



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FUNCIÓN DE SCATTERING CLÁSICO
Y
RESONANCIAS PARA HAMILTONIANO DE FLOQUET

por

CLAUDIO RIVERA DE VERA

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de
Doctorado en Ciencias Exactas Mención Matemáticas.

Director Tesis: Claudio Fernández Jaña.

Comisión Informante: María Angélica Astaburuaga (PUC)
Olivier Bourget (PUC)
Fernando Brambila (UNAM)
Claudio Fernández (PUC)
Rafael del Río (UNAM)

Octubre, 2012
Santiago, Chile

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis va dedicada a todos aquellos que han sido parte viva de este proceso.

En primer lugar quiero agradecer a mis seres queridos. Mi esposa Irina, que ha sido paciente y consiente de mis tiempos. A mi madre y hermanas que han fomentado mi deseo de llegar más lejos. A mis compañeros y amigos quienes me han apoyado y motivado en cada momento de esta larga carrera: Gregorio, Martha, Manuel, Mariela, Felipe, Julián, Angélica ¡Gracias!. Gracias a mi fraternidad OFS que siempre me acompaña y a Carlitos que fue un gran amigo y hermano.

No puedo dejar de agradecer a mis profesores, principalmente a mi director de tesis Doctor Claudio Fernández. Sin su confianza, dedicación, disponibilidad, empatía y sabiduría esta tesis no habría sido posible. Agradezco a la Facultad de Matemática que confió en mi y me otorgo la posibilidad de aprender de los mejores profesores: Alejandro Ramírez, Claudio Fernández, Gueorgui Raykov, Martin Chuaqui, Mónica Musso, Norbert Heuer y Rolando Rebolledo.

Mis estudios de doctorado fueron financiados por CONICYT, a quienes agradezco por su apoyo y confianza. Sin la ayuda de esta beca habría sido imposible proseguir con estudios de doctorado.

Índice general

1. Introducción	5
1. Mecánica Clásica	6
1.1. Teoría de Koopmann	9
1.2. Buena Teoría de Scattering Clásico	11
2. Mecánica Cuántica	12
2.1. Sistema no Autónomo	14
2.2. Resonancias	16
2.3. Estados Outgoing	19
2. Scattering Clásico	21
1. Introducción	21
2. Función de Scattering	22
3. Representación de S	25
4. Problema Inverso	28
5. Ejemplo	31
6. Conclusión	33
3. Scattering Cuántico: Solución Saliente	35
1. Introducción	35
2. Solución Outgoing Caso Autónomo	36
3. Solución Outgoing Caso Periódico	40
4. Perturbaciones Periódicas	49
1. Perturbación con Potencial $V = V(t, x)$	49
1.1. Potencial Radial en \mathbb{R}^3	50
1.2. Potencial en \mathbb{R}	55
1.3. Potencial en \mathbb{R}^3	58
2. Perturbación de Rango 1	63
2.1. Perturbación de $H_0 = -\Delta$	64
2.2. Perturbación no Autónoma $H_0 = -i \mathbf{e} \cdot \nabla$	67
3. Conclusiones	70

5. Otros Resultados	73
1. Tiempo de Vida	73
2. Un Modelo	76
3. Operador Tiempo	77

Capítulo 1

Introducción

Los resultados fundamentales de esta tesis van en dos grandes líneas: Mecánica Clásica y Mecánica Cuántica.

En la Mecánica Clásica abordaremos el fenómeno de Scattering Clásico, que compara el comportamiento asintótico de una dinámica libre con el comportamiento asintótico de una dinámica perturbada, donde las dinámicas libres están asociadas a fuerzas potenciales, con potenciales crecientes.

En el Capítulo 2 determinaremos una expresión para la función de Scattering Clásico, cuando las perturbaciones a la dinámica libre decaen suficientemente al infinito. A su vez, discutiremos sobre cuándo el problema inverso admite solución total o parcial, y determinaremos una expresión para la perturbación en función de la dinámica libre y la función de Scattering Clásico.

Al final del Capítulo 2 ejemplificaremos nuestros resultados para el Hamiltoniano Stark. Determinaremos una fórmula explícita para la función de Scattering Clásico y resolveremos el problema inverso, cuando éste admite solución.

En la Mecánica Cuántica abordaremos el fenómeno de Resonancias para el caso no autónomo desde la perspectiva de polos de la resolvente. Para ello inyectaremos la dinámica cuántica en un espacio de Floquet y extenderemos analíticamente la resolvente del Hamiltoniano de Floquet.

En el Capítulo 3 presentaremos la teoría desarrollada por Howland (ver [14]), que permite representar la dinámica cuántica, asociada a un Hamiltoniano que depende periódicamente del tiempo, en un espacio de Floquet periódico. Adicionalmente, al final del capítulo, expondremos algunos resultados que nos permitirán extender analíticamente la resolvente del Hamiltoniano de Floquet.

La mayor parte de los resultados en Mecánica Cuántica estarán concentrados en los Capítulos 4 y 5. En ambos capítulos consideraremos perturbaciones al Hamiltoniano de Floquet Libre $K_0 = -i\frac{\partial}{\partial t} + H_0$. En el Capítulo 4, $H_0 = -\Delta$ es el operador de Laplace en dimensiones 1 y 3, con perturbaciones periódicas en el tiempo asociadas a fuerzas potenciales. En el Capítulo 4 las perturbaciones periódicas serán proyecciones de rango 1, mientras que H_0 será o bien el

operador $-\Delta$ o bien $-ie \cdot \nabla$, siendo e un vector fijo de \mathbb{R}^n y ∇ el operador gradiente.

A lo largo de este capítulo presentaremos ciertas teorías, como la teoría de Koopman, que permiten justificar la existencia de una buena teoría de Scattering Clásico mediante su análogo cuántico. A su vez expondremos un pequeño resumen sobre el desarrollo de la Mecánica Cuántica, la ecuación que modela la dinámica de dichas partículas y el fenómeno de resonancia. En relación a estos dos último, mencionaremos como la teoría de Howland permite que un sistema no autónomo, o dependiente del tiempo, sea representado como un sistema autónomo, o independiente del tiempo, con el fin de poder identificar resonancias como *frecuencias de scattering* o polos de la resolvente del operador de Floquet.

Al final de esta tesis, en el Capítulo 5 discutiremos sobre otros problemas que podrían ser abordados a partir de nuestro trabajo. Consideraremos dos indicadores de la presencia de resonancia: el *tiempo de vida* (sojourn time) y el *operador tiempo* (Miyamoto). El tiempo de vida es una cantidad que representa la cantidad de tiempo que un sistema permanece en un estado dado, mientras que el operador tiempo es un operador que satisface la relación de conmutación canónica (canonical commutation relation) para un Hamiltoniano dado. El operador tiempo, cuando es autoadjunto, satisface la relación de Weyl que permite estimar el tiempo de vida. Y, en general, cuando el tiempo de vida es excepcionalmente grande puede ser indicativo de la presencia de una resonancia.

1 MECÁNICA CLÁSICA

A través de la historia el hombre ha sido cautivado por la naturaleza y los cambios que ésta sufre. Estos cambios han motivado a la humanidad emprender un camino que busca explicar dichos acontecimientos, aunque en muchos de los casos sólo es posible referirse al acontecimiento propiamente tal y no a sus razones o consecuencias. Nuestro mundo está sujeto a constantes modificaciones y esa es la idea fundamental que ha inspirado muchas teoría físicas y matemáticas. Ya desde la época de Aristóteles, los filósofos percibieron las incesantes transformaciones que acontecían a su alrededor, motivando así el estudio del movimiento, dando nacimiento a la Mecánica. La formalización de esta teoría se la debemos a Newton en el siglo XVIII, teoría que hasta nuestros días es conocida por *Mecánica Newtoniana* o *Mecánica Clásica*. La Mecánica Newtoniana busca modelar aspectos *globales* de la evolución de los fenómenos, a partir del conocimiento *local* que se tenga de la misma. En la Mecánica Newtoniana podemos distinguir dos fenómenos: la *cinemática* que estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las causas del mismo, y la *dinámica* que estudia las causas del movimiento.

Las Ecuaciones Diferenciales han sido la principal herramienta matemática que ha permitido el estudio del movimiento de los cuerpos. La Segunda Ley de Newton asegura que la causa del movimiento está asociada a una *fuerza externa*, que es proporcional a la aceleración alcanzada por el móvil. La constante de proporcionalidad es la *masa* del cuerpo:

$$F(t) = ma(t).$$

Supongamos que la posición de un móvil en un instante t se representa por un punto $x(t)$ en el espacio. La ecuación diferencial que modela la dinámica del móvil n -dimensional, según la segunda ley de Newton, está dada por

$$m\ddot{x}(t) = F(t) \tag{1.1}$$

siendo $\ddot{x}(t)$ la segunda derivada de $x(t)$ respecto a t . La ecuación diferencial (1.1) es conocida en la literatura como la *ecuación de movimiento* y modela la dinámica del móvil. En general, la fuerza F puede depender de la *posición*, la *velocidad* y el *tiempo* usando así la notación $F(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t))$ siempre y cuando no haya confusiones. En la teoría de ecuaciones diferenciales, la ecuación (1.1) se puede reducir a un sistema de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t)/m \\ \dot{y}(t) = F(t) \end{cases}$$

que admite soluciones locales, en caso de existir, para condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$. Así es posible determinar el movimiento o dinámica del móvil en torno de una vecindad de las condiciones iniciales. En adelante diremos que una solución a la ecuación diferencial (1.1) es *global* si $x(t)$ está definida para todo número real t . Así mismo, diremos que $x(t)$ es *única* si es la única solución a la ecuación (1.1) para condiciones iniciales dadas.

Si el móvil es considerado como una partícula puntual de masa $m = 1$, la ecuación (1.1) modela la trayectoria de una partícula que se ve enfrentada a una fuerza externa F . La trayectoria de esta partícula depende de dos parámetros: *posición* y *momentum*. Estas dos cantidades determinan la trayectoria de una partícula, es decir, dados $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es “posible” determinar una solución $x(t)$ a la ecuación de movimiento tal que $x(0) = q$ y $y(0) = p$. Hemos de notar que es “posible” la no existencia de una solución $x(t)$ a la ecuación de movimiento que satisfagan la relación $x(0) = q$ y $y(0) = p$. Más aún, en el caso de existir, puede no ser la única. Los fenómenos que resultan de interés en este capítulo están asociados a fuerzas F que engendran soluciones únicas (al menos en una vecindad de la condición inicial), de este modo, y salvo se especifique lo contrario, supondremos que las fuerzas externas generan soluciones únicas en vecindades de las condiciones iniciales.

Un fenómeno de estudio dentro de la Mecánica Newtoniana es el *Scattering Clásico*. El Scattering Clásico compara dos dinámicas diferentes para el mismo

sistema: la dinámica dada y la dinámica “libre”. Este es el primer problema que encontraremos, precisar una definición de “dinámica libre” la cual debe ser determinada en cada caso individual. Las características que estos sistemas dinámicos libres tienen en común es ser más sencillos que los dinámicos dados y generalmente conservan el momentum del sistema físico. El fenómeno de Scattering puede ser visto como una rama de la teoría de perturbación, es decir, la dinámica dada no es más que una perturbación a la dinámica libre. En adelante nos referiremos a *dinámica perturbada* en vez de dinámica dada.

Cuando se comparan las dinámicas libre y perturbada, se desea precisar Σ subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, denominado *espacio fase*. Este espacio consta de los puntos (q, p) tales que el problema con valores iniciales, a la dinámica libre, admite solución global y única de modo que q y p sean las condiciones iniciales y la solución sea no acotada.

Si la dinámica libre está dada por la ausencia de fuerza, se considera Σ como el subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ cuya segunda coordenada no es nula.

Denotaremos por Ω el conjunto de todos los elementos de Σ tal que el problema con valores iniciales (en Ω), asociado a la ecuación (1.1), admite soluciones globales y únicas. Definamos la familia de funciones $T(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por la relación

$$T(t)(q, p) = (x(t; q, p), \dot{x}(t; q, p))$$

siendo $x(t) = x(t; q, p)$ la única solución global a la ecuación (1.1) para condiciones iniciales $x(0) = q$ y $\dot{x}(0) = p$. De este modo, la dinámica de partículas que obedecen la ecuación (1.1) queda enteramente caracterizada a partir de la familia de funciones $T(t)$ y el conjunto Ω , ya que a cada *estado* $(q, p) \in \Omega$ le corresponde una trayectoria $T(t)(q, p)$ que determina la evolución de la partícula. La familia de funciones $T(t)$ resulta de vital importancia para representar la dinámica Newtoniana en espacios de Hilbert. En la Sección 1.1 expondremos como se realiza este proceso, y en la Sección 1.2 la importancia que conlleva en el estudio del Scattering Clásico.

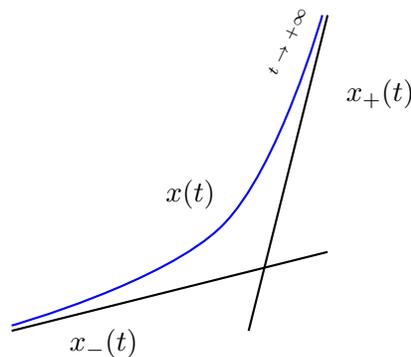


Figura 1.1: Scattering Clásico

Tanto el Scattering Clásico como el Cuántico tienen una estructura geométrica, que relaciona el comportamiento asintótico de la dinámica perturbada con el comportamiento asintótico de la dinámica libre. Más explícitamente, como muestra la Figura 1.1, la evolución del sistema perturbado para un estado dado tiene comportamiento libre para tiempos al infinito. En el caso del Scattering Clásico la evolución del sistema perturbado está dado por $T(t)(q, p)$ entonces existen soluciones al sistema libre $T_0(t)(a_{\pm}, b_{\pm})$, vale decir, existen datos iniciales $(a_{\pm}, b_{\pm}) \in \Omega$ tales que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |T(t)(q, p) - T_0(t)(a_{\pm}, b_{\pm})| = 0$$

La función de Scattering Clásico, que relaciona el comportamiento libre con el perturbado, es un mapeo S definido por la relación

$$S(T_0(0)(a_-, b_-)) = T_0(0)(a_+, b_+)$$

Así resulta fundamental la existencia y unicidad de soluciones globales tanto para el sistema libre como su perturbado. Similarmente se entiende el Scattering Cuántico en espacios de Hilbert, donde los estados son elementos en dicho espacio y la función $T(t)$ es reemplazada por un grupo unitario fuertemente continuo.

1.1 TEORÍA DE KOOPMANN

Consideremos Ω el subconjunto de Σ tal que el problema con valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = F(t, x(t)) \\ \dot{x}(0) = p \\ x(0) = q \end{cases}$$

admite solución global y única. Así la familia de funciones $T(t)$, definida anteriormente, determina la trayectoria de una partícula para cada *estado* $(q, p) \in \Omega$.

Un resultado que tiene mucho interés en el Scattering Clásico se lo debemos a Koopmann, quien inyecta la dinámica Newtoniana definida sobre el espacio fase Ω en un espacio de Hilbert \mathcal{H} sobre el cual la dinámica Newtoniana tiene su análoga en una dinámica cuántica. A continuación esbozaremos, si entrar en detalles, la construcción de este espacio de Hilbert y la dinámica cuántica asociada (ver [19]).

Consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ con la medida de Lebesgue y definamos la familia de operadores lineales $U(t)$ por la relación

$$(U(t)f)(\sigma) = f(T(-t)(\sigma))$$

para toda f en $C_0^\infty(\Omega)$, conjunto funciones infinitamente diferenciales que convergen a cero en infinito. Esta familia de operadores $U(t)$ se puede extender continuamente a un *grupo unitario* sobre $L^2(\Omega)$ toda vez que la familia de funciones $T(t)$ sea invariante bajo la medida de Lebesgue, o sea $T(t)(\Omega)$ difiere en medida cero con Ω . La prueba de esta afirmación es consecuencia del hecho que el Jacobiano asociado a la transformación $T(-t)$ es igual a 1.

En efecto, la matriz Jacobiana inversa $A(t)$, asociada a la transformación $T(-t)$, satisface la siguiente ecuación diferencial $A'(t) = -\Phi(-t)A(t)$, siendo

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F_y(t, x(t)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Gracias al teorema de Liouville, en ecuaciones diferenciales, se tiene que

$$\det(A(t)) = e^{-\int_0^t \text{tr}(\Phi(-s)) ds} \det(A(0))$$

donde $\det(A)$ es el determinante de la matriz A , y $\text{tr}(A)$ es la traza de A . Como la matriz $\Phi(-t)$ tiene traza cero, se tiene que $\det(A(t)) = \det(A(0)) = 1$. De este modo,

$$\int_{\Omega} |U(t)f(\sigma)|^2 d\sigma = \int_{T(t)(\Omega)} |f(\tau)|^2 |A(t)^{-1}| d\tau = \int_{\Omega} |f(\tau)|^2 d\tau$$

lo que permite extender $U(t)$ a todo $L^2(\Omega)$ con norma unitaria dada la densidad de $C_0^\infty(\Omega)$ en este espacio de Hilbert. Más aún, es posible probar que $U(t)$ es un grupo unitario fuertemente continuo (ver [25]), permitiendo asegurar la existencia de un operador autoadjunto H definido sobre $L^2(\Omega)$ tal que

$$U(t) = e^{-itH},$$

resultado que debemos a Stone (ver, por ejemplo [25]). Así, la dinámica Newtoniana puede ser representada en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ a través del grupo unitario fuertemente continuo $U(t)$. No es difícil probar que

$$(Hf)(x, y) = i\nabla f(x, y) \cdot (y, F(0, x)),$$

donde el dominio del *Hamiltoniano* H contiene a las funciones infinitamente diferenciables con decaimiento al infinito (ver [3]). La *ecuación de Schrödinger* que determina la dinámica cuántica asociada al operador autoadjunto H está dada por

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, x) = H\psi(t, x)$$

siendo $\psi(t)$ una función en $L^2(\Omega)$ para cada número real t .

1.2 BUENA TEORÍA DE SCATTERING CLÁSICO

En el Scattering Cuántico se dice tener una “buena teoría” si el operador de scattering cuántico es unitario. Gracias a la teoría de Koopmann y otros resultados conocidos (ver, por ejemplo [3]), la unitariedad del operador de Scattering Cuántico en espacios de Hilbert es equivalente a la invariancia en medida la función $T(t)$ definido sobre un subconjunto Ω de Σ , con $\Sigma - \Omega$ de medida de Lebesgue cero. Así, en la Sección 2 del Capítulo 2, introduciremos el concepto de *asintóticamente completo*, en que invariancia en medida refleja la idea que casi toda energía admite soluciones de scattering. En un sentido más formal esto quiere decir que salvo un conjunto de medida cero, el conjunto de los estados admite soluciones que escapan de la fuerza potencial que perturba.

