



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

MODELAMIENTO ESTADÍSTICO DE PROCESOS NO GAUSSIANOS:

DISTRIBUCIÓN EPSILON SKEW NORMAL

MARIO RUBÉN TAGLE ESCOBAR

Tesis presentada al Departamento de Estadística de la Facultad de Matemáticas como requisito para obtener el Grado de Doctor en Estadística

Profesor Guía:
WILFREDO PALMA

Santiago de Chile, Marzo 2007

MODELAMIENTO ESTADÍSTICO DE PROCESOS NO GAUSSIANOS:

DISTRIBUCIÓN EPSILON SKEW NORMAL

Comité Científico:

Reinaldo Arellano

Pascal Bondon

Wilfredo Palma

Valderio Reisen

Fecha de Aprobación _____

Agradecimientos

Deseo dar las gracias a todos aquellos que me brindaron su apoyo y amistad para finalizar uno de los trabajos más importantes de mi desarrollo profesional. Especialmente a mi tutor Dr. Wilfredo Palma, por su paciencia, valiosa dirección y apoyo que proporcionó en todo momento para desempeñar lo mejor posible este trabajo. Al Dr. Pascal Bondon, por sus acertadas sugerencias y comentarios que contribuyeron a desarrollar parte del trabajo.

Al Departamento de Estadística de la Pontificia Universidad Católica de Chile, por la formación general que me proporciono y la oportunidad de conocer a profesores con distintas áreas de estudio.

A todo el personal administrativo de la facultad por su amabilidad y apoyo que siempre me brindaron.

A mis amigos que encontré durante estos años en la PUC, a Hector, Yasna, Carolina, Claudio, Carlos, Luis, Patricia, Ricardo, Jorge, Eduardo, Soledad, Mauricio, José, Marcela, Reinaldo, Alexis, Pamela, Jaime, Osvaldo, Hugo, Rolando, Leontina y muchos otros.

Agradezco a mi Madre Ana, por todo el apoyo y el infinito cariño que ha tenido para conmigo y a mi Padre que desde el cielo me ha ayudado.

Tabla de Contenido

Reconocimientos	III
Dedicatoria	IV
Lista de Tablas	VIII
Lista de Figuras	IX
Resumen	x
1. Distribuciones de Probabilidad Asimétricas	1
1.1. Familia Epsilon-Skew-Simétricas	2
1.2. Distribución Epsilon-Skew-Normal	2
1.2.1. Propiedades	3
1.2.2. Momentos Centrales y Cumulantes	5
1.3. Distribución Epsilon-Skew-Exponencial-Potencia	7
1.3.1. Propiedades	7
2. Estimación ESN	11
2.1. Estimación máximo verosímil	11
2.2. Estimación pseudo-máximo verosímil	12
2.2.1. Algunas funciones aproximantes	13
2.2.2. Simulaciones	17
2.2.3. Aplicación	18
3. Estimación:	
Dominio Temporal	19
3.1. Estimadores de Momentos	20

3.1.1.	Matriz de Varianzas-Covarianzas	23
3.1.2.	Estimación con el método de momentos	31
3.1.3.	Simulaciones	33
3.2.	Máxima Verosimilitud Condicional	36
3.2.1.	Consistencia y normalidad asintótica de $\hat{\eta}_n$	38
3.2.2.	Simulaciones	48
3.2.3.	Aplicación	61
4.	Estimación:	
	Dominio Espectral	65
4.1.	Densidad espectral	66
4.2.	Densidad espectral del proceso lineal	67
4.2.1.	Propiedades del espectro	68
4.3.	Densidad biespectral del proceso lineal	68
4.4.	Estimación de la densidad espectral	76
4.4.1.	Suavizamiento del periodograma	76
4.4.2.	Suavizamiento del biperiodograma	78
4.5.	Proceso AR(1) con innovaciones ESN	79
4.6.	Estimación mediante espectro y biespectro	81
4.7.	Aplicación al caso AR(1)	82
4.8.	Simulaciones	83
4.9.	Proceso AR(1) estandarizado	84
4.10.	Momentos centrales	85
4.11.	Espectro y biespectro del proceso AR(1)	86
4.12.	Consistencia y varianza asintótica	87
4.13.	Simulaciones	102

5. Extensiones	107
5.1. Introducción	107
5.2. Proceso AR(1) con Innovaciones ESEp	107
5.2.1. Verosimilitud Condicional AR(1)	108
5.3. Proceso AR(p) con Innovaciones ESN	109
6. Conclusiones	113
Referencias	115
Apéndice A. — Ventana Espectral y Biespectral	119

Lista de Tablas

1.	Aproximación con la ESNk.	17
2.	Estimación de momentos con $\epsilon = 0.9$ y $\phi > 0$	34
3.	Estimación de momentos con $\epsilon = 0.5, 0.2$ y $\phi > 0$	35
4.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.9$ y $\phi < 0$	49
5.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.9$ y $\phi > 0$	50
6.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.5$ y $\phi < 0$	51
7.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.5$ y $\phi > 0$	52
8.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.2$ y $\phi < 0$	53
9.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.2$ y $\phi > 0$	54
10.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.2$ y $\phi < 0$	55
11.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.2$ y $\phi > 0$	56
12.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.5$ y $\phi < 0$	57
13.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.5$ y $\phi > 0$	58
14.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.9$ y $\phi < 0$	59
15.	Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.9$ y $\phi > 0$	60
16.	Estimación por Máxima Verosimilitud.	61
17.	Estimación por Máxima Verosimilitud.	63
18.	Innovación ESN, $\phi = 0.5$ y $\epsilon = 0.5$	83
19.	Comparación de 3 métodos para estimar ϕ	104
20.	Suavizando el Periodograma.	105
21.	Considerando innovacion ESN.	106
22.	EMV en el modelo AR(1)-ESEp.	109

Lista de Figuras

1.	Densidad $ESN(0, 1, \epsilon)$ con $\epsilon = 0.0, -0.3, -0.6$ y -0.9	4
2.	Densidad $ESEP(0, 1, 1, \epsilon)$ con $\epsilon = \pm 0.8, \pm 0.5$ y 0.0	8
3.	Densidad $ESEP(0, 1, 3, \epsilon)$ con $\epsilon = 0.8 , 0.5 $ y 0	9
4.	Funciones de suavizamiento (18), (19) y (20)	14
5.	Integración Numérica de la ESN_k estándar.	15
6.	Ajuste Normal y ESN_k para los 219 datos de la altura de los volcanes.	18
7.	Promedios Mensuales en la Producción de Granos.	62
8.	Cambios Trimestrales en los Inventarios.	64
9.	Regiones de simetría del biespectro.	69
10.	Densidad Espectral para el Proceso $AR(1)$	70
11.	Biespectro del proceso $AR(1)$ con $\phi = 0.5$ y $\epsilon = 0.5$. . .	72
12.	Biespectro del proceso $AR(1)$ con $\phi = -0.5$ y $\epsilon = 0.5$. . .	73
13.	Biespectro del proceso $AR(1)$ con $\phi = 0.5$ y $\epsilon = -0.5$. . .	74
14.	Biespectro del proceso $AR(1)$ con $\phi = -0.5$ y $\epsilon = -0.5$. . .	75
15.	Suavizamiento del Espectro Usando la Ventana de Hamming. . .	78
16.	Estimación del espectro usando la ventana de Hamming. . .	81
17.	Ventanas Espectrales.	120

Resumen

Esta tesis está enfocada en el estudio del comportamiento asintótico de los parámetros en el proceso autorregresivo. La innovación con la cual trabajaremos es Epsilon Skew Normal (ESN) que fue introducida por Mudholkar y Hutson (2000). La metodología ocupada en la estimación es mediante la máxima verosimilitud condicional la cual es sencilla de calcular y provee de estimadores consistentes. Nuestro enfoque también consideró la incorporación de estimadores en el dominio de la frecuencia, para ello estudiamos el proceso mediante la representación espectral (Priestley, 1981) y la biespectral (Brillinger, 1981), la estimación la realizamos por el mecanismo propuesto por Terdik (1999).

Las principales contribuciones que hace este trabajo son las siguientes. Primero, ilustra las propiedades de la distribución ESN con respecto al desarrollo de modelos autorregresivos más flexibles en donde la ESN es una extensión en un parámetro del modelo normal estándar. Derivamos un teorema central del límite para el comportamiento de los estimadores y mediante simulaciones mostramos que los estimadores tienen un buen comportamiento, también mostramos dos ejemplos con datos reales presentando distintos niveles de asimetría. En segundo lugar, tenemos

que por medio de la densidad biespectral podemos estudiar el comportamiento de la asimetría en series de tiempo lineales y mediante el método de Terdik (1999) podemos obtener una distribución límite de nuestros estimadores.

En tercer lugar, este trabajo nos ayuda a efectuar extensiones en diversos sentidos, uno de ellos esta enfocado a cambiar el modelo de serie de tiempo manteniendo la innovación con la distribución ESN, por ejemplo un modelo autorregresivo de orden p , o bien un autorregresivo de medias móviles denotado como $ARMA(p, q)$. También es factible hacer las extensiones al modificar la innovación por algunas de las distribuciones estudiadas en Gómez (2004). Respecto al capítulo de densidad biespectral podemos señalar que las extensiones pueden ser a través de los modelos de larga memoria incorporando el parámetro de asimetría dando más flexibilidad al modelo.

Capítulo 1

Distribuciones de Probabilidad Asimétricas

El objetivo de este capítulo es mostrar las distribuciones asimétricas que utilizaremos en los capítulos siguientes. Estas distribuciones son la Epsilon-Skew-Normal (ESN) y su extensión Epsilon-Skew-Exponencial-Potencia (ESEP) de Gómez (2004).

La historia de este tipo de distribuciones que presentan asimetrías es debida a los estudios originalmente desarrollado por O'Hagan y Leonard (1976) en el contexto del análisis bayesiano. La investigación se realizó con más detalle por medio de Azzalini (1985, 1986) el cual introduce el modelo skew normal que tiene como caso particular la normal, estudia sus propiedades básicas, estimación máximo verosímil y matriz de información de Fisher. Posteriormente, Azzalini (1986) extiende los resultados para una clase de distribuciones que tienen como clases particulares la Skew-Normal (SN), Skew-Logística, etc. La construcción de este modelo así como sus extensiones se basan en el Lema 1.1 (Azzalini, 1985) .

Lema 1.1. *Sea f una función densidad simétrica alrededor de cero, y G función de distribución absolutamente continua tal que G_0 es simétrica alrededor de cero. Entonces*

$$g(x|\lambda) = 2f(x)G(\lambda x), \text{ con } x \in \mathbb{R}$$

es función densidad de la variable aleatoria X para cualquier λ real. La denotamos por $X \sim SF(\lambda)$.

Posteriormente Mudholkar y Hutson (2000) introducen otro modelo que llama Epsilon-Skew-Normal (ESN), este modelo tiene los mismos rangos de asimetría y curtosis, a pesar de tener una estructura distinta. Una de las extensiones del modelo ESN de Mudholkar y Hutson (2000) es obtenida en el trabajo de Tesis de Gómez (2004).

1.1. Familia Epsilon-Skew-Simétricas

Esta es la extensión del desarrollo mostrado por Mudholkar y Hutson (2000), definimos la siguiente clase de distribuciones.

Definición 1.1. Sea f una densidad simétrica. La clase de distribuciones Epsilon-Skew es indexada por el parámetro de asimetría $|\epsilon| < 1$ y densidad definida por

$$h(x; \epsilon) = f\left(\frac{x}{1+\epsilon}\right) \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(x) + f\left(\frac{x}{1-\epsilon}\right) \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x). \quad (1)$$

Si X tiene densidad (1) decimos que X es una variable aleatoria Epsilon-Skew y la denotamos por $X \sim ESf(\epsilon)$.

Propiedad 1. Sea $X \sim ESf(\epsilon)$. La familia de distribuciones Epsilon-Skew de localización y escala, está definida como la distribución de $Z = \theta + \sigma X$ para $x \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$. La correspondiente densidad es dada por

$$h(z; \eta) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{z-\theta}{\sigma(1+\epsilon)}\right) \mathbf{1}_{(-\infty, \theta)}(z) + \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{z-\theta}{\sigma(1-\epsilon)}\right) \mathbf{1}_{[\theta, \infty)}(z), \quad (2)$$

donde $\eta = (\theta, \sigma, \epsilon)$ y denotamos esto por $Z \sim ESf(\theta, \sigma, \epsilon)$.

1.2. Distribución Epsilon-Skew-Normal

Basándonos en la formulación presentada en (2) podemos ver que, si f es la función densidad de la normal estándar, entonces la distribución de Z es llamada Epsilon-Skew-Normal (ESN), unimodal con moda θ ,

$|\epsilon| < 1$ y con probabilidad bajo la moda igual a $(1 + \epsilon)/2$, es decir $Z \sim \text{ESN}(\theta, \sigma, \epsilon)$ y su densidad es:

$$f_{\text{ESN}}(z; \eta) = \frac{1}{\sigma} \begin{cases} \phi\left(\frac{z-\theta}{\sigma(1+\epsilon)}\right), & \text{para } z < \theta \\ \phi\left(\frac{z-\theta}{\sigma(1-\epsilon)}\right), & \text{para } z \geq \theta, \end{cases} \quad (3)$$

donde ϕ es la densidad normal estándar y $\eta = (\theta, \sigma, \epsilon)^T$ los parámetros de Z . Además la función de distribución está dada por:

$$F_{\text{ESN}}(z; \eta) = \begin{cases} (1 + \epsilon)\Phi\left(\frac{z-\theta}{\sigma(1+\epsilon)}\right), & \text{si } z < \theta; \\ \epsilon + (1 - \epsilon)\Phi\left(\frac{z-\theta}{\sigma(1-\epsilon)}\right), & \text{si } z \geq \theta. \end{cases}$$

1.2.1. Propiedades

Nombramos algunas de las propiedades principales, las cuales están tratadas con mayor profundidad en Mudholkar y Hutson (2000).

1. Cuando $\epsilon = 0$ la densidad (3) se reduce a una $N(\theta, \sigma^2)$.
2. Cuando $\epsilon \rightarrow -1$, la densidad $f_{\text{ESN}}(z; \eta)$ tiende a la función densidad de una semi-normal (half-normal).
3. Si $\epsilon \rightarrow 1$, la densidad se refleja en el lado opuesto del eje X.

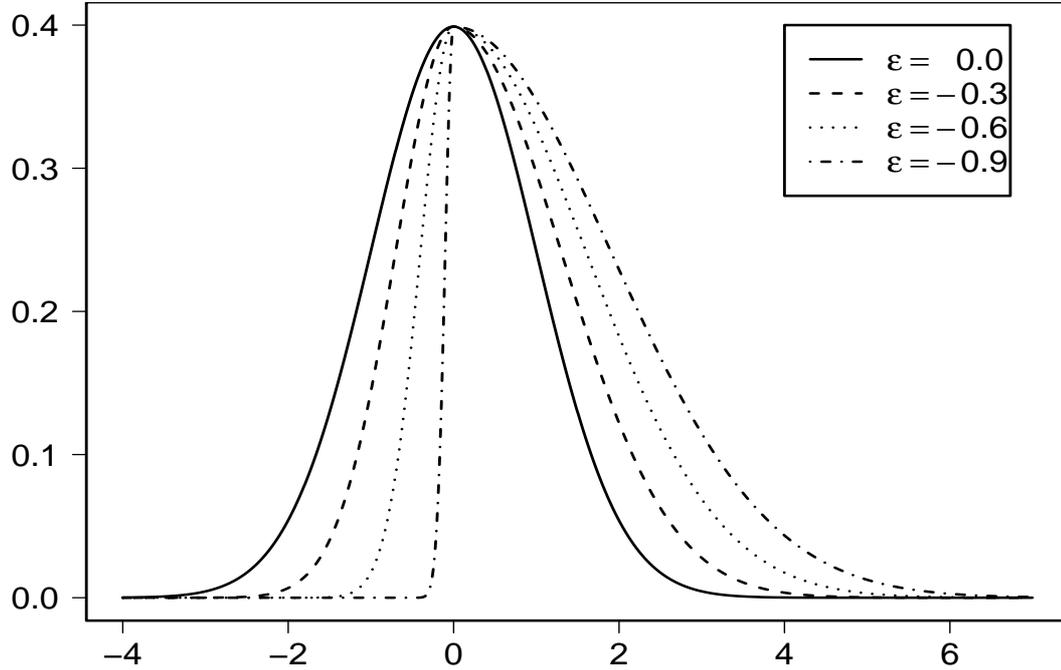


Figura 1: Densidad $ESN(0, 1, \epsilon)$ con $\epsilon = 0.0, -0.3, -0.6$ y -0.9 .

4. Representación estocástica de Z , útil en la generación numérica y para recoger alguna propiedad.

La Epsilon-Skew-Normal estándar $ESN(0, 1, \epsilon)$, es una mezcla de dos distribuciones semi-normales y puede ser generada mediante la siguiente representación:

$$\begin{aligned} X &= (1 - U)(1 - \epsilon)|N_1| - U(1 + \epsilon)|N_2|, \\ Z &= \theta + \sigma X, \end{aligned} \quad (4)$$

donde $P(U = 1) = (1 + \epsilon)/2 = 1 - P(U = 0)$, y N_1, N_2 son variables aleatorias normales estándar.

5. La media, varianza, coeficiente de asimetría y curtosis están dados

por:

$$\mathbb{E}[Z] = \theta - \frac{4\sigma\epsilon}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\mathbb{V}[Z] = \frac{\sigma^2}{\pi}[(3\pi - 8)\epsilon^2 + \pi], \quad (5)$$

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{2\sqrt{2}\epsilon[(5\pi - 16)\epsilon^2 - \pi]}{[(3\pi - 8)\epsilon^2 + \pi]^{3/2}}, \quad (6)$$

$$\beta_2 = \frac{(15\pi^2 + 16\pi - 192)\epsilon^2 + 10\pi(3\pi - 8)\epsilon^2 + 3\pi^2}{[(3\pi - 8)\epsilon^2 + \pi]^2}, \quad (7)$$

donde $\sqrt{\beta_1}$, β_2 son los coeficientes de asimetría y curtosis respectivamente.

De (6) y (7) se tiene que

$$-0.9953 \leq \sqrt{\beta_1} \leq 0.9953 \quad y \quad 3.0000 \leq \beta_2 \leq 3.8692.$$

Es interesante notar que ambos coeficientes $\sqrt{\beta_1}$ y β_2 tienen el mismo rango que la distribución Skew-Normal introducida por O'Hagan y Leonard (1976) e investigada por Azzalini (1985), Henze (1986) y Mukhopadhyay y Vidakovic (1995). Esto es esperable, debido a que las distribuciones normal y semi-normal son los casos límites para ambas familias.

6. La función generadora de momentos de Z es $M_Z(t) = e^{\theta t}M(\sigma t)$, donde

$$M(t) = (1+\epsilon)e^{(1+\epsilon)^2 t^2 / 2} \Phi[-(1+\epsilon)t] + (1-\epsilon)e^{(1-\epsilon)^2 t^2 / 2} \Phi[(1-\epsilon)t], \quad (8)$$

donde $M(t)$ corresponde a la función generadora de momentos de una Epsilon-Skew-Normal estándar.

1.2.2. Momentos Centrales y Cumulantes

Basándonos en la ecuación (8) calculamos los primeros seis momentos centrales de la distribución de Z .

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= \frac{\sigma^2}{\pi} [(3\pi - 8)\epsilon^2 + \pi] = \mathbb{V}[Z], \\
\mu_3 &= \frac{2\sqrt{2}\sigma^3\epsilon}{\pi^{3/2}} [(5\pi - 16)\epsilon^2 - \pi], \\
\mu_4 &= \frac{\sigma^4}{\pi^2} [(15\pi^2 + 16\pi - 192)\epsilon^4 + ((30\pi - 80)\epsilon^2 + 3\pi)\pi], \\
\mu_5 &= \frac{2\sqrt{2}\sigma^5\epsilon}{\pi^{5/2}} [(51\pi^2 - 80\pi - 256)\epsilon^4 + ((7\pi - 24)10\epsilon^2 - 9\pi)\pi], \\
\mu_6 &= \frac{\sigma^6}{\pi^3} [(105\pi^3 + 648\pi^2 - 2240\pi - 2560)\epsilon^6 + 5\epsilon^4\pi(105\pi^2 - 48\pi - 832) \\
&\quad + 3\pi^2((105\pi - 264)\epsilon^2 + 5\pi)],
\end{aligned}$$

de donde obtenemos los coeficientes de asimetría y curtosis, dados en (6) y (7) teniendo, respectivamente, que $\mu_3/\mu_2^{3/2} \in (-0.996, 0.996)$ y $\mu_4/\mu_2^2 \in (3.000, 3.870)$. La ESN es por tanto útil para modelar distribuciones con asimetría y curtosis levemente superior (leptocúrtica) a la normal estándar.

Otras medidas descriptivas y que tienen mejores propiedades desde el punto de vista teórico, son los cumulantes que pueden ser obtenidos por medio de los momentos centrales, Kendall y Stuart (1969, sec. 3.14). Así se obtiene:

$$\begin{aligned}
\kappa_2 &= \mu_2, \\
\kappa_3 &= \mu_3, \\
\kappa_4 &= \frac{4\sigma^4\epsilon^2}{\pi^2} (3(1 - \epsilon^2)\pi^2 + 8(5\epsilon^2 - 1) - 96\epsilon^2), \\
\kappa_5 &= \frac{2\sqrt{2}\sigma^5\epsilon}{\pi^{5/2}} ((800\pi - 99\pi^2 - 1536)\epsilon^4 \\
&\quad + 10\pi(5\pi - 16)\epsilon^2 + \pi^2), \\
\kappa_6 &= \frac{16\sigma^6\epsilon^2}{\pi^3} ((2400\pi + 15\pi^3 - 422\pi^2 - 3840)\epsilon^4 \\
&\quad + (200\pi^2 - 15\pi^3 - 480\pi)\epsilon^2 - 2\pi^2).
\end{aligned} \tag{9}$$

Estas propiedades nos serán de utilidad en los capítulos siguientes.

1.3. Distribución Epsilon-Skew-Exponencial-Potencia

Nuevamente al utilizar la ecuación (2), tomando la distribución de X como un Exponencial-Potencia (Subbotin, 1923) tenemos que la distribución de Z es llamada Epsilon-Skew-Exponencial Potencia (ESEP) y la notación que ocuparemos será la siguiente, $Z \sim \text{ESEP}(\theta, \sigma, \alpha, \epsilon)$ con densidad dada por:

$$f_{\text{ESEP}}(z; \eta) = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}\sigma\Gamma(1/\alpha)} \begin{cases} \exp\left(\frac{-|z-\theta|^\alpha}{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha(1+\epsilon)^\alpha}\right), & \text{para } z < \theta \\ \exp\left(\frac{-|z-\theta|^\alpha}{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha(1-\epsilon)^\alpha}\right), & \text{para } z \geq \theta, \end{cases} \quad (10)$$

donde $\eta = (\theta, \sigma, \alpha, \epsilon)$ y $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma.

1.3.1. Propiedades

Nombramos algunas de las propiedades principales, las cuales son tratadas con mayor profundidad en Elsalloukh et al. (2005) y Gómez (2004).

1. Cuando $\alpha = 2$ la densidad (10) se reduce a una $\text{ESN}(\theta, \sigma, \epsilon)$.
2. Cuando $\alpha = 1$ la densidad para $\text{ESEp}(\theta, \sigma, 1, \epsilon)$ es la Epsilon-Skew Laplace definida por:

$$f_{\text{ESEp}}(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}\sigma} \begin{cases} \exp\left(\frac{-|z-\theta|}{\sqrt{2}\sigma(1+\epsilon)}\right), & \text{para } z < \theta \\ \exp\left(\frac{-|z-\theta|}{\sqrt{2}\sigma(1-\epsilon)}\right), & \text{para } z \geq \theta. \end{cases} \quad (11)$$

La parte superior de la Figura 2 muestra la asimetría con ϵ variando de 0.8 (positividad alta) a 0.0 y en la inferior de -0.8 (negatividad alta) a 0.0 (simetría).

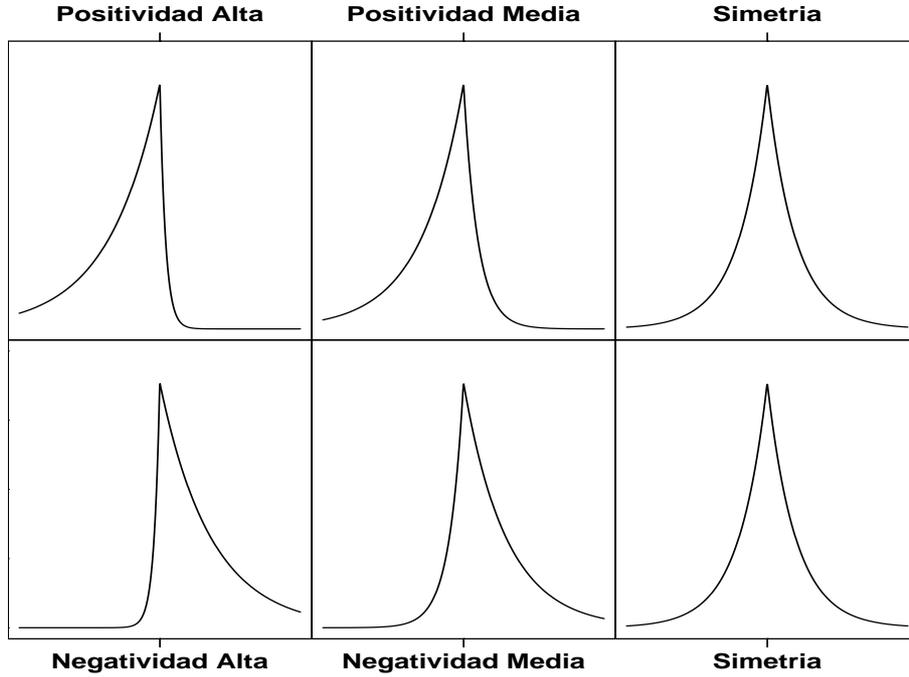


Figura 2: Densidad $ESEP(0, 1, 1, \epsilon)$ con $\epsilon = \pm 0.8, \pm 0.5$ y 0.0 .

3. Cuando $\epsilon = 0$ la densidad para $ESEP(\theta, \sigma, \alpha, 0)$ es:

$$f_{ESEP}(z) = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}\sigma\Gamma(1/\alpha)} \exp\left(\frac{-|z - \theta|^\alpha}{2^{\alpha/2}\sigma^\alpha}\right),$$

la cual es la distribución simétrica de la Exponencial-Potencia de Tadikamalla (1980) .

4. Cuando $\epsilon \rightarrow -1$, la densidad $f_{ESEP}(z; \eta)$ tiende a la función densidad de una semi-exponencial potencia.
5. Si $\epsilon \rightarrow 1$, la densidad se refleja en el lado opuesto del eje X.

Análogo a la figura anterior, la Figura 3 muestra la asimetría con ϵ variando de 0.8 (positividad alta) a 0.0 (simetría) y en la inferior de -0.8 (negatividad alta) a 0.0 (simetría).

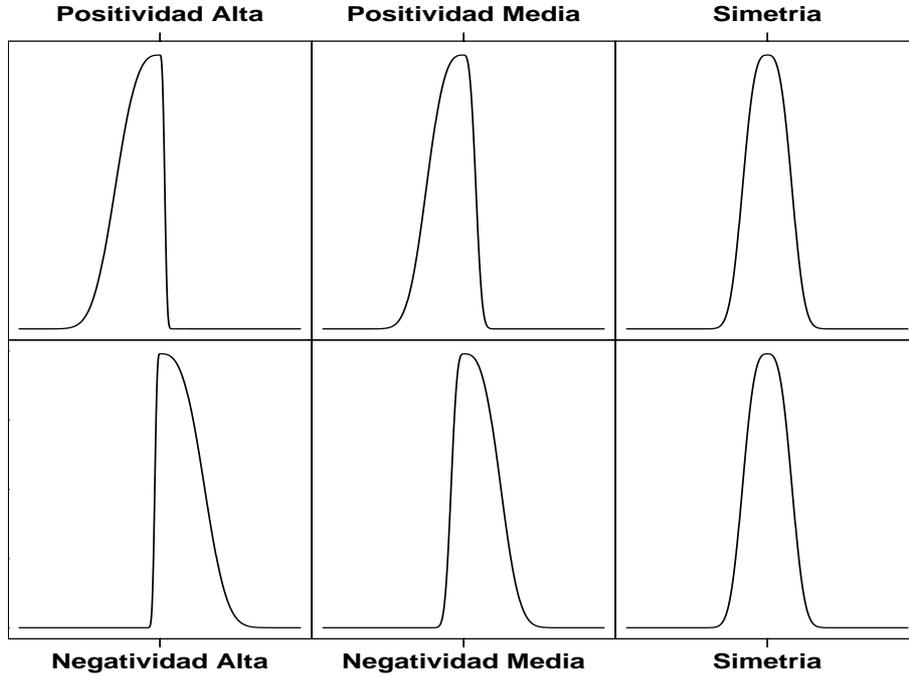


Figura 3: Densidad $ESEP(0, 1, 3, \epsilon)$ con $\epsilon = |0.8|, |0.5|$ y 0 .

6. Cuando $\alpha = 1$ y $\epsilon = 0$ la densidad para $ESEP(\theta, \sigma, 1, 0)$ es:

$$f_{ESEP}(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}\sigma} \exp\left(\frac{-|z - \theta|}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

la cuál es la distribución simétrica de Laplace, ver Karst y Polowy (1963) .

7. Representación Estocástica de Z .

La Epsilon-Skew-Exponencial-Potencia, $ESEP(0, 1, \alpha, \epsilon)$ es una mezcla de dos distribuciones semi-exponencial-potencia y puede ser generada mediante la siguiente representación:

$$\begin{aligned} X &= (1 - U)(1 - \epsilon)|E_1| - U(1 + \epsilon)|E_2|, \\ Z &= \theta + \sigma X, \end{aligned} \quad (12)$$

donde $P(U = 1) = (1 + \epsilon)/2 = 1 - P(U = 0)$, y E_1, E_2 son variables aleatorias exponencial-potencia independientes estándar de parámetro α .

8. La media, varianza, coeficiente de asimetría y curtosis están dados por:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \theta - \frac{4\sigma\epsilon\Gamma(2/\alpha)}{\sqrt{2}\Gamma(1/\alpha)}, \\
\mathbb{V}[Z] &= \frac{2\sigma^2}{\Gamma(1/\alpha)} \left[\Gamma(3/\alpha) + \left(3\Gamma(3/\alpha) - \frac{4\Gamma^2(2/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)} \right) \epsilon^2 \right], \\
\sqrt{\beta_1} &= \left\{ \frac{2}{\Gamma(1/\alpha)} \left[\Gamma(3/\alpha) + \left(3\Gamma(3/\alpha) - \frac{4\Gamma^2(2/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)} \right) \epsilon^2 \right] \right\}^{-3/2} \\
&\quad \times \left[\frac{-2\sqrt{2}\epsilon\Gamma(2/\alpha) + 2\Gamma(3/\alpha)(1 + 3\epsilon^2) - 8\sqrt{2}\Gamma(4/\alpha)\epsilon(1 + \epsilon^2)}{\Gamma(1/\alpha)} \right], \\
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2 &= \left\{ \frac{2}{\Gamma(1/\alpha)} \left[\Gamma(3/\alpha) + \left(3\Gamma(3/\alpha) - \frac{4\Gamma^2(2/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)} \right) \epsilon^2 \right] \right\}^{-2} \\
&\quad \times \left[\frac{-2\sqrt{2}\epsilon\Gamma(2/\alpha) + 2\Gamma(3/\alpha)(1 + 3\epsilon^2) - 8\sqrt{2}\Gamma(4/\alpha)\epsilon(1 + \epsilon^2)}{\Gamma(1/\alpha)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\Gamma(5/\alpha)(1 + 10\epsilon^2 + 5\epsilon^4)}{\Gamma(1/\alpha)} \right], \\
\end{aligned} \tag{14}$$

donde $\sqrt{\beta_1}$, β_2 son los coeficientes de asimetría y curtosis respectivamente.

Capítulo 2

Estimación ESN

En este capítulo trataremos la estimación para datos independientes e idénticamente distribuidos provenientes de la distribución $ESN(\theta, \sigma, \epsilon)$. Para este propósito debemos mencionar que Mudholkar y Hutson (2000) han desarrollado parte de la teoría para encontrar los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud (MV). Sin embargo, el mecanismo por el cual se encuentra el EMV en la práctica no es sencillo de programar y esto nos motivó a proponer un EMV más sencillo de implementar, en las secciones siguientes mostramos que numéricamente hemos obtenidos resultados prácticamente iguales a los mostrados por Mudholkar y Hutson (2000).

2.1. Estimación máximo verosímil

En esta sección mostramos la EMV de los tres parámetros desarrollada por Mudholkar y Hutson (2000) para la distribución $ESN(\theta, \sigma, \epsilon)$. Esta metodología consiste primeramente en minimizar la expresión $h'_j(z, \theta) = 0$ para $j = 1, 2, \dots, n - 1$ (ver ecuación 15) respecto θ y sujeto a $x_{(j)} \leq \theta < x_{(j+1)}$ ($x_{(j)}$ denota el j -ésimo estadístico de orden) encontrando un estimador $\hat{\theta}_0$.

Teniendo la solución de la ecuación (15), llamemos θ_0 a la solución. Empleamos el Lemma 4.4 de Mudholkar y Hutson (2000) el cual dice que los otros dos estimadores que maximizan la verosimilitud $\sigma^2 = \sigma_0^2$ y $\epsilon = \epsilon_0$ están dados por la ecuación (16).

$$\begin{aligned}
h'_j(z, \theta) = & -\frac{2}{3} \left\{ \sum_{i=1}^j (x_{(i)} - \theta) \left[\sum_{i=1}^j (x_{(i)} - \theta)^2 \right]^{-2/3} \right. \\
& \left. + \sum_{i=j+1}^n (x_{(i)} - \theta) \left[\sum_{i=j+1}^n (x_{(i)} - \theta)^2 \right]^{-2/3} \right\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Por tanto empleando la ecuación (15) podemos tener una estimación para θ , la que reemplazamos en la ecuación (16).

