siguiente forma:

$$[\xi](t) = \int_0^T \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} ds = T \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} \quad (4.5)$$

Luego mediante la aproximación del proceso de covariación cuadrática es natural tomar como estimador de θ_2 :

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{T} \sum_{k/n \leq T} (\xi_{(k+1)/n} - \xi_{k/n})^2 \quad (4.6)$$

Luego se tiene que:

$$\sum_{k/n \leq T} (\xi_{(k+1)/n} - \xi_{k/n})^2 \xrightarrow{P} \int_0^T \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} ds = T \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2} \quad (4.7)$$

Lo que nos dice que éste es un estimador consistente para θ_2

4.2. Estimación paramétrica en procesos de difusión

En esta sección desarrollaremos algunas ideas para la estimación de parámetros en procesos de difusión en general, este método lo aplicaremos en el modelo de Ornstein Uhlenbeck que es el de nuestro interés. (para detalles ver [29]).

Supongamos que tenemos proceso de difusión x_t que depende de un parámetro $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ y definido por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = b(X_t, \theta)dt + \sigma(X_t, \theta)dW_t. \quad (4.8)$$

Las funciones $b : \mathbb{R} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ y $\sigma : \mathbb{R} \times \Theta \rightarrow (0, \infty)$ son conocidas y asumidas suficientemente suaves.

Como en la sección anterior podemos usar el proceso de variación cuadrática para la estimación del coeficiente de difusión, pues:

$$\sum_{k/n \leq T} (\xi_{(k+1)/n} - \xi_{k/n})^2 \xrightarrow{P} \int_0^T \sigma^2(X_s, \theta) ds$$

Ahora conociendo el coeficiente de difusión, podemos estimar el coeficiente de deriva usando que si el coeficiente de difusión es completamente conocido, es decir $\sigma(x, \theta) = \sigma(x)$, entonces la función de verosimilitud esta dada por:

$$L_T(\theta) = \exp \left(\int_0^T \frac{b(X_s, \theta)}{\sigma^2(X_s)} dX_s - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{b^2(X_s, \theta)}{\sigma^2(X_s)} ds \right)$$

En nuestro caso queremos estimar $\theta = (\lambda^2, \mu^2)$ y tenemos que el proceso tiene la forma de (4.8) con $b(x, \theta) = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{2}x$ y $\sigma(x, \theta) = \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}}$.

De la misma manera anterior llamemos $\theta_2 = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}$, y estimemos mediante el proceso de variación cuadrática.

Ahora bien asumiendo que el coeficiente de difusión es conocido obtenemos que la función de verosimilitud queda de la siguiente forma:

$$L_T(\theta) = \exp \left(\int_0^T \frac{(\lambda^2 - \mu^2)X_s}{2\theta_2} dX_s - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{(\lambda^2 - \mu^2)^2 X_s^2}{4\theta_2} ds \right)$$

Podemos ver que esta función alcanza su máximo cuando

$$\frac{\lambda^2 - \mu^2}{2} = \frac{X_T^2 - \theta_2 T}{2 \int_0^T X_s^2 ds}$$

De aquí obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 10. Sea $\theta_1^\Delta = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{2}$. Entonces el estimador de máxima verosimilitud para θ_1 está dado por:

$$\hat{\theta}_1^\Delta = \frac{X_T^2 - \hat{\theta}_2 T}{2 \int_0^T X_s^2 ds}$$

4.3. Estimación del coeficiente de deriva

Para la estimación del coeficiente de deriva podemos utilizar que conocemos la esperanza de este proceso esta dada por:

$$\mathbb{E}(\xi_t) = \mathbb{E}(\xi_0) \exp\left(\frac{(\lambda^2 - \mu^2)t}{2}\right).$$

Supongamos que tenemos $\xi^1 \dots \xi^n$ n copias independientes del proceso ξ que satisface la ecuación (4.1).

Sea $\theta_1^* = \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2}$, proponemos el siguiente estimador para θ_1^* :

$$\hat{\theta}_1^* = \frac{e}{C} \sup_{t \in [0, T]} t \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_t^i. \quad (4.9)$$

4.3.1. Ley fuerte de los grandes números

En este contexto es posible probar una ley de los grandes números la cual se expresa en la siguiente proposición.