A continuación consideramos \mathcal{H} un espacio de Hilbert y H_0 un operador autoadjunto sobre \mathcal{H} . La ecuación que modela la *dinámica libre*

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = H_0\varphi$$

con grupo unitario $U_0(t) = e^{-itH_0}$, que determina la dinámica del sistema libre para todo estado $\psi \in \mathcal{H}$. Sea H otro operador autoadjunto definido sobre \mathcal{H} que determina la *dinámica perturbada* a través de la ecuación

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = H\varphi$$

siendo $U(t) = e^{-itH}$ el grupo unitario que determina la dinámica perturbada del sistema. El scattering asociado a estos sistemas determina el comportamiento asintótico del sistema perturbado en relación al sistema libre, es decir, busca determinar los estados $\psi \in \mathcal{H}$ para los cuales existen $\phi_{\pm} \in \mathcal{H}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|U(t)\psi - U_0(t)\phi_{\pm}\| = 0$$

La relación anterior permite definir la función de scattering S sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} que mapea el estado ϕ_- en el estado ϕ_+ . La teoría de Scattering Cuántico nos permite asegurar que en caso de S estar definido sobre todo \mathcal{H} , entonces S debe ser unitario.

En la teoría de Scattering Clásico resulta, en la mayoría de los casos, imposible definir S sobre todo Σ . Gracias a la teoría de Koopmann podemos representar la dinámica clásica en algún espacio de Hilbert, probando así que la unitariedad de operadores es equivalente a la invariancia en medida de la familia de funciones $T(t)$.

En el próximo capítulo trataremos el problema de Scattering Clásico para *fuerzas conservativas* tales que $T(t)$ sea un invariante en medida.

2 MECÁNICA CUÁNTICA

La Mecánica Clásica tiene su cuna a mediados del siglo XVII de la mano de Isaac Newton. Esta nueva teoría resulta de vital importancia en el desarrollo que tendrá la humanidad en los decenios posteriores. Pero para finales del siglo XIX, científicos europeos dan cuenta que dicha teoría no lograba dar respuesta certera a los nuevos problemas que el hombre se estaba planteando.

La Mecánica Cuántica fue descubierta paralelamente por Werner Heisenberg en 1925 y por Erwin Schrödinger en 1926. El primero se basó en lo que se llaman *matrices*, y el segundo en un sistema que se conoce como *función de onda*. Poco después Schrödinger demostró que ambos métodos eran equivalentes, de forma que cualquiera de ellos se puede deducir a partir del otro. Sin embargo, el procedimiento basado en la función de onda, por tratarse de un método más manejable, ha sido preferentemente utilizado por los científicos en sus trabajos.

Desde el tiempo de su descubrimiento, electrones fueron descritos como *partículas*. Ellos aparecen viajando a lo largo de trayectorias determinadas por la electricidad y fuerzas magnéticas actuando sobre ellos. Los electrones poseen masa, energía y momentum. Sin embargo, ellos poseen propiedades de onda, como fue determinado en difracción de haces de electrones a través de cristales.

No existe duda que la luz consiste de partículas individuales, denominadas *fotones*, que consisten de energía y momentum, como fue demostrado por el efecto Compton. Sabemos desde la Óptica Clásica que un haz de luz consiste de muchos fotones que exhiben propiedades de ondas, es decir *difracción* e *interferencia*. La difracción nos permite asegurar, a partir de las ecuaciones de Maxwell para campos magnéticos, que el campo electromagnético total de un haz de fotones es igual a la suma de los campos magnéticos difractados. Mientras que la interferencia hace relación a que cada fotón interfiere consigo mismo, vale decir cada fotón es descrito por su propio campo magnético.

Cuando un electrón no es afectado por otros electrones podemos asumir que éste debe depender de sus propias propiedades. Por analogía de nuestras conjeturas en conexión con el fotón, podemos esperar que las propiedades de un electrón sean descritas por una *función de onda*, usualmente denotada $\psi(t, x)$, que obedezca una ecuación lineal.

Si $\mathbf{e}(t, x)$ es el campo magnético en el caso de los fotones, la *intensidad*, proporcional a $|\mathbf{e}(t, x)|^2$, fue interpretada como ser proporcional a la probabilidad de encontrar un fotón en una vecindad de x en el tiempo t . Siguiendo esta idea $|\psi(t, x)|^2$ es interpretado como encontrar el electrón en una vecindad de x en el tiempo t . Siguiendo la interpretación de Born, la función de onda $\psi(t, x)$ es una *amplitud de probabilidad*, y su módulo cuadrado produce una probabilidad. Por lo tanto si $P(t, x) dx = |\psi(t, x)|^2 dx$ es la probabilidad de encontrar el electrón

entre x y $x + dx$, en el instante t , entonces

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(t, x)|^2 dx = 1$$

Así como hemos mencionado al comienzo de esta sección, es Schrödinger quien postula una formulación funcional del fenómeno cuántico. Si $\psi(t, x)$ es la función de onda asociada al fenómeno cuántico, ésta satisface la ecuación diferencial

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = (-\Delta + V(x)) \psi(t, x) \quad (1.2)$$

siendo Δ el operador de Laplace y $V = V(x)$ función real. La ecuación (1.2) es denominada **Ecuación de Schrödinger** dependiente del tiempo, y modela la interacción de un electrón libre con una fuerza potencial V . Mientras que el operador $H = -\Delta + V(x)$ es denominado *Hamiltoniano*.

Dada la medida de probabilidad $P(t, x)$, podemos calcular la esperanza de x , x^2 o cualquier función de x . Es decir,

$$\langle f \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) P(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(t, x)} f(x) \psi(t, x) dx$$

Hemos de notar que hemos insertado f en medio de $\overline{\psi}$ y ψ . Esto será conveniente a la hora de querer definir la esperanza del operador *momentum* p , o funciones de éste. Comenzaremos mencionando que el operador momentum está dado por

$$p = -i\nabla$$

donde ∇ denota el operador gradiente. Bajo transformada de Fourier se demuestra que el operador momentum es unitariamente equivalente al operador multiplicador $M(x) = x$. De este modo es posible definir la esperanza del operador momentum

$$\langle p \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\hat{\psi}(t, x)} x \hat{\psi}(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\psi(t, x)} p \psi(t, x) dx$$

Luego, toda función f del operador momentum tiene esperanza

$$\langle f(p) \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\hat{\psi}(t, x)} f(x) \hat{\psi}(t, x) dx$$

En particular, si ψ es solución a la ecuación (1.2) se puede demostrar

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle x \rangle = - \langle \nabla V \rangle$$

El método de separación de variables $\psi(t, x) = \varphi(t)u(x)$ nos permite asegurar que u satisfacen la ecuación diferencial $(Hu)(x) = Eu(x)$, mientras que $\varphi(t) = e^{iEt}$, siendo E un número real. La ecuación resultante

$$-\Delta u(x) + V(x)u(x) = E u(x) \quad (1.3)$$

es denominada *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo*. Esta nueva ecuación plantea un nuevo problema, conocido por *ecuación de valores propios*. Determinar los valores reales E para los cuales (1.3) se satisface, es uno de los problemas centrales tanto en física como en matemática. La resolución de valores propios permite, bajo ciertas condiciones del operador $H = -\Delta + V$, descomponer H e identificar cantidades físicas E que establecen estados de energía de partículas cuánticas.

Los valores propios de H puede ser un conjunto discreto, o puede ser un conjunto discreto y continuo, permitiendo así descomponer funciones

$$\varphi(x) = \sum_n a_n u_n(x) + \int b(k) u_k(x) dk$$

comúnmente conocida como la *descomposición espectral*. Ha de entenderse a u_k por funciones propias asociadas al Hamiltoniano H .

2.1 SISTEMA NO AUTÓNOMO

Como hemos visto en la Sección 2 una partícula cuántica que se ve enfrentada a un potencial V está modelada por la ecuación de Schrödinger, con Hamiltoniano $H = -\Delta + V$. Dicho sistema es denominado *autónomo*, puesto que V es independiente del tiempo. Este hecho permite, mediante separación de variables, plantear un problema equivalente de valores y vectores propios.

El problema de valores y vectores propios, para un Hamiltoniano dado, puede o no tener solución. El teorema espectral nos plantea que todo Hamiltoniano descompone al espacio de Hilbert. Esta descomposición permite reconstruir soluciones a la ecuación de Schrödinger, a partir de vectores propios y vectores propios generalizados.

Cuando una partícula cuántica se ve afectada por un potencial que varía en el tiempo, el método de separación de variables no engendra un problema de valores y vectores propios, como en el caso autónomo. Esto obliga a replantear el problema y, en un primer momento, pensar que este nuevo sistema se vuelve más complejo. En la literatura dichos sistemas son denominados *no autónomos*, dado que no es posible librarse de la variable temporal vía separación de variable. A continuación presentaremos un pequeño extracto del trabajo que ha realizado Howland (ver [13]), quien ha desarrollado la Teoría de Scattering para los sistemas no autónomos, inclusive cuando el potencial V depende periódicamente del tiempo (ver [14]). El método empleado por Howland consiste en inyectar la dinámica en un espacio más grande, denominado *espacio*

de Floquet, donde la dinámica queda asociada a un nuevo Hamiltoniano que es independiente del tiempo.

La dinámica cuántica de un sistema con Hamiltoniano que depende del tiempo $H(t)$ es determinado por la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H(t)\psi(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

donde $H(t)$ es una familia de operadores autoadjuntos actuando sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} . La Teoría de Scattering ha sido desarrollada por Howland (ver [13]) en el caso que $H(t) - H_0(t)$ va a cero suficientemente cuando $t \rightarrow \pm\infty$, donde $H_0(t)$ es un Hamiltoniano que también depende del tiempo.

La idea central presentada por Howland (ver [13]) es introducir el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ para cambiar el Hamiltoniano cuántico dependiente del tiempo por uno independiente del tiempo. Esto permite demostrar que los operadores de onda para la teoría dependiente del tiempo existen sobre \mathcal{H} si y sólo si los operadores de onda usuales, generados a partir del nuevo Hamiltoniano independiente del tiempo, existen en $L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$.

En [14] es tratado el caso periódico, que es $H(t + \tau) = H(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$ el período. Además: En particular, allí se considera el caso en que $H(t) = H_0 + V(t)$ donde H_0 es un Hamiltoniano independiente del tiempo que actúa sobre \mathcal{H} , y $V(t)$ es una perturbación que depende periódicamente del tiempo, es decir $V(t + \tau) = V(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$ su período. La ecuación de Schrödinger usual es el caso particular cuando $H_0 = -\Delta$, el operador de Laplace, actuando sobre $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Generalmente, bajo ciertas condiciones del Hamiltoniano $H(t)$, existe el propagador $U(t, s)$ actuando sobre el llamado *espacio de Floquet* $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, el cual dada una solución $\psi(s)$ de la ecuación (1.4) al tiempo s entonces $U(t, s)\psi(s)$ es la solución al tiempo t . Más aún, cuando el propagador $U(t, s)$ es unitario y fuertemente continuo existe un operador autoadjunto K sobre el espacio de Floquet \mathcal{K} tal que

$$e^{-i\sigma K} f(t) = U(t, t - \sigma)f(t - \sigma)$$

donde el operador K está dado por

$$K = -i\frac{\partial}{\partial t} + H(t),$$

y es conocido como el *Hamiltoniano de Floquet*, asociado a la familia de operadores $H(t)$.

Cuando el Hamiltoniano $H(t)$ es periódico en el tiempo, se puede demostrar que su dinámica puede ser tratada en el *espacio de Floquet periódico*, como presentaremos a continuación.

Consideramos el operador

$$(\mathcal{F}f)(n, \theta) = \hat{f}(\tau n + \theta), \quad n \in \mathbb{Z}, \theta \in [0, \tau]$$

donde

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Luego \mathcal{F} es un operador unitario desde \mathcal{K} a $L^2((0, \tau); l_2(\mathcal{H}))$. Por lo tanto el operador K puede ser representado por una sucesión cuyo n -ésimo elemento está dado por

$$(Kx)_n = \tau n x_n + H_0 x_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{V}_{n-m} x_m$$

actuando sobre $l_2(\mathcal{H})$, donde

$$\hat{V}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(t) e^{-int/\tau} dt.$$

Más aún, el propagador asociado al Hamiltoniano que depende periódicamente del tiempo satisface $U(n\tau + t, n\tau + s) = U(t, s)$ para todo entero n y $t, s \in \mathbb{R}$. Este método permite encontrar una representación del caso periódico, incrustando la dinámica en un espacio más grande. Retomaremos esta idea en el Capítulo 3, donde expondremos cómo un Hamiltoniano periódico en el tiempo se representa en un espacio de Floquet periódico.

2.2 RESONANCIAS

El fenómeno de resonancia, en Mecánica Cuántica, ha sido intensamente estudiado desde el punto de vista de sus efectos físicos y desde la rigurosa formulación matemática (ver, por ejemplo [28], [14], [12]). Resonancia hace alusión a un fenómeno físico de partículas cuánticas que permanecen un *largo período de tiempo* en una determinada región del espacio. Esta idea se refleja en concentración de la amplitud de probabilidad, en una región acotada del espacio, o decaimiento exponencial de la medida de probabilidad en la variable temporal.

En Mecánica Clásica la dinámica está dada por la ecuación de Newton. Cuando una partícula clásica se ve enfrentada a una fuerza potencial, su trayectoria depende directamente de la posición y el momentum en un instante dado. Pero la trayectoria de dicha partícula puede ser o no acotada. A diferencia del caso clásico, una partícula cuántica con energía mayor que el ínfimo del potencial, siempre se escapa al infinito. Este fenómeno es conocido como el *efecto túnel*.

Si consideramos a modo de ejemplo la Figura 1.2, podemos mencionar que una partícula clásica con energía E queda atrapada, periódicamente en el tiempo, si sus condiciones iniciales se encuentran en la región $W(E)$. Mientras que

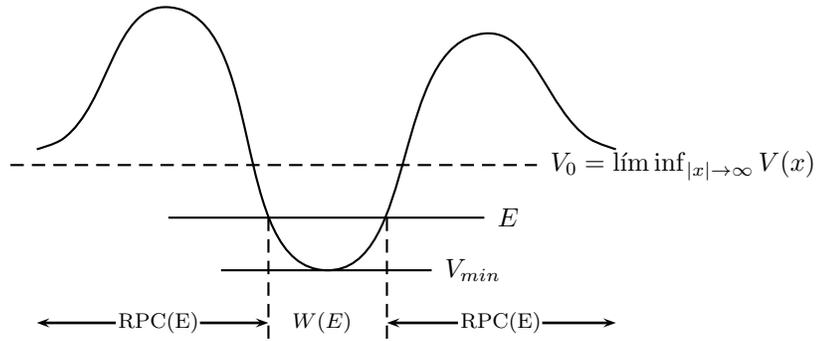


Figura 1.2: Región Prohibida Clásica

una partícula cuántica, con igual energía, penetrará la barrera de potencial (ver, por ejemplo [12]) y escapará de cada región acotada del espacio. Más aún, mediante métodos de aproximación se puede demostrar que

$$\psi(x) \sim c_0 e^{-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_a^{|x|} \sqrt{V(s)-E} ds} \quad \hbar \downarrow 0 \quad (1.5)$$

siendo ψ solución a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. La formulación aproximada de ψ , representada en (1.5), nos muestra concentración de la amplitud de probabilidad en una región del espacio.

Consideremos una fuerza potencial $V(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ (ver Figura 1.3). En Mecánica Clásica una partícula puede quedar atrapada por una fuerza potencial si las condiciones iniciales se encuentran en $W(E)$, pero será no acotada si las condiciones iniciales están en $\mathcal{E}(E)$. Más aún, el conjunto $\{x | V(x) > E\} = CFR(E)$, denominado *región prohibida clásica* (classical forbidden region) en la energía E , es impenetrable por una partícula clásica.

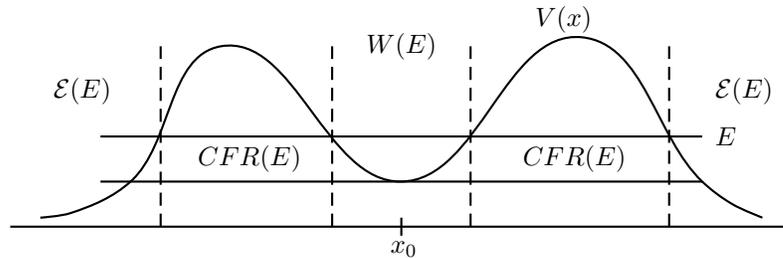


Figura 1.3: Situación de Resonancia

A diferencia del caso clásico, una partícula cuántica está condenada a escapar de toda región acotada del espacio. Inclusive si el potencial decae suficientemente al infinito, la dinámica de dicha partícula es comparable con su dinámica

libre. ¿Pero qué ocurre si la región $CFR(E)$ es significativamente grande para una energía E ? En tal caso habría de esperarse, en caso de existir solución, que la función de onda se concentre en $W(E)$, por un “largo tiempo”. Tales funciones de onda, usualmente denominadas *estados*, son comúnmente llamadas *resonancias cuánticas*.

En física-matemática, innumerables autores han tratado de introducir una definición formal para el fenómeno de resonancia, siendo éste el principal problema. Inclusive, ciertas definiciones resultan contradictoria o no representan el fenómeno físico. Actualmente son tres las definiciones más utilizadas por los investigadores: (i) Polos de la Resolvente, (ii) Decaimiento Exponencial y, (iii) Tripleta de Gelfand.

Polos de la Resolvente. Diremos que $E = E_0 - i\Gamma/2$ es una *energía resonante* para H si existe un subconjunto denso Θ en \mathcal{H} , tal que para todo $\varphi \in \Theta$, $\langle \varphi, (H - z)^{-1} \varphi \rangle$ tiene una continuación meromorfa desde $\text{Im } z > 0$ a la región que contiene a E , y E es un polo de esta continuación.

Decaimiento Exponencial. Diremos que φ es un *estado resonante* de H con amplitud Γ , si

$$|\langle \varphi, e^{-iHt} \varphi \rangle|^2 = e^{-\Gamma t}$$

para todo $t > 0$.

Tripleta de Gelfand. Supondremos que \mathcal{H} contiene un espacio nuclear X el cual es continuamente inyectado en \mathcal{H} , y es invariante bajo la acción del Hamiltoniano H . Entonces $X \subset \mathcal{H} \subset X^*$ será la tripleta de Gelfand para H . Diremos que $E - i\Gamma/2$ es una *energía resonante* de H si existe alguna tripleta de Gelfand para H y algún $\varphi \in X^*$ con $H\varphi = (E - i\Gamma/2)\varphi$.