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 = & \frac{\left[\sum_{i=1}^j (x_{(i)} - \theta_0)^2 \right]^{1/3} - \left[\sum_{i=j+1}^n (x_{(i)} - \theta_0)^2 \right]^{1/3}}{\left[\sum_{i=1}^j (x_{(i)} - \theta_0)^2 \right]^{1/3} + \left[\sum_{i=j+1}^n (x_{(i)} - \theta_0)^2 \right]^{1/3}}, \\
\sigma_0^2 = & \frac{1}{4n} \left\{ \left[\sum_{i=1}^j (x_{(i)} - \theta_0)^2 \right]^{1/3} + \left[\sum_{i=j+1}^n (x_{(i)} - \theta_0)^2 \right]^{1/3} \right\}^3.
\end{aligned} \tag{16}$$

El valor del entero j , es decir, el intervalo que contiene el estimador de máxima verosimilitud de la moda, se puede obtener con ayuda del Lema 4.2 y Lema 4.4.

La siguiente sección muestra una alternativa que es más sencilla de implementar y que cumple con los supuesto de continuidad cuando la función es derivada. Está metodología la hemos llamado estimación pseudo-máximo verosímil, debido a que al alterar la ESN tenemos una función que no es densidad (no integra uno), pero que tiene propiedades similares a la densidad original.

2.2. Estimación pseudo-máximo verosímil

La Estimación de Máxima Verosimilitud (EMV) para las distribuciones Skew de Mudholkar y Hutson (2000) y Gómez (2004), están basadas en los estadísticos de orden, debido a la no diferenciabilidad del gradiente de la log-verosimilitud. Esta forma de estimar la verosimilitud implica

conocer un valor k de la muestra ordenada que permita obtener la localización de la moda en torno a esas observaciones.

Una deficiencia que se tiene en la expresión de las distribuciones Skew, es la dificultad de obtener la matriz de información de Fisher por la discontinuidad de las segundas derivadas, esto afecta las condiciones de regularidad establecidas en Ferguson (1996, Parte 4) o Lehmann (1999) para establecer un teorema central del límite (TCL). Por otra parte, hemos visto que se pueden flexibilizar algunos supuestos como lo establece Rao (1968) para determinar el TCL.

Nuestra propuesta está orientada a la estimación MV por medio de una función $h_k(z; \eta)$ que aproxime a la densidad $h(z; \eta)$ definida en (2) de la siguiente forma:

$$h_k(z; \eta) = C_k(\eta) f\left(\frac{z - \theta}{\sigma(1 - \epsilon \cdot g_k(z; \theta))}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(z), \quad (17)$$

en donde $C_k(\eta)$ es una constante normalizadora dependiente de los parámetros de asimetría y escala, además $g_k(z; \theta) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} -1, & z < \theta; \\ 1, & z \geq \theta. \end{cases}$ Suponiendo que la función $g_k(z; \theta)$ es continua y dos veces diferenciable, de modo tal que $h_k(z; \eta)$ también lo sea, podemos aproximarnos a la log-verosimilitud de la $h(z; \eta)$ haciendo k grande.

2.2.1. Algunas funciones aproximantes

Algunas funciones que podemos considerar son las siguientes:

$$g_k(z; \theta) = \frac{2}{\pi} \arctan[k \cdot (z - \theta)], \quad (18)$$

$$g_k(z; \theta) = \frac{2}{1 + \exp[-2 \cdot k \cdot (z - \theta)]} - 1, \quad (19)$$

$$g_k(z; \theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k \cdot (z - \theta)} \exp(-t^2) dt = \operatorname{erf}[k \cdot (z - \theta)], \quad (20)$$

las cuales mostramos en la Figura 4 utilizando $k = 1, 5$ y 10 .

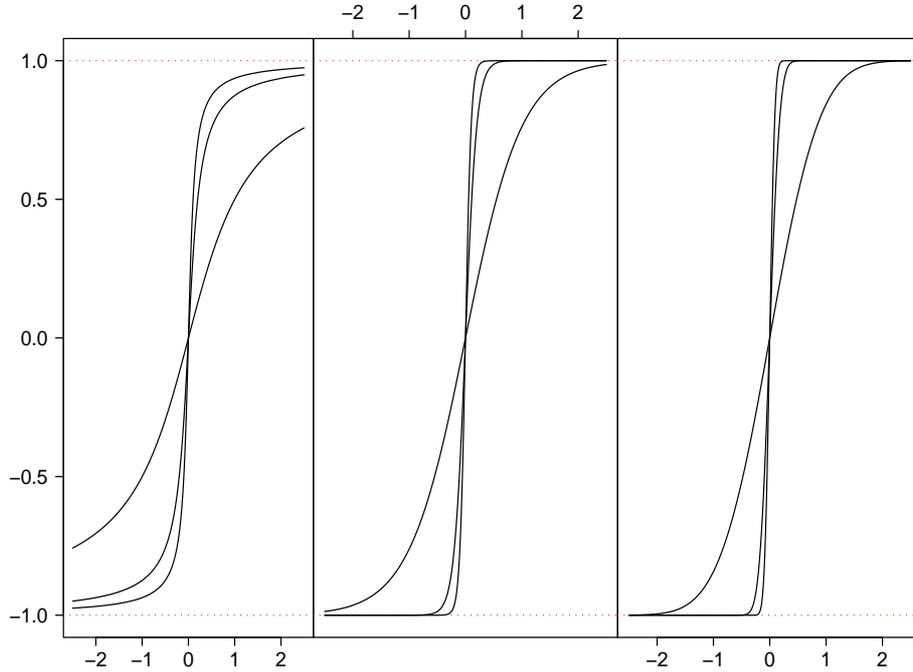


Figura 4: Funciones de suavizamiento (18), (19) y (20) .

Ahora aplicamos lo anterior a la distribución $ESN(0, 1, \epsilon)$ estándar, es decir,

$$f(z; \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\epsilon)^2}\right) \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(z) \right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{z^2}{2(1-\epsilon)^2}\right) \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(z) \right],$$

y la función aproximante $ESNk(0, 1, \epsilon, k)$ estándar es:

$$f_k(z; \epsilon) = C_k(\epsilon) \left[\exp\left(-\frac{z^2}{2(1-\epsilon \cdot g_k(z; 0))^2}\right) \right] \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(z). \quad (21)$$

Vemos la Figura 5 correspondiente a la integración numérica (Piessens et al., 1983) de (21) sobre \mathbb{R} , si $k \rightarrow \infty$ la integración se aproxima a 1, para distintos valores de $\epsilon = \pm 0.05, \dots, \pm 0.95$. Podemos decir que el comportamiento no está sujeto al signo de ϵ y si σ es mayor a 1,

la convergencia se hace más rápida a 1, en cambio para $0 < \sigma < 1$ la convergencia es más lenta y por tanto se necesita un k más grande (alrededor de 10 000) para estar lo suficientemente próximos a 1.

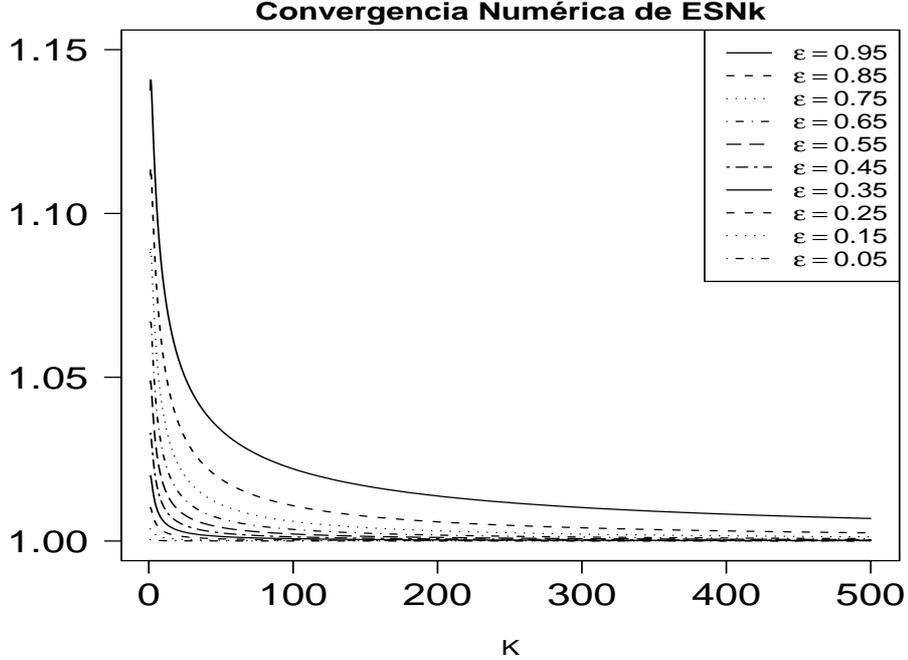


Figura 5: Integración Numérica de la ESNk estándar.

Debemos mostrar que $f_k(z; \epsilon)$ es integrable y que en el límite integra lo mismo que $f(z; \epsilon)$. Asumamos por un momento que podemos intercambiar el límite con la integral, es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(z; \epsilon) dz = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z; \epsilon) dz = \int_{\mathbb{R}} f(z; \epsilon) dz = 1.$$

El teorema de convergencia dominada (Billingsley, 1995, Teorema 16.4) nos justifica el intercambio entre el límite y la integral. Para ello notemos que si tomamos $\epsilon \in (-1, 1)$ y $z \in \mathbb{R}$ tenemos

$$(1 - |\epsilon|)^2 < (1 \pm g_k(z)\epsilon)^2 < (1 + |\epsilon|)^2. \quad (22)$$

En base a la ecuación (22) acotaremos $f_k(z; \epsilon) = C_k(\epsilon) S_k(z)$ por una función $h(z; \epsilon)$. Para ello acotaremos cada uno de los factores, es decir,

$C_k(\epsilon) < C(\epsilon)$ y $S_k(z) < S(z)$. Al mayorar $S_k(z)$ por medio de la ecuación (22) se tiene que $\forall z \in \mathbb{R}$ y $\epsilon \in (-1, 1)$,

$$\exp \left[-\frac{1}{2} \frac{z^2}{(1 - g_k(z)\epsilon)^2} \right] < \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{z^2}{(1 + |\epsilon|)^2} \right] = S(z). \quad (23)$$

Por otra parte, en el caso de la segunda componente

$$C_k(\epsilon) > \frac{1}{\int S_0(z) dz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 - |\epsilon|)} = C(\epsilon), \quad (24)$$

con $S_0(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{z^2}{(1 - |\epsilon|)^2} \right]$ es el minorante de $S_k(z)$. De las ecuaciones (23) y (24) se tiene finalmente que

$$f_k(z; \epsilon) = C_k(\epsilon) S_k(z) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 - |\epsilon|)} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{z^2}{(1 + |\epsilon|)^2} \right] = h(z; \epsilon).$$

También teniendo en cuenta que $f_k(z; \epsilon) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(z; \epsilon)$ converge puntualmente, entonces podemos concluir por el teorema de convergencia dominada que $f_k(z; \epsilon)$ es integrable y que en el límite integra uno.

Si consideramos la función de log-verosimilitud de $f_k(z; \epsilon)$ y $f(z; \epsilon)$, tenemos que para $z > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |l_k(z; \epsilon) - l(z; \epsilon)| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \log \left(C_k(\epsilon) \sqrt{2\pi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^2}{2} \left[\frac{1}{(1 - \epsilon)^2} - \frac{1}{(1 - g_k(z)\epsilon)^2} \right] \right|, \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \log \left(C_k(\epsilon) \sqrt{2\pi} \right) \right| \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z^2}{2(1 - \epsilon)^2} \left| \frac{(1 - g_k(z)\epsilon)^2 - (1 - \epsilon)^2}{(1 - g_k(z)\epsilon)^2} \right|, \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \log \left(C_k(\epsilon) \sqrt{2\pi} \right) \right| \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z^2 [2|\epsilon|(1 - g_k(z)) + \epsilon^2(1 - g_k^2(z))]}{2(1 - \epsilon)^2(1 - |\epsilon|)}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así vemos que $l_k(z; \epsilon)$ converge uniformemente a $l(z; \epsilon)$.

2.2.2. Simulaciones

En esta parte realizamos simulaciones de Monte Carlo para verificar empíricamente la eficiencia de este método, para ello utilizamos un valor dado de $\eta_0 = (\theta_0, \sigma_0, \epsilon_0)^T$, generando $N = 1000$ réplicas de una secuencia z_1, z_2, \dots, z_n con $n = 300$. Para cada replicación r , $1 \leq r \leq n$, el verdadero valor de η_0 es estimado por $\hat{\eta}_{n,r} = (\hat{\theta}_{n,r}, \hat{\sigma}_{n,r}, \hat{\epsilon}_{n,r})^T$. La estimación de máxima verosimilitud fue realizada en el programa **R** de Würtz (2004). Los valores de los parámetros fueron los siguientes; $\theta_0 = 0$, $\sigma_0^2 = 1.0$ y $\epsilon_0 = 0.5$ los resultados son mostrados en la Tabla 1.

Estimación máximo verosimil con ESN y ESNk				
	Parámetros	Media	(Sesgo) ²	Varianza
ESN MV	θ	0.0111	1.2e - 04	0.0380
	σ^2	0.9970	8.8e - 03	0.0088
	ϵ	0.5060	8.9e - 03	0.0089
ESNk $k = 10$	θ	0.2248	5.1e - 02	0.1048
	σ^2	0.9469	2.8e - 03	0.0098
	ϵ	0.6970	3.9e - 02	0.0651
ESNk $k = 10^2$	θ	0.0210	4.4e - 04	0.0237
	σ^2	0.9890	1.2e - 04	0.0069
	ϵ	0.5196	3.8e - 04	0.0081
ESNk $k = 10^3$	θ	0.0107	1.1e - 04	0.0344
	σ^2	0.9958	1.8e - 05	0.0084
	ϵ	0.5071	5.1e - 05	0.0085
ESNk $k = 10^4$	θ	0.0115	1.3e - 04	0.0383
	σ^2	0.9971	8.3e - 06	0.0087
	ϵ	0.5065	4.2e - 05	0.0089

Tabla 1: Aproximación con la ESNk.

Como vemos en forma experimental a medida que k crece las estimaciones se hacen más precisas, de esta forma observamos que la última

componente de la Tabla 1 con $k = 10^4$ se comporta como la estimación al comienzo de la tabla en donde se considera la distribución ESN. La ventaja se encuentra en que con esta ESNk no tenemos los problemas de diferenciabilidad como en el caso ESN.

2.2.3. Aplicación

Ahora aplicaremos la estimación ESNk a los datos utilizados en Tukey (1977) los cuales son modelados en el artículo de Mudholkar y Hutson (2000), ocupando la log-verosimilitud ESNk con $k = 10^4$ obtenemos resultados equivalentes a los de Mudholkar y Hutson (2000) que son: $\hat{\theta} = 27.586$, $\hat{\sigma} = 1551.84$ y $\hat{\epsilon} = -0.673$. La ventaja de esta metodología radica en la simplicidad con la que es posible encontrar los parámetros y empíricamente con la misma eficiencia que muestra el método de Mudholkar y Hutson (2000).

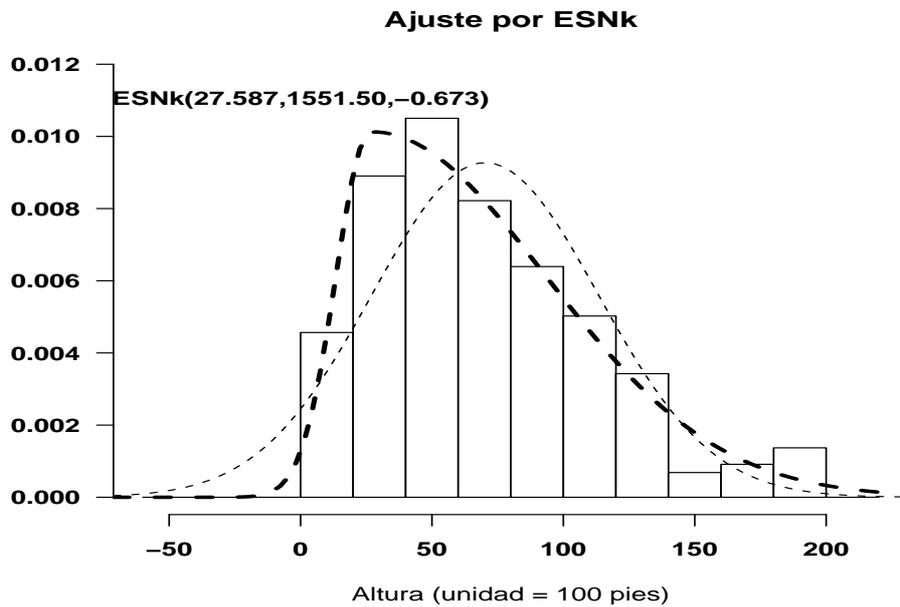


Figura 6: Ajuste Normal y ESNk para los 219 datos de la altura de los volcanes.

Capítulo 3

Estimación: Dominio Temporal

En los modelos de series de tiempo autorregresivos y de medias móviles, es usual en la práctica asumir que las innovaciones son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de forma Gaussiana. Sin embargo, con frecuencia nos encontramos con distribuciones claramente no gaussianas, tales como los procesos de conteo, distribuciones con colas pesadas o no-negativas, las cuales no pueden ser tratadas con el supuesto normal estándar. Estamos interesados en datos correlacionados con distribuciones asimétricas. Los datos tienen una dependencia a corto plazo, en el sentido que sus autocorrelaciones decaen a cero exponencialmente, y sus distribuciones son cercanas a la normal. Proponemos modelar las observaciones con una estructura de un proceso autorregresivo de primer orden AR(1) cuyas innovaciones tienen una distribución Epsilon-Skew-Normal (ESN).

Muchos modelos no gaussianos han sido propuestos en la literatura, en este aspecto podemos nombrar a Grunwald et al. (2000), y modelos con innovaciones asimétricas han sido estudiados por Tiku et al. (1999) y Akkaya y Tiku (2001) quienes consideran las innovaciones con distribuciones gamma y logística generalizada derivando una máxima verosimilitud modificada (MML) para los estimadores de los parámetros.

En este trabajo consideramos una serie de tiempo $\{y_t\}$ con estructura AR(1) causal definida por la ecuación en diferencia

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + Z_t, \quad (25)$$

donde $|\phi| < 1$ y Z_t es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $ESN(\theta, \sigma, \epsilon)$. En la Sección 3.1 desarrollamos los estimadores de momentos en la estimación de los parámetros $\eta = (\phi, \theta, \sigma, \epsilon)$ y derivamos la distribución asintótica.

3.1. Estimadores de Momentos

La única solución estacionaria de (25) es $Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}$, donde la serie converge en el sentido de error cuadrático medio. El teorema de convergencia monótona permite decir que si $E[|Z_t|^k]$ es finita, entonces $E[|Y_t|^k]$ también lo es, para algún $k \geq 1$. Sea $\mu_1^Y = E[Y_t]$, $\mu_3^Y = E[(Y_t - \mu)^3]$, $\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t+k})$, y $\rho_1 = \gamma_1/\gamma_0$. Deducimos de (25), los momentos centrales y la propiedad de causalidad de Y_t que

$$\begin{aligned} \mu_1^Y(1 - \phi) &= \theta - 4\sigma\epsilon/\sqrt{2\pi}, \\ \gamma_0(1 - \phi^2) &= \frac{\sigma^2}{\pi} [(3\pi - 8)\epsilon^2 + \pi], \\ \mu_3^Y(1 - \phi^3) &= \frac{2\sqrt{2}\sigma^3\epsilon}{\pi^{3/2}} [(5\pi - 16)\epsilon^2 - \pi], \\ \rho_1 &= \phi. \end{aligned} \quad (26)$$

Por tanto los parámetros η satisface las ecuaciones de momentos

$$\begin{aligned} \phi &= \rho_1, \\ \epsilon &= g^{-1} \left(\frac{\mu_3^Y(1 - \rho_1^3)}{[\gamma_0(1 - \rho_1^2)]^{3/2}} \right), \\ \sigma^2 &= \frac{\gamma_0(1 - \rho_1^2)\pi}{(3\pi - 8)\epsilon^2 + \pi}, \\ \theta &= \mu_1^Y(1 - \rho_1) + 4\sigma\epsilon/\sqrt{2\pi}, \end{aligned} \quad (27)$$

donde $g : x \mapsto 2\sqrt{2}x[(5\pi - 16)x^2 - \pi][(3\pi - 8)x^2 + \pi]^{-3/2}$ es continua y diferenciable en $(-1, 1)$ con derivada $g' : x \mapsto 2\sqrt{2}\pi[(21\pi - 64)x^2 -$

$\pi][(3\pi - 8)x^2 + \pi]^{-5/2}$. En el intervalo $(-1, 1)$, $g' < 0$ y g es estrictamente monótona lo cual implica que g es un homeomorfismo. El estimador de momentos $\hat{\eta}_n$ es obtenido por (27) donde $(\mu_1^Y, \gamma_0, \rho_1, \mu_3^Y)$ es reemplazado por el estimador de momentos $T_n = (\hat{\mu}_1^Y, \hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1/\hat{\gamma}_0, \hat{\mu}_3^Y)$ y

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_1^Y &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j, \\ \hat{\gamma}_k &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-|k|} (Y_j - \bar{Y}) (Y_{j+|k|} - \bar{Y}), \\ \hat{\mu}_3^Y &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^3.\end{aligned}\tag{28}$$

El proceso lineal Y_t es estrictamente estacionario y ergódico, así también $Y_t Y_{t+k}$ para algún k fijo y Y_t^3 , ver Stout (1974, Teorema 3.5.8) afirma que $T_n \xrightarrow{c.s} (\mu_1^Y, \gamma_0, \rho_1, \mu_3^Y)$. Debido a que la transformación $T_n \mapsto \hat{\eta}_n$ es continua, se deduce que $T_n \xrightarrow{c.s} \eta$. La normalidad asintótica de $(\hat{\mu}_1^Y, \hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \hat{\mu}_3^Y)$ por el *método delta* (Schervish, 1995, Sección 7.1.3). De acuerdo con Brockwell y Davis (1991, Proposición 7.3.4), $\sqrt{n} (\hat{\gamma}_k - \gamma_k^*) \xrightarrow{P} 0$, donde

$$\gamma_k^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-|k|} (Y_j - \mu_1^Y) (Y_{j+|k|} - \mu_1^Y).\tag{29}$$

Además, como

$$\hat{\mu}_3^Y = \mu_3^* - 3(\hat{\mu}_1^Y - \mu_1^Y)\gamma_0^* + 2(\hat{\mu}_1^Y - \mu_1^Y)^3,$$

con

$$\mu_3^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (Y_j - \mu_1^Y)^3,$$

tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\hat{\mu}_3^Y - \mu_3^Y) &= \sqrt{n}[\mu_3^* - \mu_3^Y - 3\gamma_0(\bar{Y} - \mu_1^Y)] \\ &\quad + \sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_1^Y)[3(\gamma_0 - \gamma_0^*) + 2(\bar{Y} - \mu_1^Y)^2],\end{aligned}$$

y dado que $\gamma_0^* \xrightarrow{c.s.} \gamma_0$, $\bar{Y} \xrightarrow{c.s.} \mu_1^Y$ y $\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_1^Y)$ converge en distribución, los últimos términos convergen a 0 en probabilidad. Por lo tanto, $\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_1^Y, \hat{\gamma}_0 - \gamma_0, \hat{\gamma}_1 - \gamma_1, \hat{\mu}_3^Y - \mu_3^Y)$ y $\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_1^Y, \gamma_0^* - \gamma_0, \gamma_1^* - \gamma_1, \mu_3^* - \mu_3^Y - 3\gamma_0(\bar{Y} - \mu_1^Y))$ tiene la misma distribución asintótica la cuál es fácilmente obtenida por medio de la distribución asintótica de $V_n = \sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_1^Y, \gamma_0^* - \gamma_0, \gamma_1^* - \gamma_1, \mu_3^* - \mu_3^Y)$. Ahora, usando la misma técnica que en Brockwell y Davis (1991, Propositiones 7.3.1-7.3.3), podemos mostrar que $V_n \xrightarrow{D} N(0, \Sigma)$ donde $\Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n$ y Σ_n es la matriz de covarianzas de V_n . Cálculos estándar nos llevan a

$$\begin{aligned}\Sigma_{1,1} &= \frac{\kappa_2}{(1-\phi)^2}, \\ \Sigma_{1,2} &= \frac{\kappa_3}{(1-\phi^2)(1-\phi)}, \\ \Sigma_{1,3} &= \phi\Sigma_{1,2}, \\ \Sigma_{1,4} &= \frac{\kappa_4}{(1-\phi^3)(1-\phi)} + \frac{3\kappa_2^2}{(1-\phi^2)(1-\phi)^2}, \\ \Sigma_{2,2} &= \frac{\kappa_4}{(1-\phi^2)^2} + \frac{2\kappa_2^2(1+\phi^2)}{(1-\phi^2)^3}, \\ \Sigma_{2,3} &= \frac{\kappa_4\phi}{(1-\phi^2)^2} + \frac{4\kappa_2^2\phi}{(1-\phi^2)^3}, \\ \Sigma_{2,4} &= \frac{\kappa_5}{(1-\phi^3)(1-\phi^2)} + \frac{3\kappa_2\kappa_3}{(1-\phi^3)(1-\phi^2)^2} \\ &\quad \cdot \left[\frac{2(1-\phi^5)}{1-\phi^3} + \frac{1-\phi^3}{1-\phi} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{3,3} &= \frac{\kappa_4 \phi^2}{(1-\phi^2)^2} + \frac{\kappa_2^2(1+4\phi^2-\phi^4)}{(1-\phi^2)^3}, \\
\Sigma_{3,4} &= \frac{\kappa_5 \phi}{(1-\phi^3)(1-\phi^2)} + \frac{3\kappa_2 \kappa_3 \phi}{(1-\phi^3)(1-\phi^2)^2} \\
&\quad \cdot \left[\frac{3(1-\phi^3) + \phi(1-\phi)}{1-\phi^3} + \frac{1-\phi^3}{1-\phi} \right], \\
\Sigma_{4,4} &= \frac{\kappa_6}{(1-\phi^3)^2} + \frac{3\kappa_2 \kappa_4(5\phi^2 - 3\phi + 5)}{(1-\phi^4)(1-\phi^3)(1-\phi)} + \frac{9\kappa_3^2(1+\phi^3)}{(1-\phi^3)^3} \\
&\quad + \frac{3\kappa_2^3(5\phi^2 + \phi + 5)}{(1-\phi^2)^2(1-\phi^3)(1-\phi)},
\end{aligned} \tag{30}$$

en la Sección 3.1.1 mostramos los cálculos que nos permitieron obtener los componentes de la matriz Σ de varianzas-covarianzas .

3.1.1. Matriz de Varianzas-Covarianzas

En esta sección desarrollamos el cálculo de la matriz de varianzas-covarianzas utilizadas en la sección anterior para establecer la distribución asintótica de los momentos muestrales. Estas proposiciones son aún más generales puesto que las hemos establecidos para cualquier proceso causal, ampliando lo demostrado en Brockwell y Davis (1991, Sección 7.3).

Proposición 3.1. *Sea $\{Y_t\}$ un proceso causal,*

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad \{Z_t\} \sim IID(0, \mu_2),$$

donde $E[Z_t^3] = \mu_3 < \infty$ y $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Entonces si $p \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Cov}(\bar{Y}, \gamma_p^*) = \kappa_3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=\max\{0, k, p\}}^{\infty} \psi_i \psi_{i-p} \psi_{i-k-p}, \tag{31}$$

donde $\gamma_{(\cdot)}^*$ es la función de autocovarianza -ecuación (29)- de $\{Y_t\}$.

Demostración. Primero observe que

$$E \left[\prod_{i=1}^3 Z_{m_i} \right] = \begin{cases} \mu_3, & \text{si } m_1 = m_2 = m_3; \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Ahora

$$\begin{aligned} E \left[\prod_{i=1}^3 Y_{t+h_i} \right] &= \sum_{p_1, p_2, p_3=0}^{\infty} \prod_{i=1}^3 \psi_{p_i} E \left[\prod_{j=1}^3 Z_{t+h_j-p_j} \right], \\ &= \mu_3 \sum_{j=\max\{0, h_2-h_1, h_3-h_2\}}^{\infty} \prod_{i=1}^3 \psi_{j+(h_i-h_3)}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\bar{Y}, \gamma_p^*] &= n^{-2} E \left[\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n Y_t Y_s Y_{s+p} \right] \\ &= n^{-2} \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \left[\kappa_3 \sum_{i=\max\{0, s-t, p\}}^{\infty} \psi_i \psi_{i-p} \psi_{i+t-s-p} \right]. \end{aligned}$$

Haciendo $k = s - t$, intercambiando el orden de los sumandos, se tiene que

$$\text{Cov}[\bar{Y}, \gamma_p^*] = n^{-1} \sum_{|k| < n} (1 - n^{-1}|k|) T_k, \quad (32)$$

donde

$$T_k = \kappa_3 \sum_{i=\max\{0, k, p\}}^{\infty} \psi_i \psi_{i-p} \psi_{i-k-p}.$$

La sumabilidad absoluta de $\{\psi_j\}$ implica que $\{T_k\}$ es absolutamente sumable. podemos por tanto aplicar el teorema de convergencia dominada en (26) para deducir que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Cov}(\bar{Y}, \gamma_p^*) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_k \\
&= \kappa_3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=\max\{0, k, p\}}^{\infty} \psi_i \psi_{i-p} \psi_{i-k-p}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.2. Sea $\{Y_t\}$ un proceso causal,

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad \{Z_t\} \sim IID(0, \mu_2),$$

donde $E[Z_t^4] = \mu_4 < \infty$ y $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Entonces si $p \geq 0$ y $q \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Cov}(\gamma_p^*, \gamma_q^*) = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \gamma_p \gamma_q + \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\gamma_k \gamma_{k-p+q} + \gamma_{k+q} \gamma_{k-p}], \quad (33)$$

donde $\gamma_{(\cdot)}$ y $\gamma_{(\cdot)}^*$ son las funciones de autocovarianzas de $\{Y_t\}$ definidas en las ecuaciones (28) y (29).

Demostración. La demostración se sigue de Brockwell y Davis (1991, Proposición 7.3.1). □

Proposición 3.3. Sea $\{Y_t\}$ un proceso causal,

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad \{Z_t\} \sim IID(0, \mu_2),$$

donde $E[Z_t^5] = \mu_5 < \infty$ y $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Entonces si $p \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Cov}(\mu_3^*, \gamma_p^*) &= \frac{\kappa_5}{\kappa_2} \gamma_p \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^3 + 3 \frac{\kappa_3}{\kappa_2} \gamma_0 \gamma_p \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \\
&\quad + 3 \kappa_3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\gamma_k \sum_{j=\max\{0, -k-p\}}^{\infty} \psi_j^2 \psi_{j+k+p} \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{k+p} \sum_{j=\max\{0, -k\}}^{\infty} \psi_j^2 \psi_{j+k} \right], \quad (34)
\end{aligned}$$

donde $\gamma_{(\cdot)}$ y $\gamma_{(\cdot)}^*$ son las funciones de autocovarianzas de $\{Y_t\}$.

Demostración. La demostración es la extensión de la mostrada en Brockwell y Davis (1991, Proposición 7.3.1). \square

Proposición 3.4. Sea $\{Y_t\}$ un proceso causal,

$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad \{Z_t\} \sim IID(0, \mu_2),$$

donde $E[Z_t^6] = \mu_6 < \infty$ y $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Var}(\mu_3^*) &= \kappa_6 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^6 + 2 \sum_{\substack{i=0 \\ k=1}}^{\infty} \psi_i^3 \psi_{i+k}^3 \right) \\ &+ 6\kappa_4 \gamma_0 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^4 + \sum_{\substack{i=0 \\ k=1}}^{\infty} (\psi_i^3 \psi_{i+k} + \psi_i \psi_{i+k}^3) \right) \\ &+ 9\kappa_4 \gamma_0 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^4 + 2 \sum_{\substack{i=0 \\ k=1}}^{\infty} \rho_k \psi_i^2 \psi_{i+k}^2 \right) \\ &+ 9\kappa_3^2 \left(\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^3 \right)^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=0 \\ k=1}}^{\infty} \psi_i^2 \psi_{i+k} \psi_j \psi_{j+k}^2 \right) \\ &+ 3\gamma_0^3 \left(5 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2\rho_k^3 + 3\rho_k) \right). \end{aligned} \tag{35}$$

donde $\rho_{(\cdot)}$ es la función de autocorrelación de $\{Y_t\}$.