Proposición 11. *El estimador propuesto en 4.9 es uniformemente consistente.*

Demostración. Sea $a_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_t^i$ y $x_0 = \mathbb{E}(\xi_0) \exp\left(\frac{(\lambda^2 - \mu^2)t}{2}\right)$, De aquí se obtiene que estos procesos satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$a_n(t) = a_n(0) + \frac{(\lambda^2 - \mu^2)}{2} \int_0^t a_n(s) ds + \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2n}} \tilde{W}_t^n$$

donde $\tilde{W}_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n W_t^i$, con $(W_t^1 \dots W_t^n)$ secuencia de procesos de Wiener independientes. Además para x_0 se tiene,

$$x_0(t) = \mathbb{E}(\xi_0) + \frac{(\lambda^2 - \mu^2)}{2} \int_0^t x_0(s) ds$$

Sea ahora:

$$\Delta^n(t) = a^n(t) - x_0(t)$$

Luego se tiene que:

$$\Delta_n(t) = \Delta_n(0) + \frac{(\lambda^2 - \mu^2)}{2} \int_0^t \Delta_n(s) ds + \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2n}} \widetilde{W}_t^n$$

Si $\xi_0 = C$, es decir el proceso parte de C con probabilidad 1, entonces, $\Delta_n(0) = 0$ para todo n

Luego la solución de este proceso esta dada por:

$$\Delta_n(t) = e^{\frac{(\lambda^2 - \mu^2)t}{2}} \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2n}} \int_0^t e^{\frac{(\mu^2 - \lambda^2)s}{2}} d\widetilde{W}_s^n$$

Ahora bien se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sup_{t \in [0, T]} |\Delta_n(t)|^2) &= \mathbb{E}(\sup_{t \in [0, T]} |e^{\frac{(\lambda^2 - \mu^2)t}{2}} \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2n}} \int_0^t e^{\frac{(\mu^2 - \lambda^2)s}{2}} d\widetilde{W}_s^n|^2) \\ &\leq \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2n} \mathbb{E}(\sup_{t \in [0, T]} |\int_0^t e^{\frac{(\mu^2 - \lambda^2)s}{2}} d\widetilde{W}_s^n|^2) \\ &\leq \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2n} \mathbb{E}|\int_0^T e^{(\mu^2 - \lambda^2)s} ds| \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

De lo que obtenemos

$$\Delta_n(t) \longrightarrow 0 \text{ Uniformemente en probabilidad.}$$

es decir:

$$a_n(t) \longrightarrow C \exp\left(\frac{(\lambda^2 - \mu^2)t}{2}\right) \text{ Uniformemente en probabilidad.}$$

Observación. El funcional que lleva a $f(t)$ en $tf(t)$ es continuo por lo que tenemos que:

$$ta_n(t) \longrightarrow C \exp\left(\frac{(\lambda^2 - \mu^2)t}{2}\right)t \text{ Uniformemente en probabilidad.}$$

Donde $\sup_{t \in [0, T]} C \exp\left(\frac{(\lambda^2 - \mu^2)t}{2}\right)t = C \exp(-1) \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2}$ se alcanza en $t = \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2}$.

4.3.2. Teorema central del límite

Es posible también encontrar un teorema central del límite, el cual se resume en lo siguiente:

Proposición 12. Sea Δ_n el error cometido en la estimación. Entonces se tiene que:

$$\sqrt{n}\Delta_n \xrightarrow{\mathcal{L}} M$$

Donde M es una martingala gaussiana con $M_t - M_s \sim \mathcal{N}(0, V(t) - V(s))$, con incrementos independientes, con $V(t) = \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}} \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} \left(1 - e^{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{2}t}\right)$.

Demostración. Observemos que el proceso $\sqrt{n}\Delta_n(t)$ es la integral de una función determinística con respecto al proceso de Wiener:

$$\sqrt{n}\Delta_n(t) = e^{\frac{(\lambda^2 - \mu^2)t}{2}} \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{(\mu^2 - \lambda^2)s}{2}} d\widetilde{W}_s^n$$

Luego $M^n = \sqrt{n}\Delta_n(t)$ es una martingala con proceso creciente asociado dado por:

$$\begin{aligned} \langle M_n \rangle &= \langle \sqrt{n}\Delta_n \rangle = \left\langle e^{\frac{(\lambda^2 - \mu^2)t}{2}} \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{(\mu^2 - \lambda^2)s}{2}} d\widetilde{W}_s^n \right\rangle \\ &= e^{\frac{(\lambda^2 - \mu^2)t}{2}} \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}} \int_0^t e^{\frac{(\mu^2 - \lambda^2)s}{2}} ds \quad (4.10) \\ &= \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}} \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} \left(1 - e^{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{2}t}\right) = V(t) \end{aligned}$$

Luego por el TLC de martingalas locales [27] se tiene que:

$$\sqrt{n}\Delta_n \xrightarrow{\mathcal{L}} M$$

Donde M es una martingala gaussiana con $M_t - M_s \sim \mathcal{N}(0, V(t) - V(s))$, con incrementos independientes, y $V(t)$ dado en 4.10.

El TLC encontrado aquí es más fuerte, en el sentido que no se tiene para cada t , si no que considera directamente los elementos aleatorios en $C[0, 1]$.