Simon, en *Resonances and Complex Scaling* (ver [30]), presenta de manera caricaturesca, como cada una de estas definiciones resulta ser o bien vacía o poco rigurosa. A continuación presentaremos un pequeño fragmento del trabajo expuesto por Simon en *Resonances and Complex Scaling*.

Corto tiempo. Si φ tiene energía finita, es decir $\langle \varphi, H\varphi \rangle < \infty$, entonces $F(t) = |\langle \varphi, e^{-iHt} \varphi \rangle|^2$ es diferenciable y debe tener derivada cero en $t = 0$, ya que $F(t) \leq F(0)$ para todo número real t . Ya que $F(t) = F(-t)$, entonces $F(t) = e^{-\Gamma|t|}$ que es imposible a menos que φ no tenga energía finita.

Largo tiempo. Supondremos que H es acotado por abajo y que $F(t) = |\langle \varphi, e^{-iHt} \varphi \rangle|^2$ satisface $|F(t)| \leq F(t) = Ce^{-A|t|}$ para algunas constantes $A, C > 0$. El teorema espectral asegura que $\langle \varphi, e^{-iHt} \varphi \rangle$ es la transformada de Fourier de una medida, es decir

$$\langle \varphi, e^{-iHt} \varphi \rangle = \int e^{-i\lambda t} d\mu(\lambda)$$

El teorema de Paley-Wiener nos dice que ya que $F^{1/2}$ tiene decaimiento exponencial, $d\mu(\lambda) = g(\lambda) d\lambda$ con g analítica en una banda de longitud $A/2$ al rededor de \mathbb{R} . Formalmente

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(t)^{1/2} e^{i\lambda t} dt$$

Ya que $g(\lambda) = 0$ para todo λ bajo la cota inferior de H , tendremos que $g \equiv 0$. Entonces $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$.

Lavadero de Cocina. Si el espacio X en la tripleta de Gelfand es muy pequeño entonces X^* es demasiado grande y contendrá elefantes, lavaderos de cocina y “vectores resonantes” para todo número complejo E . Por ejemplo si $H = -\Delta$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ y $X = C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, entonces X^* (las distribuciones) contendrá $e_z(x) = e^{iz \cdot x}$ para todo $z \in \mathbb{C}^3$ y $He_z = z^2 e_z$. Aunque es sabido que $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ no es un espacio nuclear para la definición usual de tripleta de Gelfand, uno puede modificar un poco el espacio si se insiste sobre la idea de nuclear.

Nosotros abordaremos el fenómeno de resonancia vía el concepto de *frecuencias dispersivas* (o también conocidas como frecuencias de scattering), que hace relación con soluciones a la ecuación de Schrödinger cuyo comportamiento asintótico es de crecimiento exponencial. Este comportamiento define a las que se conocen como soluciones salientes, o *soluciones outgoing*. Esta alternativa está basada en el trabajo realizado por Loe (ver [22]), en el caso clásico para la ecuación de onda, donde asocian resonancia a frecuencias de scattering (ver [20]).

2.3 ESTADOS OUTGOING

Una de las más comunes caracterizaciones del fenómeno resonancia está ligado al modelo de evolución. Resonancias son representadas como números complejos las cuales son, en algunos casos, frecuencias propias de la evolución y el cual caracteriza el comportamiento asintótico de la solución. Ellas forman

un conjunto discreto $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ en el plano complejo. Por ejemplo, esperamos que regulares soluciones de la evolución tienen expansión asintótica

$$u(t, x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\sigma_k t} v_k(t, x)$$

para t tendiendo a infinito, donde c_k son constantes y $v_k = v_k(x)$, en el caso $V = V(x)$, y $v_k = v_k(t, x)$ es periódico en t con el mismo período de V , en el caso periódico.

Las frecuencias de scattering las podemos encontrar en la literatura asociadas a la ecuación de onda. Dichas frecuencias hacen relación a estados de energía, al igual que en Mecánica Cuántica, donde el sistema está en *resonancia*.

Si consideramos la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(t) + H_0 \psi(t) + V \psi(t) = 0, \quad (1.6)$$

por medio del método de separación de variables, es decir $\psi(t, x) = \phi(t)u(x)$, la ecuación (1.6) es equivalente a resolver

$$(H_0 + V)u(x) = z^2 u(x) \quad (1.7)$$

puesto que $\phi(t) = e^{iz^2 t}$. Las frecuencias de scattering están asociadas a valores z , en el plano complejo, para los cuales la ecuación (1.7) admite solución *outgoing*. En dimensión tres, una solución u a la ecuación (1.7) es denominada outgoing si satisface $u(x) \sim e^{iz|x|}/|x|$ para $|x| \rightarrow \infty$. En el Capítulo 3 daremos una definición formal del concepto de outgoing en un contexto más general, en función de la dinámica del sistema.

Hemos de notar que la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es idéntica a (1.7). Análogamente se puede decir que $\sigma \in \mathbb{C}$ es una *resonancia* para la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, x) = (-\Delta + V(x)) \psi(t, x)$$

si existe una *solución outgoing*, no trivial, $u = u(x)$ de la ecuación,

$$(-\Delta + V(x))u(x) = \sigma u(x)$$

El concepto de outgoing se puede reformular, tanto en el caso cuántico como en la ecuación de onda, a partir de la dinámica de evolución. La discusión sobre esta nueva formulación será tratada en el Capítulo 3, y será de vital importancia para los resultados de esta tesis, y en caracterizar resonancias cuando las perturbaciones a la dinámica libre dependen periódicamente del tiempo.

Función de Scattering Clásico

1 INTRODUCCIÓN

Un problema importante dentro de la Mecánica Clásica o Newtoniana es determinar la trayectoria de una partícula. La *ecuación de movimiento*, según las leyes de la Mecánica Newtoniana, de una partícula n -dimensional está dada por la ecuación

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)) \tag{2.1}$$

donde F es la fuerza que actúa sobre la partícula.

Cuando $F(x) = -\nabla V(x)$, para algún *potencial* V , se tiene que la ecuación (1.2) es conservativa en el sentido que

$$E = \frac{1}{2} \|\dot{x}(t)\|^2 + V(x(t)) \tag{2.2}$$

no depende del valor de t en \mathbb{R} , vale decir E es constante.

La ecuación (2.1) modela el comportamiento de una partícula clásica cuya trayectoria es afectada por una fuerza F , mientras que (2.2) relaciona la dinámica de la partícula frente al potencial V . Ambas ecuaciones permiten determinar la evolución del sistema de una partícula al enfrentarse a dicho potencial. La *ecuación de energía* (2.2) expresa que la energía del sistema es conservada a lo largo del tiempo.

Un problema que se ha tratado con mucho interés a lo largo de los últimos siglos es determinar el comportamiento de dichas partículas para tiempos significativamente grandes. El estudio matemático del comportamiento asintótico de partículas clásicas se da dentro de la *Teoría de Dispersión o Scattering Clásico*, donde dispersión es una traducción aproximada del inglés a la palabra scattering. En lo sucesivo utilizaremos la palabra scattering para referirnos al comportamiento asintótico de partículas.

La Teoría de Scattering Clásico ha permitido dar parcialmente una respuesta sobre el comportamiento de las partículas clásica para tiempos muy grandes, comparando la dinámica dada por la fuerza F con una dinámica más simple (libre) que, generalmente, conserva energía y momentum. Una de las primeras problemáticas en el Scattering Clásico es determinar la “dinámica libre”. Nosotros abordaremos el caso particular en que la dinámica libre está asociada a una fuerza potencial no positiva, mientras que la perturbación está asociada a un potencial no negativo. Un ejemplo que desarrollaremos es *Scattering Clásico en Campo Magnético*. Cuando nos referimos a “campo magnético” hacemos referencia a dinámica libre con fuerza constante e igual a -1 . De este modo, no deberemos confundir partícula libre de “fuerzas” con partícula en dinámica libre, a pesar que en nuestro lenguaje no lo diferenciaremos, salvo sea necesario. Adicionalmente presentaremos un fragmento del trabajo realizado por Astaburuaga, Cortés y Fernández (ver [4]), donde determinan una expresión para la función de scattering y el problema inverso, donde el Hamiltoniano libre es $H_0(q, p) = p^2/2$.

En el presente capítulo determinaremos la función de scattering y resolveremos el problema inverso para trayectorias unidimensionales. La dinámica libre estará asociada a potenciales no decrecientes y supondremos que la perturbación genera una buena teoría de scattering. Adicionalmente, al final de este capítulo, presentaremos el modelo Stark donde la dinámica libre está asociada al potencial $V_0(x) = x$.

2 FUNCIÓN DE SCATTERING

Usualmente el concepto de dinámica libre puede asociarse a la ausencia de fuerzas actuando sobre la trayectoria de una partícula. Pero en ocasiones estamos interesados en considerar como dinámica libre sistemas más complejos tales como sistemas en que la gravedad, roce, etc., resulten ser el estado libre de la partícula. En tales casos es natural pensar en la ecuación de Newton

$$\ddot{x}(t) = -\nabla V_0(x(t))$$

como la dinámica libre, siendo V_0 el potencial que genera la dinámica asociada al sistema. Dicho sistema tiene asociado el *Hamiltoniano* $H_0(q, p) = p^2/2 + V_0(q)$ considerado la energía del sistema. En este caso diremos que la partícula tendrá una *trayectoria libre*.

El Scattering Clásico busca caracterizar el comportamiento asintótico de partículas que ven afectada su trayectoria libre al interactuar con fuerzas potenciales externas. Si la ecuación

$$\ddot{x}(t) = -\nabla V(x(t)) \tag{2.3}$$

caracteriza la dinámica de una partícula que ve afectada su trayectoria libre por una fuerza potencial, entenderemos a $V - V_0$ como el potencial que perturba la dinámica libre. El sistema perturbado tiene Hamiltoniano $H(q, p) = p^2/2 + V(q)$, siendo ésta la energía conservada del sistema.

La ecuación de movimiento de una partícula libre debe admitir solución para toda condición inicial (q, p) en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, siempre que $H_0(q, p) \neq 0$. Más aún, las soluciones deben ser *globales*, es decir, están definidas para todo real t . En la siguiente definición consideraremos el conjunto de todas las condiciones iniciales que entregan soluciones libres, globales y no acotadas.

Definición 2.1. Definamos el **espacio de los estados**

$$\Sigma = \{(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : H_0(q, p) \neq 0\}$$

Diremos que $(q, p) \in \Sigma$ es un **estado de scattering** o **estado dispersivo** si existe $y(t)$ solución no acotada al sistema dinámico libre, con $(y(0), \dot{y}(0)) = (q, p)$, y $x(t)$ una solución a la ecuación (2.3), no necesariamente solución global, tales que una de las siguientes condiciones se satisface:

(i)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{(x(t), \dot{x}(t)) - (y(t), \dot{y}(t))\} = 0$$

(ii)

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \{(x(t), \dot{x}(t)) - (y(t), \dot{y}(t))\} = 0$$

De acuerdo con la definición anterior, una partícula con trayectoria perturbada es asíntota a la trayectoria libre, cuando $t \rightarrow -\infty$ o $t \rightarrow \infty$. Evidentemente no todo potencial V admite que todo par $(q, p) \in \Sigma$ sea un estado de scattering, más aún existen potenciales que nunca permiten dicho fenómeno. Un ejemplo claro de ello es considerar $V(x) = x^2$. Este potencial atrapa las partículas y las hace oscilar en una región acotada de manera periódica a lo largo del tiempo.

Un aspecto fundamental dentro de la teoría de scattering es determinar soluciones únicas y globales, ya que éstas caracterizan de manera única el comportamiento de la partícula a lo largo del tiempo. Así, a cada estado le corresponde a lo más una solución del sistema (2.3). Esto motiva las siguientes preguntas ¿para qué potenciales V la ecuación (2.3) admite soluciones globales y únicas? y ¿cuáles de estas soluciones admiten estados de tipo scattering?. Estas preguntas equivalen a tener una buena teoría de Scattering Clásico. Tanto en el caso magnético como en dinámica libre independiente de fuerzas la respuesta es favorable, para una familia no vacía de potenciales (ver [27], [18]). A continuación introduciremos las *funciones de onda* que relacionan la dinámica libre y perturbada, permitiendo posteriormente definir la función de scattering.

Definición 2.2. Sea $x_-(t)$ solución a la ecuación (2.3) que tiene comportamiento asintótico $y_-(t)$ cuando $t \rightarrow -\infty$. Definimos la **función de onda** $\Omega_+ : \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por la relación

$$\Omega_+(y_-(0), \dot{y}_-(0)) = (x_-(0), \dot{x}_-(0))$$

donde Σ_0 son todos los estados $(q, p) \in \Sigma$ tales que $p^2 + 2V_0(q) \neq 2V(x_0)$ con $V'(x_0) = 0$. Similarmente, definimos Ω_- por la relación

$$\Omega_-(y_+(0), \dot{y}_+(0)) = (x_+(0), \dot{x}_+(0))$$

para $x_+(t)$ una solución al sistema perturbado con comportamiento asintótico $y_+(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Las funciones de onda nos permiten caracterizar el comportamiento asintótico de soluciones al sistema perturbado. Así, la siguiente definición determina explícitamente el comportamiento de soluciones no acotada que tienen comportamiento asintótico libre.

Definición 2.3. Definimos la **función de scattering** $S : D(S) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por la relación $Sw = \Omega_-^{-1}\Omega_+w$, donde $D(S)$ es un subconjunto adecuado de Σ_0 .

Cuando $\text{Ran } \Omega_+$, $\text{Ran } \Omega_-$ y $\Sigma - \Sigma_{\text{bound}}$ coinciden, salvo un conjunto de medida cero, donde Σ_{bound} representa el conjunto de las condiciones iniciales que generan soluciones acotadas de la ecuación (2.3), entonces la función $T(t)$ se inyecta en un espacio de Hilbert generando una buena teoría de scattering Cuántico. En tal caso se dice que la teoría de Scattering Clásico es una buena teoría o *asintóticamente completa*.

Definición 2.4. Diremos que la función de scattering S es **asintóticamente completo** si $\text{Ran } \Omega_+$, $\text{Ran } \Omega_-$ y $\Sigma - \Sigma_{\text{bound}}$ coinciden, salvo un conjunto de medida cero.

Esto nos deja la idea, salvo por un conjunto de medida cero, que todo estado en Σ es imagen o preimagen de un estado en Σ . Dicho de otro modo, casi todo elemento de Σ es estado de scattering. Para efectos de los resultados que expondremos en este capítulo, supondremos que la función de scattering resultante es asintóticamente completo.

Es importante hacer notar que $\Sigma - \Sigma_{\text{bound}}$ no es el conjunto de estados de scattering, sino más bien el conjunto que engendra soluciones no acotadas al sistema perturbado. No es difícil de probar que ser asintóticamente completo es equivalente a que el conjunto de estados de scattering difiere en un conjunto de medida cero con Σ (ver [19]).

3 REPRESENTACIÓN DE S

En esta sección caracterizaremos la función de scattering clásico, vale decir, si $(a, b) = S(q, p)$ presentaremos relaciones explícitas para que permitan determinar a y b como función de q y p . Para ello haremos las siguientes consideraciones sobre las dinámicas libres y perturbadas.

Para efectos de los resultados que presentaremos a lo largo del capítulo supondremos

- (i) Para todo $(q, p) \in \Sigma_0$ existe una única solución global al problema con valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = -V_0'(y(t)) \\ \dot{y}(0) = p \\ y(0) = q \end{cases}$$

- (ii) Toda solución en (i) cumple $|y(t)| \rightarrow \infty$ cuando $|t| \rightarrow \infty$.

- (iii) La perturbación $V(x) - V_0(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- (iv) $|V(x) - V_0(x)| \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.

- (v) $V_0'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- (vi) $|V_0(x)| \rightarrow \infty$ si $|x| \rightarrow \infty$.

- (vii) La teoría asociada a estos potenciales es asintóticamente completa.

El dominio $D(S)$ de la función de scattering S depende directamente de los recorridos de las funciones de onda Ω_{\pm} . Esto conlleva a preguntarnos si la función de scattering S , asociado a un potencial V , admite dominio no vacío. Para caracterizar el dominio de la función de scattering, es necesario tener presente el siguiente conjunto

$$E_- = \{x \in \mathbb{R} \mid V'(x) = 0 \text{ y } V(x) > V(y), \text{ para todo } y < x\}$$

Este conjunto consta de los máximos locales del potencial $V(x)$ que pueden verse desde $-\infty$. Es claro que $V(E_-)$ es un conjunto medible con medida de Lebesgue cero. A continuación presentaremos un pequeño resultado en vía de caracterizar el dominio de la función de scattering S .

Lema 2.5. *Sea $y(t)$ solución no acotada al sistema libre. Entonces existe un único $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y(t_0 + t) = y(t_0 - t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Más aún*

$$t_0 = \frac{\text{sign}(\dot{y}(0))}{\sqrt{2}} \int_{y(0)}^{V_0^{-1}(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V_0(x)}}$$

siendo E la energía de la partícula asociada a la solución $y(t)$.

DEMOSTRACIÓN. Supondremos para efecto de la demostración y sin pérdida de generalidad, que $p > 0$. Comenzaremos probando que existe un número real t_0 tal que $\dot{y}(t_0) = 0$. Luego, $y(t_0 - t)$ y $y(t_0 + t)$ son soluciones del problema con valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = -V_0'(y(t)) \\ \dot{y}(0) = 0 \\ y(0) = y(t_0) \end{cases}$$

concluyendo así, por existencia y unicidad de solución al sistema anterior, que $y(t_0 - t) = y(t_0 + t)$.

Si suponemos que $\dot{y}(t) \neq 0$ para todo número real t , entonces $y(t)$ es una función estrictamente creciente, dado el supuesto de $p > 0$. Además $y(t)$ es no acotada para $t \rightarrow \infty$, de modo que existe t' tal que $V_0(y(t')) > E$. Luego, a partir de la ecuación de energía

$$E = \frac{1}{2}\dot{y}(t')^2 + V_0(y(t'))$$

obtenemos una contradicción dada la positividad de $\dot{y}(t)^2$. Por lo tanto existe un número real t_0 que satisface $\dot{y}(t_0) = 0$.

Finalmente, a partir de la ecuación de la energía para $y(t)$ se tendrá

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{E - V_0(t)}},$$

concluyendo la representación de t_0 luego de integrar la expresión anterior entre 0 y t_0 , puesto que $V_0(y(t_0)) = E$.