Demostración. Primero, observe que

$$E \left[\prod_{i=1}^6 Z_{m_i} \right] = \begin{cases} \mu_6, & \text{si } m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6; \\ \mu_4 \mu_2, & \text{si } m_1 = m_2 = m_3 = m_4 \neq m_5 = m_6; \\ \mu_3^2, & \text{si } m_1 = m_2 = m_3 \neq m_4 = m_5 = m_6; \\ \mu_2^3, & \text{si } m_1 = m_2 \neq m_3 = m_4 \neq m_5 = m_6; \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Ahora

$$E \left[\prod_{i=1}^6 Y_{t+h_i} \right] = \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6=0}^{\infty} \prod_{i=1}^6 \psi_{p_i} E \left[\prod_{j=1}^6 W_{t+h_j-p_j} \right],$$

$$\begin{aligned} E \left[\prod_{i=1}^6 X_{t+h_i} \right] &= \sum_{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6=0}^{\infty} \prod_{i=1}^6 \psi_{p_i} E \left[\prod_{j=1}^6 W_{t+h_j-p_j} \right], \\ &= \kappa_6 \sum_{k=\max\{0, h_1-h_2, h_3-h_4, h_5-h_6, h_1-h_3, h_1-h_5\}}^{\infty} \prod_{i=1}^6 \psi_{k+(h_i-h_1)} \\ &+ \kappa_4 \gamma_0 \left(\rho(h_5-h_6) \sum_{k=\max\{0, h_1-h_2, h_1-h_3, h_1-h_4\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_2-h_1)} \psi_{k+(h_3-h_1)} \psi_{k+(h_4-h_1)} \right. \\ &+ \rho(h_4-h_6) \sum_{k=\max\{0, h_1-h_2, h_1-h_3, h_1-h_5\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_2-h_1)} \psi_{k+(h_3-h_1)} \psi_{k+(h_5-h_1)} \\ &+ \rho(h_4-h_5) \sum_{k=\max\{0, h_1-h_2, h_1-h_3, h_1-h_6\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_2-h_1)} \psi_{k+(h_3-h_1)} \psi_{k+(h_6-h_1)} \\ &+ \rho(h_3-h_6) \sum_{k=\max\{0, h_1-h_2, h_1-h_4, h_1-h_5\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_2-h_1)} \psi_{k+(h_4-h_1)} \psi_{k+(h_5-h_1)} \\ &+ \rho(h_3-h_5) \sum_{k=\max\{0, h_1-h_2, h_1-h_4, h_1-h_6\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_2-h_1)} \psi_{k+(h_4-h_1)} \psi_{k+(h_6-h_1)} \\ &+ \rho(h_3-h_4) \sum_{k=\max\{0, h_1-h_2, h_1-h_5, h_1-h_6\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_2-h_1)} \psi_{k+(h_5-h_1)} \psi_{k+(h_6-h_1)} \\ &+ \rho(h_2-h_6) \sum_{k=\max\{0, h_1-h_3, h_1-h_4, h_1-h_5\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_3-h_1)} \psi_{k+(h_4-h_1)} \psi_{k+(h_5-h_1)} \\ &+ \left. \rho(h_2-h_5) \sum_{k=\max\{0, h_1-h_3, h_1-h_4, h_1-h_6\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_3-h_1)} \psi_{k+(h_4-h_1)} \psi_{k+(h_6-h_1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho(h_2-h_4) \sum_{k=\max\{0, h_1-h_3, h_1-h_5, h_1-h_6\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_3-h_1)} \psi_{k+(h_5-h_1)} \psi_{k+(h_6-h_1)} \\
& + \rho(h_2-h_3) \sum_{k=\max\{0, h_1-h_4, h_1-h_5, h_1-h_6\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_4-h_1)} \psi_{k+(h_5-h_1)} \psi_{k+(h_6-h_1)} \\
& + \rho(h_1-h_6) \sum_{k=\max\{0, h_2-h_3, h_1-h_4, h_1-h_5\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_3-h_2)} \psi_{k+(h_4-h_1)} \psi_{k+(h_5-h_1)} \\
& + \rho(h_1-h_5) \sum_{k=\max\{0, h_2-h_3, h_1-h_4, h_1-h_6\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_3-h_2)} \psi_{k+(h_4-h_1)} \psi_{k+(h_6-h_1)} \\
& + \rho(h_1-h_4) \sum_{k=\max\{0, h_2-h_3, h_1-h_5, h_1-h_6\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_3-h_2)} \psi_{k+(h_5-h_1)} \psi_{k+(h_6-h_1)} \\
& + \rho(h_1-h_3) \sum_{k=\max\{0, h_2-h_4, h_1-h_5, h_1-h_6\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_4-h_2)} \psi_{k+(h_5-h_1)} \psi_{k+(h_6-h_1)} \\
& + \rho(h_1-h_2) \sum_{k=\max\{0, h_3-h_4, h_1-h_5, h_1-h_6\}}^{\infty} \psi_k \psi_{k+(h_4-h_3)} \psi_{k+(h_5-h_1)} \psi_{k+(h_6-h_1)} \Big) \\
& + \kappa_3^2 \left(\sum_{\substack{k_1=\max\{0, h_1-h_2, h_1-h_3\} \\ k_2=\max\{0, h_4-h_5, h_4-h_6\}}} \psi_{k_1} \psi_{k_1+(h_2-h_1)} \psi_{k_1+(h_3-h_1)} \psi_{k_2} \psi_{k_2+(h_5-h_4)} \psi_{k_2+(h_6-h_4)} \right. \\
& + \sum_{\substack{k_1=\max\{0, h_1-h_2, h_1-h_4\} \\ k_2=\max\{0, h_3-h_5, h_3-h_6\}}}^{\infty} \psi_{k_1} \psi_{k_1+(h_2-h_1)} \psi_{k_1+(h_4-h_1)} \psi_{k_2} \psi_{k_2+(h_5-h_3)} \psi_{k_2+(h_6-h_3)} \\
& + \sum_{\substack{k_1=\max\{0, h_1-h_2, h_1-h_5\} \\ k_2=\max\{0, h_3-h_4, h_3-h_6\}}}^{\infty} \psi_{k_1} \psi_{k_1+(h_2-h_1)} \psi_{k_1+(h_5-h_1)} \psi_{k_2} \psi_{k_2+(h_4-h_3)} \psi_{k_2+(h_6-h_3)} \\
& + \sum_{\substack{k_1=\max\{0, h_1-h_2, h_1-h_6\} \\ k_2=\max\{0, h_3-h_4, h_3-h_5\}}}^{\infty} \psi_{k_1} \psi_{k_1+(h_2-h_1)} \psi_{k_1+(h_6-h_1)} \psi_{k_2} \psi_{k_2+(h_4-h_3)} \psi_{k_2+(h_5-h_3)} \\
& \left. + \sum_{\substack{k_1=\max\{0, h_1-h_3, h_1-h_4\} \\ k_2=\max\{0, h_2-h_5, h_2-h_6\}}}^{\infty} \psi_{k_1} \psi_{k_1+(h_3-h_1)} \psi_{k_1+(h_4-h_1)} \psi_{k_2} \psi_{k_2+(h_5-h_2)} \psi_{k_2+(h_6-h_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{k_1=\text{máx}\{0,h_1-h_3,h_1-h_5\} \\ k_2=\text{máx}\{0,h_2-h_4,h_2-h_6\}}}^{\infty} \psi_{k_1} \psi_{k_1+(h_3-h_1)} \psi_{k_1+(h_5-h_1)} \psi_{k_2} \psi_{k_2+(h_4-h_2)} \psi_{k_2+(h_6-h_2)} \\
& + \sum_{\substack{k_1=\text{máx}\{0,h_1-h_3,h_1-h_6\} \\ k_2=\text{máx}\{0,h_2-h_4,h_2-h_5\}}}^{\infty} \psi_{k_1} \psi_{k_1+(h_3-h_1)} \psi_{k_1+(h_6-h_1)} \psi_{k_2} \psi_{k_2+(h_4-h_2)} \psi_{k_2+(h_5-h_2)} \\
& + \sum_{\substack{k_1=\text{máx}\{0,h_1-h_4,h_1-h_5\} \\ k_2=\text{máx}\{0,h_2-h_3,h_2-h_6\}}}^{\infty} \psi_{k_1} \psi_{k_1+(h_4-h_1)} \psi_{k_1+(h_5-h_1)} \psi_{k_2} \psi_{k_2+(h_3-h_2)} \psi_{k_2+(h_6-h_2)} \\
& + \sum_{\substack{k_1=\text{máx}\{0,h_1-h_4,h_1-h_6\} \\ k_2=\text{máx}\{0,h_2-h_3,h_2-h_5\}}}^{\infty} \psi_{k_1} \psi_{k_1+(h_4-h_1)} \psi_{k_1+(h_6-h_1)} \psi_{k_2} \psi_{k_2+(h_3-h_2)} \psi_{k_2+(h_5-h_2)} \\
& + \sum_{\substack{k_1=\text{máx}\{0,h_1-h_5,h_1-h_6\} \\ k_2=\text{máx}\{0,h_2-h_3,h_2-h_4\}}}^{\infty} \psi_{k_1} \psi_{k_1+(h_5-h_1)} \psi_{k_1+(h_6-h_1)} \psi_{k_2} \psi_{k_2+(h_3-h_2)} \psi_{k_2+(h_4-h_2)} \Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma_0^3 \left(\rho(h_1-h_2) \rho(h_3-h_4) \rho(h_5-h_6) + \rho(h_1-h_2) \rho(h_3-h_5) \rho(h_4-h_6) \right. \\
& + \rho(h_1-h_2) \rho(h_3-h_6) \rho(h_4-h_5) + \rho(h_1-h_3) \rho(h_2-h_4) \rho(h_5-h_6) \\
& + \rho(h_1-h_3) \rho(h_2-h_5) \rho(h_4-h_6) + \rho(h_1-h_3) \rho(h_2-h_6) \rho(h_4-h_5) \\
& + \rho(h_1-h_4) \rho(h_2-h_3) \rho(h_5-h_6) + \rho(h_1-h_4) \rho(h_2-h_5) \rho(h_3-h_6) \\
& + \rho(h_1-h_4) \rho(h_2-h_6) \rho(h_3-h_5) + \rho(h_1-h_5) \rho(h_2-h_3) \rho(h_4-h_6) \\
& + \rho(h_1-h_5) \rho(h_2-h_4) \rho(h_3-h_6) + \rho(h_1-h_5) \rho(h_2-h_6) \rho(h_3-h_4) \\
& + \rho(h_1-h_6) \rho(h_2-h_3) \rho(h_4-h_5) + \rho(h_1-h_6) \rho(h_2-h_4) \rho(h_3-h_5) \\
& \left. + \rho(h_1-h_6) \rho(h_2-h_5) \rho(h_3-h_4) \right).
\end{aligned}$$

Se sigue que para calcular la siguiente expresión

$$E[\hat{\mu}_3^2] = n^{-2} E \left[\sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n X_t^3 X_s^3 \right],$$

debemos hacer $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ y $h_4 = h_5 = h_6 = s - t$, de esta forma se tiene:

$$\begin{aligned}
E[X_t^3 X_s^3] &= \kappa_6 \sum_{i=\max\{0,t-s\}} \psi_i^3 \psi_{i+s-t}^3 + 3\kappa_4 \gamma_0 \left[\sum_{i=\max\{0,t-s\}} (\psi_i^3 \psi_{i+s-t} \right. \\
&\quad \left. + \psi_i \psi_{i+s-t}^3) + 3\rho_{s-t} \sum_{i=\max\{0,t-s\}} \psi_i^2 \psi_{i+s-t}^2 \right] + E[X_t^3] \\
&\quad + 9\kappa_3 \sum_{\substack{i=\max\{0,t-s\} \\ j=\max\{0,t-s\}}} \psi_i^2 \psi_{i+s-t} \psi_j \psi_{j+s-t}^2 + 3\gamma_0^3 (3\rho_{s-t} + 2\rho_{s-t}^3)
\end{aligned}$$

Haciendo $k = s - t$, restando $E[X_t^3]$ e intercambiando el orden de los sumandos, se tiene que

$$\text{Var}[\hat{\mu}_3] = n^{-1} \sum_{|k| < n} (1 - n^{-1}|k|) T_k, \quad (36)$$

donde

$$\begin{aligned}
T_k &= \kappa_6 \sum_{i=\max\{0,-k\}} \psi_i^3 \psi_{i+k}^3 + 3\kappa_4 \gamma_0 \left[\sum_{i=\max\{0,-k\}} (\psi_i^3 \psi_{i+k} \right. \\
&\quad \left. + \psi_i \psi_{i+k}^3) + 3\rho_k \sum_{i=\max\{0,-k\}} \psi_i^2 \psi_{i+k}^2 \right] \\
&\quad + 9\kappa_3 \sum_{\substack{i=\max\{0,-k\} \\ j=\max\{0,-k\}}} \psi_i^2 \psi_{i+k} \psi_j \psi_{j+k}^2 + 3\gamma_0^3 (3\rho_k + 2\rho_k^3)
\end{aligned}$$

La sumabilidad absoluta de $\{\psi_j\}$ implica que $\{T_k\}$ es absolutamente sumable. podemos por tanto aplicar el teorema de convergencia dominada en (36) para

deducir que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Var}(\hat{\mu}_3^*) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_k, \\
&= \kappa_6 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^6 + 2 \sum_{\substack{i=0 \\ k=1}}^{\infty} \psi_i^3 \psi_{i+k}^3 \right) + 6\kappa_4 \gamma_0 \left[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^4 + \sum_{\substack{i=0 \\ k=1}}^{\infty} (\psi_i^3 \psi_{i+k} + \psi_i \psi_{i+k}^3) \right] \\
&+ 9\kappa_4 \gamma_0 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^4 + 2 \sum_{\substack{i=0 \\ k=1}}^{\infty} \rho_k \psi_i^2 \psi_{i+k}^2 \right) + 9\kappa_3^2 \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^3 \right)^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=0 \\ k=1}}^{\infty} \psi_i^2 \psi_{i+k} \psi_j \psi_{j+k}^2 \right] \\
&+ 3\gamma_0^3 \left[5 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (2\rho_k^3 + 3\rho_k) \right].
\end{aligned}$$

□

3.1.2. Estimación con el método de momentos

Sean y_1, y_2, \dots, y_n las observaciones de un proceso autorregresivo de orden uno, en donde la innovación tiene distribución $ESN(\theta, \sigma, \epsilon)$, entonces las relaciones mostradas en la ecuación (26) nos dan un mecanismo para la estimación por momentos. Previamente vamos a centrar los datos con el objetivo de evitar expresiones muy complejas.

Por tanto tenemos:

$$(1 - \phi B)X_t = W_t \text{ con } W_t \stackrel{iid}{\sim} ESN\left(\frac{4\sigma\epsilon}{\sqrt{2\pi}}, \sigma, \epsilon\right).$$

donde $X_t = Y_t - \mu_1^Y$ con $\mu_1^Y = \mathbb{E}[Y_t]$.

Para este nuevo modelo ocupamos las ecuaciones de Yule-Walker:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \phi^{|k|} \gamma_0 \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \\
\rho_1 &= \phi, \\
\gamma_0 &= \frac{\sigma^2}{\pi(1 - \phi^2)} [(3\pi - 8)\epsilon^2 + \pi].
\end{aligned}$$

Además para estimar el parámetro de asimetría agregamos la siguiente ecuación que relaciona los coeficientes de asimetría de las observaciones con la innovación.

$$\sqrt{\beta_1(X_t)} = \frac{\mathbb{E}[X_t^3]}{\mathbb{E}[X_t^2]^{3/2}} = \frac{(1 - \phi^2)^{3/2}}{(1 - \phi^3)} \sqrt{\beta_1(W_t)},$$

el resultado lo podemos verificar por lo obtenido Davies et al. (1980).

De las ecuaciones anteriores sugerimos el siguiente procedimiento para estimar los parámetros del modelo (25).

1. Sustraer la media a los datos, es decir $x_i = y_i - \bar{y}$
2. Calcular la primera autocorrelación, de esta forma

$$\hat{\phi}_{mm} = r_1.$$

3. Usar el estimador $\hat{\phi}$ obtenido en el paso anterior en el coeficiente de asimetría de los datos y así obtener un estimador para ϵ .

$$\hat{\epsilon}_{mm} = g^{-1} \left[\frac{(1 - \hat{\phi}_{mm}^3)}{(1 - \hat{\phi}_{mm}^2)^{3/2}} \sqrt{b_1(x)} \right],$$

donde $g^{-1}(\cdot)$ está definida en la ecuación (27), $b_1(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{nS^3}$ es el coeficiente de simetría muestral con $S^3 = (S^2)^{3/2} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \right)^{3/2}$.

4. Calcular la varianza de los datos S^2 y utilizar el resultado anterior para obtener la estimación del parámetro de escala σ^2 .

$$\hat{\sigma}_{mm}^2 = \frac{S^2 \pi (1 - \hat{\phi}_{mm}^2)}{[(3\pi - 8)\hat{\epsilon}_{mm}^2 + \pi]}.$$

5. Una vez obtenida la estimación de (ϕ, ϵ, σ) nos queda por determinar θ . Para esto usamos el promedio de los datos y las estimaciones obtenidas anteriormente.

$$\hat{\theta}_{mm} = (1 - \hat{\phi}_{mm})\bar{y} + \frac{4\hat{\sigma}_{mm}\hat{\epsilon}_{mm}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Esta metodología principalmente nos permite dar los valores iniciales para las estimaciones de máxima verosimilitud (Sección 3.2), ya que como veremos en las simulaciones las estimaciones con este método no da buenos estimadores para ϵ y en consecuencia para θ .

3.1.3. Simulaciones

Mostramos en las tablas siguientes parte de los resultados que hemos obtenido al realizar experimentos Monte Carlo. En particular estas han consistido en considerar un valor dado de $\eta_0 = (\phi_0, \theta_0, \epsilon_0, \sigma_0^2)^T$, hemos generado $N = 1\,000$ replicas de una secuencia y_1, y_2, \dots, y_n del proceso autorregresivo dado en la ecuación (25). Para cada replicación r , $1 \leq r \leq N$, el valor verdadero η_0 es estimado por $\hat{\eta}_{n,r} = (\hat{\phi}_{n,r}, \hat{\theta}_{n,r}, \hat{\epsilon}_{n,r}, \hat{\sigma}_{n,r}^2)^T$. La estimación fue programada en el lenguaje **R** de Würtz (2004) siguiendo los pasos descritos en la Subsección 3.1.2. Debemos notar que la estimación empírica muestra que si $|\sqrt{b_1(x)}| > 0.995$ entonces los valores del coeficiente de asimetría están fuera del rango establecido para este tipo de modelo y así no vamos a tener estimadores razonables para $\hat{\epsilon}_{mm}$, en donde el subíndice mm denota el método de momentos. Si $n = 300$ y $\epsilon = 0.9$ como en la Tabla 2 entonces en un 60% de los casos habrán estimadores no razonables para ϵ , con respecto a la Tabla 3 un 28% con $\phi = 0.8$, 9% con $\phi = 0.5$ y un 3% con $\phi = 0.2$.

		Estimadores de Momentos		
ϕ	Estimadores	Media	(Sesgo) ²	Varianza
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = 0.9$ con $N = 1000, n = 300$				
$\phi = 0.2$	$\hat{\theta}_{mm}$	9.8830	1.4e - 02	0.3712
	$\hat{\phi}_{mm}$	0.1848	2.3e - 04	0.0030
	$\hat{\epsilon}_{mm}$	0.7052	3.8e - 02	0.0203
	$\hat{\sigma}_{mm}^2$	1.0390	1.5e - 03	0.0031
$\phi = 0.5$	$\hat{\theta}_{mm}$	10.0125	1.6e - 04	0.6479
	$\hat{\phi}_{mm}$	0.4775	5.1e - 04	0.0022
	$\hat{\epsilon}_{mm}$	0.6369	6.9e - 02	0.0283
	$\hat{\sigma}_{mm}^2$	1.0610	3.7e - 03	0.0036
$\phi = 0.8$	$\hat{\theta}_{mm}$	10.3005	9.0e - 02	2.3022
	$\hat{\phi}_{mm}$	0.7767	5.4e - 04	0.0013
	$\hat{\epsilon}_{mm}$	0.4283	2.2e - 01	0.0680
	$\hat{\sigma}_{mm}^2$	1.1100	1.2e - 02	0.0053

Tabla 2: Estimación de momentos con $\epsilon = 0.9$ y $\phi > 0$.

ϕ	Estimadores	Media	(Sesgo) ²	Varianza
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = 0.5$ con $N = 1000, n = 300$				
$\phi = 0.2$	$\hat{\theta}_{mm}$	10.0372	1.4e - 03	0.4311
	$\hat{\phi}_{mm}$	0.1947	2.8e - 05	0.0031
	$\hat{\sigma}_{mm}^2$	0.9928	5.2e - 05	0.0022
	$\hat{\epsilon}_{mm}$	0.4906	8.9e - 05	0.0213
$\phi = 0.5$	$\hat{\theta}_{mm}$	10.1652	2.7e - 02	0.7660
	$\hat{\phi}_{mm}$	0.4884	1.3e - 04	0.0023
	$\hat{\sigma}_{mm}^2$	0.9967	1.1e - 05	0.0025
	$\hat{\epsilon}_{mm}$	0.4765	5.5e - 04	0.0307
$\phi = 0.8$	$\hat{\theta}_{mm}$	10.6728	4.5e - 01	2.9120
	$\hat{\phi}_{mm}$	0.7791	4.4e - 04	0.0013
	$\hat{\sigma}_{mm}^2$	1.0170	2.9e - 04	0.0038
	$\hat{\epsilon}_{mm}$	0.3236	3.1e - 02	0.0845
$\epsilon = 0.2$				
$\phi = 0.2$	$\hat{\theta}_{mm}$	10.0359	1.3e - 03	0.4795
	$\hat{\phi}_{mm}$	0.7824	1.0e - 05	0.0031
	$\hat{\sigma}_{mm}^2$	0.9870	2.8e - 05	0.0018
	$\hat{\epsilon}_{mm}$	0.1510	2.8e - 07	0.0117
$\phi = 0.5$	$\hat{\theta}_{mm}$	10.1826	3.3e - 02	0.9393
	$\hat{\phi}_{mm}$	0.4909	8.3e - 05	0.0024
	$\hat{\sigma}_{mm}^2$	0.9904	9.2e - 05	0.0019
	$\hat{\epsilon}_{mm}$	0.2076	5.8e - 05	0.0244
$\phi = 0.8$	$\hat{\theta}_{mm}$	10.7018	4.9e - 01	3.0870
	$\hat{\phi}_{mm}$	0.7837	1.5e - 03	0.0013
	$\hat{\sigma}_{mm}^2$	0.9862	1.9e - 03	0.0029
	$\hat{\epsilon}_{mm}$	0.1523	2.3e - 02	0.0959

Tabla 3: Estimación de momentos con $\epsilon = 0.5, 0.2$ y $\phi > 0$.

3.2. Máxima Verosimilitud Condicional

En esta sección, desarrollamos los estimadores máximo verosímiles condicionales (EMV) de los parámetros de un proceso AR(1) con innovaciones ESN(θ, σ, ϵ) dadas por (3) con la estimación de los cuatro parámetros. Denotamos por $\lambda = (\phi, \theta, \epsilon)^T$ y sea $\eta = (\lambda^T, \sigma^2)^T$, asumiendo que $\eta_0 = (\lambda_0^T, \sigma_0^2)^T$ ellos son los valores verdaderos de η estos están en el interior del espacio paramétrico $\Lambda \subset (-1, 1) \times \mathbb{R} \times (-1, 1) \times \mathbb{R}^+$. De acuerdo a la ecuación (25), el logaritmo de la verosimilitud condicional de (y_1, y_2, \dots, y_n) condicionando sobre y_0 es

$$\ell_n(\eta) = \sum_{t=1}^n \ell(y_t, y_{t-1}; \eta), \quad (37)$$

donde $\ell(y_t, y_{t-1}; \eta) = \ln f(y_t - \phi y_{t-1})$ y es f la densidad definida en (3), aquí,

$$\ell_t = \ell(y_t, y_{t-1}; \eta) = -\frac{1}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{u_t^2}{2\sigma^2} v_t, \quad (38)$$

donde

$$u_t = y_t - \phi y_{t-1} - \theta, \\ v_t = \frac{\mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(u_t)}{(1 + \epsilon)^2} + \frac{\mathbb{1}_{[0, +\infty)}(u_t)}{(1 - \epsilon)^2},$$

y para cualquier conjunto S , $\mathbb{1}_S$ denota la función indicadora de S .

En el desarrollo de la consistencia de los EMV y el teorema central del límite (TCL), nos basaremos fundamentalmente en las condiciones establecidas en el artículo de Basawa et al. (1976) el cuál establece las condiciones para los EMV para variables aleatorias dependientes y no idénticamente distribuidas.

Respecto del primer supuesto establecido en el artículo Basawa et al. (1976, A1), se tiene que $\ell(y_t, y_{t-1}; \eta)$ es continuo derivable para todo η y el gradiente de $\ell(y_t, y_{t-1}; \eta)$ es diferenciable para todo η en casi todo punto

y_t . Además considerando la función de densidad $f(y_t, y_{t-1}; \eta) = f(y_t - \phi y_{t-1}) = f(z_t)$, ver ecuación (3), tenemos que el conjunto de positividad en \mathbb{R} no es afectado por los parámetros, es decir

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) &> 0, \\ \lim_{z \rightarrow \theta} f(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} > 0, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) &> 0,\end{aligned}$$

luego el conjunto de positividad no depende de θ y ϕ .

El resultado anterior nos permite derivar la ecuación (38) respecto a η , obteniéndose las siguientes ecuaciones de verosimilitud $\ell'_n(\eta) = 0$, cuyas componentes son:

$$\begin{aligned}\frac{d\ell_t}{d\lambda} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{dv_t}{d\lambda} u_t^2 + \frac{du_t^2}{d\lambda} v_t \right), \\ \frac{d\ell_t}{d\sigma^2} &= -\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{u_t^2}{2\sigma^4} v_t.\end{aligned}\tag{39}$$

La solución de la ecuación de verosimilitud $\ell'_n(\eta) = 0$ será denotado por $\hat{\eta}_n$ y el parámetro verdadero por η_0 . Mediante una segunda diferenciación $\ell''_n(\eta)$ obtenemos la matriz de 4×4 de las segundas derivadas de $\ell'_n(\eta)$ con respecto a η . Las componentes de esta matriz son mostrados a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\ell_t}{d\lambda d\lambda'} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{d^2v_t}{d\lambda d\lambda'} u_t^2 + \frac{dv_t}{d\lambda} \frac{du_t^2}{d\lambda'} + \frac{du_t^2}{d\lambda} \frac{dv_t}{d\lambda'} + \frac{d^2u_t^2}{d\lambda d\lambda'} v_t \right), \\ \frac{d^2\ell_t}{d\sigma^2 d\sigma^2} &= \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{u_t^2}{\sigma^6} v_t, \\ \frac{d^2\ell_t}{d\sigma^2 d\lambda'} &= \frac{1}{2\sigma^4} \left(\frac{du_t^2}{d\lambda'} v_t + \frac{dv_t}{d\lambda'} u_t^2 \right).\end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones obtenidas al derivar la función de log-verosimilitud nos permiten establecer la expansión de Taylor en la búsqueda del estimador máximo verosímil,

$$\ell'_n(\eta) = \ell'_n(\eta_0) + \ell''_n(\eta_0, \eta)(\eta - \eta_0), \quad (40)$$

donde

$$\ell''_n(\eta_0, \eta) = \begin{pmatrix} \ell_{\lambda\lambda} & \ell_{\lambda\sigma^2} \\ \ell_{\sigma^2\lambda} & \ell_{\sigma^2\sigma^2} \end{pmatrix}$$

es una matriz de 4×4 de las segundas derivadas de $\ell'_n(\eta)$ con respecto a η , con las filas evaluadas en los posibles puntos distintos del segmento entre η_0 y η , tal como lo expresa Basawa et al. (1976, página 260) en donde además se prueba que las secuencias resultantes de la diferenciación son martingalas en diferencia.

3.2.1. Consistencia y normalidad asintótica de $\hat{\eta}_n$

Un aspecto importante a estudiar en la estimación máximo verosímil es la consistencia de los parámetros. La idea básica es que la función $\ell_n(\eta)$ definida en (37), converja en probabilidad a $\ell_0(\eta)$ para todo η y que $L_0(\eta)$ sea maximizada con el parámetro verdadero η_0 , entonces el límite del máximo $\hat{\eta}_n$ debe ser el máximo η_0 del límite, bajo condiciones que me permitan intercambiar la maximización y las operaciones de límite. Por tanto la ley de los grandes números nos sugiere que $\frac{1}{n}\ell_n(\eta) \xrightarrow{P} \ell_0(\eta) = E[\ell(y_t, y_{t-1}; \eta)]$. Un aspecto importante es que para que esta convergencia en probabilidad debe ser uniforme y que el espacio paramétrico debe ser compacto. En nuestro caso el espacio paramétrico no es compacto debido a que los parámetros σ y ϵ pueden encontrarse en los bordes haciendo que la verosimilitud no sea acotada como vemos a continuación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n E[\ell_t(\eta)] = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} E[u_t^2 v_t],$$

donde $\frac{1}{2\sigma^2} \rightarrow \infty$ cuando $\sigma \rightarrow 0$ y además $0 < v_t = \frac{\mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(u_t)}{(1+\epsilon)^2} + \frac{\mathbb{1}_{[0, +\infty)}(u_t)}{(1-\epsilon)^2} \rightarrow \infty$, cuando $|\epsilon| \rightarrow 1$.

Sin embargo, el supuesto de compacidad es muy restrictivo, porque ello necesita siempre que se conozcan los bordes donde se mueve el verdadero valor del parámetro. En la práctica es útil ser capaces de saltar esta restricción, de esta forma las condiciones de consistencia sin compacidad son importantes de estudiar. Una forma está relacionada con la concavidad de la función de verosimilitud, evitando que la función de verosimilitud se vuelva hacia arriba cuando el estimador se encuentre alejado de η_0 , la otra es tomar un subconjunto del espacio paramétrico que sea conexo y cerrado dentro del espacio paramétrico. Dentro de los artículos que estudian consistencia prescindiendo de la compacidad del espacio paramétrico se encuentra el trabajo de Basawa et al. (1976), el cual estudia el caso uniparamétrico en donde el espacio paramétrico es un intervalo abierto y para el caso de dos o más parámetros podemos ver el artículo de Crowder (1976). Este trabajo deriva un consistencia débil basado en que la matriz de información de Fisher es definida positiva para el caso de datos dependientes y con el supuesto que el espacio paramétrico es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^k .

En nuestro caso vamos a considerar un subconjunto del espacio paramétrico que sea compacto, llamémoslo $\hat{\Lambda}$, debido a que de esta manera podemos asegurar que existe la log-verosimilitud condicional del proceso AR(1) como mostramos a continuación:

$$\begin{aligned} |\ell_t| &\leq \frac{1}{2} |\ln 2\pi\sigma^2| + \frac{u_t^2}{2\sigma^2} |v_t|, \\ \mathbb{E} |\ell_t| &< \frac{1}{2} |\ln 2\pi\sigma^2| + \frac{\mathbb{E}(u_t^2)}{2\sigma^2} \left(\frac{1}{(1+\epsilon)^2} + \frac{1}{(1-\epsilon)^2} \right), \end{aligned} \quad (41)$$

donde $\mathbb{E}(u_t^2) < \infty$ y cuyo valor puede obtenerse de la ecuación (5),

entonces se sigue que $\mathbb{E} |\ell_t| < K$, con

$$K = \sup_{\eta \in \hat{\Lambda}} \left\{ \frac{1}{2} |\ln 2\pi\sigma^2| + \frac{1}{\pi} [(3\pi - 8)\epsilon^2 + \pi] \frac{(1 + \epsilon^2)}{(1 - \epsilon^2)^2} \right\}.$$

Por la compacidad de $\hat{\Lambda}$ tenemos que $K < \infty$, así que para todo $\eta \in \hat{\Lambda}$, tenemos $\mathbb{E}[|\ln \ell_t|] < K < \infty$.

Lema 3.1 (Score AR(1)-ESN). *Si y_t es un proceso definido en (25) de cuatro parámetros y con densidad de la innovación definida en la ecuación (3), entonces el score $\ell'_t = \nabla_\eta \ell(y_t, y_{t-1}; \eta)$ de dimensión 4×1 , tiene las siguientes componentes*

$$\begin{aligned} \ell'_{t,\phi} &= \frac{d}{d\phi} \ell(y_t, y_{t-1}; \eta) = \frac{1}{\sigma^2} y_{t-1} u_t v_t, \\ \ell'_{t,\theta} &= \frac{d}{d\theta} \ell(y_t, y_{t-1}; \eta) = \frac{1}{\sigma^2} u_t v_t, \\ \ell'_{t,\epsilon} &= \frac{d}{d\epsilon} \ell(y_t, y_{t-1}; \eta) = \frac{u_t^2}{\sigma^2} \left(\frac{\mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(u_t)}{(1 + \epsilon)^3} - \frac{\mathbf{1}_{[0, \infty)}(u_t)}{(1 - \epsilon)^3} \right), \\ \ell'_{t,\sigma^2} &= \frac{d}{d\sigma^2} \ell(y_t, y_{t-1}; \eta) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{\sigma^2} u_t^2 v_t \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Además se cumple que $E[\ell'_n(\eta_0)] = 0$.

Prueba. La demostración es simple, basta con diferenciar (38), para probar la segunda parte, es decir $E[\ell'_n(\eta_0)] = 0$ reescribiremos la ecuación (39) en una forma mas concisa como mostramos a continuación:

$$\ell'_t(\eta) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d \log(\sigma^2)}{d\eta} + \frac{u_t^2}{\sigma^2} \frac{dv_t}{d\eta} + \frac{v_t}{\sigma^2} \frac{du_t^2}{d\eta} + v_t u_t^2 \frac{d\sigma^{-2}}{d\eta} \right). \quad (43)$$

Al tomar esperanza evaluar η_0 y condicionando adecuadamente se prueba

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\ell'_t(\eta_0)] &= -\frac{1}{2} \left[\frac{d \log(\sigma^2)}{d\eta} + \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left(u_t^2 \frac{dv_t}{d\eta} \right) + \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left(v_t \frac{du_t^2}{d\eta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} (v_t u_t^2) \frac{d\sigma^{-2}}{d\eta} \right] = 0. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Bajo los supuestos establecidos en el lema 3.1 se tiene que $\mathbb{E} |\ell'_i(\eta)| < \infty$.*

Prueba. Previamente notemos que

$$\mathbb{E} |y_t| = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j z_{t-j} \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j \cdot \mathbb{E} |z_{t-j}| < \infty, \quad (44)$$

donde $\sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j$ es finita debido a que $|\phi| < 1$ y la $\mathbb{E} |z_t|$ es acotada por $\mathbb{E} z_t^2 < \infty$. Además

$$\mathbb{E} |v_t| = \mathbb{E} v_t = \frac{1}{1 - \epsilon^2} < \infty, \quad (45)$$

lo anterior es cierto siempre que ϕ y ϵ estén definidos en intervalos cerrados. Finalmente

$$\mathbb{E} |u_t| = \mathbb{E} |y_t - \phi y_{t-1} - \theta| < \mathbb{E} (y_t - \phi y_{t-1} - \theta)^2 < \infty, \quad (46)$$

la relación anterior es cierta debido a que el segundo momento de la *ESN* es finito.