λ^2	μ^2	θ_1	θ_2	T	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\lambda}^2$	$\hat{\mu}^2$
1	3	1	2	10000	1.0031135	2.0073317	1.006781	3.0078824
				sd	0.0141421	0.0292157	0.0152588	0.0154653
1	5	0.75	3	10000	0.7618234	3.0330372	1.0423939	5.0236804
				sd	0.0075	0.0044102	0.0188514	0.0202256
6	10	2	8	10000	2.016862	8.091744	6.085721	10.097768
				sd	0.02	0.0120551	0.0212658	0.0241596
3	5	2	4	10000	1.9760791	4.0288866	3.0094723	5.048301
				sd	0.0282843	0.0068421	0.0138724	0.0158316
0.5	1.5	1	1	10000	1.0059367	1.0018707	0.5038917	1.4998496
				sd	0.02	0.0014366	0.0107097	0.0105054
0.1	0.5	0.75	0.3	10000	0.7351778	0.3011544	0.096337	0.5059718
				sd	0.0237171	0.0003938	0.0056218	0.0057245

Tab. 4.1:

4.4. Simulación

En la tabla 4.1 se muestran las estimaciones obtenidas usando la primera propuesta para la estimación de λ^2 y μ^2 , es decir el método mediante la medida invariante. Se muestran para distintos valores de λ^2 y μ^2 las estimaciones de θ_1 , θ_2 , λ^2 y μ^2 con sus respectivas desviaciones estándar. Esto se realizó para un tiempo de observación $T = 10000$.

Observación. Para los estimadores en que no contamos con un teorema central del límite se estimó la desviación estándar mediante el método de bootstrap.

En la tabla 4.2 se muestran las distintas estimaciones obtenidas para un tiempo de observación $T = 10000$, donde para estimar θ_1^Δ se usa el estimador de máxima verosimilitud.

λ^2	μ^2	θ_1^Δ	θ_2	T	$\hat{\theta}_1^\Delta$	$\hat{\theta}_2$	$\hat{\lambda}^2$	$\hat{\mu}^2$
1	3	-1	2	10000	-0.9945467	2.0121314	1.0175847	3.0066781
				sd	0.0130921	0.0028106	0.013261	0.0135186
1	5	-2	3	10000	-2.001294	3.030261	1.028967	5.031555
				sd	0.0181126	0.0037245	0.0180859	0.0188885
6	10	-2	8	10000	-1.996465	8.078466	6.082001	10.074931
				sd	0.0187462	0.0102316	0.0203976	0.0222744
3	5	-1	4	10000	-1.005273	4.022864	3.017591	5.028137
				sd	0.0149117	0.0057402	0.0155984	0.0163495
0.5	1.5	-0.5	1	10000	-0.4932939	1.0041177	0.5108238	1.4974116
				sd	0.0097276	0.0014432	0.0099386	0.0097284
0.1	0.5	-0.2	0.3	10000	-0.2047335	0.2999681	0.0952346	0.5047017
				sd	0.0058319	0.0005128	0.0058306	0.0058782

Tab. 4.2:

5. COMPARACIÓN DE ESTIMACIONES

El modelo más interesante en este contexto corresponde al modelo de Jaynes-Cummings, ya que como hemos visto, éste modelo admite dos reducciones clásicas distintas, estas son un proceso de nacimiento y muerte y un proceso de Ornstein Uhlenbeck, además de estas reducciones se observa que los parámetros involucrados son los mismos en ambos procesos.

5.1. Simulación y comparación de trayectorias

Nuestro principal interés es verificar si las estimaciones producidas en las reducciones son equivalentes. Para esto supongamos que para un SMC con generador \mathcal{L}^θ , existen dos mediciones simples M_1 y M_2 que reducen clásicamente al semigrupo, luego para cada reducción obtenemos una estimación del parámetro θ sean estas θ_1 y θ_2 . La propuesta es construir un test que verifique si se cumple lo siguiente:

- $\mathcal{L}^{\theta_1}|_{W^*(M_2)} = \mathcal{L}^{\theta_2}|_{W^*(M_2)}$,
- $\mathcal{L}^{\theta_1}|_{W^*(M_1)} = \mathcal{L}^{\theta_2}|_{W^*(M_1)}$,

Para poder comparar las estimaciones obtenidas mediante los dos procesos es necesario tener en cuenta que estos procesos están definidos en distintos espacios de probabilidad, lo cual no hace muy simple éste procedimiento.

La propuesta que se hace para llevar a cabo esta comparación es movernos con las estimaciones obtenidas en los distintos espacios a uno solo, en donde podemos simular dos procesos, uno con las estimaciones obtenidas en el otro proceso y otro con las obtenidas del mismo proceso.