La demostración para $p < 0$ es análoga, teniendo precaución al elegir la raíz negativa en la ecuación de energía. ■

Una consecuencia directa del lema anterior es que toda solución al sistema dinámico libre diverge a menos infinito cuando $|t| \rightarrow \infty$. De este modo, si $x(t)$ es una solución al sistema perturbado, entonces necesariamente diverge a menos infinito cuando $|t| \rightarrow \infty$. De esta afirmación se desprende la existencia de un único número real t_0 tal que $x(t_0 + t) = x(t_0 - t)$. El siguiente resultado es consecuencia del Lema 2.5 y el hecho que toda solución al sistema perturbado vuelve a menos infinito.

Teorema 2.6. *Sea S la función de scattering asociado a la perturbación $V - V_0$, entonces $(q, p) \in D(S)$ si y sólo si $p^2/2 + V_0(q) \notin V(E_-)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (q, p) en el dominio de la función S y $(a, b) = S(q, p)$. Luego existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\dot{x}(t_0) = 0$.

Comenzaremos suponiendo que existe $x_0 \in E_-$ con $p^2/2 + V_0(q) = V(x_0)$. Por la ecuación de conservación de energía $V(x(t_0)) = p^2/2 + V_0(q)$, se tendrá necesariamente que $x(t_0) \geq x_0$.

De este modo, existe $t_1 \in \mathbb{R}$ que satisface $x(t_1) = x_0$. Por lo tanto, el problema con valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -V'(x(t)) \\ \dot{x}(t_1) = 0 \\ x(t_1) = x_0 \end{cases}$$

admite por solución $x(t) \equiv x_0$, lo que contradice la unicidad.

Recíprocamente, supondremos que $p^2/2 + V_0(q) \notin V(E_-)$. En este caso las funciones de onda está bien definidos y el recorrido de Ω_- contiene al recorrido de Ω_+ , puesto que el sistema es asintóticamente completo. ■

Teorema 2.7. *Sea $(q, p) \in D(S)$ y $(a, b) = S(q, p)$. Si $2E = p^2 + 2V_0(q)$ y $\alpha = \inf V(E)$ entonces*

$$\begin{aligned} & \text{sign}(p) \int_q^\beta \frac{du}{\sqrt{E - V_0(u)}} - \text{sign}(b) \int_a^\beta \frac{du}{\sqrt{E - V_0(u)}} \\ &= 2 \int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{E - V_0(u)}} + 2 \int_{-\infty}^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{E - V_0(x)}} - \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} \right) dx \end{aligned}$$

y

$$\frac{b^2}{2} + V_0(a) = \frac{p^2}{2} + V_0(q)$$

donde $\beta = V_0^{-1}(E)$.

DEMOSTRACIÓN. Hemos de tener presente que existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $y_-(t_1 - t) = y_-(t_1 + t)$ y $y_+(t_2 - t) = y_+(t_2 + t)$. Obteniendo así las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} t_1 - t &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{y_-(t)}^\beta \frac{du}{\sqrt{E - V_0(u)}}, & t < t_1 \\ t_0 - t &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x(t)}^\alpha \frac{du}{\sqrt{E - V(u)}}, & t < t_0 \end{aligned}$$

De las relaciones anteriores se puede deducir que $t_1 - t_0$ está dado por

$$\sqrt{2}(t_1 - t_0) = \int_\alpha^\beta \frac{du}{\sqrt{E - V_0(u)}} + \int_{-\infty}^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{E - V_0(u)}} - \frac{1}{\sqrt{E - V(u)}} \right) du$$

luego de tomar límite de t a menos infinito, considerando el comportamiento

asintótico de $x(t) - y_-(t)$ para dicho límite. Similarmente, se tendrá que

$$\begin{aligned} -(t - t_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\beta}^{y_+(t)} \frac{du}{\sqrt{E - V_0(u)}}, & t < t_1 \\ -(t - t_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\alpha}^{x(t)} \frac{du}{\sqrt{E - V(u)}}, & t < t_0 \end{aligned}$$

y por tanto

$$\sqrt{2}(t_2 - t_0) = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{du}{\sqrt{E - V_0(u)}} - \int_{\alpha}^{-\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{E - V_0(u)}} - \frac{1}{\sqrt{E - V(u)}} \right) du$$

Hemos de notar, a partir de los cálculos realizados, que $t_1 - t_0 = -(t_2 - t_0)$, hecho que nos permite asegurar la relación

$$t_1 - t_2 = 2(t_1 - t_0)$$

concluyendo así la prueba de (iii) a partir del Lema anterior. ■

4 PROBLEMA INVERSO

El problema inverso para el Hamiltoniano $H = H_0 + V(x)$, donde H_0 es el operador de Laplace sobre \mathbb{R} , depende directamente de la geometría del potencial V . Si la dinámica libre está asociada al potencial $V_0 \equiv 0$, entonces el problema inverso para V nos permite recuperar todo el potencial siempre y cuando éste tenga a lo más un máximo (ver [4]). Geométricamente, en este caso particular, el problema inverso permite recuperar todo aquello que puede ser visto desde el infinito.

Nosotros presentaremos una solución al problema inverso para potenciales V tales que $V'(x) > 0$. La condición $V'(x) > 0$ nos asegura la monotonía de la función V que es fundamental para recuperar V . La positividad que debe satisfacer la derivada de V no nos dice, en un primer momento, mucho sobre la geometría de la perturbación. Pero en esta teoría se debe dar por hecho que la dinámica libre es bien conocida, luego la perturbación debe tener derivada mayor que $-V'_0(x)$. Es decir, la derivada de la perturbación debe superar la fuerza asociada a la dinámica libre, en cada punto de su trayectoria. Inclusive, es posible que la perturbación admita varios máximos locales siempre y cuando la depresión de la perturbación sea compensada por el crecimiento de V_0 .

El siguiente lema es un paso importante en la resolución del problema inverso, y su demostración demanda conocimiento básicos del cálculo integral.

Lema 2.8. Si V una función inyectiva, entonces

$$\int_{V(r)}^y \int_r^{V^{-1}(E)} \frac{dx dE}{\sqrt{E - V(x)}\sqrt{y - E}} = \pi(V^{-1}(y) - r)$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos I la integral que deseamos calcular. Luego, bajo el cambio de variable $x = V^{-1}(s)$, tendremos que I quedará

$$I = \int_{V(r)}^y \int_{V(r)}^E \frac{(V^{-1}(s))' ds dE}{\sqrt{E - s}\sqrt{y - E}} = \int_{V(r)}^y \int_s^y \frac{(V^{-1}(s))' dE ds}{\sqrt{E - s}\sqrt{y - E}}$$

donde la última igualdad es consecuencia del teorema de Fubini. Pero la integral

$$\int_s^y \frac{dE}{\sqrt{E - s}\sqrt{y - E}} = \pi$$

entonces $I = \pi(V^{-1}(y) - r)$, resultado que finaliza la demostración. ■

Teorema 2.9. Si $V'(x) > 0$ para todo $x < x_0$ entonces para todo $y < V(x_0)$ se tendrá

$$V^{-1}(y) = V_0^{-1}(y) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^y \frac{S(E)}{\sqrt{y - E}} dE$$

donde

$$S(E) = \frac{\text{sign}(p)}{2} \int_q^\beta \frac{du}{\sqrt{E - V_0(u)}} - \frac{\text{sign}(b)}{2} \int_a^\beta \frac{du}{\sqrt{E - V_0(u)}}$$

DEMOSTRACIÓN. A partir del Teorema 2.7 podemos asegurar que

$$S(E) = \int_{V^{-1}(E)}^{V_0^{-1}(E)} \frac{du}{\sqrt{E - V_0(u)}} + \int_{-\infty}^{V^{-1}(E)} \left(\frac{1}{\sqrt{E - V_0(x)}} - \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} \right) dx$$

Podemos notar que $S(E)$, representado en la igualdad anterior, tiene explícitamente el valor de V^{-1} en E . Entonces,

$$\int_{-\infty}^y \frac{S(E)}{\sqrt{y - E}} dE = \lim_{r \rightarrow -\infty} (I_1(r) - I_2(r))$$

donde

$$I_1(r) = \int_{V(r)}^y \int_r^{V_0^{-1}(E)} \frac{dx dE}{\sqrt{y - E}\sqrt{E - V_0(x)}}$$

y

$$I_2(r) = \int_{V(r)}^y \int_r^{V^{-1}(E)} \frac{dx dE}{\sqrt{y - E}\sqrt{E - V(x)}}$$

A partir del Lema 2.8 podemos concluir que I_1 e I_2 están dadas por

$$I_1(r) = \pi(V_0^{-1}(y) - r) - \int_{V_0(r)}^{V(r)} \int_r^{V_0^{-1}(E)} \frac{dx dE}{\sqrt{y-E}\sqrt{E-V_0(x)}}$$

e

$$I_2(r) = \pi(V^{-1}(y) - r)$$

De este modo,

$$\int_{-\infty}^y \frac{S(E)}{\sqrt{y-E}} dE = \pi(V_0^{-1}(y) - V^{-1}(y)).$$

Puesto que

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow -\infty} \left| \int_{V_0(r)}^{V(r)} \int_r^{V_0^{-1}(E)} \frac{dx dE}{\sqrt{y-E}\sqrt{E-V_0(x)}} \right| \\ & \leq \pi \lim_{t \rightarrow -\infty} |V_0^{-1}(V(r)) - V_0^{-1}(V_0(r))| \\ & \leq \pi \|(V_0^{-1})'\|_{\infty} \lim_{r \rightarrow -\infty} |V(r) - V_0(r)| = 0 \end{aligned}$$

■

A pesar que en la demostración anterior se utiliza que V es inyectiva, se puede concluir el mismo resultado cambiando $V^{-1}(E)$ por $\alpha(E)$, en el enunciado del teorema, siendo $\alpha(E)$ el ínfimo del conjunto $\{x | V(x) = E\}$. Esto deja siguiente idea geométrica: se puede recuperar de V todo aquello que es posible ver desde menos infinito.

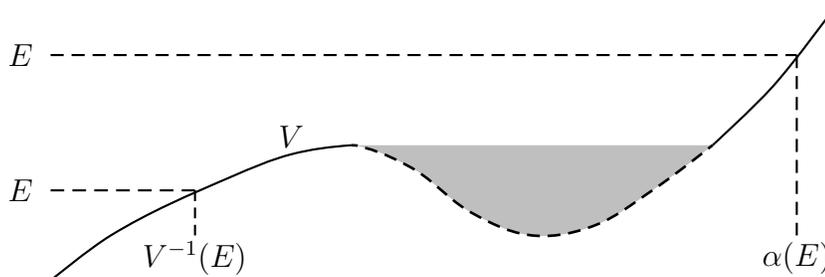


Figura 2.1: Problema Inverso

Claramente el método introducido en el teorema anterior, nos permite resolver el problema inverso cada vez que el potencial V no genera “lagunas” o “valles” que no son perceptibles desde menos infinito. ¿Será que esto implica que no sea posible recuperar la totalidad del potencial?. El siguiente resultado permite zanjar categóricamente la pregunta de qué potenciales pueden ser recuperados en su totalidad a partir de la función de scattering. Para ello tendremos que aceptar definir dinámicas para potenciales V continuos, pero sin derivada continua.

Teorema 2.10. *Sea S_V la función de scattering asociado al potencial V . Además existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $V'(x_0) < 0$. Entonces existe $\tilde{V} \neq V$ tal que $S_V = S_{\tilde{V}}$, salvo un conjunto de medida cero.*

DEMOSTRACIÓN. A partir del enunciado sabemos que existe x_0 tal que $V'(x_0) < 0$. Sean $x_1 < x_0 < x_2$ tales que

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{máx}\{x < x_0 \mid V'(x) = 0\} \\ x_2 &= \text{mín}\{x > x_0 \mid V'(x) \neq 0, V(x) = V(x_1)\} \end{aligned}$$

Consideremos la función continua

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} V(x) & \text{si } x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty) \\ V(x_1 + x_2 - x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

La función \tilde{V} definida satisface

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - \tilde{V}(x)}} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Por lo tanto V y \tilde{V} generan las mismas funciones de scattering, salvo un conjunto de medida cero, a consecuencia de su representación dada por el Teorema 2.7. ■

Hemos de mencionar que dinámicas asociadas a potenciales continuos al menos conservan el momentum. Más aún, la trayectoria de tales dinámicas admiten derivada (velocidad) continua. Por ello es natural definir dinámicas asociadas a tales potenciales.

5 EJEMPLO

Hemos de recordar que la función de scattering depende directamente de la existencia de las funciones de onda. Más aún, tendremos una buena teoría de scattering si ésta es asintóticamente completa. Simon (ver [27]) nos ilustra como el Hamiltoniano libre $H_0(q, p) = p^2/2$ admite una teoría asintóticamente completa, para una familia de perturbaciones que decae suficientemente al infinito. Mientras que Jensen (ver [18]) demuestra un resultado similar para el Hamiltoniano Stark $H_0(q, p) = p^2/2 + q$.

La representación de la función de scattering para el Hamiltoniano $H_0(q, p) = p^2/2$ fue resuelta por Astaburuaga, Cortés y Fernández (ver [4]), determinando expresiones explícitas para la posición y el momentum final, así como caracterizando el dominio de la función de scattering. A su vez resuelve el problema inverso, vale decir, recuperar el potencial a partir de la función de scattering.

Es importante hacer notar que el problema inverso es resuelto únicamente para potenciales que tienen un único máximo a lo largo de su dominio.

En esta sección mostraremos que las relaciones encontradas en la sección anterior, nos permiten determinar fórmulas explícitas para la función de scattering para el Hamiltoniano Stark. Si la función de scattering S está dado por $(a, b) = S(q, p)$ entonces $a = E - b^2/2$ siendo $E = p^2/2 + q$ la energía conservada del sistema. Luego, a partir de la relación determinada en el Teorema 2.7 tendremos

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{sign}(p)\sqrt{E - q} - 2 \operatorname{sign}(b)\sqrt{E - a} \\ &= 4\sqrt{E - \alpha} + 2 \int_{-\infty}^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{E - x}} - \frac{1}{\sqrt{E - x - V(x)}} \right) dx \end{aligned}$$

siendo $V(x)$ la perturbación a la dinámica generada por el Hamiltoniano Stark H_0 . Luego de hacer los reemplazos $a = E - b^2/2$, $q = E - p^2/2$ y reordenando la igualdad anterior, obtendremos

$$\sqrt{2}(p - b) = 4\sqrt{E - \alpha} + 2 \int_{-\infty}^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{E - x}} - \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} \right) dx$$

donde α es el menor número real tal que $V(\alpha) = E$. Estos cálculos nos permiten enunciar el siguiente resultado:

Teorema 2.11. *Sea $(q, p) \in D(S)$ y $(a, b) = S(q, p)$. Si $2E = p^2 + 2V(q)$ entonces*

$$b = p - 2\sqrt{2} \sqrt{E - \alpha} - \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{E - x}} - \frac{1}{\sqrt{E - V(x)}} \right) dx$$

y

$$a = \frac{p^2}{2} - \frac{b^2}{2} + q$$

Puesto que la dinámica libre está asociada al Hamiltoniano $H_0(q, p) = p^2/2 + q$, es posible determinar expresiones explícitas para la posición y momentum finales en función de los iniciales. Inclusive, estos cálculos permiten enunciar el problema inverso como sigue:

Teorema 2.12. *Si $V'(x) > 0$ para todo $x < x_0$ entonces para todo $y < V(x_0)$, entonces*

$$V^{-1}(y) = V_0^{-1}(y) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^y \frac{S(E)}{\sqrt{y - E}} dE$$

donde

$$S(E) = \operatorname{sign}(p)\sqrt{E - q} - \operatorname{sign}(b)\sqrt{E - a}$$

6 CONCLUSIÓN

Los resultados expuestos en el Capítulo 2 plantean una interesante gama de preguntas, que serán abordadas en futuras investigaciones. En un primer momento podríamos plantearnos sobre qué libertad tenemos para elegir el potencial V_0 que modela la dinámica libre, y por ende la elección de la perturbación, de modo que la teoría de scattering entre ambas dinámicas sea asintóticamente completa. A partir del trabajo realizado por Jensen (ver [18]) y los resultados presentados en la Sección 5, habría de esperarse que potenciales $V_0(x)$ cuyo comportamiento asintótico es la recta $y = x$, admitieran una buena teoría de scattering para perturbaciones que decaen suficientemente al infinito.

Es evidente que la construcción de la función de Scattering Clásico depende, en un primer momento, que el sistema sea asintóticamente completa. Es por ello que resulta válido plantearnos el siguiente problema: dados dos potenciales V_0, V y la función S del Teorema 2.7, con dominio $D(S)$ que difiere en medida cero con \mathbb{R}^2 , ¿será cierto que los potenciales V_0 y V engendran una teoría de scattering asintóticamente completa?. Si la respuesta es afirmativa, podríamos obtener una amplia familia de potenciales V_0, V cuya teoría de scattering es completa siempre y cuando ciertas integrales convergen.

Por otro lado, el problema inverso tiene como desventaja la falta de unicidad, sobre las regiones en que $V'(x) \leq 0$. Esto se debe a que dos potenciales diferentes pueden tener asociada la misma función de scattering S , dejando incertidumbre sobre el comportamiento del potencial que perturba sobre una región (posiblemente no acotada) del espacio. Ahora bien las discontinuidades de S habrían de darnos luces sobre las regiones del espacio donde el problema inverso admite solución, puestos que dichas discontinuidades habrían de estar sobre la curva $E = p^2/2 + V(q)$ donde $\alpha \in V^{-1}(E)$ es un máximo local de V .