Ahora podemos verificar que se cumple la siguiente condición $\mathbb{E} |\ell'_i(\eta)| < \infty$. Para cada una de las componentes mostradas en (99) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\ell'_{i,\phi}| &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} |y_{i-1}| \mathbb{E} |u_i v_i|, \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} |y_{i-1}| \left(\frac{-\mathbb{E} (u_i \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(u_i))}{(1 + \epsilon)^2} + \frac{\mathbb{E} (u_i \mathbb{1}_{[0,\infty)}(u_i))}{(1 - \epsilon)^2} \right), \\ &= 2 \frac{\mathbb{E} |y_{i-1}|}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} < \infty, \end{aligned}$$

por la ecuación anterior se tiene

$$\mathbb{E} |\ell'_{t,\theta}| = \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} |u_t v_t| < \infty,$$

$$\mathbb{E} |\ell'_{t,\epsilon}| = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\mathbb{E} (u_t^2 \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(u_t))}{(1+\epsilon)^3} + \frac{\mathbb{E} (u_t^2 \mathbb{1}_{[0,\infty)}(u_t))}{(1-\epsilon)^3} \right) = 1,$$

nuevamente por la ecuación anterior se sigue el resultado que

$$\mathbb{E} |\ell'_{t,\sigma^2}| < \frac{1}{2\sigma^2} \left(1 + \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} |u_t^2 v_t| \right) = \frac{1}{\sigma^2},$$

luego como cada componente del score es finito, entonces $\mathbb{E} |\ell'_i(\eta)| < \infty$. \square

Proposición 3.5 (Matriz de Información AR(1)-ESN). *Bajo los supuestos del Lema 3.1 considerando además la siguiente condición $\mathbb{E}[z_t^2] < \infty$. Entonces el hessiano queda definido como $\ell''_t = \nabla_{\eta\eta} \ell(y_t, y_{t-1}; \eta)$, la matriz de información $\Omega_\eta = -E(\ell''_t)$ y además se cumple:*

$$-\frac{1}{n} \ell''_n(\eta) = -\frac{1}{n} \begin{pmatrix} \ell_{\lambda\lambda} & \ell_{\lambda\sigma^2} \\ \ell_{\sigma^2\lambda} & \ell_{\sigma^2\sigma^2} \end{pmatrix} \xrightarrow{c.s.} \begin{pmatrix} \Omega_\lambda & 0 \\ 0 & \Omega_{\sigma^2} \end{pmatrix} = \Omega_\eta, \quad (47)$$

Demostración. Primeramente diferenciando la ecuación (43) respecto a los cuatro parámetros se tiene:

$$\begin{aligned} \ell''_t = & -\frac{1}{2} \left[\frac{d^2 \ln(\sigma^2)}{d\eta d\eta^T} + \frac{u_t^2}{\sigma^2} \frac{d^2 v_t}{d\eta d\eta^T} + \frac{v_t}{\sigma^2} \frac{d^2 u_t^2}{d\eta d\eta^T} + v_t u_t^2 \frac{d^2 \sigma^{-2}}{d\eta d\eta^T} \right. \\ & + \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{du_t^2}{d\eta} \frac{dv_t}{d\eta^T} + \frac{dv_t}{d\eta} \frac{du_t^2}{d\eta^T} \right) + u_t^2 \left(\frac{dv_t}{d\eta} \frac{d\sigma^{-2}}{d\eta^T} + \frac{d\sigma^{-2}}{d\eta} \frac{dv_t}{d\eta^T} \right) \\ & \left. + v_t \left(\frac{d\sigma^{-2}}{d\eta} \frac{du_t^2}{d\eta^T} + \frac{du_t^2}{d\eta} \frac{d\sigma^{-2}}{d\eta^T} \right) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

Además notemos que ℓ''_t es función de un proceso i.i.d. por tanto estacionario y ergódico (Taniguchi y Kakizawa, 2000). Para ocupar el teorema de ergodicidad (ver por ejemplo Hannan y Deistler (1988, Sección 4) y mostrar que (47) es cierta, necesitamos mostrar previamente que $\mathbb{E} |\ell''_t| < \infty$, es decir, que cada componente de la matriz tiene esperanza finita.

$$\ell_t'' = \begin{pmatrix} \frac{d^2 \ell_t}{d\lambda d\lambda^T} & \frac{d^2 \ell_t}{d\sigma^2 d\lambda^T} \\ \frac{d^2 \ell_t}{d\lambda d\sigma^2} & \frac{d^2 \ell_t}{d\sigma^2 d\sigma^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{t,\lambda\lambda}'' & \ell_{t,\sigma^2\lambda}'' \\ \ell_{t,\lambda\sigma^2}'' & \ell_{t,\sigma^2\sigma^2}'' \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Para determinar que la segunda derivada existe, note que $\mathbb{E}[y_{t-1}^2]$ y $\mathbb{E}|y_{t-1}|$ son finitas.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[y_{t-1}^2] &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \mathbb{E}[z_{t-1-j}^2] + 2 \sum_{i<j}^{\infty} \phi^{i+j} \mathbb{E}[z_{t-1-i}] \mathbb{E}[z_{t-1-j}] \\ \mathbb{E}|y_{t-1}| &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j z_{t-1-j} \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j \cdot \mathbb{E}|z_{t-1-j}| \end{aligned}$$

donde $\sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j}$ y $\sum_{j=0}^{\infty} |\phi|^j$ son finitas debido a que $|\phi| < 1$ y la $\mathbb{E}|z_t|$ es acotada por $\mathbb{E}z_t^2 < \infty$ al condicionar los términos en \mathcal{F}_{t-1} (\mathcal{F}_{t-1} es la σ -álgebra generada por y_0, y_1, \dots, y_{t-1} , la "historia previa") puede mostrarse que $\mathbb{E} \left| \ell_{t,\lambda\sigma^2}'' \mid \mathcal{F}_{t-1} \right| = 0$ y que $\mathbb{E} \left| \ell_{t,\lambda\lambda}'' \mid \mathcal{F}_{t-1} \right|, \mathbb{E} \left| \ell_{t,\sigma^2\sigma^2}'' \mid \mathcal{F}_{t-1} \right|$ son finitas. Por tanto al ocupar el teorema de ergodicidad la proposición es cierta.

La matriz de información se encuentra definida en la ecuación (50) mostrada a continuación

$$\Omega_\eta = \frac{1}{\sigma^2(1-\epsilon^2)} \begin{pmatrix} \mu_2 & \mu_1 & -\frac{4\mu_1\sigma}{\sqrt{2\pi}} & 0 \\ \mu_1 & 1 & -\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} & 0 \\ -\frac{4\mu_1\sigma}{\sqrt{2\pi}} & -\frac{4\sigma}{\sqrt{2\pi}} & 3\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\epsilon^2)}{2\sigma^2} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Es sencillo mostrar que la matriz es definida positiva, para ello usamos los determinantes de las submatrices, en donde encontramos las siguientes condiciones que son necesarias i) $\mu_2 > 0$; ii) $\mu_2 - \mu_1^2 > 0$ y iii) $(\epsilon^2 - 1)^3 < 0$. Las cuales son satisfechas para el modelo dado en (43).

□

La Proposición (3.5) muestra que la matriz de información es definida positiva y posteriormente veremos que las condiciones establecidas

por Basawa et al. (1976) son verificadas estableciéndose la consistencia del estimador $\hat{\eta}_n$.

Proposición 3.6. *Sea y_1, y_2, \dots, y_n un proceso autorregresivo definido en (25) con función de densidad condicional $f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}; \eta)$ donde $\eta \in \Lambda$, un subconjunto abierto de $(-1, 1) \times \mathbb{R} \times (-1, 1) \times \mathbb{R}^+$ y \mathcal{F}_{t-1} la σ -álgebra generada por y_0, y_1, \dots, y_{t-1} . Entonces el EMV $\hat{\eta}_n$ de η_0 es un estimador débilmente consistente.*

Demostración. Iniciaremos esta prueba mostrando que $\hat{\eta}_n$, se obtiene como una solución al problema de $\max_{\eta \in \Lambda} \ell_n(\eta)$ con $\ell_n(\eta)$ definido en (37). En orden a lo anterior, usaremos que el resultado de consistencia del EMV por Basawa et al. (1976, página 262). Necesitamos mostrar la convergencia (i) del supuesto A2, de tal forma de asegurar que $K(n)^{-1} \ell'_n(\eta) \xrightarrow{p} 0$. Usando los Lemas (3.1-3.2) se verifica que se cumple la siguiente condición $\mathbb{E} |\ell'_t(\eta)| < \infty$.

Ahora como $\ell'_t(\eta)$ es ergódico y haciendo $K(n) = n$ se puede aplicar el Corolario 3.5.1 de Stout (1974) para mostrar que

$$\frac{1}{n} \ell'_n(\eta_0) \xrightarrow{c.s.} 0,$$

para el punto (ii) del supuesto A2 (Basawa et al., 1976), tenemos que mostrar que el hessiano es positivo y acotado. Como Ω_{η_0} es definido positivo (Proposición 3.5) se tiene que para cualquier vector constante $\mathbf{x} \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum \mathbf{x}^T \ell''_t(\eta_0) \mathbf{x} &\xrightarrow{a.s.} \mathbb{E} [\mathbf{x}^T \ell''_t(\eta_0) \mathbf{x}], \\ &= -\mathbf{x}^T \Omega_{\eta_0} \mathbf{x} < 0. \end{aligned}$$

Para cualquier δ , sea $0 < \Gamma(\delta) < \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Omega_{\eta_0} \mathbf{x}$. Entonces para todo $v > 0$, existe un $n_1 = n_1(v)$ tal que

$$P \left(\left| \frac{1}{T} \sum \mathbf{x}^T \ell''_t(\eta_0) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \Omega_{\eta_0} \mathbf{x} \right| < \Gamma \right) > 1 - v,$$

para todo $n > n_1$; esto es,

$$P\left(-\frac{1}{n}\sum \mathbf{x}^T \ell_t''(\eta_0)\mathbf{x} > \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \Omega_{\eta_0}\mathbf{x}\right) > 1 - v,$$

para todo $n > n_1$. Así la condición es cierta.

Para la parte (iii) del supuesto A2 Basawa et al. (1976). Diferenciando la expresión (48) tenemos

$$\begin{aligned} \ell_t'''(\eta) &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{d^3 \ln(\sigma^2)}{d\eta^T d\eta d\eta^T} + \frac{d}{d\eta^T}\left(\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right) \cdot \frac{d^2 v_t}{d\eta^T d\eta} + \frac{u_t^2}{\sigma^2} \frac{d^3 v_t}{d\eta^T d\eta d\eta^T}\right. \\ &+ \frac{d}{d\eta^T}\left(\frac{v_t}{\sigma^2}\right) \frac{d^2 u_t^2}{d\eta d\eta^T} + \frac{v_t}{\sigma^2} \frac{d^3 u_t^2}{d\eta^T d\eta d\eta^T} + \frac{d}{d\eta^T}(v_t u_t^2) \cdot \frac{d^2 \sigma^{-2}}{d\eta d\eta^T} \\ &+ \frac{d\sigma^{-2}}{d\eta^T}\left(\frac{du_t^2}{d\eta} \frac{dv_t}{d\eta^T} + \frac{dv_t}{d\eta} \frac{du_t^2}{d\eta^T}\right) + \frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{d}{d\eta^T}\left(\frac{dv_t}{d\eta} \frac{d\sigma^{-2}}{d\eta^T}\right)\right. \\ &+ \left.\frac{d}{d\eta^T}\left(\frac{d\sigma^{-2}}{d\eta} \frac{dv_t}{d\eta^T}\right)\right] \\ &+ \frac{dv_t}{d\eta^T}\left(\frac{d\sigma^{-2}}{d\eta} \frac{du_t^2}{d\eta^T} + \frac{du_t^2}{d\eta} \frac{d\sigma^{-2}}{d\eta^T}\right) \\ &+ \left.v_t\left[\frac{d}{d\eta^T}\left(\frac{d\sigma^{-2}}{d\eta} \frac{du_t^2}{d\eta^T}\right) + \frac{d}{d\eta^T}\left(\frac{du_t^2}{d\eta} \frac{d\sigma^{-2}}{d\eta^T}\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Considerando solo los términos que son de interés y manteniendo en mente que $E[y_t^2]$, $E|y_t|$ y $E|u_t|$ son finitas, consideremos el siguiente componente

$$\frac{d}{d\eta^T}(v_t u_t^2) \frac{d^2 \sigma^{-2}}{d\eta d\eta^T} = \frac{d^2 \sigma^{-2}}{(d\sigma^2)^2} \left(v_t \frac{du_t^2}{d\phi}, v_t \frac{du_t^2}{d\theta}, u_t^2 \frac{dv_t}{d\epsilon}, 0\right) \times \mathcal{M},$$

con \mathcal{M} matriz de 0's con un 1 en la posición $\mathcal{M}_{4,4}$.

Así tomamos la esperanza del valor absoluto para que exista, para cada componente tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left|v_t \frac{du_t^2}{d\phi}\right| &= 2\mathbb{E}|y_{t-1}| \left(-\frac{\mathbb{E}[u_t \mathbf{1}(u_t < 0)]}{(1+\epsilon)^2} + \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_t \mathbf{1}(u_t \geq 0)]}{(1-\epsilon)^2}\right) \\ &= 4\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} \mathbb{E}|y_{t-1}| < \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left| v_t \frac{du_t^2}{d\theta} \right| &= 2 \left(-\frac{\mathbb{E}[u_t \mathbf{1}(u_t < 0)]}{(1 + \epsilon)^2} + \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_t \mathbf{1}(u_t \geq 0)]}{(1 - \epsilon)^2} \right) \\ &= 4\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}},\end{aligned}$$

$$\mathbb{E} \left| u_t^2 \frac{dv_t}{d\epsilon} \right| \leq 2 \left(\frac{\mathbb{E}[u_t^2 \mathbf{1}(u_t < 0)]}{(1 + \epsilon)^3} + \frac{\mathbb{E}[u_t^2 \mathbf{1}(u_t \geq 0)]}{(1 - \epsilon)^3} \right) = \sigma^2.$$

la prueba del resto es similar $\therefore \mathbb{E} \left| \frac{d^3 \ell(\eta)}{d\eta_i \eta_j \eta_k} \right| < \infty \forall i, j, k$

□

Proposición 3.7 (Normalidad Asintótica). *Bajo los supuestos de la Proposición 3.5 tenemos que la secuencia de estimadores máximo verosímiles son consistentes y asintóticamente normales. Además las matrices de información Ω_{λ_0} y $\Omega_{\sigma_0^2}$ pueden ser estimadas consistentemente por*

$$\hat{\Omega}_{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{2u_t^2 v_t} \left[\frac{d^2 v_t}{d\lambda d\lambda^T} u_t^2 + \frac{dv_t}{d\lambda} \frac{du_t^2}{d\lambda^T} + \frac{du_t^2}{d\lambda} \frac{dv_t}{d\lambda^T} + \frac{d^2 u_t^2}{d\lambda d\lambda^T} v_t \right],$$

y

$$\hat{\Omega}_{\sigma^2} = \frac{1}{2n} \sum_{t=1}^n \frac{1}{u_t^4 (v_t)^2},$$

con $\Omega_{\eta_0} = \text{diag}(\Omega_{\lambda_0}, \Omega_{\sigma_0^2})$ donde Ω_{λ_0} y $\Omega_{\sigma_0^2}$ son los valores de Ω_{λ} y Ω_{σ^2} evaluadas en $\eta = \eta_0$.

Demostración. Verificamos las 3 condiciones siguientes dadas en Basawa et al. (1976, section 3)

(i) $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \ell'_t(\eta_0) \xrightarrow{D} N(0, \Omega_{\eta_0})$ Para un no-aleatorio $\Omega_{\eta_0} > 0$.

(ii) $\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ell''_t(\eta_0) \xrightarrow{P} -\Omega_{\eta_0}$ para un no-aleatorio $\Omega_{\eta_0} > 0$.

$$(iii) \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} |\ell_t'''(\eta)| < M < \infty$$

Parte (i) Necesitamos probar que todos los elementos de la matriz de covarianzas asintótica son finitos Ω_{η_0} . Notemos que tenemos

$\left| \ell_t'(\eta_0) \ell_t'(\eta_0)^T \right| = \left| \frac{d}{d\eta_{i_0}} \ell_t(\eta_0) \right| \left| \frac{d}{d\eta_{j_0}} \ell_t^T(\eta_0) \right|$, donde los índices $1 \leq i_0, j_0 \leq 4$ son tales que $\max_{1 \leq i, j \leq 4} \left| \frac{d}{d\eta_i} \ell_t(\eta_0) \frac{d}{d\eta_j} \ell_t^T(\eta_0) \right| = \left| \frac{d}{d\eta_{i_0}} \ell_t(\eta_0) \frac{d}{d\eta_{j_0}} \ell_t^T(\eta_0) \right|$ por equivalencia de norma (Lima, 1981), existe una constante positiva α tal que $\left| \ell_t'(\eta_0) \ell_t'(\eta_0)^T \right| \leq \alpha |\ell_t'(\eta_0)|^2$. Entonces todos los elementos de Ω_{η_0} son finitos si $\mathbb{E} \left[\left| \frac{d}{d\eta_i} \ell_t(\eta_0) \right|^2 \right] < \infty$ para $1 \leq i \leq 4$. Basados sobre el resultado del Lema 3.1, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\ell_{t,\phi}'|^2] &= \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E} [y_{t-1}^2] \mathbb{E} [u_t^2 v_t^2] < \infty, \\ \mathbb{E} [|\ell_{t,\theta}'|^2] &= \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E} [u_t^2 v_t^2] < \infty, \\ \mathbb{E} [|\ell_{t,\epsilon}'|^2] &= \frac{1}{\sigma^4} \left(\frac{\mathbb{E} [u_t^4 \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(u_t)]}{(1 + \epsilon)^6} + \frac{\mathbb{E} [u_t^4 \mathbf{1}_{[0, \infty)}(u_t)]}{(1 - \epsilon)^6} \right) < \infty, \\ \mathbb{E} [|\ell_{t,\sigma^2}'|^2] &< \frac{1}{4\sigma^4} \left(1 + \frac{2}{\sigma^2} \mathbb{E} [u_t^2 v_t] + \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E} [u_t^4 v_t^2] \right) < \infty, \end{aligned} \quad (51)$$

los elementos de la ecuación (51) son finitos debido a que los valores esperados que detallamos a continuación lo son

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [u_t^2 \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(u_t)] &= \frac{\sigma^2}{2} (1 + \epsilon)^3, \\ \mathbb{E} [u_t^2 \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(u_t)] &= \frac{\sigma^2}{2} (1 - \epsilon)^3, \\ \mathbb{E} [u_t^4 \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(u_t)] &= \frac{3 \sigma^2}{2} (1 + \epsilon)^5, \\ \mathbb{E} [u_t^4 \mathbf{1}_{[0, +\infty)}(u_t)] &= \frac{3 \sigma^2}{2} (1 - \epsilon)^5. \end{aligned}$$

Por tanto debido a las desigualdades de la ecuación (51) implican que los elementos de Ω_{η_0} son finitos. Por tanto aplicando el Teorema 5.15 de White (1984, página 118) y el Lema 3.1 se tiene el resultado pedido.

La parte (ii) es probada en Proposición 3.5.

La parte (iii) fue probada en Proposición 3.6.

□

3.2.2. Simulaciones

En las tablas siguientes ilustramos parte de los resultados teóricos obtenidos en nuestro estudio utilizando simulaciones Monte Carlo. Cada uno de los valores están basados en $N = 1000$ repeticiones y los tamaños muestrales corresponden a $n = 300$. Sin pérdida de generalidad, el parámetro de escala σ ha sido tomado como 1. Son mostrados los valores correspondientes a los estimadores de máxima verosimilitud para el caso normal (`arima()` del programa R Würtz (2004)). La función *optim* con el método “L-BFGS-B” es dado por Byrd et al. (1995) el cuál acota el espacio paramétrico este subespacio corresponde a $\hat{\Lambda} = [-0.995, 0.995] \times [-1000, 1000] \times [-0.995, 0.995] \times [0.05, 100]$. Como valor inicial hemos utilizado para nuestras estimaciones los valores dados por el estimador de momentos $\hat{\eta}_{mm}$. Es claro al observar las estimaciones que en general los parámetros de asimetría son levemente sobreestimados por el método propuesto, por otra parte cuando $|\epsilon| > 0.2$ se tiene que el parámetro σ^2 es sobreestimado por el método normal subestimado por el método propuesto.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = -0.9$ con $N = 1000, n = 300$					
ϕ	Parámetros	Media	(Sesgo) ²	Varianza	MVB
-0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9740	6.8e - 04	0.0955	0.0057
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7977	5.3e - 06	0.0033	0.0002
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.9088	7.7e - 05	0.0052	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9946	2.9e - 05	0.0046	0.0067
-0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9853	2.1e - 04	0.0190	0.0087
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4995	2.5e - 07	0.0003	0.0004
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.90850	7.2e - 05	0.0016	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9956	1.9e - 05	0.0039	0.0067
-0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9765	5.5e - 04	0.0315	0.0133
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.1988	1.4e - 06	0.0003	0.0005
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.9104	1.1e - 04	0.0015	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9935	4.2e - 05	0.0036	0.0067
Estimadores Teoría Normal					
-0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7910	8.1e - 05	0.0007	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3470	1.2e - 01	0.0095	
-0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4903	9.4e - 05	0.0015	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3410	1.2e - 01	0.0088	
-0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.1992	6.4e - 07	0.0019	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3400	1.2e - 01	0.0090	

Tabla 4: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.9$ y $\phi < 0$.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = -0.9$ con $N = 1000, n = 300$					
ϕ	Parámetros	Media	(Sesgo) ²	Varianza	MVB
0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0455	2.1e - 03	2.4210	0.0246
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.2001	1.0e - 08	0.0017	0.0005
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.9098	9.6e - 05	0.0072	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9992	6.4e - 07	0.0446	0.0067
0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9849	2.3e - 04	0.4499	0.0451
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4996	1.6e - 07	0.0008	0.0004
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.9094	8.8e - 05	0.0096	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0060	3.6e - 05	0.0640	0.0067
0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0365	1.3e - 03	0.5020	0.1269
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7991	8.1e - 07	0.0002	0.0001
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.9106	1.1e - 04	0.0038	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9909	8.3e - 05	0.0052	0.0067
Estimadores Teoría Normal					
0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	0.1918	6.7e - 05	0.0019	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3380	1.1e - 01	0.0091	
0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4859	2.0e - 04	0.0015	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3400	1.2e - 01	0.0095	
0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7862	1.9e - 04	0.0008	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3400	1.2e - 01	0.0093	

Tabla 5: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.9$ y $\phi > 0$.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = -0.5$ con $N = 1000, n = 300$					
ϕ	Parámetros	Media	(Sesgo) ²	Varianza	MVB
-0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9883	1.4e - 04	0.0328	0.0223
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7977	5.3e - 06	0.0005	0.0008
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.5000	0.0e + 00	0.0037	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9966	1.2e - 05	0.0044	0.0067
-0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9882	1.4e - 04	0.0636	0.0337
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4993	4.9e - 07	0.0011	0.0017
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.5054	2.9e - 05	0.0036	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9943	3.2e - 05	0.0038	0.0067
-0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9930	4.9e - 05	0.1182	0.0509
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.1994	3.6e - 07	0.0013	0.0022
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.5027	7.3e - 06	0.0035	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9905	9.0e - 05	0.0041	0.0067
Estimadores Teoría Normal					
-0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7944	3.1e - 05	0.0008	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1080	1.2e - 02	0.0061	
-0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4979	4.4e - 06	0.0015	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1090	1.2e - 02	0.0057	
-0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.2000	0.0e + 00	0.0021	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1030	1.1e - 02	0.0056	

Tabla 6: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.5$ y $\phi < 0$.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = -0.5$ con $N = 1000, n = 300$					
ϕ	Parámetros	Media	(Sesgo) ²	Varianza	MVB
0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0297	8.8e - 04	0.2346	0.0937
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.1977	5.3e - 06	0.0012	0.0022
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.5026	6.8e - 06	0.0036	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9945	3.0e - 05	0.0040	0.0067
0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0683	4.7e - 03	0.5257	0.1709
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4968	1.0e - 05	0.0011	0.0017
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.5021	4.4e - 06	0.0035	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9944	3.1e - 05	0.0037	0.0067
0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	10.2712	7.4e - 02	1.6300	0.4797
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7950	2.5e - 05	0.0006	0.0008
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.4991	8.1e - 07	0.0038	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9970	9.0e - 06	0.0039	0.0067
Estimadores Teoría Normal					
0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	0.1969	9.6e - 06	0.0018	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1090	1.2e - 02	0.0059	
0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4928	5.2e - 05	0.0015	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1070	1.1e - 02	0.0057	
0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7906	8.8e - 05	0.0008	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1080	1.2e - 02	0.0057	

Tabla 7: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.5$ y $\phi > 0$.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = -0.2$ con $N = 1000, n = 300$					
ϕ	Parámetros	Media	(Sesgo) ²	Varianza	MVB
-0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9913	7.5e - 05	0.0392	0.0277
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7972	7.8e - 06	0.0007	0.0011
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.1973	7.3e - 06	0.0047	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9913	7.6e - 05	0.0041	0.0067
-0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9892	1.2e - 04	0.0854	0.0406
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4992	6.4e - 07	0.0015	0.0024
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.2044	1.9e - 05	0.0045	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9909	8.3e - 05	0.0039	0.0067
-0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0105	1.1e - 04	0.1428	0.0600
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.2014	2.0e - 06	0.0018	0.0030
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.2032	1.0e - 05	0.0046	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9956	1.9e - 05	0.0038	0.0067
Estimadores Teoría Normal					
-0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7972	7.8e - 06	0.0008	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0110	1.2e - 04	0.0045	
-0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4989	1.2e - 06	0.0016	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0120	1.4e - 04	0.0042	
-0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.2020	4.0e - 06	0.0019	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0160	2.6e - 04	0.0042	

Tabla 8: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.2$ y $\phi < 0$.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = -0.2$ con $N = 1000, n = 300$					
ϕ	Parámetros	Media	(Sesgo)²	Varianza	MVB
0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0620	3.8e - 03	0.3403	0.1087
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.1955	2.0e - 05	0.0019	0.0030
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.1996	1.6e - 07	0.0045	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9945	3.0e - 05	0.0041	0.0067
0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0822	6.8e - 03	0.5863	0.1962
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4961	1.5e - 05	0.0013	0.0024
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.2001	1.0e - 08	0.0045	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9973	7.3e - 06	0.0042	0.0067
0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	10.3280	1.1e - 01	2.0920	0.5462
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7935	4.2e - 05	0.0008	0.0011
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	-0.1992	6.4e - 07	0.0080	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9972	7.8e - 06	0.0042	0.0067
Estimadores Teoría Normal					
0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	0.1952	2.3e - 05	0.0020	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0140	2.0e - 04	0.0045	
0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4964	1.3e - 05	0.0014	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0170	2.9e - 04	0.0045	
0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7931	4.8e - 05	0.0008	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0170	2.9e - 04	0.0043	

Tabla 9: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = -0.2$ y $\phi > 0$.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = 0.2$ con $N = 1000, n = 300$					
ϕ	Parámetros	Media	(Sesgo) ²	Varianza	MVB
-0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9891	1.2e - 04	0.0395	0.0259
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7973	7.3e - 06	0.0008	0.0011
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.2013	1.7e - 06	0.0060	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9955	2.0e - 05	0.0047	0.0067
-0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9901	9.8e - 05	0.0728	0.0353
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4978	4.8e - 06	0.0014	0.0024
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.2033	1.1e - 05	0.0046	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9964	1.3e - 05	0.0043	0.0067
-0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0214	4.6e - 04	0.1266	0.0493
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.2021	4.4e - 06	0.0018	0.0030
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.2028	7.8e - 06	0.0044	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9955	2.0e - 05	0.0042	0.0067
Estimadores Teoría Normal					
-0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7968	1.0e - 05	0.0008	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0140	2.0e - 04	0.0042	
-0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4972	7.8e - 06	0.0015	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0170	2.9e - 04	0.0046	
-0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.2023	5.3e - 06	0.0019	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0160	2.6e - 04	0.0044	

Tabla 10: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.2$ y $\phi < 0$.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = 0.2$ con $N = 1000, n = 300$					
η	Parámetros	Media	(Sesgo)²	Varianza	MVB
0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0487	2.4e - 03	0.2899	0.0847
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.1965	1.2e - 05	0.0019	0.0030
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.2036	1.3e - 05	0.0044	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9911	7.9e - 05	0.0041	0.0067
0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0751	5.6e - 03	0.5812	0.1482
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4962	1.4e - 05	0.0015	0.0024
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.2020	4.0e - 06	0.0040	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9937	4.0e - 05	0.0039	0.0067
0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	10.3684	1.4e - 01	1.8360	0.4022
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7924	5.8e - 05	0.0008	0.0011
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.2014	2.0e - 06	0.0053	0.0071
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9972	7.8e - 06	0.0049	0.0067
Estimadores Teoría Normal					
0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	0.1963	1.4e - 05	0.0019	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0110	1.2e - 04	0.0044	
0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4960	1.6e - 05	0.0016	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0140	2.0e - 04	0.0042	
0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7917	6.9e - 05	0.0008	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.0170	2.9e - 04	0.0047	

Tabla 11: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.2$ y $\phi > 0$.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = 0.5$ con $N = 1000, n = 300$					
ϕ	Parámetros	Media	(Sesgo) ²	Varianza	MVB
-0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9873	1.6e - 04	0.0276	0.0191
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7975	6.3e - 06	0.0005	0.0008
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.5016	2.6e - 06	0.0039	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9954	2.1e - 05	0.0040	0.0067
-0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9986	1.9e - 06	0.0588	0.0242
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4996	1.6e - 07	0.0012	0.0017
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.5020	4.0e - 06	0.0039	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9927	5.3e - 05	0.0044	0.0067
-0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0111	1.2e - 04	0.0917	0.0318
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.2011	1.2e - 06	0.0014	0.0022
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.5029	8.4e - 06	0.0036	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9902	9.6e - 05	0.0041	0.0067
Estimadores Teoría Normal					
-0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7927	5.3e - 05	0.0007	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1070	1.1e - 02	0.0058	
-0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4999	1.0e - 08	0.0015	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1050	1.1e - 02	0.0057	
-0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.2016	2.6e - 06	0.0019	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1030	1.1e - 02	0.0055	

Tabla 12: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.5$ y $\phi < 0$.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = 0.5$ con $N = 1000, n = 300$					
ϕ	Parámetros	Media	(Sesgo) ²	Varianza	MVB
0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0194	3.8e - 04	0.1908	0.0508
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.1985	2.3e - 06	0.0014	0.0022
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.5023	5.3e - 06	0.0039	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9931	4.8e - 05	0.0039	0.0067
0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0208	4.3e - 04	0.3470	0.0852
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4986	2.0e - 06	0.0010	0.0017
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.5002	4.0e - 08	0.0034	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9931	4.8e - 05	0.0040	0.0067
0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	10.2638	7.0e - 02	1.1330	0.2224
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7943	3.2e - 05	0.0005	0.0008
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.5006	3.6e - 07	0.0034	0.0055
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9950	2.5e - 05	0.0043	0.0067
Estimadores Teoría Normal					
0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	0.1960	1.6e - 05	0.0019	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1060	1.1e - 02	0.0055	
0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4948	2.7e - 05	0.0015	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1050	1.1e - 02	0.0058	
0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7893	1.1e - 04	0.0008	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.1060	1.1e - 02	0.0056	

Tabla 13: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.5$ y $\phi > 0$.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = 0.9$ con $N = 1000, n = 300$					
ϕ	Parámetros	Media	(Sesgo) ²	Varianza	MVB
-0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0122	1.5e - 04	0.0073	0.0045
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7994	3.6e - 07	0.0001	0.0002
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.9120	1.4e - 04	0.0015	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9934	4.4e - 05	0.0041	0.0067
-0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0171	2.9e - 04	0.0353	0.0052
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4989	1.2e - 06	0.0004	0.0004
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.9171	2.9e - 04	0.0158	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9919	6.6e - 05	0.0049	0.0067
-0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	9.9991	7.7e - 07	0.0224	0.0062
	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.1980	4.0e - 06	0.0006	0.0004
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.9118	1.4e - 04	0.0064	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9907	8.6e - 05	0.0044	0.0067
Estimadores Teoría Normal					
-0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.7909	8.3e - 05	0.0007	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3440	1.2e - 01	0.0098	
-0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.4889	1.2e - 04	0.0015	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3370	1.1e - 01	0.0093	
-0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	-0.1964	1.3e - 05	0.0020	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3360	1.1e - 01	0.0103	

Tabla 14: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.9$ y $\phi < 0$.

Estimadores Teoría ESN					
$\theta = 10, \sigma^2 = 1, \epsilon = 0.9$ con $N = 1000, n = 300$					
ϕ	Parámetros	Media	(Sesgo)²	Varianza	MVB
0.2	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0047	2.2e - 05	0.0438	0.0087
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.2005	2.5e - 07	0.0003	0.0005
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.9092	8.5e - 05	0.0013	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9963	1.4e - 05	0.0040	0.0067
0.5	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0178	3.2e - 04	0.0748	0.0132
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4998	4.0e - 08	0.0003	0.0004
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.9116	1.3e - 04	0.0016	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9885	1.3e - 04	0.0038	0.0067
0.8	$\hat{\theta}_{ml}$	10.0653	4.3e - 03	0.2523	0.0314
	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7987	1.7e - 06	0.0001	0.0002
	$\hat{\epsilon}_{ml}$	0.9095	9.0e - 05	0.0017	0.0014
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	0.9951	2.4e - 05	0.0041	0.0038
Estimadores Teoría Normal					
0.2	$\hat{\phi}_{ml}$	0.1913	7.6e - 05	0.0019	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3440	1.2e - 01	0.0099	
0.5	$\hat{\phi}_{ml}$	0.4869	1.7e - 04	0.0014	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3340	1.1e - 01	0.0092	
0.8	$\hat{\phi}_{ml}$	0.7864	1.8e - 04	0.0008	
	$\hat{\sigma}_{ml}^2$	1.3440	1.2e - 01	0.0098	

Tabla 15: Estimadores máximo verosímiles para $\epsilon = 0.9$ y $\phi > 0$.

3.2.3. Aplicación

En esta sección mostramos un ajuste a datos que presentan una asimetría mediante el modelo AR(1) estudiado en las secciones precedentes. Los datos fueron tomados del sitio web de Hyndman (2006, librería de series de tiempo) y corresponden a promedios mensuales en la producción de granos (74 observaciones), si se quiere más detalles de la fuente de los datos pueden revisarse en Andrews y Herzberg (1985).