5.1.1. Test de hipótesis

El Test de hipótesis que vamos a realizar está propuesto por Cuesta Albertos y Fraiman en [7]. Este test se basa en el test de Kolmogorov-Sminrov de la siguiente manera:

Sean $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ y $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ elementos aleatorios en un espacio de Hilbert \mathfrak{h} . Sean P_X y P_Y las leyes de probabilidad de X_i y Y_j respectivamente. El Test de dos muestras para decidir entre la hipótesis nula $H_0 : P_X = P_Y$ y la alternativa $H_0 : P_X \neq P_Y$ consiste en evaluar el estadístico:

$$D_{n,m}(h) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n^h(t) - G_m^h(t)|,$$

donde

$$F_n^h(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, t]}(\langle X_i, h \rangle) \text{ y } G_m^h(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{(-\infty, t]}(\langle Y_j, h \rangle)$$

Rechazando la hipótesis nula para $D_{n,m}(h)$ suficientemente grande.

Es demostrado en [7] que el estadístico $D_{n,m}$ tiene la propiedad que bajo la hipótesis nula es de distribución libre y además se tiene que:

$$\lim_{\min(n,m) \rightarrow \infty} \nu \left(\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{n,m} \leq t \right) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 t^2}, \quad (t > 0)$$

Programando esto en el programa R y usando que en este programa ya tiene implementado el test de Kolmogorov Smirnov se obtuvo los resultados que se muestran en la tabla 5.1.

En la tabla 5.1 se muestra para los distintos valores de los parámetros λ^2 y μ^2 las distintas estimaciones obtenidas en ambos procesos, y el resultado del test aplicado a dos procesos de Ornstein Uhlenbeck generados mediante estos parámetros estimados.

Para verificar el hecho de que el test discrimina, se simuló el proceso para distintos valores de λ^2 y μ^2 con un tiempo de estimación $T = 1$ y se aplicó el test 5000 veces para muestras de tamaño 100. En la tabla 5.2 se muestran los promedios de los valores p (p-v) y los porcentajes de rechazo (% R) obtenidos.

Se observa de la tabla 5.2 que el test discrimina cuando los valores de λ^2 y μ^2 son bastante distintos, sin embargo, no discrimina muy bien ya que, el proceso con $\lambda^2 = 1$ y $\mu^2 = 3$ versus $\lambda^2 = 1$ y $\mu^2 = 5$ los considera provenientes del mismo modelo. Lo mismo ocurre en el caso cuando comparamos el proceso con $\lambda^2 = 3$ y $\mu^2 = 5$ versus $\lambda^2 = 6$ y $\mu^2 = 10$.

		N-M		O-U			
λ^2	μ^2	λ^2	μ^2	λ^2	μ^2	% R	p-v
1	3	0.9921765	3.0083959	1.0246866	2.9895434	0.0338	0.5417
1	2	0.9986245	1.9810568	0.9999315	2.0017405	0.0382	0.5359
6	10	5.8552710	10.0314877	6.0731997	10.0716063	0.0338	0.5382
3	5	3.0229357	4.9431820	3.0192645	5.0087496	0.0378	0.5420
0.5	1.5	0.4929808	1.4727658	0.5134217	1.4876064	0.0366	0.5399
0.1	0.5	0.1012183	0.5046581	0.1068098	0.4939990	0.031	0.5416

Tab. 5.1:

		$\lambda^2 = 1,$ $\mu^2 = 3$	$\lambda^2 = 1,$ $\mu^2 = 5$	$\lambda^2 = 6,$ $\mu^2 = 10$	$\lambda^2 = 3,$ $\mu^2 = 5$	$\lambda^2 = 0,5,$ $\mu^2 = 1,5$	$\lambda^2 = 0,1,$ $\mu^2 = 0,5$
$\lambda^2 = 1,$ $\mu^2 = 3$	% R	0.03					
	p-v	0.5397					
$\lambda^2 = 1,$ $\mu^2 = 5$	% R	0.0448	0.0348				
	p-v	0.508	0.5346				
$\lambda^2 = 6,$ $\mu^2 = 10$	% R	0.2922	0.3822	0.0374			
	p-v	0.1625	0.1142	0.5385			
$\lambda^2 = 3,$ $\mu^2 = 5$	% R	0.1716	0.2452	0.049	0.037		
	p-v	0.2489	0.1913	0.4970	0.5352		
$\lambda^2 = 0,5,$ $\mu^2 = 1,5$	% R	0.0654	0.072	0.6362	0.4804	0.0364	
	p-v	0.4176	0.454263	0.0579	0.0881	0.5382	
$\lambda^2 = 0,1,$ $\mu^2 = 0,5$	% R	0.7816	0.6424	0.9998	0.9988	0.407	0.0358
	p-v	0.0329	0.0554	0.0013	0.0021	0.1086	0.5433

Tab. 5.2:

5.1.2. Cómo construir un test con mejor discriminación

Al trabajar con el test anterior tomamos como espacio de Hilbert $L^2[0, T]$ sin embargo nuestros procesos viven en el espacio de las funciones continuas ($C[0, T]$). Es por esta razón que proponemos un test en el espacio más pequeño, el cual debiera discriminar más que el anterior. Con este fin necesitamos enunciar algunos resultados:

Lema 1. Sean P^1 y P^2 medidas de probabilidad en $C[0, 1]$, sea X una función medible y sea $P_{\langle \mu, X \rangle}$ definida por:

$$P_{\langle \mu, X \rangle}(B) = P(\{X \in C[0, 1] : \langle \mu, X \rangle \in B\}), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Si $P^1_{\langle \mu, X \rangle} = P^2_{\langle \mu, X \rangle}$, para todo $\mu \in M = C^*[0, 1]$, el dual de las continuas en $[0, 1]$, es decir el conjunto de medidas en éste espacio. Entonces $P^1 = P^2$ sobre $C[0, 1]$

Demostración. Sea $\mu = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{t_j}$, si $P^1_{\langle \mu, X \rangle} = P^2_{\langle \mu, X \rangle}$. Entonces

$$P^1(X \in C[0, 1] : \sum_{j=1}^n a_j X_{t_j} \in B) = P^2(X \in C[0, 1] : \sum_{j=1}^n a_j X_{t_j} \in B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

De lo anterior se deduce la igualdad de las transformadas de Fourier

$$\int \exp(i \sum_{j=1}^n a_j X_{t_j}) dP^1 = \int \exp(i \sum_{j=1}^n a_j X_{t_j}) dP^2,$$

es decir se tiene la siguiente igualdad:

$$\varphi^1_{\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}}(a_1, \dots, a_n) = \varphi^2_{\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}}(a_1, \dots, a_n).$$

Esto implica la igualdad de las transformadas de leyes marginales

$$\widehat{P}^1_{\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}}(a_1, \dots, a_n) = \widehat{P}^2_{\{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}\}}(a_1, \dots, a_n)$$

Por lo tanto se tiene la igualdad de las siguientes proyecciones

$$\Pi_{t_1, \dots, t_n}[P^1] = \Pi_{t_1, \dots, t_n}[P^2].$$

Como esto se tiene para todo $\mu = \sum_{j=1}^n a_j \delta_{t_j}$. Entonces por teorema de Kolmogorov se tiene que

$$P^1 = P^2 \quad \text{sobre } C[0, 1].$$

Lema 2. Si f y g son continuas sobre \mathbb{R} y $f(X) = g(X)$ \mathbb{P} c.s. donde X es una variable aleatoria gaussiana, entonces $f = g$.

Demostración. Sea $N = \{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq g(t)\}$. Si $\mathbb{P}(X \in N) = 0$ se tiene que $\lambda(N) = 0$ con λ la medida de Lebesgue. Luego,

$$f(t) = g(t)\lambda - c.t.p$$

Y por continuidad obtenemos $f = g$

Corolario 9. Si $\widehat{P}(X_I) = \widehat{Q}(X_I)$, para todo $I \in \mathbb{R}_+$ numerable, donde $X_I = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ si $I = \{t_1, \dots, t_n\}$, con X un proceso gaussiano, donde \widehat{P} representa la transformada de Fourier, entonces $P = Q$.

Lema 3. Sean P y Q probabilidades sobre $C[0,1]$ y sea M el espacio de las medidas de Radon sobre $[0,1]$, entonces $(M, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach, donde $\|m\|_1 = |m|([0,1])$

Teorema 9. Sea μ un elemento aleatorio gaussiano con valores en M . P y Q probabilidades sobre $C[0,1]$. Si $P_{\langle \mu, \cdot \rangle} = Q_{\langle \mu, \cdot \rangle}$, entonces $P = Q$

Demostración.

$$P_{\langle \mu, \cdot \rangle}(A) = P(\langle \mu, \cdot \rangle^{-1}(A))$$

La aplicación $\mu \mapsto P_{\langle \mu, \cdot \rangle}$ de M en las probabilidades sobre \mathbb{R} es continua, ya que, si $\mu_n \rightarrow \mu$ se tiene $\langle \mu_n, x \rangle \rightarrow \langle \mu, x \rangle$, luego se tiene,

$$\int_{\mathbb{R}} f dP_{\langle \mu_n, \cdot \rangle} = \int_{C[0,1]} f(\langle \mu_n, x \rangle) dP(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{C[0,1]} f(\langle \mu, x \rangle) dP(x) = \int_{\mathbb{R}} f dP_{\langle \mu, \cdot \rangle}$$