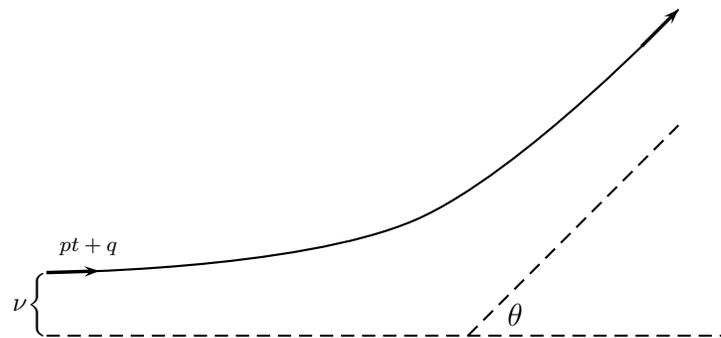


Figura 2.2: Trayectoria de una Partícula

Podemos mencionar que el problema inverso de scattering Clásico puede ser resuelto en dimensión 3, cuando la dinámica libre y perturbada dependen ra-

dialmente de la variable x . Esto se debe a que las trayectorias de las partículas perturbadas son planas y, bajo ciertas condiciones iniciales las ecuaciones diferenciales que modelan la dinámica libre y perturbada coincide con la ecuación diferencial en dimensión 1. Por otra parte, determinar la función de Scattering Clásico $(a, b) = S(q, p)$ sigue siendo un problema abierto, es posible encontrar b en función de q y p . Esta última afirmación se debe a que el *ángulo de reflexión* (ver Figura 2.2), que denotaremos θ , está dado por

$$\theta = \pi - 2 \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{(p^2 - 2V(\xi))p^{-2}\nu^{-2} - r^{-2}}}$$

siendo ν el *parámetro de impacto*

$$\nu = \sqrt{q^2 - \frac{(p \cdot q)^2}{p^2}}$$

y ξ_0 solución a la ecuación

$$\frac{V(\nu\xi)}{E} = 1 - \xi^2, \quad E = \frac{p^2}{2}.$$

Las fórmulas recién expuestas para θ y ν han sido extraídas del libro de R. Newton [24], donde se exhiben dichas fórmulas para potenciales V que no dependen radialmente de la coordenada espacial.

Scattering Cuántico: Solución Saliente

1 INTRODUCCIÓN

El fenómeno de resonancia ha sido estudiado dentro de la Mecánica Cuántica, tanto por físicos, químicos y matemáticos. En los últimos decenios se ha creado una fructífera discusión sobre cómo caracterizar matemáticamente el fenómeno de resonancia. Aunque algunas de estas caracterizaciones resultan ser entre sí contradictorias o no representan el fenómeno físico.

Las *frecuencias de dispersión*, también denominadas *frecuencias de scattering*, es un concepto introducido en el área de *campos magnéticos* y *ondas* (ver, por ejemplo [7]), y es una de las vías más populares en el estudio de resonancia. En adelante no volveremos a utilizar la palabra dispersión sino scattering (ya que “scattering” es el término convencionalmente utilizado en matemática) traducción aproximada al inglés de la palabra dispersión.

Las frecuencias de scattering han sido estudiadas en acústica, electro magnetismo y en Teoría Cuántica de Scattering. Dichas frecuencias consisten de un conjunto discreto de números complejos, que caracterizan el decaimiento local de una onda reflejada. En Física, las frecuencias de dispersión son comúnmente llamadas resonancias.

A lo largo de este capítulo introduciremos el concepto de solución *saliente*, idea básica para definir frecuencias de scattering. Al igual que las frecuencias de dispersión, las soluciones salientes son convencionalmente denominadas soluciones *outgoing*, donde outgoing es una traducción aproximada al inglés de saliente, y por tanto en adelante nos referiremos a soluciones outgoing.

En las secciones siguientes abordaremos la ecuación de Helmholtz, donde se introduce el concepto de solución outgoing para el caso autónomo o independiente del tiempo, para luego finalizar con el caso periódico, cuando el potencial varía periódicamente en el tiempo. En este último será necesario considerar la ecuación de evolución del sistema cuántico, que resultará ser una generalización del caso autónomo para las soluciones outgoing al caso periódico.

2 SOLUCIÓN OUTGOING CASO AUTÓNOMO

El concepto de solución outgoing o saliente lo encontramos en diversos contextos físicos. En *acústica*, por ejemplo, una onda dispersada (del inglés scattered) que cumple la *condición radial de Sommerfeld*, es denominada onda outgoing. Esta condición caracteriza el comportamiento asintótico de ondas dispersadas.

En esta sección presentaremos la caracterización clásica (para la ecuación de onda) de solución outgoing, así como su relación con las frecuencias de scattering. A su vez, introduciremos una noción más general sobre la condición de ser solución outgoing, que nos permitirá extrapolar dicha condición al caso cuántico. Posteriormente abordaremos el caso periódico (en el tiempo), donde será necesario inyectar la dinámica del sistema en un espacio más grande.

Consideremos la ecuación de Helmholtz en dimensión 3 dada por

$$(H_0 - z^2)u = g, \quad \text{Im } z > 0 \quad (3.1)$$

siendo $H_0 = -\Delta$ el operador de Laplace y g función dada. Cuando g decae razonablemente en infinito la solución u a la ecuación (3.1) satisface la *condición radial de Sommerfeld* (ver, por ejemplo [7]), es decir $u(x) \sim e^{iz|x|}/|x|$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Esta afirmación se debe a que u es convolución entre la solución fundamental $N_z(x) = (4\pi|x|)^{-1} \exp(iz|x|)$ y la función g , vale decir

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{iz|x-y|}}{4\pi|x-y|} g(y) dy.$$

Toda solución a la ecuación (3.1), que satisface la condición radial de Sommerfeld, es denominada *solución outgoing*.

Loe (ver [22]) establece varios resultados para la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(t) + H_0 \psi(t) + V \psi(t) = 0,$$

entre ellos la existencia de soluciones outgoing bajo ciertas condiciones de decaimiento del potencial $V = V(x)$. Además, aborda el caso no autónomo, $V = V(t, x)$ función periódica en t , donde se introduce el concepto de *solución outgoing dinámico* y prueba la existencia de tales soluciones cuando el potencial decae suficientemente en la variable espacial. En el caso de outgoing dinámico, Loe hace alusión al trabajo realizado por Cooper y Strauss (ver [5]) donde se desarrolla el concepto outgoing dinámico, es decir $\psi(t)$ es solución outgoing (dinámica) a la ecuación de onda si $U_0(t-s)\psi(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$, siendo $U_0(t)$ el operador mapea el dato inicial al dato en el tiempo t .

La idea central en los trabajos desarrollados tanto por Loe como por Cooper y Strauss para el outgoing dinámico, es sumergir la dinámica del sistema en espacios donde la variable temporal es vista como una variable espacial.

Nuestro interés está en caracterizar soluciones outgoing para la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H\psi(t) \quad (3.2)$$

cuando $H = H_0 + V$ tanto en el caso que V es independiente del tiempo como en el caso que $V = V(t, x)$ depende periódicamente en la variable t . Para ello será necesario introducir el concepto de *solución outgoing dinámico* a la ecuación (3.2) y definir ciertos espacios donde el problema periódico pasa a ser un sistema autónomo.

En vía de construir soluciones outgoing para la ecuación de Schrödinger (3.2) consideramos soluciones, mediante separación de variables, $\psi(t, x) = e^{-iz^2t}u(x)$ siendo u solución al problema de valores propios

$$(-\Delta + V)u(x) = z^2u(x) \quad (3.3)$$

En un primer momento hemos de suponer que z es un número complejo tal que su cuadrado es un número real. Esto es requisito mínimo si deseamos soluciones $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y, por ende, z^2 un valor propio al Hamiltoniano H . Lamentablemente para una familia extensa de funciones V el problema de valores propios planteado por la ecuación (3.3) no admite solución cuadrado integrable. Inclusive, desde el punto de vista físico, la ecuación podría no revelar la existencia de *energías resonantes*, aunque el modelo físico que ésta modela sí los posea.

Esto ha llevado, a partir del fenómeno físico de *resonancia*, a explorar soluciones en espacios de Hilbert con peso (ver [22]), donde la resolvente del operador de Laplace admite continuación analítica compacta del semiplano superior al semiplano inferior. Esto implica que la ecuación (3.3) admitiría soluciones para z^2 no necesariamente real y, en consecuencia, $u \notin L^2(\mathbb{R}^n)$.

La siguiente definición nos presenta soluciones outgoing a la ecuación de Helmholtz a partir de la condición radial de Sommerfeld, definición que será posteriormente extendida al caso dinámico, vale decir cuando el Hamiltoniano depende del tiempo.

Definición 3.1. Diremos que u es solución **outgoing** a la ecuación de Helmholtz

$$(-\Delta - z^2)u = g$$

si u satisface la condición radial de Sommerfeld

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial |x|} - iz \right) u(x) = 0, \quad n > 1$$

En la definición anterior el número natural n está asociado a la dimensión del espacio \mathbb{R}^n donde se considera la ecuación de Helmholtz. Ha de esperarse

que una solución a la ecuación de Helmholtz sea outgoing cada vez que la función g decae rápidamente al infinito.

Para definir dinámicamente el concepto de solución outgoing debemos considerar la ecuación

$$H_0\psi(t) - i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = e^{-iz^2t}g(x) \quad (3.4)$$

siendo $H_0 = -\Delta$, el operador de Laplace. Luego $\psi(t, x) = e^{-iz^2t}u(x)$ es solución a la ecuación (3.4) siempre y cuando u satisfaga la ecuación de Helmholtz. En tal caso, si denotamos $f(t, x) = e^{-iz^2t}g(x)$ entonces ψ resuelve la ecuación integral

$$\psi(t) = U_0(t-s)\psi(s) - i\int_s^t U_0(t-r)f(r)dr.$$

siendo $U_0(t) = e^{-itH_0}$ el grupo unitario asociado al Hamiltoniano H_0 . De este modo diremos se puede evidenciar que u es solución outgoing a la ecuación de Helmholtz si y sólo si $U_0(t-s)\psi(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow -\infty$ y g decae rápidamente al infinito, equivalencia que motiva la definición dinámica de la condición outgoing.

Definición 3.2. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(t, x) = 0$ para todo $|x| > R$, para algún $R > 0$. Diremos que ψ es solución **outgoing** a la ecuación

$$H_0\psi(t) - i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = f(t) \quad (3.5)$$

si $H_0\psi(t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para todo t y $U_0(t-s)\psi(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow -\infty$, donde la convergencia es en el espacio $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Aquí $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de Hilbert de las funciones f que son cuadrado integrable para todo subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

El operador $U_0(t)$ es la extensión del grupo unitario $\exp(-itH_0)$ al espacio L^2_{loc} . De este modo, la Definición 3.2 coincide con la introducida por Cooper y Strauss en [5], definición que caracteriza los estados outgoing cuando las dinámicas están asociadas a grupos unitarios $U_0(t)$, grupo unitario libre, y operadores lineales periódicos $U(t, s)$, propagador del sistema perturbado que satisface $U(t + \tau, s + \tau) = U(t, s)$ para un período τ .

Es posible debilitar, en la definición anterior, la condición de ser f con soporte compacto. Por ahora no entraremos en detalle sobre el decaimiento de la función f al infinito, pero retomaremos este punto más adelante. Vale la pena mencionar que el concepto de outgoing será generalizado en la Sección 3 con el fin de abordar el concepto de outgoing en espacios de Floquet, para un Hamiltoniano H_0 arbitrario.

El siguiente resultado nos permite representar y caracterizar soluciones outgoing, a la ecuación (3.5), en forma integral.

Lema 3.3. *Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t, x) = 0$ para todo $|x| > R$, para algún $R > 0$. Entonces ψ es solución outgoing a la ecuación (3.5) si y sólo si está dada por la integral de Duhamel*

$$\psi(t) = i \int_{-\infty}^t U_0(t-s)f(s) ds$$

La demostración del Lema 3.3 sigue de la definición de outgoing y la representación integral de la solución ψ , mediante el método de variación de parámetros.

Las frecuencias de scattering en el fenómeno de onda han sido arduamente estudiadas por su importancia física y el problema matemático que ella conlleva. Dichas cantidades hacen relación a resonancias o polos de la resolvente, siendo éste último motivo central de nuestro estudio en el caso cuántico. A continuación introduciremos el concepto de frecuencia de scattering que, en caso de existir, se encontrarán localizadas en el semiplano inferior.

Definición 3.4. Diremos que $z \in \mathbb{C}$ es una **frecuencia de scattering** asociada al potencial V si la ecuación

$$(-\Delta + V)u = z^2 u \tag{3.6}$$

admite solución outgoing u .

En relación a la definición anterior, si z es frecuencia de scattering asociada a la solución outgoing u entonces la función $\psi(t, x) = e^{iz^2 t} u(x)$ es una solución outgoing en el sentido dinámico. Luego las frecuencias de scattering quedan ligadas a soluciones outgoing, en el sentido dinámico, sin que esto implique que el recíproco sea necesariamente cierto.

Por otro lado, un aspecto que no podemos dejar de mencionar es que u , solución a la ecuación (3.6), está en $L^2(\mathbb{R}^n)$ siempre y cuando z^2 es un valor propio del Hamiltoniano $H = -\Delta + V$. En [22], Loe demuestra, en dimensión 3 y bajo ciertas condiciones de decaimiento del potencial V al infinito, que el conjunto de frecuencias de scattering es discreto y está localizado en una franja $\Sigma_1 \leq \text{Im } z < \Sigma_0$ del plano complejo, donde las constante Σ_0, Σ_1 dependen del decaimiento del potencial al infinito. Por lo tanto, las soluciones u a la ecuación (3.6) podrían no estar en $L^2(\mathbb{R}^n)$, aunque sí en un espacio de Hilbert con peso. A continuación enunciamos el resultado de Loe, quién demuestra que la resolvente del operador $H = -\Delta + V$ tiene extensión meromorfa del semiplano superior al semiplano inferior, cuando H actúa sobre el espacio de Hilbert con peso $L^2(\mathbb{R}^3, e^{-a|x|})$.

Teorema 3.5. *Sea $|V(x)| \leq B e^{-a|x|}$ para algún $a, B > 0$, luego existen constantes Σ_0 y Σ_1 , con $\Sigma_1 \leq -a/2$ y $\Sigma_0 > \Sigma_1$ tales que*

(i) *No existen frecuencias de scattering en el semiplano $\text{Im } z > \Sigma_0$.*

(ii) El conjunto de frecuencias de scattering en la región $\Sigma_1 \leq \text{Im } z < \Sigma_0$ es discreto.

(iii) Para cada frecuencia de scattering en la región, el conjunto de vectores propios es de dimensión finita.

En particular, si $a^2 > 2B$, entonces $2\Sigma_0 \leq \sqrt{2B} - 2 < 0$, y las frecuencias de scattering son acotadas fuera del eje real, es decir, existe una región libre de polos.

Corolario 3.6. Si $|V(x)| \leq Be^{-a|x|^2}$ entonces $\Sigma_1 = -\infty$ y $\Sigma_0 < 0$ siempre y cuando $a/B > \sqrt{\pi}/2$.

La idea centrar en la demostración de estos resultados recae en extender analíticamente la resolvente del Laplaciano, sobre $L^2(\mathbb{R}^3, e^{-a|x|} dx)$ donde tal extensión sea compacta. La elección del peso recae en el decaimiento del potencial V y en el crecimiento/decrecimiento del núcleo integral del operador de Laplace. Además del caso autónomo o independiente del tiempo, Loe aborda potenciales que dependen periódicamente del tiempo. En este último caso se ve obligado a trabajar con la noción de solución outgoing dinámico, y lidiar con las complicaciones adicionales que esto conlleva.

En la siguiente sección presentaremos el marco teórico en que se desarrolla la dinámica de un sistema periódico. Además del tratamiento que éste recibe para convertirlo en un sistema autónomo.

3 SOLUCIÓN OUTGOING CASO PERIÓDICO

En esta sección presentaremos la teoría que permite definir soluciones outgoing para el caso periódico. En [5] Cooper y Strauss desarrollan la teoría análoga para sistemas cuya evoluciones está asociadas a operadores periódicos $U(s, t)$, presentando la ecuación de onda como un caso particular donde se pueden definir frecuencias de scattering y soluciones outgoing.

La evolución de un sistema cuántico no autónomo está dado por la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H(t) \psi(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

donde $H(t)$ es una familia de operadores autoadjuntos definidos sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} . El problema de valores y vectores propios para el Hamiltoniano $H(t)$ puede no ser resuelto mediante el método separación de variables, como en el caso $H(t) = H$. Es por ello que resulta vital interpretar la familia de operadores $H(t)$ es un espacio más grande, donde éste se represente como un operador autoadjunto y no como una colección de ellos (ver [14], [34]). Esta idea ha sido implementada a la hora de resolver ciertos problemas tanto en Mecánica Clásica como en Mecánica Cuántica.

Definamos el espacio de Hilbert $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ con la norma

$$\|\psi\|_{\mathcal{K}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \|\psi(t)\|_{\mathcal{H}}^2 dt$$

Luego, bajo ciertas condiciones del Hamiltoniano $H(t)$ (ver, por ejemplo [13]), existe el propagador $U(t, s)$ actuando sobre el espacio de Floquet $\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, el cual dada una solución $\psi(s)$ de la ecuación (3.7) al tiempo s entonces $U(t, s)\psi(s)$ es la solución al tiempo t .

Si el propagador $U(t, s)$ es unitario y fuertemente continuo existe un operador autoadjunto K sobre el espacio de Floquet \mathcal{K} tal que

$$e^{-i\sigma K} f(t) = U(t, t - \sigma) f(t - \sigma)$$

y el operador K es dado por

$$K = -i \frac{\partial}{\partial t} + H(t)$$

denominado operador de Floquet.

El espacio de Floquet \mathcal{K} puede ser representado como el producto tensorial de los espacios $L^2(\mathbb{R})$ y \mathcal{H} , luego el operador K es unitariamente equivalente a

$$K = -i \frac{\partial}{\partial t} \otimes I_2 + H(t)$$

siendo I_2 el operador identidad sobre \mathcal{H} . En particular, si $K = -i \frac{\partial}{\partial t} - \Delta + V(t)$, entonces el operador K es unitariamente equivalente al operador

$$K = -i \frac{\partial}{\partial t} \otimes I_2 + I_1 \otimes H_0 + V(t)$$

actuando sobre $L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{H}$, siendo I_1 el operador identidad sobre $L^2(\mathbb{R})$.

Cuando la perturbación cambia periódicamente en el tiempo el operador K puede ser insertado en el espacio $L^2([0, \tau], \mathcal{H})$ siendo τ es período del operador $H(t)$ (ver por ejemplo [14]).

A continuación presentaremos parte del trabajo realizado por Howland (ver [14]) donde determina una representación del operador K sobre el espacio $L^2([0, \tau], \mathcal{H})$.

El grupo unitario $e^{i\sigma K}$ es *periódico* con período τ si y sólo si K conmuta con el operador T_τ , siendo $(T_\tau f)(t) = f(t - \tau)$. Esto corresponde formalmente a $H(t + \tau) = H(t)$. Siguiendo un método estándar para el caso del Hamiltoniano *espacial* periódico, transformaremos el operador K a una representación donde T_τ es diagonal. Sin pérdida de generalidad supondremos en lo sucesivo que el período $\tau = 2\pi$.