El modelo que consideramos es el siguiente

$$Y_t = \theta + \phi Y_{t-1} + u_t, \quad t = 0, \dots, n. \quad (52)$$

Un análisis descriptivo nos permite ver en la Figura 7 que los datos presentan una distribución asimétrica y el proceso es parecido a un AR(1) de acuerdo a la función de autocorrelación serial y parcial.

	Estimadores MV			Estimadores Teoría Normal		
	parámetros	varianza	valor-t	parámetros	varianza	valor-t
ϕ	0.407	0.0103	4.010	0.359	0.0100	3.590
σ^2	0.213	0.0012	6.149	0.224	0.0014	5.987
θ	0.751	0.0441	3.576			
ϵ	-0.261	0.0013	-7.239			

Tabla 16: Estimación por Máxima Verosimilitud.

En los ajustes mostrados en la Tabla 16 podemos observar que la estimación del parámetro autorregresivo y de escala son similares al considerar el modelo ESN y el Normal. Además podemos ver la significancia del parámetro de asimetría al dividir la estimación por su desviación estándar.

Realizamos un segundo ajuste, pero en datos con asimetría a la izquierda para estudiar la estimación del parámetro de asimetría. Estos datos también fueron obtenidos del sitio web de Hyndman (2006, librería de series de tiempo) y corresponden a cambios trimestrales en inventarios de negocios (billones) entre los años 1955-1969. La fuente más específica

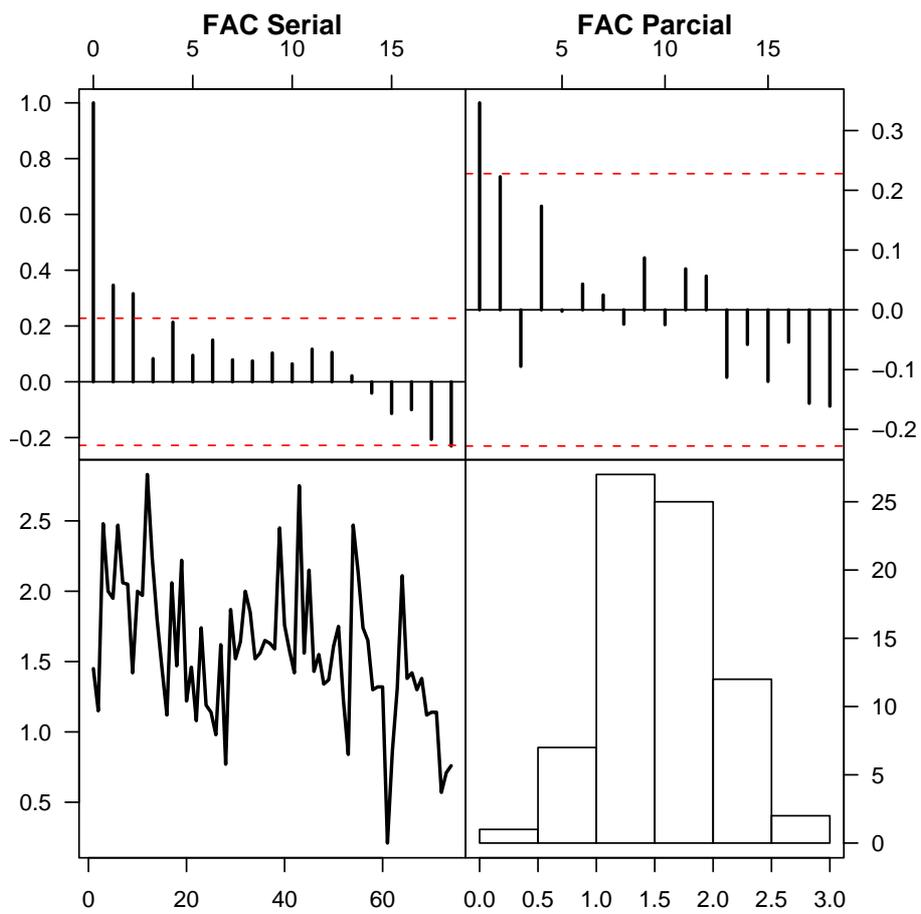


Figura 7: Promedios Mensuales en la Producción de Granos.

se encuentra en Pankratz (1983). Un análisis descriptivo análogo a como lo hacemos anteriormente nos permite ver (Figura 8) que los datos presentan asimetría y dependencia. Nuevamente modelamos por un proceso autorregresivo y obtenemos los resultados en la Tabla 17, en donde observamos que el parámetro de asimetría es significativo y en magnitud es mayor al estimado en el ejemplo anterior, esto permite visualizar que la estimación del parámetro de escala (σ) se ve afectada por la magnitud del parámetro de asimetría, por tanto si consideramos el modelo con la estimación MV normal, tendríamos una sobreestimación y una mayor variabilidad en el parámetro de escala.

	Estimadores MV			Estimadores Teoría Normal		
	parámetros	varianza	valor-t	parámetros	varianza	valor-t
ϕ	0.743	0.0019	17.046	0.690	0.0089	7.314
σ^2	10.837	3.9812	5.431	11.032	4.0566	5.477
θ	6.248	0.5052	8.790			
ϵ	0.821	0.0122	7.433			

Tabla 17: Estimación por Máxima Verosimilitud.

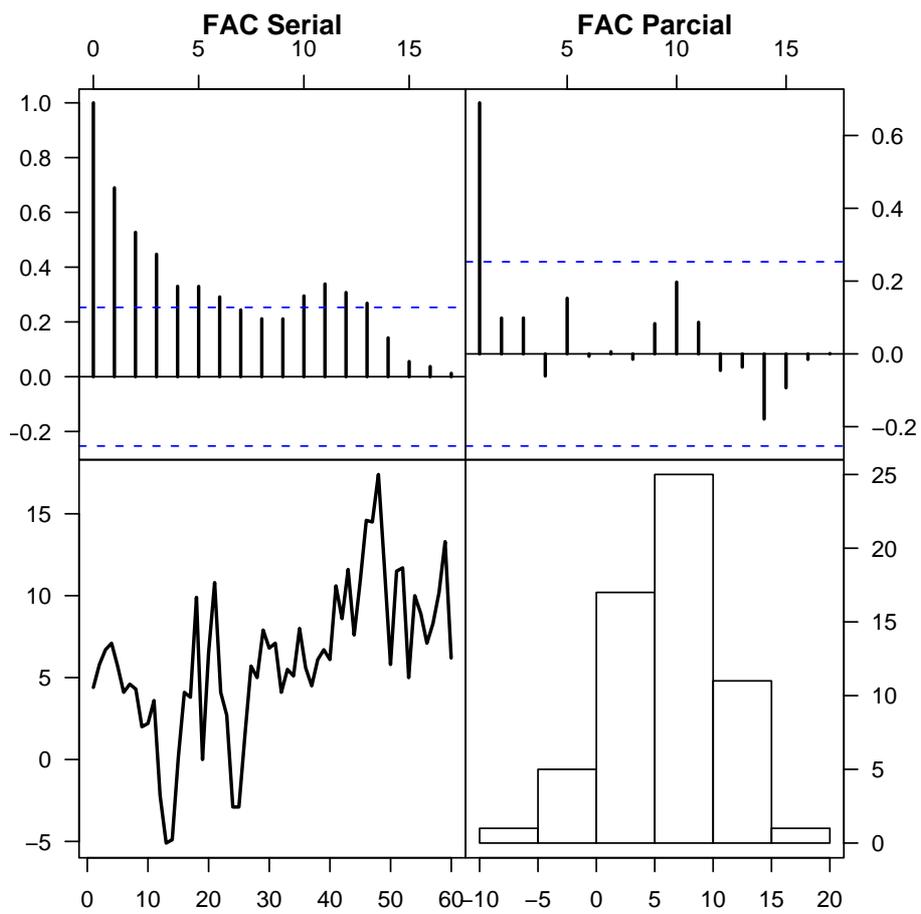


Figura 8: Cambios Trimestrales en los Inventarios.

Capítulo 4

Estimación: Dominio Espectral

En este capítulo proponemos estimar los parámetros del proceso autorregresivo de primer orden con innovaciones $ESN(\theta, \sigma, \epsilon)$ mediante una técnica introducida por Terdik (1999), la cuál es basada sobre una funcional que depende del espectro y el biespectro del modelo. Usualmente los métodos para estimar los parámetros están basados sobre las covarianzas como las ecuaciones de Yule-Walker o el espectro, ver los libros de Brockwell y Davis (1991), Priestley (1981) y Anderson (1971). Estos son llamados métodos gaussianos debido a que ellos hacen solo uso del segundo orden de la información. La idea de estimación gaussiana en el segundo orden nos lleva esencialmente a método sugerido por Whittle (1953). Las propiedades de este tipo de estimación son estudiadas por Dzhaparidze (1986), entre otros. La incorporación del tercer orden del espectro (biespectro) es dada por Brillinger (1981) como una forma de estimar los parámetros del modelo. La estimación del parámetro de una serie de datos no-gaussiana es construida por Terdik (1999, Capítulo 4) mediante la minimización de un funcional basada en el espectro y biespectro teórico y estimado. Un supuesto de la técnica es que los parámetros de distribución de las innovaciones no dependen del parámetro desconocido a estimar, para nosotros es de interés estimar este parámetro no considerado en Terdik ya que nos entrega la asimetría del modelo.

4.1. Densidad espectral

En los capítulos anteriores hemos considerado la serie y_t , descrita como en términos de la secuencia de innovaciones z_t en modelos de la forma (Teorema de Wold):

$$y_t = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k z_{t-k}, \quad (53)$$

en donde el valor de la serie se concentra en algunos puntos discretos del eje temporal (dominio temporal). Un aspecto de este tipo de representación es que la información queda concentrada en las autocovarianzas γ_k para diferentes rezagos, con lo cuál se resume el comportamiento de la serie en estudio. Este enfoque es desarrollado en el libro de Box y Jenkins (1970).

El otro enfoque por el cuál se trata una serie de tiempo es conocido como el dominio de la frecuencia, este consiste en mostrar las componentes de la señal según la frecuencia a la que oscilan en un rango determinado. Para comprender mejor esto, nos basaremos en el teorema de representación espectral tratado en el libro Priestley (1981, Capítulo 4), este nos dice que cualquier proceso estacionario puede ser representado como una suma infinita, ponderada de funciones periódicas (ortogonales) de la forma $\cos(\lambda t)$ y $\sin(\lambda t)$, donde λ es la frecuencia angular particular. Así la representación espectral de la serie $\{y_t\}$:

$$y_t = \mu + \int_0^{\pi} u(\lambda) \cos(\lambda t) d\lambda + \int_0^{\pi} v(\lambda) \sin(\lambda t) d\lambda,$$

en donde $u(\lambda)$ y $v(\lambda)$ son variables aleatorias no correlacionadas de media cero y varianza σ^2 finita. En este enfoque las funciones seno y coseno son las piedras fundamentales sobre las que se construyen todas las funciones periódicas, a través de combinaciones lineales de las mismas.

El objetivo es determinar cómo los ciclos más importantes asociados a distintas frecuencias dan cuenta del comportamiento de la serie en

cuestión. En este caso, el estudio de la serie se realiza en el dominio de la frecuencia o también se dice que se hace el análisis espectral de la serie.

El análisis de los procesos estacionarios por medio de su representación espectral es frecuentemente referido como el análisis de serie de tiempo en el “dominio de la frecuencia”. Esto es equivalente al análisis en el “dominio del tiempo”, basado sobre la función de autocovarianzas, pero nos provee de una manera alternativa de mirar el proceso la cual tiene interpretaciones en áreas de la ingeniería.

Los dos enfoques no son excluyentes (como veremos en las subsecciones siguientes), sino que se complementan. Las características del proceso pueden ser bien descritas mediante cualquiera de las dos, sólo que algunas características se describen más fácilmente en un dominio y otras en el otro.

4.2. Densidad espectral del proceso lineal

Así como en el dominio del tiempo las autocovarianzas γ_k resumen el comportamiento de la serie en estudio, el espectro poblacional o la función de densidad espectral resume los aspectos más relevantes de la serie. Si consideramos el filtro lineal (53) y requerimos que los cumulantes de z_t existan hasta el orden k y sea invariante frente a traslaciones, entonces y_t es estacionario de orden k y el espectro $S_{2,y}$ de y_t está dado por:

$$S_2(\omega) = S_{2,y}(u) = |\Psi(u)|^2 S_{2,z}(u).$$

donde $\Psi(u)$ es la función de transferencia de este operador lineal, evaluada en el complejo $u = \exp(-i2\pi\omega)$ y ω es la frecuencia y puede tomar cualquier valor en el rango $(0, 1)$.

En particular, cuando los z_t 's son independientes e idénticamente distribuidos el espectro del proceso z_t es constante. Así

$$S_2(\omega) = S_{2,y}(u) = \sigma_z^2 |\Psi(u)|^2.$$

4.2.1. Propiedades del espectro

- (i) El espectro es una función de ω , no negativa, continua y real.
- (ii) El espectro es simétrico alrededor de $\omega = 0$, de esta forma $S_{2,y}(u) = S_{2,y}(\bar{u})$ (conjugado).
- (iii) El espectro es una función periódica de ω , así conociendo cualquier valor de $\omega \in (0, 1)$, implica conocer $S_{2,y}(u)$ para cualquier valor de ω .
- (iv) El espectro es una especie de función generatriz de autocovarianzas, y puede verse como la descomposición de la varianza de la serie por frecuencias. El área bajo el espectro en el intervalo $(0, 1)$.

4.3. Densidad biespectral del proceso lineal

La densidad biespectral se define como:

$$\begin{aligned} S_{3,y}(u_1, u_2) &= Cum(z_0, z_0, z_0)\Psi(u_1)\Psi(u_2)\Psi(u_1^{-1}u_2^{-1}), \\ S_{3,y}(u_1, u_2) &= \mu_3\Psi(u_1)\Psi(u_2)\Psi(u_1^{-1}u_2^{-1}), \end{aligned} \quad (54)$$

donde $u_i = \exp(-i2\pi\omega_i)$, con $i = 1, 2$, $Cum(z_0, z_0, z_0)$ corresponde al cumulante de tercer orden y μ_3 corresponde al tercer momento central de la innovación z_t .

Mientras el espectro es real y no negativo, el biespectro tiene valores generalmente en los complejos. Esto sigue las siguientes propiedades de simetría,

$$\begin{aligned} S_3(\omega_1, \omega_2) &= S_3(\omega_2, \omega_1) \\ &= S_3(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) = S_3(-\omega_1 - \omega_2, \omega_1) \\ &= S_3(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2) = S_3(\omega_2, -\omega_1 - \omega_2) \\ &= S_3(-\omega_1, -\omega_2) \\ &= S_3(\omega_1 + k, \omega_2 + j), \quad k, j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Estas ecuaciones implican que hay 12 triángulos de frecuencias en el plano, ver Figura 9, cada uno de los cuales puede ser considerado como un dominio base para el biespectro esto deja especificado completamente el plano entero si es determinado por alguno de los doce triángulos. Trabajaremos con el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1/2,0)$, $(1/3,1/3)$ como el dominio base del biespectro.

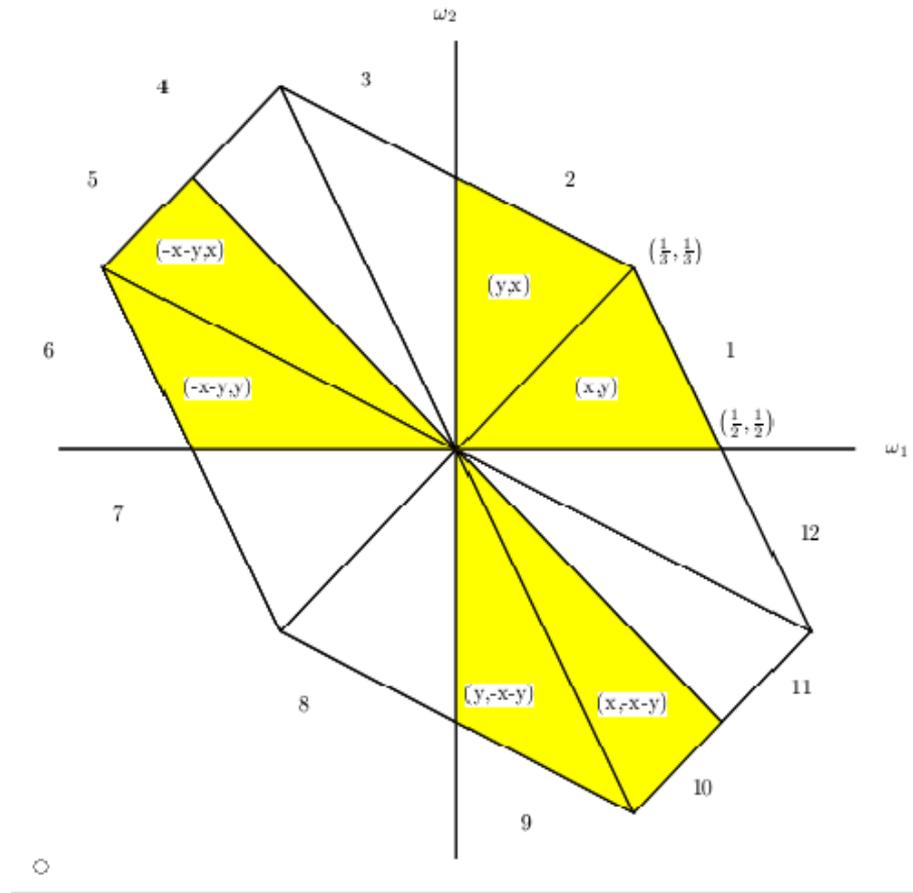


Figura 9: Regiones de simetría del biespectro.

Ejemplo 4.1. Para el caso particular del proceso AR(1) con innovaciones ESN, la densidad espectral es la siguiente

$$S_{2,y}(\omega) = \sigma_Z^2 |1 - \phi e^{-i2\pi\omega}|^{-2}, \quad (55)$$

parámetro de asimetría. Este hecho es debido a que el espectro esta basado en el segundo momento de la distribución. Para poder obtener la asimetría necesitamos estudiar momentos de orden superior, para ello nos basaremos en el biespectro el cual se basa en el tercer momento del proceso estacionario y con ello podremos estimar la asimetría de nuestro modelo.

La densidad biespectral de la ecuación (54) para el proceso AR(1) es:

$$S_{3,y}(\omega_1, \omega_2) = \mu_3 \left\{ (1 - \phi e^{-i2\pi\omega_1})(1 - \phi e^{-i2\pi\omega_2})(1 - \phi e^{i2\pi(\omega_1+\omega_2)}) \right\}^{-1},$$

donde $\mu_3 = \frac{2\sigma^3\sqrt{2}\epsilon}{\pi^{3/2}}((5\pi - 16)\epsilon^2 - \pi)$ es el tercer momento central de la ESN. Para la estimación usaremos la densidad biespectral estandarizada, dada por

$$S_{3,y}(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\beta_1}(1 - \phi^2)^{3/2} \left\{ (1 - \phi e^{-i2\pi\omega_1}) \times (1 - \phi e^{-i2\pi\omega_2})(1 - \phi e^{i2\pi(\omega_1+\omega_2)}) \right\}^{-1},$$

donde $\sqrt{\beta_1}$ es el coeficiente de asimetría de la innovación $ESN(\theta, \sigma, \epsilon)$. Los siguientes ejemplos ilustran como cambia el biespectro estandarizado al modificar el parámetro ϕ y ϵ los cuales hacen completamente distinguible en comparación con el espectro. Los gráficos mostrados en las Figuras 11-14 muestran al biespectro descompuesto en la parte real (gráfico superior) y en la parte imaginaria (gráficos inferior). Como vemos al cambiar los signos de los parámetros de asimetría y del proceso autorregresivo obtenemos biespectros positivos o negativos en sus partes reales e imaginaria.

Para la Figura 11 la parte superior utiliza $\phi = 0.5$ y $\epsilon = 0.5$, la inferior $\phi = -0.5$ y $\epsilon = 0.5$. Para la Figura 12 la parte superior utiliza $\phi = 0.5$ y $\epsilon = -0.5$, la inferior $\phi = -0.5$ y $\epsilon = -0.5$. Estos gráficos muestran el biespectro descompuesto en la parte real (gráficos a la izquierda) y parte imaginaria (gráficos a la derecha).

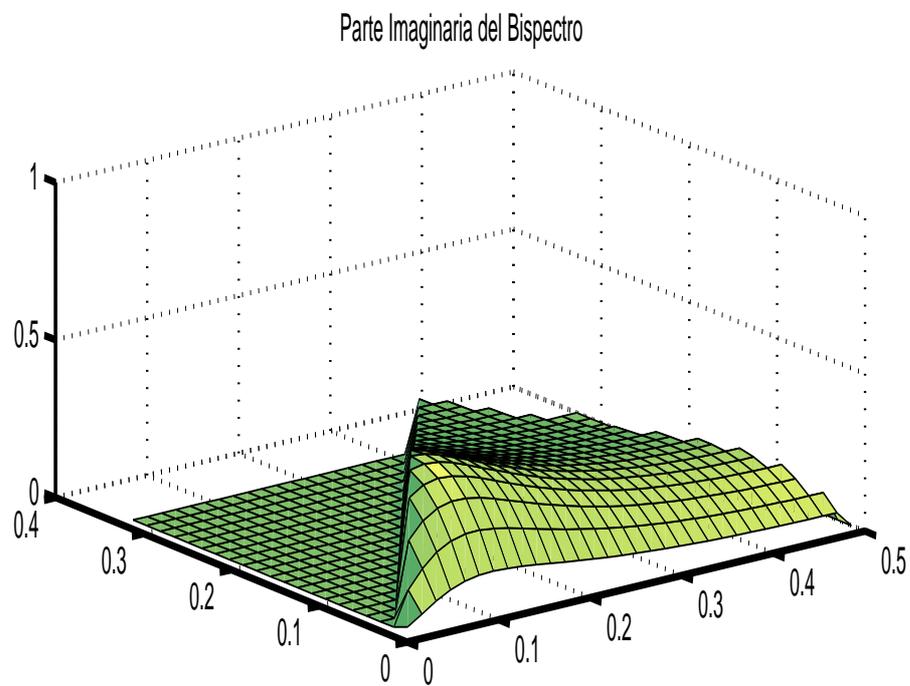
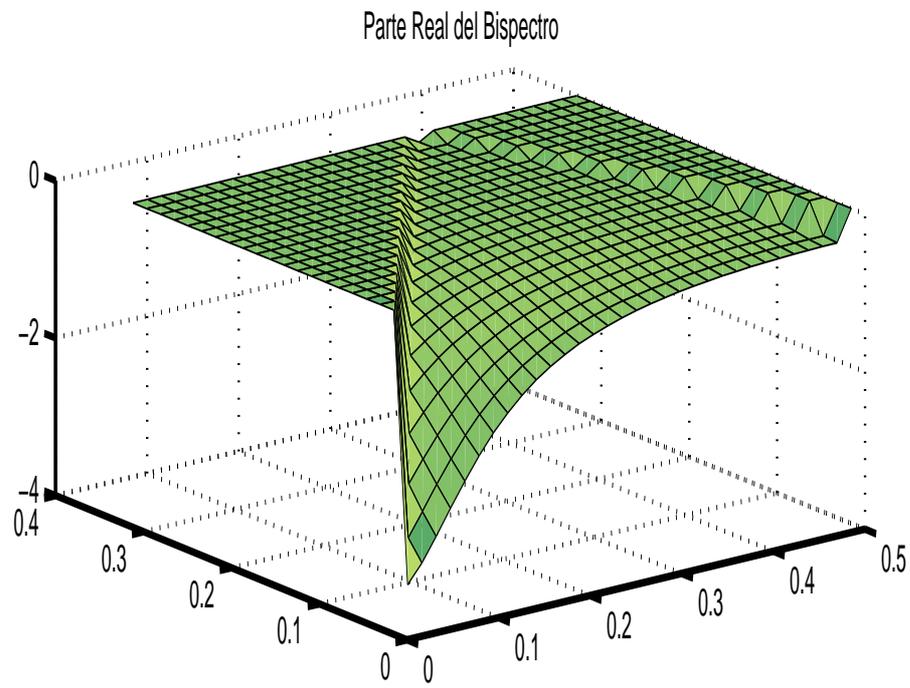


Figura 11: Biespectro del proceso AR(1) con $\phi = 0.5$ y $\epsilon = 0.5$.

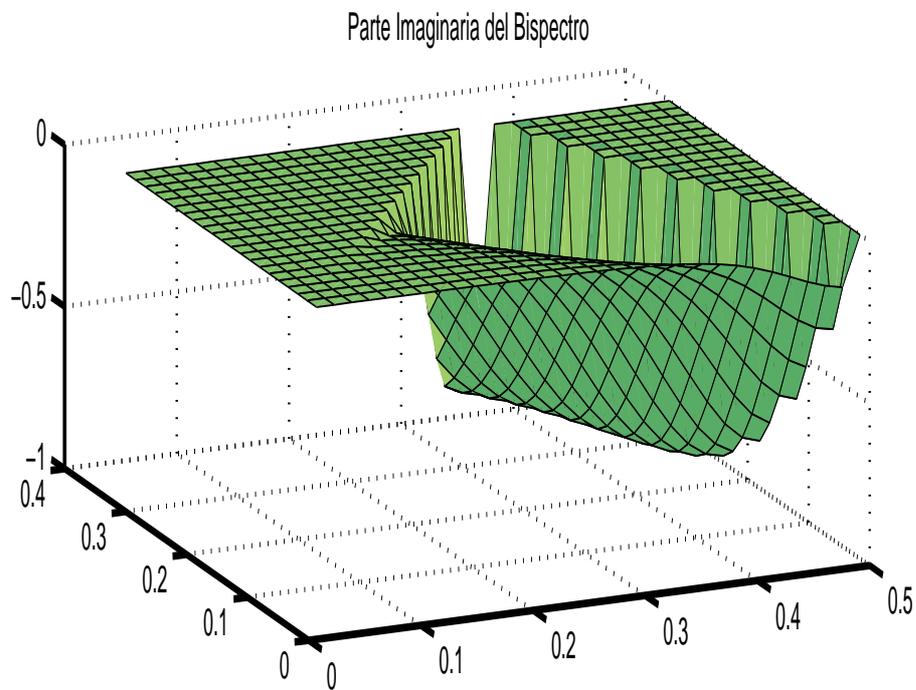
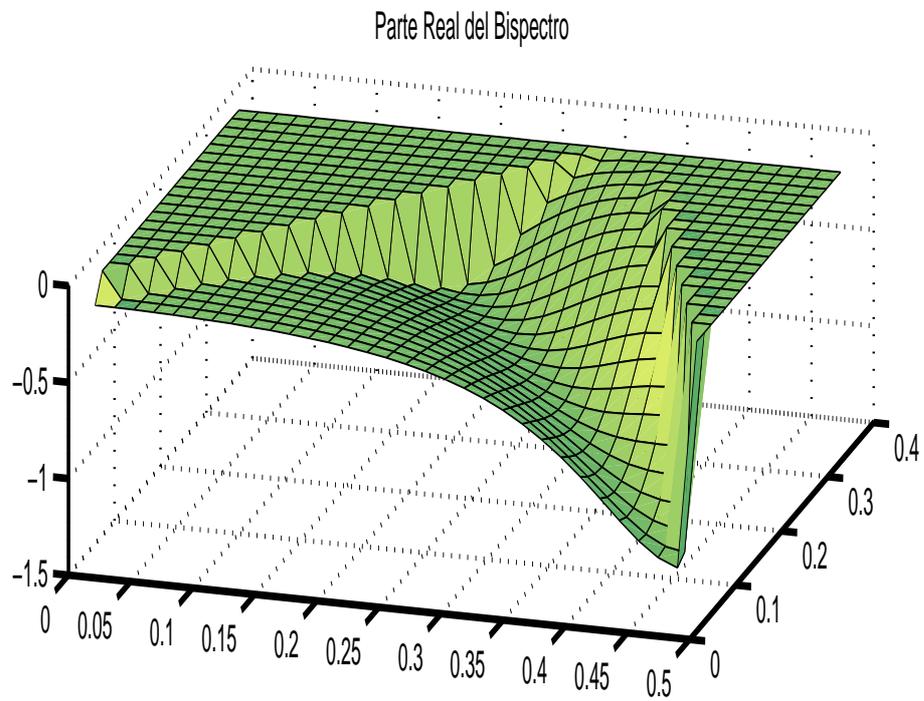


Figura 12: Biespectro del proceso AR(1) con $\phi = -0.5$ y $\epsilon = 0.5$.

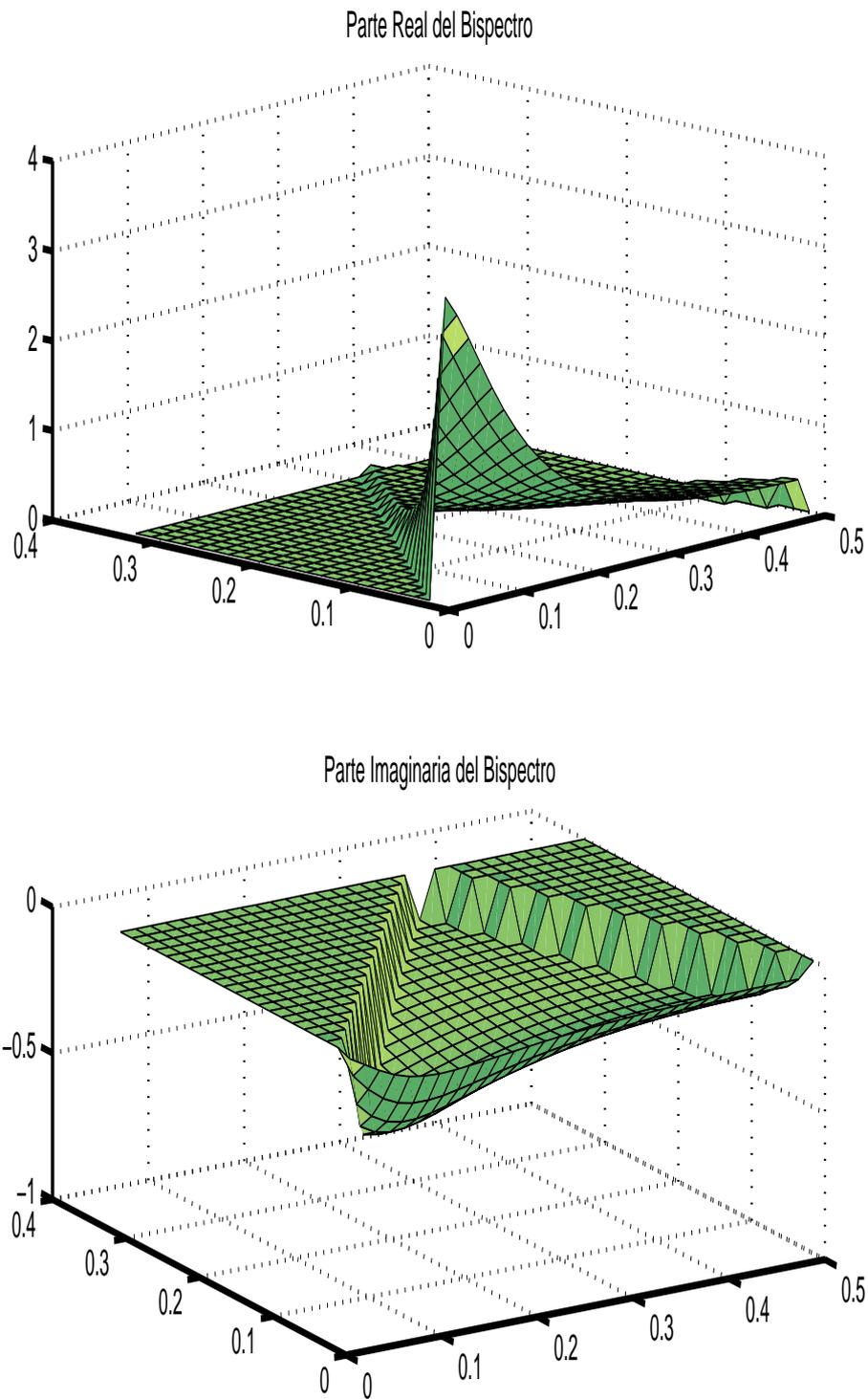


Figura 13: Biespectro del proceso AR(1) con $\phi = 0.5$ y $\epsilon = -0.5$.