Teorema 10. Sea $(X_n)_{n \geq 1}$ una secuencia de elementos aleatorios en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ y tomando valores en $C[0,1]$. Sea P_0 una medida de probabilidad en $C[0,1]$. Dado $\mu \in M$ y $n \geq 1$, Sea

$$D_n(\mu) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n^\mu(t) - F_0^\mu(t)|,$$

donde,

$$F_n^\mu(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, t]}(\langle \mu, X_i \rangle) \text{ y } F_0^\mu(t) = P_0(X \in C[0,1] : \langle \mu, X \rangle \in B)$$

se tiene,

- (a) Si la distribución de (X_n) es P_0 , con P_0 continua. Entonces, para todo $\mu \in M$ y todo $n \geq 1$, el estadístico $D_n(\mu)$ tiene la misma distribución que D_n . Es decir, $D_n(\mu)$ no depende de μ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\sqrt{n}D_n(\mu) \leq t) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 t^2}, \quad (t > 0)$$

- (b) Suponga que la distribución común de $(X_n)_{n \geq 1}$ es $Q \neq P_0$. Suponga también que P_0 satisface la condición de Carleman. Entonces, dada una medida en M , para casi todo $\mu \in M$ se tiene que:

$$\nu(\liminf_{n \rightarrow \infty} D_n(\mu) \geq 0) = 1$$

Demostración. (a) Si la distribución común de $(X_n)_{n \geq 1}$ es P_0 , entonces la distribución común de las variables aleatorias reales $(\langle \mu, X_n \rangle)_{n \geq 1}$ es exactamente F_0^μ , la cual es continua. También, la distribución empírica de $\langle \mu, X_1 \rangle, \dots, \langle \mu, X_n \rangle$ es F_n^μ . Por lo tanto esto se sigue de las propiedades del test de Kolmogorov-Smirnov estándar.

- (b) Si $Q \neq P_0$, entonces, para casi todo $\mu \in M$, existe $t_\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_0\{X \in C[0, 1] : \langle \mu, X \rangle \leq t_\mu\} \neq Q\{X \in C[0, 1] : \langle \mu, X \rangle \leq t_\mu\}.$$

Sea δ_μ el valor absoluto de la diferencia. Entonces, usando la desigualdad triangular,

$$D_n(\mu) \geq |F_n^\mu(t_\mu) - F_0^\mu(t_\mu)| \geq \delta_\mu - |F_n^\mu(t_\mu) - G^\mu(t_\mu)|,$$

donde $G^\mu(t) = Q\{X \in C[0, 1] : \langle \mu, X \rangle \leq t\}$. Por la ley fuerte de los grandes números se tiene que $F_n^\mu(t_\mu) \rightarrow G^\mu(t_\mu)$ ν casi seguramente. Luego el resultado se tiene.

Teorema 11. Sea $(X_n)_{n \geq 1}, (Y_n)_{n \geq 1}$ dos secuencias de elementos aleatorios independientes en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ y tomando valores en $C[0, 1]$. Sean P_X y P_Y sus leyes de probabilidad en $C[0, 1]$ respectivamente. Dado $\mu \in M$ y $n, m \geq 1$, Sea

$$D_{n,m}(\mu) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n^\mu(t) - F_m^\mu(t)|,$$

		$\lambda^2 = 1,$ $\mu^2 = 3$	$\lambda^2 = 1,$ $\mu^2 = 5$	$\lambda^2 = 6,$ $\mu^2 = 10$	$\lambda^2 = 3,$ $\mu^2 = 5$	$\lambda^2 = 0,5,$ $\mu^2 = 1,5$	$\lambda^2 = 0,1,$ $\mu^2 = 0,5$
$\lambda^2 = 1,$ $\mu^2 = 3$	% R	0.0368					
	p-v	0.5314					
$\lambda^2 = 1,$ $\mu^2 = 5$	% R	0.052	0.0382				
	p-v	0.4781	0.5432				
$\lambda^2 = 6,$ $\mu^2 = 10$	% R	0.6018	0.388	0.0372			
	p-v	0.0663	0.1154	0.5397			
$\lambda^2 = 3,$ $\mu^2 = 5$	% R	0.1678	0.0974	0.1112	0.0404		
	p-v	0.2426	0.3702	0.3413	0.5378		
$\lambda^2 = 0,5,$ $\mu^2 = 1,5$	% R	0.1202	0.2646	0.9348	0.6714	0.0334	
	p-v	0.3114	0.2116	0.0111	0.0501	0.5403	
$\lambda^2 = 0,1,$ $\mu^2 = 0,5$	% R	0.9328	0.9542	1	0.9994	0.5122	0.0364
	p-v	0.0122	0.0087	0.0002	0.0007	0.0782	0.5397

Tab. 5.3:

donde,

$$F_n^\mu(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, t]}((\mu, X_i)) \quad y \quad F_m^\mu(t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I_{(-\infty, t]}((\mu, X_i))$$

se tiene,

Si $P_X = P_Y$. Entonces, para todo $\mu \in M$ y todo $n \geq 1$, el estadístico $D_{n,m}(\mu)$ tiene la misma distribución que $D_n(\mu)$ definido en el teorema anterior. Es decir, $D_n(\mu)$ no depende de μ y

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \nu\left(\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{n,m}(\mu) \leq t\right) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} e^{-2k^2 t^2}, \quad (t > 0)$$

Para elegir la medida μ usaremos el hecho que el conjunto de las medidas de la forme $\sum_{i=1}^n a_i \delta_{t_i}$ es denso en M . Luego tomando $a_i \sim N(0, 1)$ y $t_i \sim U(0, 1)$ es una buena elección para μ .