Para $\psi \in \mathcal{K}$ definimos

$$(\mathcal{F}f)(n, \theta) = \hat{f}(n + \theta), \quad n \in \mathbb{Z}, \theta \in [0, 1]$$

donde

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ikt} dt$$

Luego \mathcal{F} es un mapeo unitario desde \mathcal{K} a $L^2((0, 1); l_2(\mathcal{H}))$ tal que su adjunto \mathcal{F}^* está dado por

$$(\mathcal{F}^* g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 g_n(\theta) e^{i(n+\theta)t} d\theta$$

con $g(\theta) = (g_n(\theta))$ elemento en $L^2((0, 1); l_2(\mathcal{H}))$. De este modo

$$(\mathcal{F} T_\sigma \mathcal{F}^* g)_n(\theta) = e^{-i(n+\theta)\sigma} g_n(\theta)$$

de donde se concluye que $\mathcal{F} T_{2\pi} \mathcal{F}^* = M(e^{-2\pi i \theta})$, siendo $M(\phi)$ el operador multiplicador por ϕ . El siguiente resultado (ver [14]) nos permite representar a K mediante un operador multiplicación, cuando $H(t) = -\Delta + V(t)$ con $V(t)$ de período 2π .

Teorema 3.7. *Sea K operador autoadjunto que genera un grupo unitario con período 2π . Luego existe un único operador autoadjunto \tilde{K} sobre $l_2(\mathcal{H})$ tal que*

$$\mathcal{F} K \mathcal{F}^* = M(\tilde{K} - \theta)$$

DEMOSTRACIÓN. A partir de la definición de K y el mapeo unitario \mathcal{F} tendremos que

$$(\mathcal{F} f)(n, \theta) = (H_0 - n)(\mathcal{F} f)(n, \theta) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{V}(k)(\mathcal{F} f)(n - k, \theta) - \theta(\mathcal{F} f)(n, \theta)$$

siendo

$$\hat{V}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(t) e^{-ikt} dt$$

Por lo tanto \tilde{K} es el operador sobre $l_2(\mathcal{H})$ dado por

$$(\tilde{K} g)_n = (H_0 - n)g_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{V}(k)g_{n-k}, \quad g \in l_2(\mathcal{H})$$

■

Hemos de notar que el espacio $l_2(\mathcal{H})$ es homeomorfo a $L^2([0, 2\pi]; \mathcal{H})$ mediante el mapeo unitario

$$(\mathfrak{F} g)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{int}$$

Inclusive, si el propagador $U(t, s)$ es fuertemente continuo se puede probar

$$\mathfrak{F} e^{-i\widehat{K}\sigma} \mathfrak{F}^* f(t) = U(t, t - \sigma) f(t - \sigma)$$

para toda $f \in L^2([0, 2\pi]; \mathcal{H})$. Entonces el operador $\widehat{K} = \mathfrak{F} \widetilde{K} \mathfrak{F}^*$ es el mismo K , pero este actúa sobre funciones periódicas. Luego, formalmente,

$$\widehat{K} = -i \frac{\partial}{\partial t} + H(t)$$

con la condición de frontera $u(0) = u(2\pi)$. En adelante, por simplicidad, no distinguiremos entre el operador K y \widehat{K} , entendiendo que su acción depende del espacio en que está definido.

Introducir el concepto de solución outgoing en el caso no autónomo, para la ecuación de Schrödinger, ha sido abordado por Claudio Fernández (ver [9]), donde la noción de solución outgoing es introducida en el sentido dinámico. A continuación daremos una definición abstracta de solución outgoing para el caso autónomo, sobre un espacio de Floquet. Esta idea coincidirá con la definición dada por Fernández en el caso periódico, teniendo presente que el caso periódico puede ser visto como una dinámica autónoma. Para ello consideramos el operador autoadjunto

$$K_0 = -i \frac{\partial}{\partial t} + H_0$$

actuando sobre $\mathcal{K} = L^2([0, 2\pi]; \mathcal{H})$, donde $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$.

La definición de solución outgoing será extendida para el Hamiltoniano de Floquet libre $K_0 = -i \frac{\partial}{\partial t} + H_0$ actuando sobre espacios de Floquet $\mathcal{K} = L^2([0, 2\pi]; L^2(\Omega))$, siendo Ω subconjunto no acotado de \mathbb{R}^n y H_0 operador autoadjunto sobre $L^2(\Omega)$.

Definición 3.8. Sea Ω subconjunto de \mathbb{R}^n y $\mathcal{K} = L^2([0, 2\pi]; L^2(\Omega))$. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}$ función continua. Diremos que $u(\sigma)$ es **solución outgoing** a la ecuación

$$-i \frac{\partial}{\partial \sigma} u(\sigma) + K_0 u(\sigma) = f(\sigma) \tag{3.8}$$

si $K_0 u(\sigma) \in \mathcal{K}_{loc}$, para todo σ , y $\widetilde{U}_0(\sigma - \tau) u(s) \rightarrow 0$ cuando $\tau \rightarrow -\infty$, donde la convergencia es en el espacio \mathcal{K}_{loc} . El operador $\widetilde{U}_0(\tau)$ es el grupo unitario del Hamiltoniano K_0 . Aquí $\mathcal{K}_{loc} = L^2([0, 2\pi]; L^2_{loc}(\Omega))$.

La definición anterior nos permitirá caracterizar *frecuencias de scattering* vía soluciones outgoing a la ecuación (3.8) para diferentes Hamiltonianos H_0 . Un aspecto relevante respecto a la definición anterior será presentada en el Lema 3.10, donde probaremos que la Definición 3.8 generaliza la versión anteriormente presentada.

La necesidad de considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ no acotado, en la definición anterior, da respuesta que abordaremos el problema de caracterizar frecuencias de scattering para el Hamiltoniano $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$ actuando sobre $L^2([0, \infty))$, con condiciones de Dirichlet.

Se puede reformular la definición de solución outgoing, al igual que en la sección anterior, por medio de la integral de Duhamel. Esta representación será muy útil para determinar soluciones outgoing y, por ende, frecuencias de scattering.

Lema 3.9. *La solución u a la ecuación (3.8) es outgoing si y sólo si está dada por la ecuación integral (Duhamel)*

$$u(\sigma) = i \int_{-\infty}^{\sigma} \tilde{U}_0(\sigma - r) f(r) dr.$$

DEMOSTRACIÓN. La ecuación (3.7) es equivalente a la ecuación integral

$$u(\sigma) = \tilde{U}_0(\sigma - \sigma_0)u_0 + i \int_{\sigma_0}^{\sigma} \tilde{U}_0(\sigma - r) f(r) dr$$

con $u_0 \in L^2(\Omega)$ condición inicial en $t = t_0$. Entonces

$$\tilde{U}_0(\sigma - \tau)u(\tau) = \tilde{U}_0(\sigma - \sigma_0)u_0 + i \int_{\sigma_0}^{\tau} \tilde{U}_0(\sigma - r) f(r) dr.$$

Esta última igualdad nos permite finalizar la demostración luego de tomar límite de τ a infinito negativo. ■

A partir de la representación integral de solución outgoing, el siguiente resultado nos ilustrará en qué sentido hemos generalizado la noción de solución de outgoing.

Lema 3.10. *La solución u a la ecuación (3.8) es outgoing si y sólo si está dada por la ecuación integral*

$$u(\sigma, t) = i \int_{-\infty}^t U_0(t - s) f(\sigma - (t - s), s) ds$$

Al igual que en la sección anterior estamos interesados en definir frecuencias de scattering para el caso no autónomo $H(t) = -\Delta + V(t)$, siendo $V(t)$ periódico en t . A partir de la Definición 3.8 podemos introducir una idea de outgoing autónomo para el Hamiltoniano $H(t)$ al definirlo sobre $\mathcal{K} = L^2([0, 2\pi]; L^2(\Omega))$. EN adelante, diremos que un potencial V satisface la condición Q si:

- (i) $V(t, x)$ conjuntamente continua en ambas variables.
- (ii) $V(\cdot, x) \mapsto V(t, x)$ es periódico con período 2π .

(iii) Existe $R > 0$ tal que $V(t, x) = 0$ para todo $|x| > R$ y todo $t \in [0, 2\pi]$.

Bajo estas condiciones del potencial V se tendrá que los operadores $H(t)$ son auto-adjuntos y periódicos en t , con período 2π , sobre $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Conjuntamente los operadores de onda están bien definidos y se desarrolla un buena teoría de scattering (ver [14]).

A partir de la Definición 3.8 la ecuación

$$-i \frac{\partial}{\partial t} u(t) = H_0 u(t) + (Vu)(t) \quad (3.9)$$

admite soluciones outgoing si y sólo si $U_0(t-s)u(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$, donde la convergencia es en $L^2_{loc}(\Omega)$. Además u satisface la integral de Duhamel

$$u(t) = i \int_t^\infty U_0(t-s)(Vu)(s) ds.$$

A continuación definiremos la frecuencias de scattering, para el caso no autónomo, vía solución outgoing. Esta definición idéntica a la introducida para la ecuación de onda, salvo que la noción de solución outgoing es la que cambia.

Definición 3.11. Diremos que $z \in \mathbb{C}$ es una **frecuencia de scattering** asociada al potencial $V(t, x)$ si existe $u(t, x)$, solución a la ecuación (3.9), que satisface las siguientes condiciones

- 1) $u(t, x)$ es outgoing y
- 2) $e^{-iz^2 t} u(t, x)$ es periódica en la variable t , con período 2π .

Para determinar frecuencias de scattering al potencial $V(t)$ introduciremos, para $a > 0$, el espacio de Hilbert

$$\mathcal{K}_a = L^2([0, 2\pi]; \mathcal{H}_a), \quad \mathcal{H}_a = L^2(\mathbb{R}^d, e^{-a|x|} dx)$$

con producto interno

$$\langle \psi, \phi \rangle_{\mathcal{K}_a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi(t, x)} \phi(t, x) e^{-a|x|} dx dt,$$

y definimos la familia de operadores

$$(T_z \psi)(t, x) = i \int_t^\infty e^{-iz^2(t-s)} U_0(t-s)(V\psi)(s, x) ds, \quad \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z > 0$$

Lema 3.12. *La familia de operadores $T_z : \mathcal{K}_a \rightarrow \mathcal{K}_a$ es continua y satisface la ecuación diferencial*

$$-i \frac{\partial}{\partial t} (T_z \psi)(t, x) = (H_0 - z^2)(T_z \psi)(t, x) + (V\psi)(t, x)$$

siendo $H_0 = -\Delta$ el operador de Laplace.

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos definiendo $\kappa(z) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z$, luego a partir de la desigualdad de Jensen podremos afirmar que

$$|(T_z \psi)(t, x)|^2 \leq \frac{1}{\kappa(z)} \int_t^\infty |U_0(t-s)(V\psi)(s, x)|^2 e^{\kappa(z)(t-s)} ds$$

Dado que $V\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y U_0 es un operador unitario sobre $L^2(\mathbb{R}^d)$ obtendremos

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(T_z \psi)(t, x)|^2 e^{-a|x|} dx \leq \frac{1}{\kappa(z)} \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^d} |(V\psi)(s, x)|^2 e^{\kappa(z)(t-s)} dx ds$$

Si, en la anterior integral, hacemos el cambio de variable $r = t - s$ la norma sobre \mathcal{K}_a de $T_z \psi$ satisface la siguiente desigualdad

$$\|T_z \psi\|_{\mathcal{K}_a} \leq \frac{1}{\kappa(z)\sqrt{2\pi}} \|\psi\|_{\mathcal{K}_a}$$

■

Teorema 3.13. *Si $\psi_0 \in \mathcal{K}_a$ es un punto fijo del operador T_{z_0} , para algún z_0 , entonces $u_0(t, x) = e^{iz_0^2 t} \psi_0(t, x)$ es solución outgoing de la ecuación (3.9) y, por lo tanto z_0 es una frecuencia de scattering.*

DEMOSTRACIÓN. Directo de la definición $u_0(t, x) = e^{iz_0^2 t} \psi_0(t, x)$ es solución outgoing a la ecuación (3.9) si ψ_0 es un punto fijo del operador T_{z_0} . Además $e^{-iz_0^2 t} u_0(t, x) = \psi_0(t, x)$ es periódico en t , y por tanto z_0 es frecuencia de scattering. ■

Finalizaremos este capítulo representando la familia de operadores T_z , $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z > 0$, en función de la resolvente de H_0 . Esta representación será utilizada en el Capítulo 4 para caracterizar frecuencias de scattering vía extensión analítica del operador H_0 .

Lema 3.14. *La familia de operadores T_z admite la siguiente representación*

$$(T_z \psi)(t, x) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (H_0 - z^2 - k)^{-1} \widehat{(V\psi)}(k) e_k(t)$$

con $e_k(t) = e^{ikt}$ y $\hat{f}(k)$ el k -ésimo coeficiente de Fourier de f dado por

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\psi \in \mathcal{K}_a$ entonces $(V\psi)(\cdot, x) \in L^2(0, 2\pi)$ y es periódico en el tiempo, con período 2π . Luego,

$$(V\psi)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{(V\psi)}(k) e_k(t).$$

Y por tanto se tendrá,

$$\begin{aligned}
 (T_z \psi)(t) &= i \int_t^\infty e^{-iz^2(t-s)} U_0(t-s) (V\psi)(s, x) ds \\
 &= i \sum_{k=-\infty}^\infty \int_t^\infty e^{-iz^2(t-s)} U_0(t-s) e_k(s) ds \widehat{(V\psi)}(k) \\
 &= - \sum_{k=-\infty}^\infty (H_0 - z^2 - k)^{-1} \widehat{(V\psi)}(k) e_k(t)
 \end{aligned}$$

■

En el siguiente capítulo extenderemos la familia de operadores T_z para z del semiplano superior al semiplano inferior, bajo la condición $\text{Re } z > 0$, cuando H_0 es el operador de Laplace actuando sobre \mathbb{R} y \mathbb{R}^3 . Esta extensión será analítica en z y, para todo V que satisface la condición Q , compacta. En la segunda parte del Capítulo 4 la familia de operadores T_z estará asociada a perturbaciones de rango 1 del operador H_0 , considerando como H_0 los operadores de Laplace en dimensión tres y el operador momentum en dimensión n . Estos resultados corresponden al trabajo realizado en esta tesis.

Capítulo 4

Perturbaciones Periódicas

Recordemos que el fenómeno de resonancia, desde el punto de vista físico, está asociado a frecuencias o estados de energía en que la partícula permanece un “largo” período de tiempo en una región determinada del espacio. Experimentalmente se ha demostrado que dichos estados de energía no siempre han tenido relación con el modelo matemático autoadjunto. En términos matemáticos, las resonancias no necesariamente aparecen como valores propios de un Hamiltoniano.

Como hemos discutido en el Capítulo 1, ha de esperarse que resonancias aparezcan para cierto tipo de perturbaciones a la dinámica libre. Este tipo de perturbaciones deber “atrapar” a la partícula cuántica por un largo período de tiempo en una región del espacio, inclusive si el soporte de tal perturbación es compacta.

En análisis complejo la extensión analítica, o también conocida como *continuación analítica*, es un método que permite extender el dominio de una función analítica dada. Usualmente las extensiones analíticas permiten definir funciones en regiones donde su serie, inicialmente, era divergente. La definición de operadores analíticos, sobre espacios de Banach, pasa por la definición de analiticidad que estos operadores cumplen bajo el dual topológico. En este sentido, extensiones analíticas de operadores, añade un problema de representación de funciones analíticas a espacios de Banach (ver, por ejemplo [25]).

1 PERTURBACIÓN CON POTENCIAL $V = V(t, x)$

En la presente sección expondremos parte importante del trabajo realizado en esta tesis, extendiendo la resolvente del Hamiltoniano de Floquet Libre $K_0 = -i\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$, cuando el operador de Laplace actúa sobre $L^2(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R}^3)$. El caso tridimensional será abordado para potenciales que dependen radialmente de la coordenada espacial, para luego considerar el caso general. Comenzaremos

presentando un resumen de los resultados obtenidos por Loe (ver [22]) para el caso autónomo, resultados que replicaremos para el caso periódico.

Consideremos la ecuación de valores propios, para el Hamiltoniano $H = -\Delta + V$, en dimensión tres

$$(-\Delta + V(x))\psi(x) = z^2\psi(x)$$

sobre $\mathcal{H}_a = L^2(\mathbb{R}^3, e^{-a|x|} dx)$. Cuando el potencial V es de soporte compacto podemos afirmar que existen constantes positivas a, B tales que $|V(x)| < Be^{-a|x|}$. Entonces la familia de operadores

$$(T_z\psi)(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{iz|x-y|}}{4\pi|x-y|} (V\psi)(y) dy$$

satisface (ver [22])

$$\|T_z\|_{\mathcal{H}_a} \leq \begin{cases} \frac{2B}{(a + 2 \operatorname{Im} z)^2} & \text{si } -\frac{a}{2} < \operatorname{Im} z \leq 0 \\ \frac{2B}{a^2} & \text{si } 0 < \operatorname{Im} z \leq \frac{a}{4} \\ \frac{B}{a\sqrt{a \operatorname{Im} z}} & \text{si } \operatorname{Im} z > \frac{a}{4} \end{cases}$$

Si consideramos $\operatorname{Im} z > 0$ suficientemente grande, entonces el operador T_z tiene norma menor que 1. En tal caso el operador $(1 - T_z)^{-1}$ existe y depende analíticamente de z , en la región $\operatorname{Im} z > B^2/a^2$. Consecuencia del trabajo realizado por Steinberg (ver [32]), podemos afirmar que $(1 - T_z)^{-1}$ tiene extensión meromorfa a la región $\operatorname{Im} z > -a/2$, con polos aislados de multiplicidad finita. Tales polos serán denominados frecuencias de scattering o resonancias.

En las secciones sucesivas presentaremos resultados, asociados a frecuencias de scattering, para fuerzas potenciales periódicas actuando sobre la recta real y el espacio tridimensional. Dichas frecuencias, en caso de existir, se encontrarán en regiones bien definidas del plano complejo, ya que estarán asociadas a polos de multiplicidad finita del operador resolvente. Más aún, si $V(t, x)$ decae suficientemente al infinito, en la variable espacial x , probaremos que las frecuencias o resonancias están en el semiplano inferior.

Para el caso tridimensional partiremos considerando fuerzas potenciales radiales, que permitirán replantear el problema sobre la semirrecta, para luego enfrentar el problema general para potenciales que decaen suficientemente al infinito.