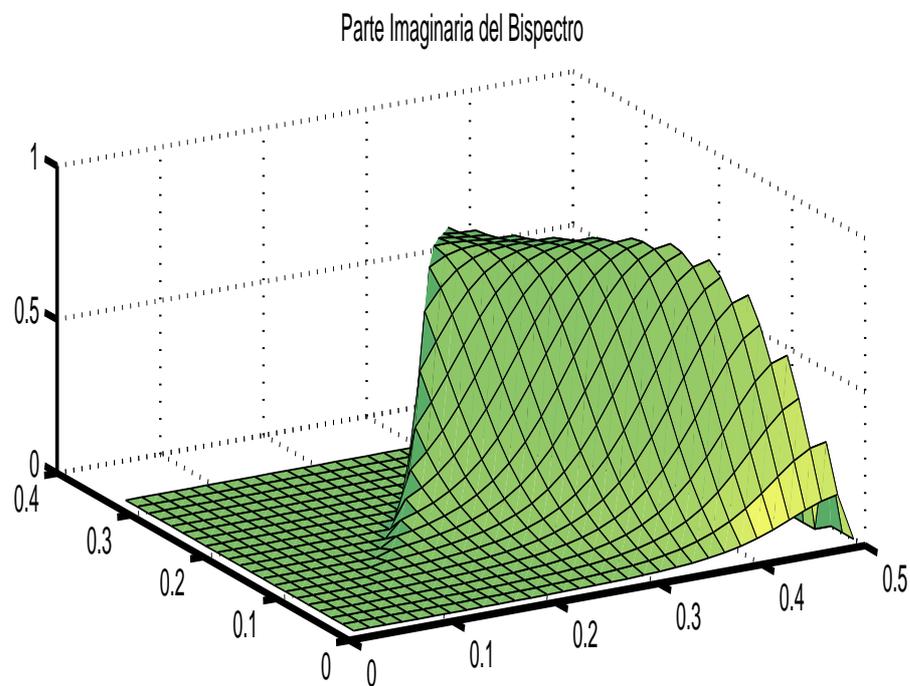
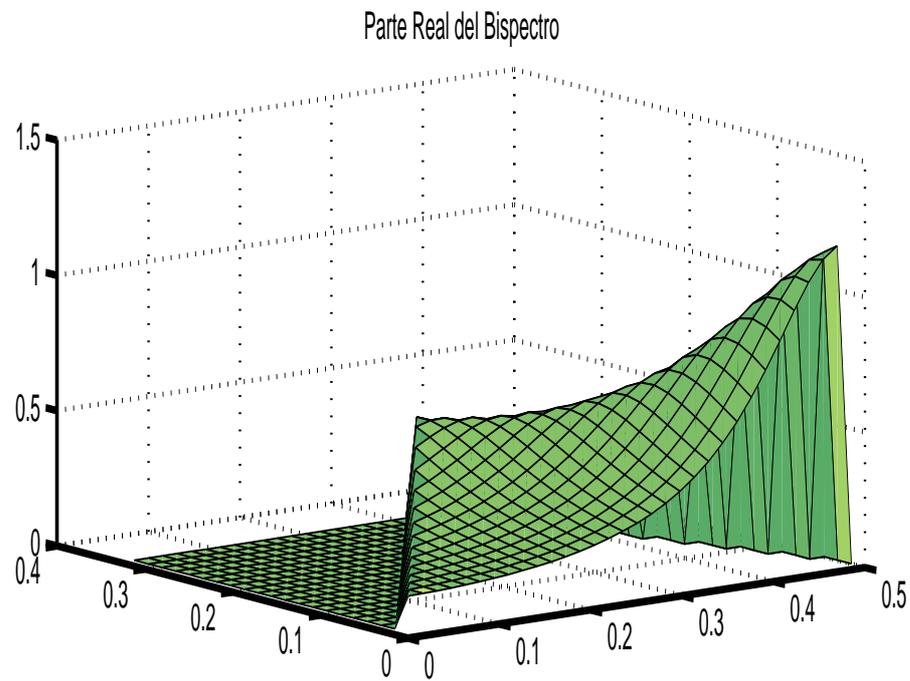


Figura 14: Biespectro del proceso AR(1) con $\phi = -0.5$ y $\epsilon = -0.5$.

4.4. Estimación de la densidad espectral

Sean x_0, x_1, \dots, x_{T-1} una realización de un proceso estacionario de media μ , con momento de orden p ($p \geq 2$) finito y función de autocovarianza $\gamma(s)$. Los estimadores usuales de μ y $\gamma(s)$, son respectivamente:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x_t,$$

$$\hat{\gamma}(s) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1-|s|} (x_t - \bar{x})(x_{t+|s|} - \bar{x}) \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(T-2).$$

Un estimador usual de $S_{2,y}(\omega)$ es el periodograma $I_{2T}(\omega)$ introducido por Schuster (1898) y definido por:

$$I_{2T}(\omega) = \frac{1}{T} d_T(\omega) \overline{d_T(\omega)} = \frac{1}{T} \left| \sum y_t e^{-it2\pi\omega} \right|^2,$$

donde $y_t = x_t - \bar{x}$, $d_T(\omega) = \sum_{t=0}^{T-1} y_t \exp \{-it2\pi\omega\}$ y $0 \leq \omega < 1$.

El cual es asintóticamente insesgado para $S_{2,y}(\omega)$, pero no es un estimador consistente (Grenander (1951) mostró que no converge cuando $T \rightarrow \infty$). Una técnica inicial para obtener una estimación espectral consistente ha sido promediar el periodograma (Bartlett, 1950). Esta técnica fue mejorada por Welch (1967) y es el método que utilizaremos mas adelante para realizar nuestras estimaciones.

De forma análoga un estimador de $S_{3,y}(\omega)$ es el biperiodograma $I_{3T}(\omega)$ definido por

$$\begin{aligned} I_{3T}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{T} d_T(\omega_1) d_T(\omega_2) \overline{d_T(\omega_1 + \omega_2)} \\ &= \frac{1}{T} \sum y_t e^{-it2\pi\omega_1} \sum y_t e^{-it2\pi\omega_2} \sum y_t e^{it2\pi(\omega_1 + \omega_2)}. \end{aligned}$$

4.4.1. Suavizamiento del periodograma

Para ilustrar en que consiste el método que aplicaremos, consideraremos una secuencia de N observaciones $\{y_t\}_{t=0}^{N-1}$, descomponemos la secuencia en K subsecuencias $y_s^{(r)}$, donde el superscript r especifica los segmentos o

intervalos de los datos observados, cada subsecuencia tiene una cantidad de L muestras (stretches) y están espaciadas por M observaciones [M se relaciona con la superposición (overlapping) si $M = L$ entonces el solapamiento es cero y tenemos $K = N/L$ muestras], este M corresponde a una fracción de L . Así $y_s^{(r)}$ se relaciona con y_t de la siguiente forma:

$$y_s^{(r)} = y_{s+(r-1)M}, \quad \begin{cases} 0 \leq s \leq L-1; \\ 1 \leq r \leq K, \end{cases} \quad (56)$$

con K correspondiente al número de subsecuencias que son usadas en la estimación de la densidad espectral. A cada una de las secuencias $y_s^{(r)}$ aplicamos el suavizamiento y calculamos la FFT (Fast Fourier Transform)

$$Y_r(k) = \sum_{s=0}^{L-1} y_s^{(r)} W_{1L}(s) \exp\{-i2\pi s f_k\}, \quad (57)$$

donde $W_1(\cdot)$ es una ventana apropiada de suavizamiento Apéndice A. La cantidad $I_{2r}(f_k)$ llamada periodograma, la calcularemos de la siguiente manera:

$$I_{2r}(f_k) = \frac{|Y_r(k)|^2}{\sum_{s=0}^{L-1} W_{1L}^2(g(s))}, \quad (58)$$

donde

$$f_k = \frac{k}{L} = \text{frecuencias}. \quad (59)$$

La Densidad Espectral Estimada $S_{2L}(f_k)$ es calculada como:

$$S_{2L}(f_k) = \frac{1}{K} \sum_{r=1}^K I_{2r}(f_k) = \frac{1}{K} \frac{\sum_{r=1}^K |Y_r(k)|^2}{\sum_{s=0}^{L-1} W_1^2(g(s))}. \quad (60)$$

Así la densidad espectral estimada es una suma ponderada de cada uno de los periodogramas de subsecuencias individuales.

Ejemplo 4.2. Ilustración en el caso AR(1) Por defecto la ventana de suavizamiento por *MATLAB* (comando *SPECTRUM*) es la de *Hanning*,

la cuál mostramos en la Figura 17. Al aplicarla al proceso AR(1) en el intervalo $(0, 0.5)$ y compararla al espectro teórico (55) vemos como ajusta el suavizamiento que mostramos en la Figura 15 con $N = 512$, $M = L = 64$ y $K = 8$.

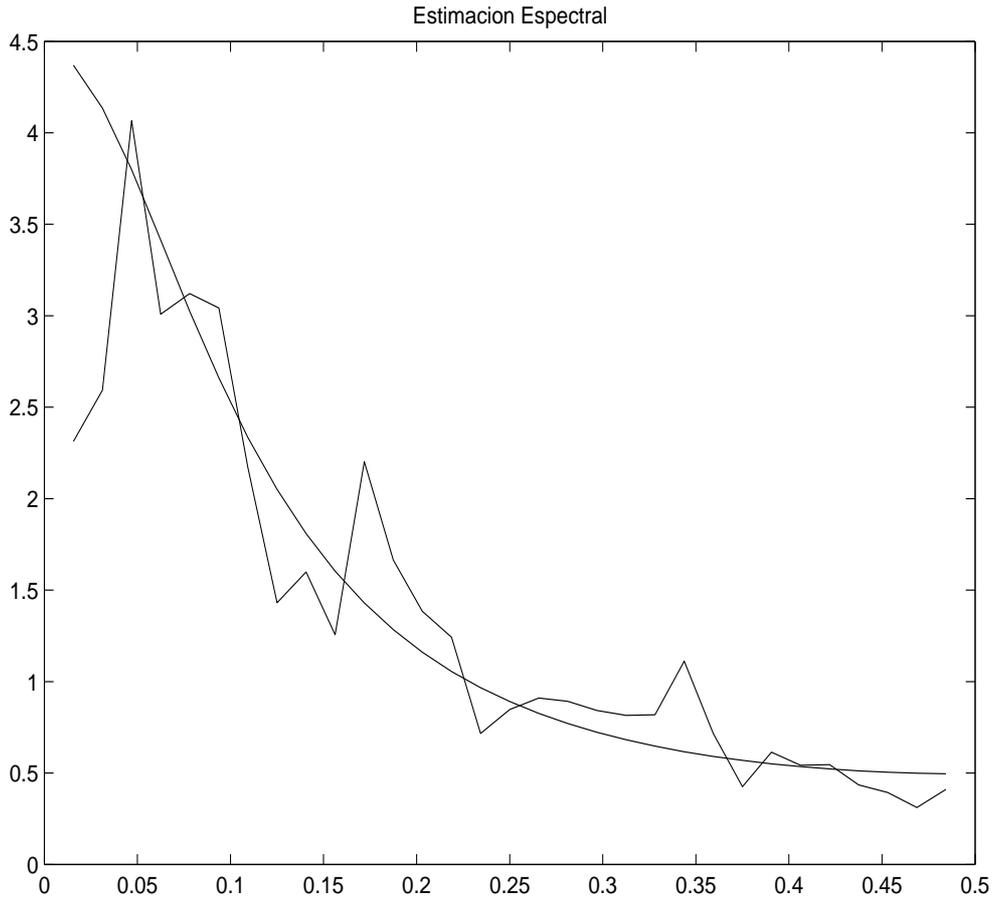


Figura 15: Suavizamiento del Espectro Usando la Ventana de Hamming.

Extendemos la técnica de Welch para el Biperiodograma.

4.4.2. Suavizamiento del biperiodograma

Para el caso de la densidad biespectral, consideramos $y_s^{(r)}$ como la subsecuencia de y_t al igual que en la sección anterior. Cambiamos la expresión anterior de $Y_r(k)$ por la siguiente:

$$Y_r(k) = \sum_{s=0}^{L-1} y_s^{(r)} \exp \{-i2\pi sk/L\}. \quad (61)$$

El único cambio está en que no consideramos la ventana . La cantidad $I_{3r}(f_{k_1}, f_{k_2})$ la llamamos biperiograma y la calculamos de la siguiente forma:

$$I_{3r}(f_{k_1}, f_{k_2}) = \frac{1}{L} Y_s(k_1) Y_s(k_2) \overline{Y_s(k_1 + k_2)}, \quad (62)$$

donde

$$f_{k_i} = \frac{k_i}{L} = \text{frecuencias}, \quad i = 1, 2. \quad (63)$$

La densidad biespectral estimada $S_{3L}(f_{k_1}, f_{k_2})$ es calculada como

$$S_{3L}(f_{k_1}, f_{k_2}) = \frac{1}{K^2} \sum_{k_1=1}^{K-1} \sum_{k_2=1}^{K-1} W_{2T}(g_1(k_1), g_2(k_2)) * I_{3r}(f_{k_1}, f_{k_2}), \quad (64)$$

el símbolo * denota convolución.

4.5. Proceso AR(1) con innovaciones ESN

Consideremos el proceso autorregresivo definido de la siguiente forma:

$$y_t = \phi y_{t-1} + z_t, \quad \text{con } \{z_t\} \stackrel{iid}{\sim} ESN\left(\frac{4\sigma\epsilon}{\sqrt{2\pi}}, \sigma, \epsilon\right) \quad (65)$$

donde

$$E[z_t] = 0, \quad (66)$$

$$E[z_t^2] = \frac{\sigma^2}{\pi} \left((3\pi - 8)\epsilon^2 + \pi \right) = \sigma_z^2, \quad (67)$$

$$E[z_t^3] = \frac{2\sigma^3\sqrt{2}\epsilon}{\pi^{3/2}} \left((5\pi - 16)\epsilon^2 - \pi \right) = \mu_3. \quad (68)$$

La función de autocovarianza esta dada por:

$$\gamma(k) = E[y_t y_{t+k}] = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j z_{t-j} \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i z_{t+k-i}\right] = \sigma_z^2 \frac{\phi^k}{1 - \phi^2}. \quad (69)$$

La densidad espectral viene dada por:

$$S_{2,y}(\omega) = \sigma_z^2 \left| \phi(e^{i2\pi\omega}) \right|^{-2} = \sigma_z^2 \left| 1 - \phi e^{-i2\pi\omega} \right|^{-2},$$

y la densidad biespectral

$$S_{3,y}(\omega_1, \omega_2) = \mu_3 (1 - \phi e^{-i2\pi\omega_1})^{-1} (1 - \phi e^{-i2\pi\omega_2})^{-1} (1 - \phi e^{i2\pi(\omega_1 + \omega_2)})^{-1}. \quad (70)$$

Ejemplo 4.3. Consideramos el proceso AR(1) con innovaciones ESN, donde:

$$f(\omega) = \sigma_z^2 \left| 1 - \phi e^{-i2\pi\omega} \right|^{-2}, \quad (71)$$

con σ_z^2 definido según la ecuación (43), podemos considerar la Figura 16 con tamaño muestral $n = 500$.

Notamos que al suavizar el periodograma se obtiene una estimación muy cercana al espectro teórico.

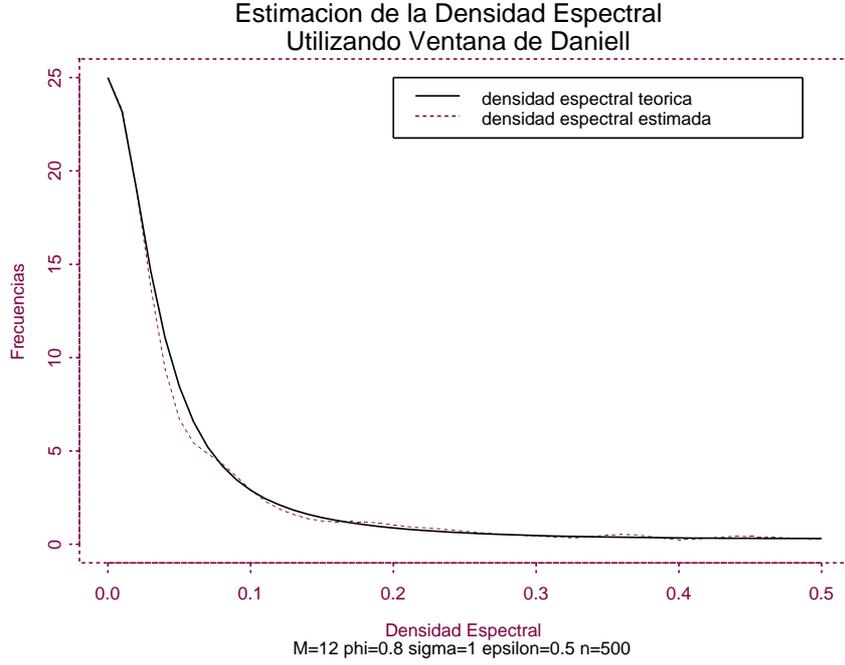


Figura 16: Estimación del espectro usando la ventana de Hamming.

4.6. Estimación mediante espectro y biespectro

Terdik utiliza el espectro y biespectro para estimar los parámetros del modelo minimizando las siguientes funcionales:

$$Q_{2T}(\theta) = \frac{B_{1T}}{\beta_1} \sum_{b_{1k} \in \Lambda_1} \left(\frac{S_2(b_{1k}, \theta) - S_{2T}(b_{1k})}{S_2(b_{1k}, \theta)} \right)^2, \quad (72)$$

$$Q_{3T}(\theta) = \frac{B_{2T}^2}{\beta_2} \sum_{(b_{2m}, b_{2l}) \in \Lambda_2} \frac{|S_3(b_{2m}, b_{2l}, \theta) - S_{3T}(b_{2m}, b_{2l})|^2}{S_2(b_{2m}, \theta) S_2(b_{2l}, \theta) S_2(b_{2m} + b_{2l}, \theta)}, \quad (73)$$

De forma conjunta

$$Q_T(\theta) = p_1 Q_{2T} + q_1 Q_{3T}$$

Donde b_{1k} es igualmente espaciado en $[0,1)$ con ancho de banda B_{1T} como también las frecuencias b_{2k} por ancho de banda B_{2T} , $p_1 \in (0, 1)$,

$q_1 = 1 - p_1$ y las constantes β_1 y β_2 son las medidas de Lebesgue de Λ_1 y Λ_2 respectivamente. Además $\Lambda_1 \subset (0, 1/2)$ y Λ_2 corresponde al triángulo con vértices $(0,0)$, $(1/2,0)$ y $(1/3,1/3)$.

4.7. Aplicación al caso AR(1)

Considerando el modelo definido en (65), y la densidad Espectral dada en (71) y la biespectral en (70) debemos minimizar las expresiones mostradas en (72) y (73).

Tenemos que

$$\begin{aligned} Q_{2T}(\theta) &= \frac{B_{1T}}{\beta_1} \sum_{b_{1k} \in \Lambda_1} \left(\frac{S_2(b_{1k}, \theta) - S_{2T}(b_{1k})}{S_2(b_{1k}, \theta)} \right)^2, \\ &= \frac{B_{1T}}{\beta_1} \sum_{b_{1k} \in \Lambda_1} \left(1 - \frac{S_{2T}(b_{1k})}{\sigma_z^2} |1 - \phi e^{-i2\pi b_{1k}}|^2 \right)^2, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} Q_{3T}(\theta) &= \frac{B_{2T}^2}{\beta_2} \sum_{(b_{2m}, b_{2l}) \in \Lambda_2} \frac{|S_3(b_{2m}, b_{2l}, \theta) - S_{3T}(b_{2m}, b_{2l})|^2}{S_2(b_{2m}, \theta) S_2(b_{2l}, \theta) S_2(b_{2m} + b_{2l}, \theta)}, \\ &= \frac{B_{2T}^2}{\beta_2 \sigma_z^6} \\ &\times \sum_{(b_{2m}, b_{2l}) \in \Lambda_2} \frac{|\mu_3 [\Phi(e^{i2\pi b_{2m}}) \Phi(e^{i2\pi b_{2l}}) \Phi(e^{-i2\pi(b_{2l} + b_{2m})})]^{-1} - S_{3T}(b_{2m}, b_{2l})|^2}{|\Phi(e^{i2\pi b_{2m}})|^{-2} |\Phi(e^{i2\pi b_{2l}})|^{-2} |\Phi(e^{i2\pi(b_{2l} + b_{2m})})|^{-2}}, \\ &= \frac{B_{2T}^2}{\beta_2 \sigma_z^3} \\ &\times \sum_{(b_{2m}, b_{2l}) \in \Lambda_2} \left| \sqrt{\beta_1} - \frac{S_{3T}(b_{2m}, b_{2l}) \Phi(e^{i2\pi b_{2m}}) \Phi(e^{i2\pi b_{2l}}) \Phi(e^{-i2\pi(b_{2l} + b_{2m})})}{\sigma_z^{3/2}} \right|^2, \end{aligned} \quad (75)$$

Donde $\sqrt{\beta_1}$ es el coeficiente de skewness según la notación de Fisher, y este solo contiene información del parámetro ϵ de asimetría.

La forma que hemos utilizado al estimar nuestro modelo consiste de dos partes

- (a) Primeramente centramos los datos y utilizamos la ecuación (74) estimando $\hat{\phi}$ y $\hat{\sigma}_z^2$
- (b) Estandarizamos los datos lo cual elimina σ_z de la ecuación (75) damos el valor de $\hat{\phi}$ como conocido y estimamos la asimetría del modelo.
- (c) Una vez obtenida la asimetría podemos estimar el parámetro de escala de la innovación σ y la localización del proceso θ .

El método anterior fue utilizado en vista que al estimar en forma conjunta el espectro y biespectro, se encontraban subestimaciones de los parámetros.

4.8. Simulaciones

Aquí incluimos algunas simulaciones del método, se tomo una muestra de tamaño muestral $N = 512$, replicándose $M = 1000$ veces.

	Valor Teórico	Valor Estimado	Sesgo ²	ECM
θ	10	9.5479	0.2044	1.2817
ϕ	0.5	0.4902	0.0001	0.0046
σ	5.0	4.4493	0.3033	0.4473
ϵ	0.5	0.4875	0.0002	0.0223
θ	10	9.3147	0.4697	1.3605
ϕ	-0.5	-0.4886	0.0001	0.0041
σ	5.0	4.4574	0.2944	0.4119
ϵ	0.5	0.4752	0.0006	0.0188
θ	10	10.9410	0.8854	5.8165
ϕ	0.5	0.4863	0.0002	0.0046
σ	5.0	4.4502	0.3022	0.4437
ϵ	-0.5	-0.4893	0.0001	0.0221

Tabla 18: Innovación ESN, $\phi = 0.5$ y $\epsilon = 0.5$.

Podemos observar que la estimación de los parámetros ϕ y ϵ tiene poca variabilidad y tiene poco sesgo al contrario de los otros dos parámetros

θ y σ^2 donde la estimación es mas sesgada y por tanto tiene un error cuadrático mayor.

4.9. Proceso AR(1) estandarizado

En esta sección trabajamos con la serie estandarizada pues como observamos en las simulaciones realizadas en la Tabla 4.8 se obtiene una mayor eficiencia al tomar el modelo de esta forma. Detallamos los cálculos intentando establecer un teorema central del límite tal como lo hicimos en el capítulo precedente.

Detallamos los pasos a seguir para estandarizar el proceso autorregresivo. Comenzamos con el modelo siguiente

$$y_t = \phi y_{t-1} + z_t, \quad z_t \stackrel{iid}{\sim} ESN(\theta, \sigma, \epsilon).$$

ahora centramos la serie sustrayendo la media

$$\begin{aligned} y_t - E[y_t] &= \phi y_{t-1} - E[y_t] + z_t, \\ &= \phi y_{t-1} - \phi E[y_{t-1}] + \phi E[y_t] - E[y_t] + z_t, \\ (1 - \phi B)(y_t - E[y_t]) &= z_t - E[z_t], \end{aligned}$$

dividimos la ecuación anterior por la desviación estándar

$$(1 - \phi B) \frac{(y_t - E[y_t])}{\sqrt{Var[y_t]}} = \frac{z_t - E[z_t]}{\sqrt{Var[y_t]}}.$$

Llamemos a $x_t = \frac{(y_t - E[y_t])}{\sqrt{Var[y_t]}}$ y $w_t = \frac{z_t - E[z_t]}{\sqrt{Var[y_t]}}$.

Así $x_t = \phi x_{t-1} + w_t$, con $w_t \stackrel{iid}{\sim} ESN(\theta^*, \sigma^*, \epsilon)$

donde $E[w_t] = 0$ y $Var[w_t] = 1 - \phi^2$. Los parámetros de la secuencia $\{w_t\}$ quedan de la siguiente forma

$$\theta^* = \frac{4\sigma^*\epsilon}{\sqrt{2\pi}}; \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{\sqrt{Var(y_t)}} = \left(\frac{(1-\phi^2)\pi}{[(3\pi-8)\epsilon^2+\pi]} \right)^{1/2}.$$

4.10. Momentos centrales

Luego de haber normalizados los datos los momentos centrales de $\{w_t\}$ quedan en función de los momentos centrales de $\{z_t\}$ de la siguiente forma:

$$\mu_k = \frac{(1 - \phi^2)^{k/2}}{\sigma_z^k} E [(z_t - E[z_t])^k] = (1 - \phi^2)^{k/2} \frac{\nu_k}{\nu_2^{k/2}}.$$

Los primeros 5 momentos centrales de $\{w_t\}$ en función de $\{z_t\}$ son:

$$\begin{aligned}\mu_2 &= (1 - \phi^2), \\ \mu_3 &= (1 - \phi^2)^{3/2} \frac{\nu_3}{\nu_2^{3/2}}, \\ \mu_4 &= (1 - \phi^2)^2 \frac{\nu_4}{\nu_2^2}, \\ \mu_5 &= (1 - \phi^2)^{5/2} \frac{\nu_5}{\nu_2^{5/2}}, \\ \mu_6 &= (1 - \phi^2)^3 \frac{\nu_6}{\nu_2^3},\end{aligned}$$

y los cumulantes correspondientes son:

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= \mu_2, \\ \kappa_3 &= \mu_3, \\ \kappa_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2 = (1 - \phi^2)^2 \left(\frac{\nu_4}{\nu_2^2} - 3 \right), \\ \kappa_5 &= \mu_5 - 10\mu_3 = (1 - \phi^2)^{5/2} \left(\frac{\nu_5}{\nu_2^{5/2}} - 10 \frac{\nu_3}{\nu_2^{3/2}} \right), \\ \kappa_6 &= \mu_6 - 15\mu_4 - 10\mu_3^2 + 30 = (1 - \phi^2)^3 \left(\frac{\nu_6}{\nu_2^3} - 15 \frac{\nu_4}{\nu_2^2} - 10 \frac{\nu_3^2}{\nu_2^3} + 30 \right).\end{aligned}$$

Podemos ver con más detalle los momentos centrales correspondientes a $\{z_t\}$:

$$\begin{aligned}
\nu_2 &= \frac{\sigma^2}{\pi} [(3\pi - 8)\epsilon^2 + \pi], \\
\nu_3 &= \frac{2\sqrt{2}\sigma^3\epsilon}{\pi^{3/2}} [(5\pi - 16)\epsilon^2 - \pi], \\
\nu_4 &= \frac{\sigma^4}{\pi^2} [(15\pi^2 + 16\pi - 192)\epsilon^4 + ((30\pi - 80)\epsilon^2 + 3\pi)\pi], \\
\nu_5 &= \frac{2\sqrt{2}\sigma^5\epsilon}{\pi^{3/2}} [(51\pi^2 - 80\pi - 256)\epsilon^4 + ((7\pi - 24)10\epsilon^2 - 9\pi)\pi], \\
\nu_6 &= \frac{\sigma^6}{\pi^3} [(105\pi^3 + 648\pi^2 - 2240\pi - 2560)\epsilon^6 + 5\epsilon^4\pi(105\pi^2 - 48\pi - 832) \\
&\quad + 3\pi^2((105\pi - 264)\epsilon^2 + 5\pi)].
\end{aligned}$$

4.11. Espectro y biespectro del proceso AR(1)

En esta sección especificamos la densidad espectral y biespectral para el proceso AR(1) estandarizado. De forma general podemos considerar el siguiente proceso lineal

$$x_t = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} \right) w_t = a(z^{-1})w_t, \quad a_0 = 1; \quad z = e^{-i2\pi\lambda},$$

donde $E[x_t] = 0$ y $Var[x_t] = 1$ proceso estandarizado.

Ahora el espectro para el AR(1) estandarizado esta dado por

$$S_2(\lambda) = \kappa_2 |a(z^{-1})|^2 = (1 - \phi^2) |a(z^{-1})|^2,$$

con

$$a(z^{-1}) = (1 - \phi e^{-i2\pi\lambda})^{-1} = (1 - \phi z^{-1})^{-1}. \quad (76)$$

Por tanto en el caso del biespectro se tiene

$$S_3(\lambda_1, \lambda_2) = \kappa_3 a(z_1) a(z_2) a(z_3), \quad z_1 z_2 z_3 = 1,$$

donde κ_2 y κ_3 corresponde a los cumulantes de segundo y tercer orden.

4.12. Consistencia y varianza asintótica

Sea $\eta = (\eta_1, \eta_2)' = (\phi, \epsilon)'$ y $Q_T(\eta_i)$ un funcional que depende del espectro y el biespectro de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Q_T(\eta) &= \frac{pB_{1T}}{2} \sum_{b_{1k} \in \Delta_1^\square} \left(\frac{S_2(b_{1k}; \eta) - S_{2T}(b_{1k})}{S_2(b_{1k}; \eta)} \right)^2 \\ &+ \frac{qB_{2T}^2}{12} \sum_{(b_{2m}, b_{2l}) \in \Delta_2^\square} \frac{|S_3(b_{2m}, b_{2l}; \eta) - S_{3T}(b_{2m}, b_{2l})|^2}{S_2(b_{2m}; \eta)S_2(b_{2l}; \eta)S_2(b_{2m} + b_{2l}; \eta)}, \\ &= Q_{ST}(\eta) + Q_{BT}(\eta). \end{aligned}$$

Donde $S_2(b_{1k}; \eta), S_3(b_{2m}, b_{2l}; \eta)$ corresponden al espectro y biespectro teórico respectivamente y $S_{2T}(b_{1k}), S_{3T}(b_{2m}, b_{2l}; \eta)$ a el periodograma y bi-periodograma suavizado respectivamente. Además Δ_1^\square corresponde a la recta en $[0,1]$ y Δ_2^\square la región $[0, 1]^2$

Bajo condiciones de regularidad establecidas en el Teorema 73 de Terdik tenemos que $\hat{\eta}_T \xrightarrow{P} \eta_0$ y podemos utilizar la aproximación de Taylor para obtener la distribución asintótica de cada componente.

$$\frac{d}{d\eta_i} Q_T(\eta_T) = \frac{d}{d\eta_i} Q_T(\eta_0) + (\eta_T - \eta_0) \frac{d^2}{d\eta_i d\eta_i} Q_T(\eta_T^*), \quad \text{con } i = 1, 2,$$

donde $|\eta_T^* - \eta_0| < |\eta_T - \eta_0|$ ya que η_T minimiza $Q_T(\eta)$, se sigue que $\frac{d}{d\eta} Q_T(\eta_T) = 0$. Así para T grande:

$$\eta_T - \eta_0 \approx \frac{\frac{d}{d\eta} Q_T(\eta_0)}{\frac{d^2}{d\eta d\eta} Q_T(\eta_T^*)}. \quad (77)$$

Nota 4.1. Como tenemos dos variables involucradas (ϕ y ϵ) hacemos el procedimiento por separado para cada parámetro.

El denominador de la expresión (77) por el Lema 74 de Terdik (1999)) converge en probabilidad a

$$\begin{aligned}
P \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{d^2}{(d\eta_i)^2} Q_T(\eta_T) &= \Sigma_0^{1/2}(\eta_0), \\
&= p \int_{\Lambda_1} \left(\frac{d}{d\eta} \log S_2(\omega, \eta_0) \right)^2 d\omega \\
&+ \frac{q}{6} \int \int \frac{\left| \frac{d}{d\eta_i} S_3(\omega_1, \omega_2; \eta_0) \right|^2}{S_2(\omega_1; \eta_0) S_2(\omega_2; \eta_0) S_2(\omega_1 + \omega_2; \eta_0)} d\omega_1 d\omega_2.
\end{aligned}$$

Realizamos los cálculos para los dos parámetros involucrados y en el modelo AR(1).

Primeramente consideramos ϕ :

$$\begin{aligned}
\Sigma_0^{1/2}(\phi_0) &= p \int_{\Lambda_1} \left(\frac{d}{d\phi} \log S_2(\omega, \phi_0) \right)^2 d\omega \\
&+ \frac{q}{6} \int \int \frac{\left| \frac{d}{d\phi} S_3(\omega_1, \omega_2; \phi_0) \right|^2}{S_2(\omega_1; \eta_0) S_2(\omega_2; \eta_0) S_2(\omega_1 + \omega_2; \eta_0)} d\omega_1 d\omega_2 \\
&= p \left\{ \left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 \right)^2 + \frac{2}{1 - \phi^2} \right\} \\
&+ \frac{q}{6} \frac{1}{\kappa_2^3} \left\{ \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \frac{3}{(1 - \phi^2)} \kappa_3^2 \right\}. \tag{78}
\end{aligned}$$

Nota 4.2. Si nos reducimos a un proceso lineal y suponemos que la varianza no depende del parámetro desconocido ϕ entonces $\frac{d}{d\phi} \kappa_i = 0$, $i = 2, 3$ y la ecuación (78) se reduce a

$$\Sigma_0^{1/2}(\phi_0) = \left(2p + \frac{q}{2} \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} \right)^2 \right) \frac{1}{1 - \phi^2},$$

lo cual coincide con lo mostrado en el libro de Terdik página 170.