Para verificar el hecho de que el test discrimina mejor que el anterior, se simuló el proceso para distintos valores de λ^2 y μ^2 con un tiempo de observación $T = 1$ y se aplicó el test 5000 veces para muestras de tamaño 100. En la tabla 5.3 se muestran los promedios de los valores p y los porcentajes de rechazo obtenidos.

Como se muestra en la tabla 5.3, ahora si se discrimina entre los procesos con valores $\lambda^2 = 1, \mu^2 = 3$ versus $\lambda^2 = 1, \mu^2 = 5$ y $\lambda^2 = 3, \mu^2 = 5$ versus $\lambda^2 = 6, \mu^2 = 10$

6. CONCLUSIONES

1. Si tenemos un sistema cuántico abierto representado por un SMC, el cual depende de un parámetro θ , es posible realizar inferencia estadística clásica, si podemos encontrar mediciones que reduzcan clásicamente al semigrupo. En cada una de las reducciones se puede desarrollar una teoría de estimación y estudiar las propiedades de tales estimadores, sin las dificultades que aparecen en el contexto cuántico.
2. Se han desarrollado distintos métodos de estimación para procesos de Ornstein Uhlenbeck y para procesos de nacimiento y muerte. Estos métodos son buenos, ya que, aunque necesitamos tiempos de observación bastante largos, en mecánica cuántica esto no es un problema, ya que es posible obtener tales muestras.
3. Un problema que se encuentra en esta área es la dificultad de obtener datos reales. Sin embargo, existen métodos de simulación en el contexto cuántico. Lo que sugiere simular las dinámicas de estos modelos, para extraer las mediciones en cada uno de ellos.
4. En los casos en que contamos con más de una reducción clásica es posible comparar dichas estimaciones mediante los test expuestos en este trabajo. Si los parámetros a estimar se tienen en cada una de estas reducciones, las estimaciones obtenidas en cada uno de estos espacios debieran ser similares.
5. Un aporte importante a la estadística, es que, entre diferentes procesos conocidos en probabilidades clásicas, podemos establecer una relación en el campo de la mecánica cuántica. Esto ha quedado de manifiesto en el ejemplo en el cual podemos encontrar más de una reducción, en otras palabras, procesos de naturalezas muy distinta podrían provenir de un mismo modelo cuántico.

7. PREGUNTAS ABIERTAS

En el desarrollo de este trabajo surgieron muchas preguntas las cuales en si son problemas interesantes a tratar, a continuación mencionaremos las más importantes.

1. Las mediciones aquí definidas son un caso más general que las que corresponden a la medida espectral de un operador dado, sería interesante ver si es posible obtener otro tipo de mediciones que sean compatibles y a su vez no sean la medida espectral de algún operador. ¿Cuál sería la interpretación física de tales mediciones?
2. Es posible obtener reducciones en otro tipo de modelos, sería interesante tratar la estimación de parámetros en el modelo de exclusión cuántico, el cual es reducido a un modelo de exclusión clásico. Este proceso es ergódico y recurrente, por lo que existe una medida invariante, este hecho se puede utilizar para realizar las estimaciones de los parámetros involucrados en el modelo cuántico.

El modelo de exclusión cuántico es representado por un SMC con generador dado por:

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2} \sum_{i,j} (L_{i,j}^* L_{i,j} x - 2L_{i,j}^* x L_{i,j} + x L_{i,j}^* L_{i,j}).$$

Aquí el operador $L_{i,j}$ describe el transporte de una partícula desde un sitio i a un sitio j , a una tasa $\gamma_{i,j}$ y está definido por

$$L_{i,j} = \sqrt{\gamma_{i,j}} b_j^\dagger b_i,$$

donde b_j^\dagger y b_i son los operadores de creación y aniquilación en el espacio de Fock antisimétrico (Fermi Fock space).

Este semigrupo es reducido por el álgebra $W^*(H)$. La reducción T es un proceso de exclusión clásico con generador

$$Lf(\eta) = \sum_{i,j:\eta(i)=1,\eta(j)=0} \gamma_{i,j}(f(\eta + 1_j - 1_i) - f(\eta)),$$

para todas las funciones cilíndricas acotadas $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Para más detalles ver [25].