1.1 POTENCIAL RADIAL EN \mathbb{R}^3

Si $V = V(t, x)$ es una función periódica en t y radial en x , vale decir $V(t, x) = V(t, |x|)$, entonces podemos considerar soluciones a la ecuación Schrödinger con las mismas características. Si el operador de Laplace actúa sobre $L^2(\mathbb{R}^3)$,

es bien sabido que (ver [33])

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} u \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} u \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u$$

es la representación en coordenadas esféricas. En particular si u es una función radial se tendrá que el Laplaciano en esféricas queda dado por

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} u \right)$$

De este modo, la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas queda dada por

$$-i \frac{\partial}{\partial t} u(t) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} u(t) \right) + (Vu)(t)$$

Si definimos la función $\psi(t, r) = ru(t, r)$, entonces la ecuación anterior se escribirá como sigue

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(t) + (V\psi(t))(t) \quad (4.1)$$

En el caso que el potencial V depende radialmente de la variable espacial, el problema se traduce en trabajar sobre el espacio $L^2([0, \infty))$ con condición de Dirichlet sobre la frontera, espacio que es comúnmente denotado $L_0^2([0, 2\pi))$. Evidentemente el operador $U_0(t) = e^{iH_0 t}$, siendo H_0 el operador de Laplace sobre $L_0^2([0, \infty))$, está bien definido. Permittiéndonos así definir soluciones outgoing ψ a la ecuación (4.1) si $U_0(t-s)\psi(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$, como en el Capítulo 3.

Recordemos que la familia de operadores T_z (a partir del Lema 3.14) puede ser representado a partir de una serie que depende de las resolventes del operador de Laplace. Es por ello que comenzaremos considerando el siguiente núcleo integral

$$N_z(x, y) = \frac{e^{i\sqrt{z}|x+y|} - e^{i\sqrt{z}|x-y|}}{i\sqrt{z}}$$

para todo $z \in \mathbb{C} - [0, \infty)$ y el operador

$$(R_z \psi)(x) = \int_0^\infty N_z(x, y) \psi(y) dy$$

con $\psi \in C_c([0, \infty))$, conjunto de las funciones continuas de soporte compacto. Es claro que $(R_z \psi)(0) = 0$ y que $R_z : L_0^2[0, \infty) \rightarrow L_0^2[0, \infty)$, siendo $L_0^2[0, \infty)$ todas las funciones $\psi \in L^2[0, \infty)$ tales que $\psi(0) = 0$. Luego para toda $\psi \in L_0^2[0, \infty)$ se cumple

$$-\frac{d^2}{dx^2} (R_z \psi)(x) = z\psi(x),$$

hecho que nos permite afirmar que R_z es el operador resolvente asociado al Hamiltoniano de Laplace $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$, vale decir $R_z = (H_0 - z)^{-1}$ cada vez que $z \in \mathbb{C} - [0, \infty)$, actuando sobre $L_0^2[0, \infty)$.

Como hemos mencionado al comienzo de este capítulo, deseamos obtener extensiones analíticas de la familia de operadores T_z , y es por ello que debemos comenzar determinando extensiones a la resolvente R_σ del semiplano superior al semiplano inferior, para así definir frecuencias de scattering como polos de la extensión meromorfa de $(1 - T_z)^{-1}$. Para ello consideraremos la función $V = V(t, x)$, periódica en t y período 2π , y la ecuación de Schrödinger

$$\left(H_0 - z^2 - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(t, x) = -V(t, x)\psi(t, x)$$

actuando sobre el espacio de Floquet $\mathcal{K}_a = L^2([0, 2\pi]; \mathcal{H}_a)$ siendo \mathcal{H}_a el espacio de Hilbert $L_0^2([0, \infty); e^{-a|x|} dx)$. Sea $T_z : \mathcal{K}_a \rightarrow \mathcal{K}_a$ dado por

$$(T_z \psi)(x) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (H_0 - z^2 - k)^{-1} \widehat{(V\psi)}(k) e_k(t)$$

donde $e_k(t) = e^{-ikt}$. A partir del núcleo integral de la resolvente del Laplaciano podemos escribir el operador T_z como sigue

$$(T_z \psi)(t, x) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} N_{z^2+k}(x, y) \widehat{(V\psi)}(k, y) dy e_k(t)$$

concluyendo así que T_z posee núcleo integral

$$N_z(t, s, x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} N_{z^2+k}(x, y) V(s, y) e^{a|y|} e_k(t - s)$$

En los siguientes resultados probaremos que la familia de operadores $T_z : \mathcal{K}_a \rightarrow \mathcal{K}_a$ puede ser extendido analíticamente a todo z en el conjunto

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid 2|\operatorname{Im} z| |\operatorname{Re} z| < a, \operatorname{Im} z \leq 0, z^2 \notin \mathbb{Z}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

con la propiedad de ser un operador compacto.

Proposición 4.1. *La familia de operadores $T_z : \mathcal{K}_a \rightarrow \mathcal{K}_a$, $\operatorname{Im} z > 0$ y $\operatorname{Re} z > 0$, puede ser extendida analíticamente a todo $z \in \Omega$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\psi \in C_0^\infty([0, 2\pi] \times [0, \infty))$ tal que $\|\psi\|_{\mathcal{H}_a} = 1$, entonces

$$\begin{aligned} & \|T_z \psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \left| (H_0 - z^2 - k)^{-1} \widehat{(V\psi)}(k, y) dy \right|^2 e^{-a|x|} dx \\ &\leq B^2 \sup_k \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|e^{-\operatorname{Im} f_k(z) \cdot |x+y|} + e^{-\operatorname{Im} f_k(z) \cdot |x-y|}|^2}{4|z^2 + k|} e^{-a(|x|+|y|)} dx dy \right) \\ &\leq B^2 \sup_k \{|z^2 + k|^{-1}\} \left(\int_0^\infty \int_0^\infty e^{2C \cdot |x+y|} e^{-a(|x|+|y|)} dx dy \right) \end{aligned}$$

donde $C = \sqrt{|\operatorname{Re} z| |\operatorname{Im} z|}$. Sabemos que $|x + y| \leq |x| + |y|$ luego para todo $\alpha \in (0, 1)$ tendremos

$$e^{-a(|x|+|y|)} = e^{-a\alpha(|x|+|y|)} e^{-a(1-\alpha)(|x|+|y|)} \leq e^{-a\alpha(|x+y|)} e^{-a(1-\alpha)|x|}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{2C \cdot |x+y|} e^{-a(|x|+|y|)} dx dy &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(a\alpha - 2C) \cdot |x+y|} e^{-a(1-\alpha)|x|} dx dy \\ &= \frac{4}{|a\alpha - 2C| |a(1-\alpha)|} \end{aligned}$$

Eligiendo $\alpha = \frac{a + 2C}{2a}$ obtendremos

$$\|T_z \psi\|_{\mathcal{K}_a} \leq \frac{4B}{(a - 2C) \inf_k \{|z^2 + k|^{1/2}\}} \|\psi\|_{\mathcal{K}_a}$$

Finalmente T_z se extiende continuamente a todo \mathcal{K}_a ya que $C_c^\infty([0, 2\pi] \times [0, \infty))$, el espacio de las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto, es denso en \mathcal{K}_a . ■

Corolario 4.2. Si $z \in \Omega$ satisfice

$$a > \frac{4B}{\inf_k |z^2 + k|} + 2\sqrt{|\operatorname{Re} z| |\operatorname{Im} z|},$$

entonces la familia de operadores $(1 - T_z)^{-1}$ existe y es acotado

A continuación definimos, para todo natural k , la familia de operadores

$$(T_{k,z} \psi)(t, x) = -(H_0 - z^2 + k)^{-1} \widehat{(V\psi)}(k, x) e_k(t)$$

cuyo núcleo está dado por

$$N_{k,z}(t, s, x, y) = -N_{z^2+k}(x, y)V(s, y)e^{a|y|}e_k(t - s)$$

Luego la norma Hilbert-Schmidt de $T_{k,z}$ está dada por

$$\begin{aligned} \|T_{k,z}\|_2^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty |N_{k,z}(t, s, x, y)|^2 e^{-a(|x|+|y|)} dx dy dt ds \\ &\leq \frac{B^2}{|z^2 + k|} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{2C|x+y|} e^{-a(|x|+|y|)} dx dy \\ &\leq \frac{16B^2}{(a - 2C)|z^2 + k|} \end{aligned}$$

donde C es la constante definida en la Proposición 4.1.

Corolario 4.3. *Si $z \in \Omega$ entonces para todo número entero k la familia de operadores $T_{k,z} : \mathcal{K}_a \rightarrow \mathcal{K}_a$ es analítica y compacta.*

Finalizaremos esta sección demostrando que el operador T_z es analítico y compacto para todo $z \in \Omega$. Para ello utilizaremos el hecho que los operadores $T_{k,z}$ aproximan en norma al operador T_z .

Teorema 4.4. *Si $z \in \Omega$ entonces la familia de operadores $T_z : \mathcal{K}_a \rightarrow \mathcal{K}_a$ es analítica y compacta.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos para todo entero positivo N el operador

$$(T_N\psi)(t, x) = \sum_{|k| \leq N} \int_{\mathbb{R}} N_{z^2+k}(x, y) \widehat{(V\psi)}(k, y) e_k(t) dy$$

el cual es compacto. Probaremos que T_N converge uniformemente a T_z cada vez que z vive en el conjunto dado. De este modo, para toda $\psi \in \mathcal{H}_a$

$$\begin{aligned} \|T_N\psi - T_z\psi\|_{\mathcal{H}_a}^2 &= \sum_{|k| > N} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} N_{z^2+k}(x, y) \widehat{(V\psi)}(k, y) dy \right|^2 e^{-a|x|} dx \\ &= \sum_{|k| > N} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} N_{z^2+k}(x, y) \widehat{(V\psi)}(k, y) dy \right|^2 e^{-a|x|} dx \\ &\leq \sum_{|k| > N} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} |N_{z^2+k}(x, y)| |\widehat{(V\psi)}(k, y)| dy \right\}^2 e^{-a|x|} dx \\ &\leq \frac{14B^2}{(a - 2C)^2 \inf_{|k| > N} |z^2 + k|} \|\psi\|_{\mathcal{H}_a}^2 \end{aligned}$$

que converge a cero cuando $N \rightarrow \infty$. ■

1.2 POTENCIAL EN \mathbb{R}

Al igual que en la sección anterior, para determinar la existencia de la familia de operadores $(1 - T_z)^{-1}$ será necesario representar la familia de operadores T_z en función de la resolvente del operador de Laplace, y extender analíticamente dicha resolvente. Para ello debemos considerar la familia de núcleos integrales

$$N_z(x, y) = i \frac{\pi}{2} \frac{e^{i\sqrt{z}|x-y|}}{\sqrt{z}}, \quad \text{Im } z > 0$$

asociado a la resolvente del operador de Laplace actuando sobre $L^2(\mathbb{R})$. Además, para todo $\psi \in C_c^\infty([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ los operadores T_z están dados por

$$(T_z \psi)(t) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (H_0 - z^2 - k)^{-1} \widehat{(V\psi)}(k) e_k(t), \quad \text{Im } z > 0$$

el cual satisface la ecuación diferencial

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} + H_0 - z^2 \right) (T_z \psi)(t, x) = -(V\psi)(t, x)$$

En esta vía de extender el operador T_z analíticamente del semiplano superior al semiplano inferior, consideramos la representación de T_z en función del núcleo integral N_z ,

$$(T_z \psi)(t, x) = -i \frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\sqrt{z^2+k}|x-y|}}{\sqrt{z^2+k}} \widehat{(V\psi)}(k, y) e_k(t) dy$$

Al igual que en la sección anterior, introduciremos el subconjunto del plano complejo

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 2|\text{Im } z| |\text{Re } z| < a, \text{Im } z \leq 0, z^2 \notin \mathbb{Z}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$$

y probaremos que el operador $T_z : \mathcal{K}_a \rightarrow \mathcal{K}_a$ puede ser extendido analíticamente a todo z en el conjunto con la propiedad de ser un operador compacto.

Proposición 4.5. *La familia de operadores $T_z : \mathcal{K}_a \rightarrow \mathcal{K}_a$, $\text{Im } z > 0$ y $\text{Re } z > 0$, pueden ser extendidos analíticamente a todo $z \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\psi \in C_0^\infty([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$ tal que $\|\psi\|_{\mathcal{K}_a} = 1$ entonces

$$\begin{aligned} \|T_z \psi\|_{H_a}^2 &= \frac{\pi^2}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\sqrt{z^2+k}|x-y|}}{\sqrt{z^2+k}} \widehat{(V\psi)}(k, y) dy \right|^2 e^{-a|x|} dx \\ &\leq \frac{\pi^2}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{C|x-y|}}{|z^2+k|^{1/2}} |\widehat{(V\psi)}(k, y)| dy \right\}^2 e^{-a|x|} dx \\ &\leq \frac{\pi^2 B^2}{4 \inf_k |z^2+k|} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2C|x-y|} e^{-a(|x|+|y|)} dx dy \end{aligned}$$

con $C = \sqrt{|\operatorname{Re} z| |\operatorname{Im} z|}$. Sabemos que $|x - y| \leq |x| + |y|$ entonces para todo $\alpha \in (0, 1)$ tendremos

$$e^{-a(|x|+|y|)} = e^{-a\alpha(|x|+|y|)} e^{-a(1-\alpha)(|x|+|y|)} \leq e^{-a\alpha(|x-y|)} e^{-a(1-\alpha)|x|}$$

luego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2C \cdot |x-y|} e^{-a(|x|+|y|)} dx dy &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(a\alpha-2C) \cdot |x-y|} e^{-a(1-\alpha)|x|} dx dy \\ &= \frac{4}{|a\alpha - 2C| |a(1-\alpha)|} \end{aligned}$$

Elegimos $\alpha = \frac{a + 2C}{2a}$ y obtendremos

$$\|T_z\| \leq \frac{2\pi B}{(a - 2C) \inf_k \sqrt{|z^2 + k|}},$$

siendo $\|T_z\|$ la norma uniforme del operador T_z . ■

Corolario 4.6. Si $z \in \Omega$ y satisface

$$a > \frac{2\pi B}{\inf_k \sqrt{|z^2 + k|}} + 2\sqrt{|\operatorname{Im} z| |\operatorname{Re} z|},$$

entonces la familia de operadores $(1 - T_z)^{-1}$ existe y es acotado.

Ahora definimos la familia de operadores

$$(T_{k,z}\psi)(t, x) = -(H_0 - z^2 - k)^{-1} \widehat{(V\psi)}(k, x) e_k(t)$$

con núcleo integral

$$N_{z,k}(t, s, x, y) = -i \frac{\pi}{2} \frac{e^{i\sqrt{z^2+k}|x-y|}}{\sqrt{z^2+k}} V(s, y) e^{a|y|} e_k(t-s)$$

Luego la norma Hilbert-Schmidt del operador $T_{k,z}$ está dada por

$$\begin{aligned} \|T_{k,z}\|_2^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |N_{z,k}(t, s, x, y)|^2 e^{-a(|x|+|y|)} dx dy dt ds \\ &\leq \frac{\pi^2 B^2}{4|z^2 + k|} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2C|x-y|} e^{-a(|x|+|y|)} dx dy \\ &\leq \frac{4\pi^2 B^2}{(a - 2C)^2 |z^2 + k|} \end{aligned}$$

Corolario 4.7. Si $z \in \Omega$ entonces para todo número entero k la familia de operadores $T_{k,z} : \mathcal{K}_a \rightarrow \mathcal{K}_a$ es analítica y compacta.

Teorema 4.8. Si $z \in \Omega$ entonces la familia de operadores $T_z : \mathcal{K}_a \rightarrow \mathcal{K}_a$ es analítica y compacta.

DEMOSTRACIÓN. Definimos para todo entero positivo N el operador

$$(T_N \psi)(t, x) = -i \frac{\pi}{2} \sum_{|k| \leq N} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\sqrt{z^2+k}|x-y|}}{\sqrt{z^2+k}} (\widehat{V\psi})(k, y) e_k(t) dy$$

el cual es compacto. Entonces probaremos que T_N converge uniformemente a T_z para todo z en el conjunto del enunciado. Dado $\psi \in \mathcal{K}_a$ con $\|\psi\|_{\mathcal{K}_a} = 1$

$$\begin{aligned} & \|T_N \psi - T_z \psi\|_{\mathcal{H}_a}^2 \\ &= \frac{\pi^2}{4} \sum_{|k| > N} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\sqrt{z^2+k}|x-y|}}{\sqrt{z^2+k}} (\widehat{V\psi})(k, y) dy \right|^2 e^{-a|x|} dx \\ &\leq \frac{\pi^2}{4} \sum_{|k| > N} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{C|x-y|}}{|z^2+k|^{1/2}} |(\widehat{V\psi})(k, y)| dy \right\}^2 e^{-a|x|} dx \\ &\leq \frac{4\pi^2 B^2}{(a-2C)^2 \inf_{|k| > N} |z^2+k|} \end{aligned}$$

el cual converge a cero cuando $N \rightarrow \infty$. ■

En [32], Stanley Steinberg ha probado que para toda familia analítica T_z de operadores compactos, con z en un dominio Ω , o bien $(1-T_z)$ es nunca invertible en Ω o bien $(1-T_z)^{-1}$ es meromorfa en Ω . Dado que hemos demostrado en el Corolario 4.6 que el operador $(1-T_z)^{-1}$ existe en un cierto conjunto se concluye que éste es meromorfa en la región

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 2|\operatorname{Im} z| |\operatorname{Re} z| < a, \operatorname{Im} z \leq 0, z^2 \notin \mathbb{Z}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

Adicionalmente, si suponemos que V satisface la condición de decaimiento $|V(t, x)| \leq B e^{-x^2}$, para alguna constante positiva B , entonces T_z es una familia compacta y analítica de operadores en Ω . En nuestro caso, podemos concluir que la familia de operadores $(1-T_z)^{-1}$ es meromorfo en

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid 2|\operatorname{Im} z| |\operatorname{Re} z| < a, \operatorname{Im} z \leq 0, z^2 \notin \mathbb{Z}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

1.3 POTENCIAL EN \mathbb{R}^3

En esta sección abordaremos determinaremos regiones del plano complejo donde aparecen frecuencias de scattering, para potenciales $V(t, x)$ que perturbaban la dinámica libre asociada al Hamiltoniano $H_0 = -\Delta$, siendo $-\Delta$ el operador de Laplace en dimensión tres. Comenzaremos considerando los espacios de Hilbert con peso $\mathcal{H}_a = L^2(\mathbb{R}^3, e^{-a|x|} dx)$, $\mathcal{K}_a = L^2([0, 2\pi]; \mathcal{H}_a)$ y potenciales $V = V(t, x)$ que satisfacen el siguiente decaimiento al infinito

- (i) Existen constantes $b, C > 0$ tal que $|V(t, x)| \leq Be^{-bx^2}$.