Ahora lo consideramos para el parámetro ϵ :

$$\begin{aligned}
\Sigma_0^{1/2}(\epsilon_0) &= p \int_{\Lambda_1} \left(\frac{d}{d\epsilon} \log S_2(\omega, \epsilon_0) \right)^2 d\omega, \\
&+ \frac{q}{6} \int \int \frac{\left| \frac{d}{d\epsilon} S_3(\omega_1, \omega_2; \eta_0) \right|^2}{S_2(\omega_1; \eta_0) S_2(\omega_2; \eta_0) S_2(\omega_1 + \omega_2; \eta_0)} d\omega_1 d\omega_2, \\
&= \frac{q}{6} \int \int \frac{\left| \frac{d}{d\epsilon} S_3(\omega_1, \omega_2; \phi_0) \right|^2}{S_2(\omega_1; \eta_0) S_2(\omega_2; \eta_0) S_2(\omega_1 + \omega_2; \eta_0)} d\omega_1 d\omega_2, \\
&= \frac{q}{6} \frac{\left(\frac{d}{d\epsilon} \kappa_3 \right)^2}{\kappa_2^3}. \tag{79}
\end{aligned}$$

Trabajaremos con el numerador de la ecuación (77).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\eta} Q_T(\eta_0) &= p B_{1T} \sum_{b_{1k} \in \Delta_1^\square} (S_2(b_{1k}, \eta_0) - S_{2T}(b_{1k})) A(b_{1k}, \eta_0), \\
&+ \frac{q B_{2T}^2}{6} \sum_{(b_{2m}, b_{2l}) \in \Delta_2^\square} (S_3(b_{2m}, b_{2l}, \eta_0) - S_{3T}(b_{2m}, b_{2l})) \\
&\times B(b_{2m}, b_{2l}, \eta_0).
\end{aligned}$$

Calculemos la varianza asintótica denotándola por

$$\frac{d}{d\eta} Q_T(\eta_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \text{Var} \left(\frac{d}{d\eta} Q_T(\eta_0) \right).$$

El estadístico $Q_{1T}(\eta_0)$ consta de dos términos, por tanto podemos escribirla como la suma:

$$\Sigma_1(\eta_0) = \Sigma_2(\eta_0) + \Sigma_3(\eta_0) + 2\Sigma_{23}(\eta_0). \tag{80}$$

Donde cada una de las componentes esta representada en las ecuaciones (81)–(88) y (91).

$$\begin{aligned}
\Sigma_2(\eta_0) &= p^2 \iint_{\Lambda_1^\square \times \Lambda_1^\square} S_4(\omega, \lambda, -\lambda, \eta_0) A(\omega, \eta_0) A(\lambda, \eta_0) d\omega d\lambda, \\
&+ 2p^2 \|W_1\|^2 \int_{\Lambda_1^\square} \left(\frac{d}{d\eta} \log S_2(\omega, \eta_0) \right)^2 d\omega. \tag{81}
\end{aligned}$$

Calculemos las componentes del lado derecho de (81)

$$\begin{aligned}
S_4(\omega, \lambda, -\lambda, \phi_0) &= \kappa_4 |a(u)|^2 |a(z)|^2, \\
A(\omega, \phi_0) &= \frac{\frac{d}{d\phi} \log(S_2(\omega; \phi_0))}{S_2(\omega; \phi_0)}, \\
&= \frac{\frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2 |a(u)|^2)}{\kappa_2 |a(u)|^2} = \frac{\frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) + \frac{d}{d\phi} \log |a(u)|^2}{\kappa_2 |a(u)|^2}, \\
A(\lambda, \phi_0) &= \frac{\frac{d}{d\phi} \log(S_2(\lambda; \phi_0))}{S_2(\lambda; \phi_0)}, \\
&= \frac{\frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2 |a(z)|^2)}{\kappa_2 |a(z)|^2} = \frac{\frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) + \frac{d}{d\phi} \log |a(z)|^2}{\kappa_2 |a(z)|^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
S_4(\omega, \lambda, -\lambda, \eta_0) A(\omega, \eta_0) A(\lambda, \eta_0) &= \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \left\{ \left(\frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) \frac{d}{d\phi} \log |a(z)|^2 |a(u)|^2 + \frac{d}{d\phi} \log |a(z)|^2 \frac{d}{d\phi} \log |a(u)|^2 \right\}. \tag{82}
\end{aligned}$$

Al integrar las expresiones $\frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) \frac{d}{d\phi} \log |a(z)|^2 |a(u)|^2$
 $+ \frac{d}{d\phi} \log |a(z)|^2 \frac{d}{d\phi} \log |a(u)|^2$ se anulan por (85).

Finalmente

$$\iint_{\Lambda_1^{\square} \times \Lambda_1^{\square}} S_4(\omega, \lambda, -\lambda, \eta_0) A(\omega, \eta_0) A(\lambda, \eta_0) d\omega d\lambda = \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \left(\frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) \right)^2,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda_1^{\square}} \left(\frac{d}{d\phi} \log S_2(\omega, \phi_0) \right)^2 d\omega &= \int_0^1 \left\{ \frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) + \frac{d}{d\phi} \log |a(u)|^2 \right\}^2 d\omega, \\
&= \int_0^1 \left[\left(\frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) \right)^2 + \left(\frac{d}{d\phi} \log |a(u)|^2 \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) \frac{d}{d\phi} \log |a(u)|^2 \right] d\omega, \tag{83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) \right)^2 + \int_0^1 \left[\left(\frac{d}{d\phi} \log |a(u)|^2 \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) \frac{d}{d\phi} \log |a(u)|^2 \right] d\omega. \tag{84}
\end{aligned}$$

Veamos las dos componentes del lado derecho por separado.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{d}{d\phi} \log |a(u)|^2 \right)^2 d\omega &= \int_0^1 \left(\frac{\frac{d}{d\phi} |a(u)|^2}{|a(u)|^2} \right)^2 d\omega, \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\frac{d}{d\phi} a(u)}{a(u)} + \frac{\frac{d}{d\phi} a(u^{-1})}{a(u^{-1})} \right)^2, \\
&= \int_0^1 \left[\left(\frac{\frac{d}{d\phi} a(u)}{a(u)} \right)^2 + 2 \left| \frac{\frac{d}{d\phi} a(u)}{a(u)} \right| + \left(\frac{\frac{d}{d\phi} a(u^{-1})}{a(u^{-1})} \right)^2 \right] d\omega,
\end{aligned}$$

pero de la ecuación (76) tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\frac{d}{d\phi} a(u^{-1})}{a(u^{-1})} d\omega &= \int_0^1 \frac{\frac{d}{d\phi} (1 - \phi u^{-1})^{-1}}{(1 - \phi u^{-1})^{-1}} d\omega = \int_0^1 \frac{u^{-1} d\omega}{(1 - \phi u^{-1})}, \quad (85) \\
&= \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j u^{j+1} d\omega = \frac{1}{\phi} \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \int_0^1 u^{-k} d\omega,
\end{aligned}$$

donde

$$\int_0^1 u^{-k} d\omega = \int_0^1 e^{-2\pi i \omega k} d\omega = \int_0^1 \{ \cos(-2\pi \omega k) - i \sin(2\pi \omega k) \} d\omega = 0.$$

De forma análoga se sigue que

$$\int_0^1 \left(\frac{\frac{d}{d\phi} a(u^{-1})}{a(u^{-1})} \right)^2 d\omega = 0.$$

Falta calcular

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left| \frac{\frac{d}{d\phi} a(u)}{a(u)} \right|^2 d\omega &= \int_0^1 |1 - \phi u^{-1}|^{-2} d\omega, \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1 - \phi u^{-1}} \frac{1}{1 - \phi u} d\omega = \int_0^1 \sum_{i,j=0}^{\infty} \phi^{i+1} u^{i-j} d\omega,
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{2k} + \sum_{i \neq j}^{\infty} \phi^{i+1} u^{i-j} d\omega = \frac{1}{1-\phi^2}. \quad (86)$$

Por tanto

$$\int_{\Lambda_1^{\square}} \left(\frac{d}{d\phi} \log S_2(\omega, \phi_0) \right)^2 d\omega = \left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 \right)^2 + \frac{2}{1-\phi^2}. \quad (87)$$

Finalmente (81) queda como

$$\begin{aligned} \Sigma_2(\phi_0) &= p^2 \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 \right)^2 \\ &\quad + 2p^2 \|W_1\|^2 \left\{ \left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 \right)^2 + \frac{2}{1-\phi^2} \right\}. \end{aligned}$$

Desarrollemos la siguiente componente de (80)

$$\begin{aligned} \Sigma_3(\eta_0) &= \frac{q^2}{6^2} \iiint \int_{\Lambda_2^{\square} \times \Lambda_2^{\square}} S_6(\omega_1, \omega_2, -\lambda_1, -\lambda_2, \omega_3; \eta_0) B(\omega_1, \omega_2; \eta_0) \\ &\quad \times B(-\lambda_1, -\lambda_2; \eta_0) d\omega_1 d\omega_2 d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &\quad + \frac{q^2 W_{23}}{4} \iiint \int_{\Lambda_{21}^{\square} \times \Lambda_2^{\square}} S_3(\lambda_1, \lambda_2; \eta_0) B(\lambda_1, \lambda_2; \eta_0) \bar{S}_3(-\lambda_3, \omega_2; \eta_0) \\ &\quad \times \bar{B}(-\lambda_3, \omega_2; \eta_0) + S_4(\lambda_1, \lambda_2, -\omega_2; \eta_0) \bar{B}(-\omega_2 - \lambda_3, \omega_2; \eta_0) \\ &\quad \times B(\lambda_1, \lambda_2; \eta_0) S_2(\lambda_3; \eta_0) d\lambda_1 d\lambda_2 d\omega_2 + \frac{q^2 W_{20}}{6} \iiint \int_{\Lambda_{21}^{\square} \times \Lambda_2^{\square}} S_4(\lambda_1, \lambda_2, 0; \eta_0) \\ &\quad \times B(\lambda_1, \lambda_2; \eta_0) \bar{B}(0, \omega_2; \eta_0) S_2(\omega_2; \eta_0) d\lambda_1 d\lambda_2 d\omega_2 \\ &\quad + \frac{q^2 W_{20}^2}{4 S_2(0; \eta_0)} \left| \int_{\Lambda_1^{\square}} \frac{\frac{d}{d\eta_i} S_3(\omega_1, 0; \eta_0)}{S_2(\omega_1; \eta_0)} d\omega_1 \right|^2 \\ &\quad + \frac{q^2 \|W_2\|^2}{6} \iint \int_{\Lambda_2^{\square}} \frac{\left| \frac{d}{d\eta} S_3(\omega_1, \omega_2; \eta_0) \right|^2}{S_2(\omega_1; \eta_0) S_2(\omega_2; \eta_0) S_2(\omega_3; \eta_0)} d\omega_1 d\omega_2, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned}
S_6(\omega_1, \omega_2, -\lambda_1, -\lambda_2, \omega_3) &= \kappa_6 \prod_{i=1}^3 a(u_i) \prod_{j=1}^3 a(z_j^{-1}), \\
B(\omega_1, \omega_2) &= \frac{\frac{d}{d\phi} \bar{S}_3(\omega_1, \omega_2)}{\prod_{i=1}^3 S_2(\omega_i)} = \frac{\frac{d}{d\phi} \{ \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(u_i^{-1}) \}}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(u_i)|^2}, \\
&= \frac{\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(u_i^{-1}) + \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \prod_{i=1}^3 a(u_i^{-1})}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(u_i)|^2}, \\
B(-\lambda_1, -\lambda_2) &= \frac{\frac{d}{d\phi} \bar{S}_3(-\lambda_1, -\lambda_2)}{\prod_{i=1}^3 S_2(-\lambda_i)} = \frac{\frac{d}{d\phi} \{ \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(z_i) \}}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(z_i)|^2}, \\
&= \frac{\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(z_i) + \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \prod_{i=1}^3 a(z_i)}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(z_i)|^2}.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
&S_6(\omega_1, \omega_2, -\lambda_1, -\lambda_2, \omega_3) B(\omega_1, \omega_2) B(-\lambda_1, -\lambda_2) \\
&= \frac{\kappa_6}{\kappa_2^6} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \kappa_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{d}{d\phi} a(u_i^{-1})}{a(u_i^{-1})} \right) \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \kappa_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{d}{d\phi} a(z_i)}{a(z_i)} \right).
\end{aligned}$$

Integrando la expresión anterior y ocupando la ecuación (85) obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\iiint_{\Lambda_2^{\square} \times \Lambda_2^{\square}} S_6(\omega_1, \omega_2, -\lambda_1, -\lambda_2, \omega_3; \eta_0) B(\omega_1, \omega_2; \eta_0) \\
&\quad \times B(-\lambda_1, -\lambda_2; \eta_0) d\omega_1 d\omega_2 d\lambda_1 d\lambda_2 = \frac{\kappa_6}{\kappa_2^6} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2. \tag{89}
\end{aligned}$$

Continuando con las siguientes componentes tenemos

$$\begin{aligned}
S_3(\lambda_1, \lambda_2) &= \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(z_i), \\
B(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\frac{d}{d\phi} \bar{S}_3(\lambda_1, \lambda_2)}{\prod_{i=1}^3 S_2(\lambda_i)} = \frac{\frac{d}{d\phi} \{ \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(z_i^{-1}) \}}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(z_i)|^2}, \\
&= \frac{\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(z_i^{-1}) + \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \prod_{i=1}^3 a(z_i^{-1})}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(z_i)|^2}, \\
\bar{S}_3(-\lambda_3, \omega_2) &= \kappa_3 a(z_3) a(u_2^{-1}) a(z_3^{-1} u_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{B}(-\lambda_3, \omega_2) &= \frac{\frac{d}{d\phi} S_3(-\lambda_3, \omega_2)}{S_2(-\lambda_3) S_2(\omega_2) S_2(\lambda_3 - \omega_2)} \\
&= \frac{\frac{d}{d\phi} \{ \kappa_3 a(z_3^{-1}) a(u_2) a(z_3 u_2^{-1}) \}}{\kappa_2^3 |a(z_3^{-1})|^2 |a(u_2)|^2 |a(z_3 u_2^{-1})|^2}, \\
&= \frac{\frac{d}{d\phi} \kappa_3 a(z_3^{-1}) a(u_2) a(z_3 u_2^{-1})}{\kappa_2^3 |a(z_3^{-1})|^2 |a(u_2)|^2 |a(z_3 u_2^{-1})|^2}, \\
&+ \frac{\kappa_3 \frac{d}{d\phi} \{ a(z_3^{-1}) a(u_2) a(z_3 u_2^{-1}) \}}{\kappa_2^3 |a(z_3^{-1})|^2 |a(u_2)|^2 |a(z_3 u_2^{-1})|^2}, \\
\overline{S}_4(\lambda_1, \lambda_2, -\omega_2) &= \kappa_4 a(z_1) a(z_2) a(u_2^{-1}) a(z_3 u_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{B}(-\omega_2 - \lambda_3, \omega_2) &= \frac{\frac{d}{d\phi} S_3(-\omega_2 - \lambda_3, \omega_2)}{S_2(-\omega_2 - \lambda_3) S_2(\omega_2) S_2(\lambda_3)} \\
&= \frac{\frac{d}{d\phi} \{ \kappa_3 a(u_2^{-1} z_3^{-1}) a(u_2) a(z_3) \}}{\kappa_2^3 |a(u_2^{-1} z_3^{-1})|^2 |a(u_2)|^2 |a(z_3)|^2}, \\
&= \frac{\frac{d}{d\phi} \kappa_3 a(u_2^{-1} z_3^{-1}) a(u_2) a(z_3)}{\kappa_2^3 |a(u_2^{-1} z_3^{-1})|^2 |a(u_2)|^2 |a(z_3)|^2}, \\
&+ \frac{\kappa_3 \frac{d}{d\phi} \{ a(u_2^{-1} z_3^{-1}) a(u_2) a(z_3) \}}{\kappa_2^3 |a(u_2^{-1} z_3^{-1})|^2 |a(u_2)|^2 |a(z_3)|^2}, \\
S_2(\lambda_3) &= \kappa_2 |a(z_3)|^2.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
&S_3(\lambda_1, \lambda_2) B(\lambda_1, \lambda_2) \overline{S}_3(-\lambda_3, \omega_2) \overline{B}(-\lambda_3, \omega_2) \\
&= \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \right)^2 \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \kappa_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{d}{d\phi} a(z_i^{-1})}{a(z_i^{-1})} \right), \\
&\times \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \kappa_3 \left(\frac{\frac{d}{d\phi} a(z_3^{-1})}{a(z_3^{-1})} + \frac{\frac{d}{d\phi} a(u_2)}{a(u_2)} + \frac{\frac{d}{d\phi} a(z_3 u_2^{-1})}{a(z_3 u_2^{-1})} \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& S_4(\lambda_1, \lambda_2, -\omega_2) \overline{B}(-\omega_2 - \lambda_3, \omega_2) B(\lambda_1, \lambda_2) S_2(\lambda_3) \\
&= \frac{\kappa_4}{\kappa_2^5} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \kappa_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{d}{d\phi} a(z_i^{-1})}{a(z_i^{-1})} \right), \\
&\times \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \kappa_3 \left(\frac{\frac{d}{d\phi} a(z_3)}{a(z_3)} + \frac{\frac{d}{d\phi} a(u_2)}{a(u_2)} + \frac{\frac{d}{d\phi} a(z_3^{-1} u_2^{-1})}{a(z_3^{-1} u_2^{-1})} \right) \right).
\end{aligned}$$

Integrando las dos expresiones anteriores [ocupando (85) y (86)] se llega a:

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Lambda_{21}^{\square} \times \Lambda_2^{\square}} S_3(\lambda_1, \lambda_2; \eta_0) B(\lambda_1, \lambda_2; \eta_0) \overline{S}_3(\lambda_3, \omega_2; \eta_0) \overline{B}(-\lambda_3, \omega_2; \eta_0) d\lambda_1 d\lambda_2 d\omega_2, \\
&= \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \right)^2 \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2, \\
& \iiint_{\Lambda_{21}^{\square} \times \Lambda_2^{\square}} \overline{S}_4(\lambda_1, \lambda_2, -\omega_2; \eta_0) \overline{B}(-\omega_2 - \lambda_3, \omega_2; \eta_0) \\
&\times B(\lambda_1, \lambda_2; \eta_0) S_2(\lambda_3; \eta_0) d\lambda_1 d\lambda_2 d\omega_2, \\
&= \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_2^5} \right) \left[\left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \kappa_3^2 \frac{1}{1 - \phi^2} \right].
\end{aligned}$$

Siguiendo con el análisis de las componentes de (88):

$$\begin{aligned}
S_4(\lambda_1, \lambda_2, 0) &= \kappa_4 a(1) \prod_{i=1}^3 a(z_i), \\
B(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(z_i^{-1}) + \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \prod_{i=1}^3 a(z_i^{-1})}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(z_i)|^2}, \\
\overline{B}(0, \omega_2) &= \frac{\frac{d}{d\phi} \kappa_3 |a(u_2)|^2 + \kappa_3 \frac{d}{d\phi} |a(u_2)|^2}{\kappa_2^3 a(1) |a(u_2)|^2 |a(u_2)|^2}, \\
S_2(\omega_2) &= \kappa_2 |a(u_2)|^2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
& S_4(\lambda_1, \lambda_2, 0)B(\lambda_1, \lambda_2)\overline{B}(0, \omega_2)S_2(\omega_2) \\
&= \frac{\kappa_4}{\kappa_2^5} \left\{ \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \kappa_3 \left(\frac{\frac{d}{d\phi} a(u_2)}{a(u_2)} + \frac{\frac{d}{d\phi} a(u_2^{-1})}{a(u_2^{-1})} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \kappa_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{d}{d\phi} a(z_i^{-1})}{a(z_i^{-1})} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Lambda_{21}^{\square} \times \Lambda_2^{\square}} S_4(\lambda_1, \lambda_2, 0; \eta_0)B(\lambda_1, \lambda_2; \eta_0)\overline{B}(0, \omega_2; \eta_0)S_2(\omega_2; \eta_0)d\lambda_1 d\lambda_2 d\omega_2 \\
&= \frac{\kappa_4}{\kappa_2^5} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2.
\end{aligned}$$

Continuamos con los dos últimos términos de (88):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda_1^{\square}} \frac{\frac{d}{d\phi} S_3(\omega_1, 0; \phi_0)}{S_2(\omega_1; \phi_0)} d\omega_1 \\
&= \frac{a(1)}{\kappa_2} \int_{\Lambda_1^{\square}} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \kappa_3 \frac{\frac{d}{d\phi} |a(u_1)|^2}{|a(u_1)|^2} \right) d\omega_1 = \frac{a(1)}{\kappa_2} \frac{d}{d\phi} \kappa_3, \\
& \frac{\left| \frac{d}{d\eta} S_3(\omega_1, \omega_2) \right|^2}{S_2(\omega_1)S_2(\omega_2)S_2(\omega_3)} = \frac{\frac{d}{d\phi} \{ \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(u_i) \} \frac{d}{d\phi} \{ \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(u_i^{-1}) \}}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(u_i)|^2}, \\
&= \frac{\left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(u_i) + \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \prod_{i=1}^3 a(u_i) \right)}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(u_i)|^2}, \\
&\times \frac{\left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(u_i^{-1}) + \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \prod_{i=1}^3 a(u_i^{-1}) \right)}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(u_i)|^2}, \\
&= \frac{1}{\kappa_2^3} \left\{ \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \kappa_3 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\frac{d}{d\phi} a(u_i)}{a(u_i)} + \frac{\frac{d}{d\phi} a(u_i^{-1})}{a(u_i^{-1})} \right) \right. \\
&\quad \left. + \kappa_3^2 \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{d}{d\phi} a(u_i)}{a(u_i)} \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{d}{d\phi} a(u_i^{-1})}{a(u_i^{-1})} \right\}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Lambda_2^{\square}} \frac{\left| \frac{d}{d\eta} S_3(\omega_1, \omega_2; \eta_0) \right|^2}{S_2(\omega_1; \eta_0) S_2(\omega_2; \eta_0) S_2(\omega_3; \eta_0)} d\omega_1 d\omega_2, \\ & = \frac{1}{\kappa_2^3} \left\{ \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + 3\kappa_3^2 \frac{1}{1-\phi^2} \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente (88) queda como:

$$\begin{aligned} \Sigma_3(\eta_0) &= \frac{q^2 \kappa_6}{6^2 \kappa_2^6} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \frac{q^2 W_{23}}{4} \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \right)^2 \cdot \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_2^5} \right) \\ & \quad \times \left\{ \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \kappa_3^2 \frac{1}{1-\phi^2} \right\} \\ & + \frac{q^2 W_{20}}{6} \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_2^5} \right) \left\{ \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \kappa_3^2 \frac{1}{1-\phi^2} \right\} + \frac{q^2 W_{20}^2}{4\kappa_2^3} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 \\ & + \frac{q^2 \|W_2\|^2}{6} \frac{1}{\kappa_2^3} \left\{ \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + 3\kappa_3^2 \frac{1}{1-\phi^2} \right\}. \end{aligned} \tag{90}$$

Desarrollemos la última componente de (80):

$$\begin{aligned} \Sigma_{23}(\eta_0) &= \frac{pq}{6} \iiint_{\Lambda_2^{\square} \times \Lambda_1^{\square}} S_5(\omega, -\omega, -\omega_1, -\omega_2; \eta_0) \bar{B}(\omega_1, \omega_2; \eta_0) \\ & \quad \times A(\omega; \eta_0) d\omega_1 d\omega_2 d\omega \\ & + pq W_{12}(\rho) \iint_{\Lambda_{21}^{\square} \times \Lambda_1^{\square}} S_3(-\omega_1, -\omega_2; \eta_0) \bar{B}(\omega_1, \omega_2; \eta_0) \\ & \quad \times \frac{d}{d\eta} \log S_2(\omega_1; \eta_0) d\omega_1 d\omega_2 \\ & + \frac{pq W_{20}}{2} \iint_{\Lambda_{21}^{\square} \times \Lambda_1^{\square}} S_3(\omega_1, 0; \eta_0) \bar{B}(\omega_1, 0; \eta_0) \frac{d}{d\eta} \\ & \quad \times \log S_2(\omega_2; \eta_0) d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned} \tag{91}$$

Veamos la primera expresión de (91):

$$\begin{aligned}
S_5(\omega, -\omega, -\omega_1, -\omega_2) &= \kappa_5 |a(u)|^2 \prod_{i=1}^3 a(u_i^{-1}), \\
\bar{B}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(u_i) + \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \prod_{i=1}^3 a(u_i)}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(u_i)|^2}, \\
A(\omega) &= \frac{\frac{d}{d\phi} \log(\kappa_2) + \frac{d}{d\phi} \log |a(u)|^2}{\kappa_2 |a(u)|^2} \\
S_5(\omega, -\omega, -\omega_1, -\omega_2) \bar{B}(\omega_1, \omega_2) A(\omega) &= \frac{\kappa_5}{\kappa_2^4} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \kappa_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{d}{d\phi} a(u_i)}{a(u_i)} \right) \\
&\times \left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 + \frac{d}{d\phi} \log |a(u)|^2 \right) \\
&\iint \iint_{\Lambda_2^{\square} \times \Lambda_1^{\square}} S_5(\omega, -\omega, -\omega_1, -\omega_2) \bar{B}(\omega_1, \omega_2) A(\omega) d\omega_1 d\omega_2 d\omega \\
&= \frac{\kappa_5}{\kappa_2^4} \frac{d}{d\phi} \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \log \kappa_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_3(-\omega_1, -\omega_2) &= \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(u_i^{-1}) \\
\bar{B}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \prod_{i=1}^3 a(u_i) + \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \prod_{i=1}^3 a(u_i)}{\kappa_2^3 \prod_{i=1}^3 |a(u_i)|^2} \\
\frac{d}{d\phi} \log S_2(\omega_1) &= \frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 + \frac{d}{d\phi} \log |a(u_1)|^2 \\
S_3(-\omega_1, -\omega_2) \bar{B}(\omega_1, \omega_2) \frac{d}{d\phi} \log S_2(\omega_1) &= \frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \kappa_3 \sum_{i=1}^3 \frac{\frac{d}{d\phi} a(u_i)}{a(u_i)} \right) \\
&\times \left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 + \frac{d}{d\phi} \log |a(u_1)|^2 \right), \\
&\iint_{\Lambda_{21}^{\square} \times \Lambda_1^{\square}} S_3(-\omega_1, -\omega_2) \bar{B}(\omega_1, \omega_2) \frac{d}{d\phi} \log S_2(\omega_1) d\omega_1 d\omega_2 \\
&= \frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 + \kappa_3 \frac{1}{1 - \phi^2} \right),
\end{aligned}$$

y finalmente,

$$\begin{aligned}
S_3(\omega_1, 0) &= \kappa_3 a(1) |a(u_1)|^2 \\
\bar{B}(\omega_1, 0) &= \frac{\frac{d}{d\phi} \kappa_3 |a(u_1)|^2 + \kappa_3 \frac{d}{d\phi} |a(u_1)|^2}{\kappa_2^3 a(1) |a(u_1)|^4} \\
\frac{d}{d\phi} \log S_2(\omega_2) &= \frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 + \frac{d}{d\phi} \log |a(u_2)|^2 \\
\iint_{\Lambda_{21}^{\square} \times \Lambda_1^{\square}} S_3(\omega_1, 0) \bar{B}(\omega_1, 0) \frac{d}{d\phi} \log S_2(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \\
&= \frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \frac{d}{d\phi} \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \log \kappa_2,
\end{aligned}$$

y por tanto (91) queda como:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{23}(\eta_0) &= \frac{pq}{6} \frac{\kappa_5}{\kappa_2^4} \frac{d}{d\phi} \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 + pq W_{12}(\rho) \frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 \right. \\
&\quad \left. + \kappa_3 \frac{1}{1-\phi^2} \right) + \frac{pq W_{20}}{2} \frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \frac{d}{d\phi} \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \log \kappa_2
\end{aligned} \tag{92}$$

Valores de ϕ :

$$\Sigma_2(\phi_0) = p^2 \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 \right)^2 + 2p^2 \|W_1\|^2 \left(\left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 \right)^2 + \frac{2}{1-\phi^2} \right), \tag{93}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_3(\phi_0) &= \frac{q^2}{6^2} \frac{\kappa_6}{\kappa_2^6} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \frac{q^2 W_{23}}{4} \left\{ \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \right)^2 \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\kappa_4}{\kappa_2^5} \left(\left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \frac{\kappa_3^2}{1-\phi^2} \right) \right\} + \frac{q^2 W_{20}}{6} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^5} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 \\
&\quad + \frac{q^2 W_{20}^2}{4 \kappa_2^3} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \frac{q^2 \|W_2\|^2}{6} \left(\frac{\left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2}{\kappa_2} + 3 \frac{\kappa_3^2}{\kappa_2^3} \frac{1}{1-\phi^2} \right),
\end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{23}(\phi_0) &= \frac{pq}{6} \frac{\kappa_5}{\kappa_2^4} \frac{d}{d\phi} \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 + pq W_{12}(\rho) \frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 \frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \frac{\kappa_3}{1-\phi^2} \right) \\
&\quad + \frac{pq W_{20}}{2} \frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \frac{d}{d\phi} \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \log \kappa_2.
\end{aligned} \tag{95}$$

Nota 4.3. Si nos reducimos al proceso autorregresivo y suponemos que la varianza no depende del parámetro desconocido ϕ entonces $\frac{d}{d\phi}\kappa_i = 0$, $i = 2, 3$ entonces la ecuación (80) se reduce a

$$\begin{aligned}\Sigma_1(\phi_0) &= 2p^2\|W_1\|^2 \left(\frac{2}{1-\phi^2} \right) + \frac{q^2W_{23}}{4} \left(\frac{\kappa_4}{\kappa_2^5} \frac{\kappa_3^2}{1-\phi^2} \right) \\ &+ \frac{q^2\|W_2\|^2}{2} \frac{\kappa_3^2}{\kappa_2^3} \frac{1}{1-\phi^2} + pqW_{12}(\rho) \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} \right)^2 \frac{1}{1-\phi^2}, \\ &= \left[4p^2\|W_1\|^2 + \left(\frac{q^2W_{23}}{4} \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} + \frac{q^2\|W_2\|^2}{2} + 2pqW_{12}(\rho) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} \right)^2 \right] \frac{1}{1-\phi^2},\end{aligned}$$

lo que se corresponde con la última ecuación mostrada en la página 169 de Terdik (1999). Por tanto,

$$TVar(\phi_T - \phi_0) \approx \frac{\Sigma_{R1}(\phi_0)}{\Sigma_0(\phi_0)} \approx \frac{\left(4p_1^2 + \left(9q_1^2 \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} + 18q_1^2 + 6p_1q_1 \right) \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} \right)^2 \right)}{\left(\left(2p_1 + 3q_1 \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} \right)^2 \right) \frac{1}{1-\phi^2} \right)^2},$$

donde $p_1 = 2p$, $q_1 = 12q$ y $p = 1 - q$.

Nota 4.4. Si consideramos solo los periodogramas sin el suavizamiento y desarrollando algunas de las expresiones, entonces las ecuaciones (93)–(95) se reducen a:

$$\begin{aligned}\Sigma_{R2}(\phi_0) &= p^2 \frac{\kappa_4}{\kappa_2^2} \left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 \right)^2 + 2p^2 \left(\left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 \right)^2 + \frac{2}{1-\phi^2} \right), \\ &= 4p^2 \kappa_4 \frac{\phi^2}{(1-\phi^2)^4} + 4p^2 \frac{(1+\phi^2)}{(1-\phi^2)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{R3}(\phi_0) &= \frac{q^2 \kappa_6}{6^2 \kappa_2^6} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \frac{q^2}{4} \left\{ \left(\frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \right)^2 \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa_4}{\kappa_2^5} \left(\left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \frac{\kappa_3^2}{1 - \phi^2} \right) \right\} + \frac{q^2 \kappa_4}{6 \kappa_2^5} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 \\ &\quad + \frac{q^2}{4\kappa_2^3} \left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2 + \frac{q^2}{6} \left(\frac{\left(\frac{d}{d\phi} \kappa_3 \right)^2}{\kappa_2} + 3 \frac{\kappa_3^2}{\kappa_2^3} \frac{1}{1 - \phi^2} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{R23}(\eta_0) &= \frac{pq \kappa_5}{6 \kappa_2} \frac{d}{d\phi} \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 + pq \frac{\kappa_3}{\kappa_2^3} \left(\frac{d}{d\phi} \log \kappa_2 \frac{d}{d\phi} \kappa_3 + \frac{\kappa_3}{1 - \phi^2} \right) \\ &\quad + \frac{pq \kappa_3}{2 \kappa_2^3} \frac{d}{d\phi} \kappa_3 \frac{d}{d\phi} \kappa_2\end{aligned}$$

$$TVar(\phi_T - \phi_0) \approx \frac{\Sigma_{R1}(\phi_0)}{\Sigma_0(\phi_0)} \approx \frac{\Sigma_{R2}(\phi_0) + \Sigma_{R3}(\phi_0) + 2\Sigma_{R23}(\phi_0)}{\Sigma_0(\phi_0)}.$$

Observemos que para el proceso AR(1) con innovación normal se tiene que la distribución asintótica de $\hat{\phi}$, mostrada en Brockwell y Davis (1991, Teorema 8.1.2) es:

$$\hat{\phi} \sim AN \left(\phi, \frac{1}{T} (1 - \phi^2) \right).$$

En resumidas cuentas la varianza ϕ y ϵ quedan expresadas finalmente en las siguientes expresiones que detallamos por parte a continuación.

En el caso de la varianza de ϕ se tiene que esta es:

$$\begin{aligned}\Sigma_1(\phi) &= p_1^2 \left(\frac{d}{d\phi} \zeta_2 \right)^2 (\kappa + 4p_1^2 \|W_1\|^2) + 4p_1^2 \|W_1\|^2 \psi \\ &\quad + (9q_1^2 W_{23} \kappa + 18 \|W_2\|^2 + 12p_1 q_1 W_{12}(\rho)) \varphi^2, \\ \Sigma_0(\phi) &= (2p_1 + 3q_1 \varphi^2)^2 \psi^2,\end{aligned}$$

donde $\zeta_2 = (1 - \phi^2)$, $\frac{d}{d\phi} \zeta_2 = -\frac{2\phi}{1 - \phi^2}$, $\kappa = \frac{\zeta_4}{\zeta_2} = \left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 \right)$, $\psi = \frac{1}{1 - \phi^2}$, $\varphi^2 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$

y para el caso de ϵ tenemos:

$$\begin{aligned}\Sigma_1(\epsilon) &= \frac{q_1^2}{3} \{ \zeta_2 + 9W_{23}(1 + \zeta_2\zeta_4) + 6W_{20}\zeta_2\zeta_4 + 9W_{20}^2\zeta_2^4 + 6\|W_2\|^2\zeta_2^3 \}, \\ \Sigma_0(\epsilon) &= \left(\frac{\left(\frac{d}{d\epsilon}\zeta_3\right)^2}{\zeta_2^3} \right)^2\end{aligned}$$

Suponga $\epsilon \neq 0$ y basándonos en la estimación del espectro mediante el periodograma (sin suavizar) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}TVar(\phi_T - \phi_0) &\approx \frac{\Sigma_{R_1}(\phi_0)}{\Sigma_0(\phi_0)} = \frac{\Sigma_{R_2}(\phi_0)}{\Sigma_0(\phi_0)} \\ &= \frac{(1 - \phi^2)^2\phi^2 \left(\frac{\nu_4}{\nu_2^2} - 3 + 2\|W_1\|^2 \right) + \|W_1\|^2(1 - \phi^2)^3}{(1 + \phi^2)^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 4.4 (Caso Particular). Suponga $\epsilon = 0$ y basándonos en la estimación del espectro mediante el periodograma (sin suavizar) tenemos lo siguiente:

$$TVar(\phi_T - \phi_0) \approx \frac{\Sigma_{R_1}(\phi_0)}{\Sigma_0(\phi_0)} = \frac{\Sigma_{R_2}(\phi_0)}{\Sigma_0(\phi_0)} = \frac{(1 - \phi^2)^2}{(1 + \phi^2)}.$$

Recordando que la varianza de la fórmula de Bartlett (1950) viene dada por $\frac{1 + \phi^2}{1 - \phi^2}$.