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ANDERSEN, PER KRAGH, 1993, *Statistical Models Based on Counting Processes*, Springer-Verlag, New York.
- [2] BARNDORFF-NIELSEN, O. E., GILL, R., JUPP, P. , 2001, *On Quantum Statistical Inference*, The Centre for Mathematical Physics and Stochastics.
- [3] BRATTELI, OLA; ROBINSON, DEREK W. , 1981-1987, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*, Springer-Verlag New York.
- [4] BRATTELI, OLA; ROBINSON, DEREK W. , 1981-1987, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II*, Springer-Verlag New York.
- [5] BRÉMAUD, PIERRE, 1981, *Point Processes and Queues: Martingale Dynamics*, Springer-Verlag, New York.
- [6] CUESTA-ALBERTOS, J.A., FRAIMAN, R. AND RANSFORD, T. , 2006, *A sharp form of the Cramer-Wold Theorem*, To appear in *J. Theoret. Probab.*
- [7] CUESTA-ALBERTOS, J.A., FRAIMAN, R. AND RANSFORD, T. , 2006, *Random projections and goodness-of-fit tests in infinite dimensional spaces*, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, Vol 37, No 4, pp. 477-501.
- [8] DACUNHA-CASTELLE D. ET DUFLO M. , 1982, *Probabilités et Statistiques: Tome 1 Problemes a temps fixe* , Masson, Paris.
- [9] DACUNHA-CASTELLE D. ET DUFLO M. , 1983, *Probabilités et Statistiques: Tome 2 Problemes a temps mobile* , Masson, Paris.
- [10] DACUNHA-CASTELLE, D. ; FLORENS-ZMIROU, D. , 1986, *Estimation of the coefficients of a diffusion from discrete observations.*, *Stochastics* 19 (1986), no. 4, 263-284.

-
- [11] FAGNOLA, F., REBOLLEDO, R., SAAVEDRA, C. , 1994, *Quantum flows asociated to master equations in optics*, J. Math. Phys., Vol 35, No 1, pp. 1-12.
- [12] FAGNOLA, F. Y REBOLLEDO, R. , 2003, *Transience and Recurrence of Quantum Markov Semigroups*, Probab. Theory Related Fields 126, no. 2, pp 289-306.
- [13] FAGNOLA, F. Y REBOLLEDO, R. , 1998, *The Approach to Equilibrium of a Class of Quantum Dynamical Semigroups*, Infinity Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics Vol 1, no. 4, pp 561-572.
- [14] FLORENS-ZMIROU, DANIELE, 1993, *On estimating the diffusion coefficient from discrete observations*, J. Appl Probab vol 30, no. 4, pp 790-804.
- [15] HELMBERG, GILBERT, 1969, *Introduction To Spectral Theory In Hilbert Space*, North-Holland series in Applied Mathematics and Mechanics.
- [16] JACOD, J.; SHIRYAEV, A.N. , 1987, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Springer- Verlag Berlin.
- [17] KARATZAS, IOANNIS; SHREVE, STEVEN E. , 1991, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer- Verlag New York.
- [18] KLOEDEN, PETER E. AND PLATEN, RICHARD, 1992, *Numerical Solutions of Stochastic Diferencial Equations*, Springer-Verlag, Berlin.
- [19] KUTOYANTS, YU. A. , 1984, *Parameter Estimation for Stochastic Processes*, Heldermann-Verlag, Berlin.
- [20] LIPSTER, R.S. AND SHIRYAYEV, A.N. , 1977, *Statistics of Random Processes I: General Theory*, Springer-Verlag, New York.
- [21] LIPSTER, R.S. AND SHIRYAYEV, A.N. , 1978, *Statistics of Random Processes II: Applications*, Springer-Verlag, New York.
- [22] ORSZAG POSA, MIGUEL, 1998, *Quantum optics*, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

-
- [23] PARTHASARATHY, K.R. , 1992, *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Monographs in math.,vol. 85. Birkhäuser, Basel.
- [24] PEDERSEN, G.K. , 1989, *Analysis Now*, Graduate Text in Math.,vol. 118, Springer-Verlag.
- [25] REBOLLEDO, R. , 2005, *Decoherence of quantum Markov semigroups*, Ann. I. H. Poincaré, Vol 41, pp. 349-373.
- [26] REBOLLEDO, ROLANDO, 1978, *Sur les applications de la théorie des martingales à l'étude statistique d'une famille de processus ponctuels*, In Springer Lecture Notes in Mathematics 636, pp. 27-70. Springer-Verlag, Berlin.
- [27] REBOLLEDO, ROLANDO, 1979, *La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi de processus*, Mémoires de la S. M. F. tome 62, pp. I-V+1-125.
- [28] REBOLLEDO, R. AND SPEHNER, D., 2007, *Adiabatic Limits and Quantum Decoherence*.
- [29] SORENSEN, HELLE, 2002, *Parametric Inference for Diffusion Processes Observed at Discrete Points in Time*, DISCUSSION PAPERS Institute of Economics University of Copenhagen.