4.13. Simulaciones

En esta parte ilustramos algunos resultados empíricos en estos se comparamos el comportamiento de la estimación de ϕ por tres métodos, estos son el método de Terdik considerando la densidad espectral estandarizada, el estimador de máxima verosimilitud (MLE) y la estimación por Yule-Walker (YW) o método de momentos. La Tabla 19 muestra la estimación considerando una innovación gaussiana, para la estimación de Terdik se usó el periodograma sin suavizar. Podemos notar que en este

caso el método de Terdik tiende a subestimar a los verdaderos parámetros y en comparación a los otros dos métodos se puede ver que el ECM es mayor, pero no así la desviación estándar donde es similar a los otros métodos.

La Tabla 20 muestra la estimación al suavizar la densidad espectral (la innovación sigue siendo normal), vemos como mejora la estimación de Terdik al suavizar el periodograma con un valor de la ventana de suavizamiento de $S = 16$. En vista de lo anterior decidimos ocupar el modelo ESN y realizamos las estimaciones, estas son mostradas en la Tabla 21, con un parámetro de asimetría $\epsilon = 0.8$ se puede observar que el método de Terdik tiende a subestimar levemente en comparación a los otros dos, pero de todas formas el resultado es similar a los otros dos en la variabilidad y error cuadrático medio.

Tabla 19: Comparación de 3 métodos para estimar ϕ .

ϕ	N=1024			M=1000			AR(1)								
	Estimación Puntual						sd			ECM			Desv. Teórica		
	Terdik	MLE	Y-W	Terdik	MLE	Y-W	Terdik	MLE	Y-W	Terdik	MLE	Y-W	Terdik	$\sqrt{\frac{1-\phi^2}{N}}$	Bartlett
0.1	0.0736	0.0990	0.0989	0.0277	0.0313	0.0313	0.0383	0.0313	0.0313	0.0383	0.0313	0.0313	0.0308	0.0311	0.0316
0.2	0.1493	0.1988	0.1986	0.0279	0.0305	0.0304	0.0579	0.0305	0.0305	0.0579	0.0305	0.0305	0.0294	0.0306	0.0325
0.3	0.2277	0.2994	0.2991	0.0277	0.0301	0.0301	0.0775	0.0301	0.0301	0.0775	0.0301	0.0301	0.0272	0.0298	0.0342
0.4	0.3069	0.3967	0.3963	0.0279	0.0286	0.0286	0.0972	0.0288	0.0288	0.0972	0.0288	0.0288	0.0244	0.0286	0.0367
0.5	0.3932	0.4971	0.4966	0.0276	0.0271	0.0270	0.1103	0.0272	0.0272	0.1103	0.0272	0.0272	0.0210	0.0271	0.0403
0.6	0.4840	0.5976	0.5969	0.0272	0.0239	0.0239	0.1192	0.0240	0.0241	0.1192	0.0240	0.0241	0.0171	0.025	0.0456
0.7	0.5822	0.6961	0.6953	0.0264	0.0219	0.0219	0.1208	0.0223	0.0224	0.1208	0.0223	0.0224	0.0131	0.0223	0.0534
0.8	0.6970	0.7978	0.7970	0.0247	0.0183	0.0184	0.1060	0.0185	0.0186	0.1060	0.0185	0.0186	0.0088	0.0187	0.0667
0.9	0.8901	0.8970	0.8961	0.0153	0.0145	0.0145	0.0182	0.0148	0.0150	0.0182	0.0148	0.0150	0.0044	0.0136	0.0965

Tabla 20: Suavizando el Periodograma.

N=1024	M=1000				S=16				AR(1)			
	Estimación Puntual		Desviación Estimada		\sqrt{ECM}		Desv. Teórica					
ϕ	Terdik	MLE	Y-W	Terdik	MLE	Y-W	Terdik	$\sqrt{\frac{1-\phi^2}{N}}$	Bartlett			
0.1	0.0949	0.0994	0.0993	0.0304	0.0310	0.0309	0.0308	0.0310	0.0309	0.0311	0.0316	
0.2	0.1881	0.1968	0.1966	0.0294	0.0301	0.0300	0.0317	0.0303	0.0300	0.0306	0.0325	
0.3	0.2860	0.2985	0.2982	0.0307	0.0309	0.0309	0.0338	0.0310	0.0286	0.0298	0.0342	
0.4	0.3827	0.3976	0.3972	0.0290	0.0289	0.0289	0.0338	0.0290	0.0266	0.0286	0.0367	
0.5	0.4815	0.4980	0.4975	0.0274	0.0270	0.0270	0.0330	0.0271	0.0242	0.0271	0.0403	
0.6	0.5806	0.5967	0.5961	0.0257	0.0251	0.0251	0.0322	0.0253	0.0214	0.0250	0.0456	
0.7	0.6833	0.6972	0.6966	0.0240	0.0232	0.0232	0.0292	0.0234	0.0183	0.0223	0.0534	
0.8	0.7856	0.7965	0.7958	0.0199	0.0190	0.0191	0.0246	0.0193	0.0146	0.0187	0.0667	
0.9	0.8895	0.8965	0.8956	0.0153	0.0144	0.0145	0.0185	0.0148	0.0101	0.0136	0.0965	

Tabla 21: Considerando innovacion ESN.

ϕ	M=1000				AR(1)-ESN S=16				$\epsilon = 0.8$						
	Estimación Puntual				sd				\sqrt{ECM}				Desv. Teórica		
	Terdik	MLE	Y-W	Y-W	Terdik	MLE	Y-W	Y-W	Terdik	MLE	Y-W	Y-W	Terdik	$\sqrt{\frac{1-\phi^2}{N}}$	Bartlett
0.1	0.0935	0.0975	0.0974	0.0974	0.0305	0.0314	0.0313	0.0313	0.0312	0.0314	0.0314	0.0314	0.0309	0.0311	0.0316
0.2	0.1869	0.1957	0.1955	0.1955	0.0307	0.0310	0.0310	0.0310	0.0333	0.0313	0.0313	0.0313	0.0298	0.0306	0.0325
0.3	0.2852	0.2977	0.2975	0.2975	0.0301	0.0306	0.0306	0.0306	0.0336	0.0306	0.0306	0.0307	0.0280	0.0298	0.0342
0.4	0.3828	0.3979	0.3976	0.3976	0.0287	0.0288	0.0288	0.0288	0.0335	0.0289	0.0289	0.0289	0.0255	0.0286	0.0367
0.5	0.4810	0.4972	0.4967	0.4967	0.0269	0.0266	0.0265	0.0265	0.0329	0.0267	0.0267	0.0267	0.0224	0.0271	0.0403
0.6	0.5825	0.5987	0.5980	0.5980	0.0263	0.0257	0.0256	0.0256	0.0316	0.0257	0.0257	0.0257	0.0187	0.0250	0.0456
0.7	0.6834	0.6975	0.6969	0.6969	0.0233	0.0227	0.0226	0.0226	0.0286	0.0229	0.0229	0.0229	0.0145	0.0223	0.0534
0.8	0.7853	0.7962	0.7956	0.7956	0.0207	0.0199	0.0199	0.0199	0.0254	0.0202	0.0202	0.0203	0.0099	0.0187	0.0667
0.9	0.8895	0.8965	0.8955	0.8955	0.0143	0.0134	0.0135	0.0135	0.0178	0.0138	0.0138	0.0142	0.0051	0.0136	0.0965

Capítulo 5

Extensiones

5.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es mirar las posibles extensiones que son posibles de realizar con este tipo de familia de distribuciones asimétricas aplicadas a series de tiempo. Brevemente mostramos algunos resultados parciales los cuales están en desarrollo y son posibles extensiones a lo mostrado en el capítulo anterior.

La primera de estas extensiones para el proceso autorregresivo ha sido la modificación de la distribución ESN anteriormente estudiada por una distribución Epsilon Skew Exponencial Potencia (ESEp), definida en el trabajo de tesis de Gómez (2004) las propiedades han sido mostradas en la Sección 1.3.

5.2. Proceso AR(1) con Innovaciones ESEp

Considerando el proceso definido en la ecuación (25), en donde la distribución de la innovación Z_t es cambiada por la distribución ESEp se tiene

$$Y_t = \theta + \phi Y_{t-1} + Z_t,$$

donde $Z_t \sim ESEp(0, \beta, \sigma, \epsilon)$. La ventaja al modificar la distribución de la innovación es la flexibilidad que se obtiene con respecto al modelo

anteriormente estudiado y con respecto al modelo clásico normal. Básicamente el nuevo parámetro β representa la curtosis de la distribución añadiendo una mayor variación y por tanto deja de ser tan acotada como en los modelos anteriores. Debemos notar que en este modelo hemos considerado una reparametrización de la siguiente forma $\frac{2}{1+\beta} = \alpha$, lo cuál no afecta los resultado que podamos tener con el modelo mostrado en el capítulo 1.

5.2.1. Verosimilitud Condicional AR(1)

Siguiendo la misma estructura mostrada en el capítulo 3, podemos escribir la verosimilitud condicional al pasado \mathcal{F}_{n-1} de la siguiente forma:

$$L_n(\eta) = \left(\frac{c_1}{\sigma}\right)^n \prod_{t=1}^n \left[\exp\left(-\frac{|u_t|^{\frac{2}{1+\beta}}}{2^{\frac{1}{1+\beta}} \sigma^{\frac{2}{1+\beta}} (1+\epsilon)^{\frac{2}{1+\beta}}}\right) \right]^{\mathbb{1}_{(u_t < 0)}} \\ \times \left[\exp\left(-\frac{|u_t|^{\frac{2}{1+\beta}}}{2^{\frac{1}{1+\beta}} \sigma^{\frac{2}{1+\beta}} (1-\epsilon)^{\frac{2}{1+\beta}}}\right) \right]^{\mathbb{1}_{(u_t \geq 0)}},$$

donde $c_1^{-1} = \sqrt{2}(1+\beta)\Gamma(\frac{1+\beta}{2})$ y $u_t = y_t - \phi y_{t-1} - \theta$. Además la log-verosimilitud para una observación es de la forma

$$\ell_t = \ell(y_t, y_{t-1}; \eta) = n \ln\left(\frac{c_1}{\sigma}\right) - \frac{|u_t|^{2/(1+\beta)}}{2^{1/(1+\beta)} \sigma^{2/(1+\beta)}} v_t, \quad (96)$$

con

$$v_t = \frac{\mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(u_t)}{(1+\epsilon)^{2/(1+\beta)}} + \frac{\mathbb{1}_{[0, +\infty)}(u_t)}{(1-\epsilon)^{2/(1+\beta)}},$$

y para cualquier conjunto S , $\mathbb{1}_S$ denota la función indicadora de S .

A continuación mostramos en la Tabla 22 una simulación en particular considerando $n = 200$ observaciones y $N = 1000$ repeticiones, donde observamos que la estimación es cercana a al verdadero valor del parámetro.

	Valor Real	Estimado	Sesgo ²	ECM
θ	0.0	-0.005	0.000	0.040
β	0.2	0.213	0.000	0.037
ϕ	0.8	0.798	0.000	0.000
ϵ	-0.9	-0.922	0.001	0.003
σ	1.0	0.983	0.000	0.031

Usando el EMV en Teoría Normal				
ϕ	0.8	0.781	0.000	0.003
σ	1.0	1.438	0.192	0.201

Tabla 22: EMV en el modelo AR(1)-ESEp.

5.3. Proceso AR(p) con Innovaciones ESN

Extendiendo el modelo estudiado en el Capítulo 3 a un autorregresivo de orden p , con innovaciones $ESN(\theta, \sigma, \epsilon)$ lo que anotamos como:

$$\begin{aligned}
 Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + Z_t, & t = 0, \dots, n \quad (97) \\
 \phi(B)Y_t &= Z_t,
 \end{aligned}$$

donde $\{z_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $ESN(\theta, \sigma, \epsilon)$.

Sea $\eta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta, \epsilon, \sigma^2)$ y $\eta_0 = (\phi_{10}, \dots, \phi_{p0}, \theta_0, \epsilon_0, \sigma_0^2)$ los verdaderos valores de η que están en el interior de un conjunto compacto $\overset{\diamond}{\Lambda}$. $\hat{\eta}_n$ es el estimador aproximado EMV de η en $\overset{\diamond}{\Lambda}$ que maximiza la función de log-verosimilitud condicional en $\mathcal{F}_0 = (y_0, y_{-1}, \dots, y_{1-p})$.

Por tanto al condicionar en \mathcal{F}_0 , la función de verosimilitud condicional

queda dada por

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{y}|y_0, \dots, y_{1-p}; \eta) &= \prod_{t=1}^n L(\mathbf{y}|y_{t-1}, \dots, y_{t-p}; \eta) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \prod_{t=1}^n \left[\exp\left(\frac{-u_t^2}{2(1+\epsilon)^2\sigma^2}\right) \right]^{\mathbb{1}_{(u_t < 0)}} \\
&\quad \times \left[\exp\left(\frac{-u_t^2}{2(1-\epsilon)^2\sigma^2}\right) \right]^{\mathbb{1}_{(u_t \geq 0)}},
\end{aligned}$$

donde $u_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \dots - \phi_p y_{t-p} - \theta$, definimos la log-verosimilitud de manera análoga a lo mostrado en la ecuación (37), es decir,

$$\ell_n(\eta) = \ell_n(\mathbf{y}|y_0, \dots, y_{1-p}; \eta) = \sum_{t=1}^n \ell_t(\eta),$$

donde

$$\ell_t = \ell_t(\eta) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{u_t^2}{2\sigma^2} v_t. \quad (98)$$

Para obtener $\hat{\eta}_n$, necesitamos las ecuaciones de verosimilitud y la matriz de información.

Lema 5.1 (Score AR(p)-ESN). *Si y_t es el proceso definido en la ecuación (97) de $p+3$ parámetros y con densidad de la innovación definida en la ecuación (3), entonces el score $\ell'_t = \nabla_{\eta} \ell(y_t, y_{t-1}; \eta)$ de dimensión $(p+3) \times 1$, tiene las siguientes componentes*

$$\begin{aligned}
\ell'_{t,\phi_i} &= \frac{d}{d\phi_i} \ell_t = \frac{1}{\sigma^2} y_{t-i} u_t v_t, \quad \forall i = 1, \dots, p \\
\ell'_{t,\theta} &= \frac{d}{d\theta} \ell_t = \frac{1}{\sigma^2} u_t v_t, \\
\ell'_{t,\epsilon} &= \frac{d}{d\epsilon} \ell_t = \frac{u_t^2}{\sigma^2} \left(\frac{\mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(u_t)}{(1+\epsilon)^3} - \frac{\mathbb{1}_{[0, \infty)}(u_t)}{(1-\epsilon)^3} \right), \\
\ell'_{t,\sigma^2} &= \frac{d}{d\sigma^2} \ell_t = -\frac{1}{2\sigma^2} \left(1 - \frac{1}{\sigma^2} u_t^2 v_t \right).
\end{aligned} \quad (99)$$

Además se cumple que $E[\ell'_n(\eta_0)] = 0$.

Prueba. La demostración se basa en el Lema 3.1.

□

Del lema anterior es posible deducir que $\ell'_t(\eta)$ es una martingala en diferencia.

$$\mathbb{E} \left[\ell'_t(\eta_0) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = 0 \quad \text{con} \quad \mathcal{F}_{t-1} = \sigma(y_{t-1}, \dots, y_{t-p}),$$

Esto constituye un proceso estacionario y ergódico con la propiedad de ser martingala en diferencia y por tanto no tiene correlación temporal. Entonces uno puede aplicar el Corolario 3.5.1 de Stout (1974) para obtener la convergencia casi segura (c.s.):

$$\frac{1}{n} \ell'_n(\eta_0) \xrightarrow{\text{c.s.}} \mathbb{E} [\ell'_t(\eta_0) | \mathcal{F}_{t-1}] = 0.$$

Además con normalidad asintótica

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ell'_t(\eta_0) \xrightarrow{D} N(0, \Omega_{\eta_0}),$$

donde, la matriz de información de Fisher está definida como

$$\Omega_{\eta_0} = \mathbb{E} [\mathbb{E} (-\ell''_t(\eta_0) | \mathcal{F}_{t-1})],$$

siguiendo la notación mostrada en la ecuación (47) vemos que las componentes del hessiano $\ell''_t(\eta)$ están dadas por:

$$\begin{aligned} \ell''_{t,\phi_i\phi_j} &= \frac{-y_{t-i}y_{t-j}}{\sigma^2} v_t, \quad \forall i, j = 1, \dots, p \\ \ell''_{t,\epsilon\phi_i} &= -2 \frac{u_t y_{t-i}}{\sigma^2} \left(\frac{\mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(u_t)}{(1 + \epsilon)^3} - \frac{\mathbb{1}_{[0, \infty)}(u_t)}{(1 - \epsilon)^3} \right), \quad \forall i = 1, \dots, p \\ \ell''_{t,\sigma^2\phi_i} &= -\frac{u_t y_{t-i}}{\sigma^4} v_t, \quad \forall i = 1, \dots, p \\ \ell''_{t,\theta\phi_i} &= -\frac{y_{t-i}}{\sigma^2} v_t, \quad \forall i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell''_{t,\theta\epsilon} &= -2\frac{u_t}{\sigma^2} \left(\frac{\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(u_t)}{(1+\epsilon)^3} - \frac{\mathbb{1}_{[0,\infty)}(u_t)}{(1-\epsilon)^3} \right), \\
\ell''_{t,\theta\sigma^2} &= -\frac{u_t}{\sigma^4} v_t, \\
\ell''_{t,\sigma^2\sigma^2} &= \frac{1}{2\sigma^4} - \frac{u_t^2}{\sigma^6} v_t, \\
\ell''_{t,\epsilon\epsilon} &= -3\frac{u_t^2}{\sigma^2} \left(\frac{\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(u_t)}{(1+\epsilon)^4} + \frac{\mathbb{1}_{[0,\infty)}(u_t)}{(1-\epsilon)^4} \right), \\
\ell''_{t,\theta\theta} &= -\frac{1}{\sigma^2} v_t, \\
\ell''_{t,\sigma^2\epsilon} &= -\frac{u_t^2}{\sigma^4} \left(\frac{\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(u_t)}{(1+\epsilon)^3} - \frac{\mathbb{1}_{[0,\infty)}(u_t)}{(1-\epsilon)^3} \right),
\end{aligned}$$

y por lo tanto al tomar la esperanza, obtenemos que las componentes de la matriz de información son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\Omega_{\phi_i\phi_j} &= \frac{\gamma(i-j) + \mu_1^2}{\sigma^2(1-\epsilon^2)}, & \Omega_{\sigma^2\sigma^2} &= \frac{1}{2\sigma^4}, \\
\Omega_{\epsilon\epsilon} &= \frac{3}{(1-\epsilon^2)}, & \Omega_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sigma^2(1-\epsilon^2)}, \\
\Omega_{\sigma^2\epsilon} &= 0, & \Omega_{\epsilon\phi_i} &= -\frac{4\mu_1}{\sqrt{2\pi}\sigma(1-\epsilon^2)}, \\
\Omega_{\sigma^2\phi_i} &= 0, & \Omega_{\theta\phi_i} &= \frac{\mu_1}{\sigma^2(1-\epsilon^2)}, \\
\Omega_{\theta\epsilon} &= -\frac{4}{\sigma\sqrt{2\pi}(1-\epsilon^2)}, & \Omega_{\theta\sigma^2} &= 0,
\end{aligned}$$

con $\mu_1 = \mathbb{E}[Y_t]$ y $\gamma(i-j) = \text{Cov}[Y_i, Y_j]$.

Nota 5.1. Cuando $p = 1$ entonces se tiene el modelo AR(1) estudiado en el Capítulo 3 y también al hacer $\epsilon = 0$ se tiene la matriz de información correspondiente al modelo normal.

Capítulo 6

Conclusiones

La estimación pseudo-máximo verosímil obtenida en el capítulo 2, nos ofrece la garantía de tener una función que es diferenciable, continua y definida sobre todo reales, facilitando en cierta medida la demostraciones de consistencia débil y del teorema central del límite. Este tipo de aproximación es posible ocuparla en toda la familia de distribuciones epsilon-skew-simétricas definidas en Gómez (2004). Sin embargo, aún falta estudiar la constante de normalización de esta nueva función.

En referencia al Capítulo 3, tenemos que la incorporación de asimetría en el modelo autorregresivo tiene una ganancia substancial puesto que evita la transformación de las observaciones cuando las innovaciones son no simétricas. Además hemos podido demostrar un teorema central del límite para los estimadores de momentos, contribuyendo a extender los resultados de la Proposición 7.3.1 Brockwell y Davis (1991) hasta el sexto momento de un proceso lineal y causal. Por otra parte, mediante la estimación máximo verosímil condicional se ha podido establecer teoremas de consistencia y de normalidad asintótica lo cual nos permite a futuro seguir desarrollando inferencia para este modelo.

Respecto al Capítulo 4 sobre estimación biespectral, hacemos notar que en procesos que son lineales y con ruido simétricos la densidad espectral pasa a ser un plano. En cambio en nuestro tipo de modelos, donde

incorporamos asimetría tenemos que la densidad biespectral cambia con el parámetro autorregresivo y el parámetro de asimetría, esto fue la motivación para trabajar con este tipo de estimación. Principalmente en la determinación del parámetro ϵ de asimetría. Si bien, el trabajo es complejo para encontrar una estimación eficiente con esta metodología, creemos que puede abrirnos las puertas para trabajar con datos en larga memoria los cuales generalmente son estimados por medio del espectro.

Finalmente, este trabajo da una visión de los posibles alcances que puede tener el incorporar el parámetro de asimetría a las series cronológicas por medio de un proceso simple como el autorregresivo.

Bibliografía

- A. D. Akkaya and M. L. Tiku. Corrigendum: “Time series models with asymmetric innovations” [Comm. Statist. Theory Methods **28** (1999), no. 6, 1331–1360: 1699893] by Tiku, W.-K. Wong and G. Bian. *Comm. Statist. Theory Methods*, 30(10):2227–2230, 2001.
- T. W. Anderson. *The statistical analysis of time series*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- D.F. Andrews and A.M. Herzberg. *Data. A collection of problems from many fields for the student and research worker*. Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag. XX, 442 p. DM 138.00 , 1985.
- A. Azzalini. A class of distributions which includes the normal ones. *Scand. J. Statist.*, 12(2):171–178, 1985.
- A. Azzalini. Further results on a class of distributions which includes the normal ones. *Statistica (Bologna)*, 46(2):199–208, 1986.
- M. S. Bartlett. Periodogram analysis and continuous spectra. *Biometrika*, 37:1–16, 1950.
- I. V. Basawa, P. D. Feigin, and C. C. Heyde. Asymptotic properties of maximum likelihood estimators for stochastic processes. *Sankhyā Ser. A*, 38(3):259–270, 1976.
- P. Billingsley. *Probability and measure*. J. Wiley & Sons, New York, 1995.
- George E. P. Box and Gwilym M. Jenkins. *Times series analysis. Forecasting and control*. Holden-Day, 1970. Hannan.
- D. R. Brillinger. *Time series*. Holden-Day Inc., Oakland, Calif., second edition, 1981. Data analysis and theory, Holden-Day Series in Time Series Analysis.
- P. J. Brockwell and R. A. Davis. *Time Series: Theory and Methods*. Springer Verlag, New York, second edition, 1991.

- R. Byrd, P. Lu, J. Nocedal, and C. Zhu. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16(5): 1190–1208, 1995.
- M. J. Crowder. Maximum likelihood estimation for dependent observations. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 38(1):45–53, 1976.
- N. Davies, T. Spedding, and W. Watson. Autoregressive moving average processes with non-normal residuals. *J. Time Ser. Anal.*, 1(2):107–109, 1980.
- K. Dzhaparidze. *Parameter estimation and hypothesis testing in spectral analysis of stationary time series*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1986. Translated from the Russian by Samuel Kotz.
- H. Elsalloukh, J. H. Guardiola, and D. M. Young. The epsilon-skew exponential power distribution family. *Far East J. Theor. Stat.*, 17(1): 97–112, 2005.
- T. S. Ferguson. *A course in large sample theory*. Texts in Statistical Science Series. Chapman & Hall, London, 1996.
- H. W. Gómez. *Extensiones Asimétricas de Distribuciones Simétricas: Propiedades e Inferencia*. PhD thesis, 2004. Tesis. Departamento de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- U. Grenander. On empirical spectral analysis of stochastic processes. *Ark. Mat.*, 1:503–531, 1951.
- G. K. Grunwald, R. J. Hyndman, L. Tedesco, and R. L. Tweedie. Non-Gaussian conditional linear AR(1) models. *Aust. N. Z. J. Stat.*, 42(4): 479–495, 2000.
- E. J. Hannan and M. Deistler. *The statistical theory of linear systems*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988.
- N. Henze. A probabilistic representation of the “skew-normal” distribution. *Scand. J. Statist.*, 13(4):271–275, 1986.
- A. D. Hutson. Utilizing the flexibility of the epsilon-skew-normal distribution for common regression problems. *J. Appl. Stat.*, 31(6):673–683, 2004.

- R.J. Hyndman. Time Series Data Library, 2006.
- O. J. Karst and H. Polowy. Sampling properties of the median of a Laplace distribution. *Amer. Math. Monthly*, 70:628–636, 1963.
- M. G. Kendall and A. Stuart. *The advanced theory of statistics. Vol. 1: Distribution theory*. Third edition. Hafner Publishing Co., New York, 1969.
- E. L. Lehmann. *Elements of large-sample theory*. Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1999.
- E. L. Lima. *Curso de Análise, Volume 2*. Projeto Euclides, 1981. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq.
- G. S. Mudholkar and A. D. Hutson. The epsilon-skew-normal distribution for analyzing near-normal data. *J. Statist. Plann. Inference*, 83(2):291–309, 2000.
- S. Mukhopadhyay and B. Vidakovic. Efficiency of linear bayes rules for a normal mean: skewed priors class. *The Statistician*, 44, 1995.
- A. O’Hagan and T. Leonard. Bayes estimation subject to uncertainty about parameter constraints. *Biometrika*, 63(1):201–203, 1976.
- A. Pankratz. *Forecasting With Univariate Box-Jenkins Models: Concepts and Cases*. Wiley, 1983.
- R. Piessens, E. de Doncker-Kapenga, and C. W. Ueberhuber. *Quadpack. A subroutine package for automatic integration*. Springer Series in Computational Mathematics, Berlin: Springer, 1983, 1983.
- M. B. Priestley. *Spectral analysis and time series. Vol. 1*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1981. Univariate series, Probability and Mathematical Statistics.
- B. L. S. P. Rao. Estimation of the location of the cusp of a continuous density. *The Annals of Mathematical Statistics*, 39(1):76–87, Feb. 1968.
- M. J. Schervish. *Theory of statistics*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1995. ISBN 0-387-94546-6.
- A. Schuster. On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena. *Terr. Mag. Atmos. Elect.*, 3:13–41, 1898.

- W. F. Stout. *Almost sure convergence*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974. Probability and Mathematical Statistics, Vol. 24.
- T. Subba Rao and M. M. Gabr. *An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models*, volume 24 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- M. T. Subbotin. The law of frequency of error. *Matematicheskii Sbornik*, 31:296–301, 1923.
- P. R. Tadikamalla. Random sampling from the exponential power distribution. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 75(371):683–686, 1980.
- M. Taniguchi and Y. Kakizawa. *Asymptotic theory of statistical inference for time series*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 2000.
- G. Terdik. *Bilinear stochastic models and related problems of nonlinear time series analysis*, volume 142 of *Lecture Notes in Statistics*. Springer-Verlag, New York, 1999. A frequency domain approach.
- M. L. Tiku, W. Wong, and G. Bian. Time series models with asymmetric innovations. *Comm. Statist. Theory Methods*, 28(6):1331–1360, 1999.
- J. W. Tukey. *Exploratory data analysis*. Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass., 1977. ISBN 0201076160. John W. Tukey.; On spine: EDA.; Includes index.
- P. D. Welch. *The Use of Fast Fourier Transforms for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short Periodograms*. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, 1967.
- H. White. *Asymptotic theory for econometricians*. Academic Press, Orlando, Fla., 1984. Halbert White.; Includes bibliographies.
- P. Whittle. Estimation and information in stationary time series. *Ark. Mat.*, 2:423–434, 1953.
- Diethelm Würtz. *Rmetrics: An Environment for Teaching Financial Engineering and Computational Finance with R*. Rmetrics, ITP, ETH Zürich, Zürich, Switzerland, 2004. URL <http://www.rmetrics.org>.

Apéndice A

Ventana Espectral y Biespectral

A.1. Ventana Espectral

Con el objetivo de suavizar el periodograma haremos el uso de una función de pesos $W_{1T}(\omega)$ que toma valores en los reales conocida como ventana espectral (*spectral window*), esta es derivada de la ventana espectral generadora (*spectral window generator*) denotada por $W_1(\omega)$ con soporte $W_1 \subset [-1, 1]$ de variación acotada, y que satisface las siguientes condiciones:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} W_1(\omega)d\omega = 1$, y $\int_{-\infty}^{\infty} W_1^2(\omega)d\omega = \|W_1\|^2 < \infty$,

(b) $W_1(-\omega) = W_1(\omega)$,

(c) $W_1(\omega) \xrightarrow{|\omega| \rightarrow \infty} 0$.

Sea B_{1T} el parámetro de *ancho de banda* (*bandwidth*) dependiente de T , satisfaciendo $B_{1T} \rightarrow 0$, $TB_{1T}^2 \rightarrow \infty$ de esta forma W_{1T} se relaciona con W_1 de la forma siguiente $W_{1T}(\omega) = \frac{1}{B_{1T}}W_1\left(\frac{\omega}{B_{1T}}\right)$. Para una mayor documentación de los tipos de ventana puede mirar Brillinger (1981, tabla 3.3.1). Algunas de estas ventanas las detallamos a continuación:

A.1.1. Ventanas de Suavizamiento

Ventanas de Daniell

$$W_1(\omega) = \frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega}.$$

Ventana de Bartlett

$$W_1(\omega) = \frac{3}{(\pi\omega)^2} \left(\frac{\sin(\pi\omega)}{\pi\omega} - \cos(\pi\omega) \right).$$

Ventana de Hanning

$$W_1(\omega) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \pi\omega, & |\omega| \leq 1 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}.$$

Ventana de Parzen

$$W_1(\omega) = \begin{cases} 1 - 6\omega^2 + 6|\omega|^3, & |\omega| \leq \frac{1}{2} \\ 2(1 - |\omega|)^3, & \frac{1}{2} \leq |\omega| \leq 1 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}.$$

A continuación en la Figura 17 mostramos las gráficas correspondientes a estas figuras.

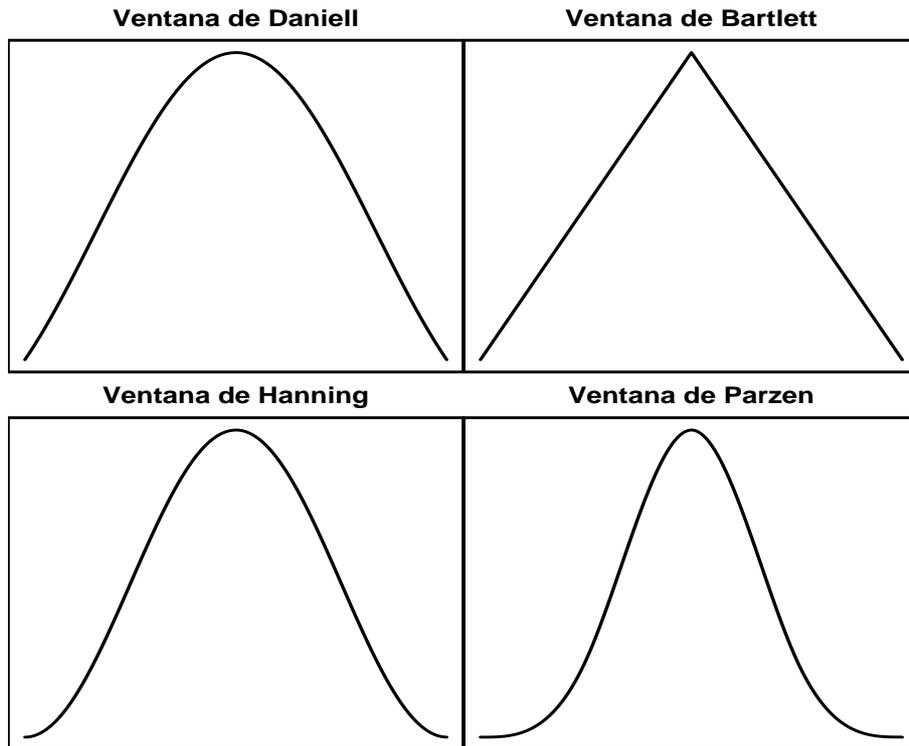


Figura 17: Ventanas Espectrales.

A.2. Ventana Biespectral

Extendiendo lo anterior tenemos la bi-ventana $W_2(\omega_1, \omega_2)$ función no-negativa de variación acotada, con soporte $W_2 \subset [-1, 1]^2$, simétrica en el siguiente sentido

$$W_2(\omega_1, \omega_2) = W_2(\omega_2, \omega_1) = W_2(\omega_1, -\omega_2 - \omega_1) = W_2(-\omega_1 - \omega_2, \omega_2).$$

Con las siguientes propiedades

(a) $\int \int_{-\infty}^{\infty} W_2(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = 1,$

(b) $\int \int_{-\infty}^{\infty} W_2^2(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \|W_2\|^2 < \infty.$

Sea B_{2T} el parámetro de *ancho de banda* satisfaciendo las siguientes condiciones: $B_{2T} \rightarrow 0, TB_{2T}^2 \rightarrow \infty$ cuando $T \rightarrow \infty$ y escribimos $W_{2T}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{B_{2T}^2} W_2\left(\frac{\omega_1}{B_{2T}}, \frac{\omega_2}{B_{2T}}\right).$

Para una mayor puede revisar el texto de Subba~Rao y Gabr (1984, Capítulo 2)