Luego, si $e_k(t) = e^{-ikt}$ definimos la familia de operadores T_z por la serie

$$(T_z \psi)(t, x) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (H_0 - z^2 - k)^{-1} (\widehat{V\psi})(k, x) e_k(t), \quad \text{Im } z > 0.$$

Dado el decaimiento exponencial de la función V afirmaremos la familia de operadores T_z son una serie fuertemente convergente, y son operadores acotados de \mathcal{K}_a en \mathcal{K}_a , para todo $\text{Im } z, \text{Re } z > 0$.

Los operadores T_z representan la resolvente del Hamiltoniano de Floquet $K_0 = i\frac{\partial}{\partial t} + H_0$ actuando sobre el potencial V , resolvente que extenderemos analíticamente del semiplano superior a una región del semiplano inferior, de modo que dicha extensión sea compacta para todo z . Más aún, la analiticidad de los operadores T_z será en la siguiente región del plano complejo

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid 4|\text{Im } z| |\text{Re } z| < a, \text{Im } z \leq 0, z^2 \notin \mathbb{Z}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}.$$

Hemos de notar que Ω contiene al semiplano superior y a una región del semiplano inferior delimitada por la hipérbola $4xy = a$.

Para demostrar la analiticidad y compacidad de los operadores T_z sobre Ω definamos, para todo entero k , la familia de operadores

$$(R_k(z)\psi)(t, x) = -(H_0 - z^2 - k)^{-1} (\widehat{V\psi})(k, x) e_k(t)$$

Comenzaremos probando, para todo entero k , que los operadores $R_k(z)$ son analíticos y compactos, para luego al final de esta sección demostrar que la serie con término general $R_k(z)$ aproxima uniformemente al operador T_z , para todo $z \in \Omega$. Puesto que los operadores compactos forman un espacio de Banach, se concluirá que los operadores T_z son compacto para todo $z \in \Omega$. La analiticidad es directo de la definición de los operadores T_z . Los siguientes resultados van en vía de probar la compacidad de de la familia de operadores T_z a partir de los operadores $R_k(z)$.

Lema 4.9. *Para todo número entero k la familia de operadores*

$$(R_k(z)\psi)(t, x) = -(H_0 - z^2 - k)^{-1} (\widehat{V\psi})(k, x) e_k(t)$$

son compactos y analíticos sobre Ω .

DEMOSTRACIÓN. A partir de su representación con núcleo integral podemos ver que, para todo número entero k , los operadores $R_k(z)$ están dados por

$$(R_k(z)\psi)(t, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\sqrt{z^2+k}|x-y|}}{4\pi|x-y|} (V\psi)(s, x) e_k(t-s) dy ds$$

De este modo la norma Hilbert-Schmidt de los operadores $R_k(z)$ satisface las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \|R_k(z)\|^2 &\leq \frac{C_1^2}{(4\pi)^2} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-2\operatorname{Im}\sqrt{z^2+k}|x-y|}}{|x-y|^2} e^{-a(|x|+|y|)} dx dy \\ &\leq \frac{C_1^2}{(4\pi)^2} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\left(\frac{a}{2}-2\operatorname{Im}\sqrt{|\operatorname{Re}z|\cdot|\operatorname{Im}z|}\right)|x-y|}}{|x-y|^2} e^{-\frac{a}{2}|x|} dx dy \\ &= \frac{C_1^2}{(4\pi)^2} \cdot \frac{2^5}{(a-4\operatorname{Im}\sqrt{|\operatorname{Re}z|\cdot|\operatorname{Im}z|})a^3} \end{aligned}$$

De la desigualdad anterior sigue el resultado de este lema. ■

Acabamos de probar que para todo número entero k los operadores $R_k(z)$ son compactos en una región no acotada del plano complejo, que contiene una región hiperbólica del semiplano inferior. El siguiente resultado nos permitirá aproximar uniformemente a T_z a partir de los operadores $R_k(z)$.

Lema 4.10. *Para todo natural k y $z \in \Omega$ los operadores $R_k(z)$ satisface la desigualdad*

$$\|R_k(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 \leq \frac{2^5}{(4\pi)^2(a+4\operatorname{Im}\sqrt{z^2+k})a^3} \int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(k, y)|^2 e^{a|y|} dy$$

para todo $\psi \in \mathcal{K}_a$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\psi \in \mathcal{K}_a$ entonces

$$\begin{aligned} \|R_k(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\operatorname{Im}\sqrt{z^2+k}|x-y|}}{4\pi|x-y|} |(\widehat{V\psi})(k, y)| dy \right)^2 e^{-a|x|} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-2\operatorname{Im}\sqrt{z^2+k}|x-y|}}{(4\pi)^2|x-y|^2} e^{-a(|x|+|y|)} dx \int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(k, y)|^2 e^{a|y|} dy \\ &\leq \frac{2}{\pi^2(a+4\operatorname{Im}\sqrt{z^2+k})a^3} \int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(k, y)|^2 e^{a|y|} dy \end{aligned}$$

■

Antes de seguir adelante en la demostración de la compacidad de los operadores T_z , hemos de tener presente que para todo $a > 0$ existe natural N tal que

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} - a &> 1, \quad k \geq N \\ \operatorname{Im} \sqrt{z^2 + k} &> 0, \quad k \leq -N \end{aligned}$$

Este hecho será utilizado en el siguiente resultado.

Lema 4.11. *Para todo $k > N$ y $z \in \Omega$ se satisface*

$$\begin{aligned} &\|R_k(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a} \\ &\leq \frac{(4\pi)^{-1}3^3 \cdot 2^9 \sqrt{A} \cdot \frac{k}{|\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(k, x)|^2 e^{b|x|^2} dx \right)^{1/2}}{\min_{m=1,2,3} |a - 4\sqrt{|\operatorname{Re} z| \cdot |\operatorname{Im} z|}^{m/2} |2 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} - a|^{1/2}} \\ &+ \frac{(4\pi)^{-1}3^3 \cdot 2^9 \sqrt{A}}{a^{3/2} |a + 4 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|^{1/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(-k, x)|^2 e^{b|x|^2} dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

siendo $A > 0$ una constante tal que $e^{-b|x|^2} \leq Ae^{-a|x|}$.

DEMOSTRACIÓN. A partir de la fórmula de la resolvente para el operador de Laplace, podemos afirmar que $R_k(z)$ está dado por

$$(R_k(z)\psi)(t, x) = 2k(H_0 - z^2 + k)^{-1}(R_k(z)\psi)(t, x) + (R_{-k}(z)\psi)(t, x)$$

para todo natural k . De este modo,

$$\|R_k(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a} \leq 2k\|(H_0 - z^2 + k)^{-1}R_k(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a} + \|R_{-k}(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a}$$

El segundo término del lado derecho, de la anterior desigualdad, puede ser acotado explícitamente a partir del Lema 4.10. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\|\psi\|_{\mathcal{K}_a} = 1$, entonces para todo $k > N$ se tendrá que $\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} > 0$ y por tanto

$$\begin{aligned} &|(H_0 - z + k)^{-1}(R_k(z)\psi)(t, x)|^2 \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|x-y|}}{4\pi|x-y|} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{\sqrt{|\operatorname{Re} z| \cdot |\operatorname{Im} z|}|y-u|}}{4\pi|y-u|} |(\widehat{V\psi})(k, u)| du dy \right)^2 \\ &\leq \frac{C(k, z, x)}{(4\pi)^4} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(k, u)|^2 e^{b|u|^2} du \end{aligned}$$

siendo

$$C(k, z, x) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|x-y|}}{|x-y|} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{2\sqrt{|\operatorname{Re} z| \cdot |\operatorname{Im} z|}|y-u|}}{|y-u|^2} e^{-b|u|^2} du \right)^{1/2} dy \right)^2$$

A partir de la desigualdad de Jensen podemos seguir acotando $C(k, z, x)$ como sigue

$$\begin{aligned} C(k, z, x) &\leq \frac{4\pi}{|\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|x-y|}}{|x-y|} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{2\sqrt{|\operatorname{Re} z| \cdot |\operatorname{Im} z|}|y-u|}}{|y-u|^2} e^{-b|u|^2} du dy \\ &= \frac{4\pi}{|\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{2\sqrt{|\operatorname{Re} z| \cdot |\operatorname{Im} z|}|u|}}{|u|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|x-y|}}{|x-y|} e^{-b|y-u|^2} dy du \end{aligned}$$

donde la última igualdad se consigue a partir del cambio de variable $u = y - u$ y el teorema de Tonelli. El resto de la demostración sigue de estimar la siguiente cantidad

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|x-y|}}{|x-y|} e^{-b|y-u|^2} dy = \int_{S^2} \int_0^\infty \rho e^{-\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} \cdot \rho} e^{-b|x - \rho\omega - u|^2} d\rho d\omega$$

Integrando dos veces por partes tendremos

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \rho e^{-\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} \cdot \rho} e^{-b|x - \rho\omega - u|^2} d\rho \\ &= \frac{1}{|\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|^2} \int_0^\infty e^{-\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} \cdot \rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\rho e^{-b|x - \rho\omega - u|^2} \right) d\rho \end{aligned}$$

Ahora bien, existe $A > 0$ tal que $e^{-b|x|^2} \leq Ae^{-a|x|}$ entonces

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} \cdot \rho} \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\rho e^{-b|x - \rho\omega - u|^2} \right) d\rho \\ &\leq 4 \int_0^\infty e^{-\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} \cdot \rho} (\rho|x - \rho\omega - u|^2 + |x - \rho\omega - u| + \rho) e^{-b|x - \rho\omega - u|^2} d\rho \\ &\leq 4A \int_0^\infty e^{-\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} \cdot \rho} (\rho|x - \rho\omega - u|^2 + |x - \rho\omega - u| + \rho) e^{-a|x - \rho\omega - u|} d\rho \\ &\leq 4Ae^{-\frac{a}{2}(|u|-|x|)} \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} - \frac{a}{2}) \cdot \rho} (\rho|x - \rho\omega - u|^2 + |x - \rho\omega - u| + \rho) d\rho \\ &\leq 36Ae^{-\frac{a}{2}(|u|-|x|)} \int_0^\infty e^{-(\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} - \frac{a}{2}) \cdot \rho} (\rho(|x|^2 + \rho^2 + |u|^2) + |x| + |u| + \rho) d\rho \\ &\leq \frac{3^3 \cdot 2^8 A e^{-\frac{a}{2}(|u|-|x|)}}{|2 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} - a|} (|x|^2 + |u|^2 + |x| + |u| + 1) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad sigue del hecho que $2 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} - a > 1$. Entonces

$$\begin{aligned} C(k, z, x) &\leq \frac{(4\pi)^2 \cdot 3^3 \cdot 2^8 A e^{\frac{a}{2}|x|}}{|\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|^4 |2 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} - a|} \\ &\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-(\frac{a}{2} - 2 \operatorname{Im} \sqrt{|\operatorname{Re} z| \cdot |\operatorname{Im} z|})|u|}}{|u|^2} (|x|^2 + |u|^2 + |x| + |u| + 1) du \\ &\leq \frac{(4\pi)^2 \cdot 3^4 \cdot 2^{12} A e^{\frac{a}{2}|x|} (|x|^2 + |x| + 1)}{|\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|^4 |2 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} - a| \min_{m=1,2,3} |a - 4\sqrt{|\operatorname{Re} z| \cdot |\operatorname{Im} z|}|^m} \end{aligned}$$

Obteniendo así

$$\begin{aligned} &\|(H_0 - z^2 + k)^{-1} R_k(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 \\ &\leq \frac{|\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|^{-4} |2 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} - a|^{-1} \cdot 3^5 \cdot 2^{16} A}{(4\pi)^2 \min_{m=1,2,3} |a - 4\sqrt{|\operatorname{Re} z| \cdot |\operatorname{Im} z|}|^m} \int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(k, u)|^2 e^{b|u|^2} du \end{aligned}$$

Por otro lado, a partir del Lema 4.10 tendremos que

$$\begin{aligned} \|R_{-k}(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 &\leq \frac{2^5}{(4\pi)^2 (a + 4 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}) a^3} \int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(-k, y)|^2 e^{a|y|} dy \\ &\leq \frac{2^5 A}{(4\pi)^2 (a + 4 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}) a^3} \int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(-k, y)|^2 e^{b|y|^2} dy \end{aligned}$$

concluyendo el resultado esperado. ■

Finalmente probaremos que la familia de operadores T_z es analítica y compacta sobre Ω . Para ello procederemos aproximando T_z por operadores analíticos y compactos en la norma de operadores sobre \mathcal{K}_a .

Teorema 4.12. *La familia de operadores T_z es analítica y compacta sobre Ω .*

DEMOSTRACIÓN. Para cada natural n definimos los operadores sobre \mathcal{K}_a dados por

$$A_n(z) = \sum_{k=-n}^n R_k(z)$$

A partir del Lema 4.9 se concluye que los operadores $A_n(z)$ son analíticos y compacto sobre Ω , puesto que es suma parcial de operadores analíticos y compactos sobre Ω . Además, para todo $\psi \in \mathcal{K}_a$ se cumple

$$\|T_z \psi - A_n(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 = \sum_{|k|>n} \|R_k(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2$$

luego para todo $n > N$, suficientemente grande, se tendrá

$$\frac{k}{|\operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|^2} < 2$$

entonces

$$\begin{aligned} \|T_z \psi - A_n(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 &\leq \frac{C_1(a, z)}{\min_{k>n} |2 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} - a|} \sum_{k>n} \int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(k, x)|^2 e^{b|x|^2} dx \\ &+ \frac{C_2(a)}{\min_{k>n} |a + 4 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|} \sum_{k>n} \int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(-k, x)|^2 e^{b|x|^2} dx \\ &+ \frac{C_3(a)}{\min_{k<-n} |a + 4 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 + k}|} \sum_{k<-n} \int_{\mathbb{R}^3} |(\widehat{V\psi})(k, y)|^2 e^{a|y|^2} dy \end{aligned}$$

siendo $C_1(a, z)$ constante que solo depende de a y z , mientras que $C_2(a)$, $C_3(a)$ son constantes que solo depende de a . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|T_z \psi - A_n(z)\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 &\leq \frac{B^2 \sqrt{A} C_1(a, z)}{\min_{k>n} |2 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k} - a|} \|\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 \\ &+ \frac{B^2 \sqrt{A} C_2(a)}{\min_{k>n} |a + 4 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 - k}|} \|\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 \\ &+ \frac{B^2 \sqrt{A} C_3(a)}{\min_{k<-n} |a + 4 \operatorname{Im} \sqrt{z^2 + k}|} \|\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 \end{aligned}$$

que va a cero cuando $n \rightarrow \infty$. ■

2 PERTURBACIÓN DE RANGO 1

Sea H_0 un operador autoadjunto sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Para todo $\varphi \in \mathcal{H}$ definimos el operador autoadjunto sobre \mathcal{H}

$$P_\varphi \psi = \langle \varphi, \psi \rangle \varphi$$

siendo $\langle \varphi, \psi \rangle$ el producto punto entre φ y ψ definido en \mathcal{H} . El operador P_φ es usualmente denominado *proyección ortogonal* sobre el subespacio generado por φ . Si β es un número real fijo, el operador $H_\beta = H_0 + \beta P_\varphi$ es una perturbación de *rango 1* de H_0 . Este tipo de perturbación ha sido arduamente estudiada en el caso autónomo, como caso particular de *perturbación compacta*. Teoría espectral, perturbación del espectro y el fenómeno de resonancia son algunas de las más investigadas.

Simon en [31] nos presenta un extracto de teoría espectral para perturbaciones de rango 1, mientras que Asch y otros en [1] aborda el fenómeno de resonancia vía *sojourn time* o *tiempo de vida*.

En el presente capítulo abordaremos el fenómeno de resonancia, vía polos de la resolvente, para perturbaciones de rango 1 al Hamiltoniano de Floquet Libre

$$K_0 = -i\frac{\partial}{\partial t} + H_0,$$

donde la perturbación P_φ proyecta sobre una función $\varphi = \varphi(t, x)$ que decae rápidamente cuando $|x| \rightarrow \infty$ y es periódica en la variable t , mientras que el operador H_0 será o bien $-\Delta$, o bien $-i\mathbf{e} \cdot \nabla$ siendo Δ el operador de Laplace, \mathbf{e} vector de \mathbb{R}^n cuyas coordenadas son 1 y ∇ el operador gradiente.

En este capítulo trataremos el fenómeno de resonancia, para la ecuación de evolución, desde el punto de vista de extensión meromorfa de la resolvente del operador K , donde la perturbación $P(t)$ es periódica en el tiempo, descrito en el capítulo precedente. Es importante mencionar que este resultado extiende al caso autónomo, es decir, extensiones meromorfas de la resolvente del operador $H = -\Delta + P$ donde P es independiente del tiempo.

2.1 PERTURBACIÓN NO AUTÓNOMA DE $H_0 = -\Delta$

Comenzaremos considerando los espacio de Hilbert con peso

$$\mathcal{H}_a = L^2(\mathbb{R}^3, e^{-a|x|} dx), \quad \mathcal{K}_a = L^2([0, 2\pi]; \mathcal{H}_a)$$

y el Hamiltoniano

$$K = -i\frac{\partial}{\partial t} + H_0 + P_\varphi$$

siendo $H_0 = -\Delta$ el operador de Laplace y P_φ el operador proyector de rango 1 sobre la función ψ , con $\psi \in \mathcal{K}_a$.

En vía de determinar las resonancias para K procederemos como en la Sección 1 considerando la familia de operadores $T_z : \mathcal{K}_a \rightarrow \mathcal{K}_a$ representado como una serie fuertemente convergente

$$(T_z\psi)(t) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (H_0 - z^2 - k)^{-1} \widehat{(P_\varphi\psi)}(k) e_k(t)$$

para todo número complejo z , con $\text{Im } z > 0$. Adicionalmente, consideraremos el conjunto conexo Ω de todos los números complejos z tales que

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 4|\text{Im } z| |\text{Re } z| < a^2, \text{Im } z \leq 0, z^2 \notin \mathbb{Z}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im } z| > 0\}$$

Ya que los operadores T_z son una serie fuertemente convergente, es conveniente analizar los operadores

$$(T_{z,k}\psi)(t) = -(H_0 - z^2 - k)^{-1} \widehat{(P_\varphi\psi)}(k) e_k(t),$$

con núcleo integral

$$N_{z,k}(s, t, y, x) = -e^{a|y|} e_k(t-s) \overline{\varphi(s, y)} \{(H_0 - z^2 + k)^{-1} \varphi\}(s, x)$$

Los siguientes resultados van encaminados a demostrar que, para todo número entero k , los operadores $T_{z,k}$ son analíticos y compactos sobre \mathcal{K}_a , cuya suma parcial aproxima uniformemente a los operadores T_z .

Lema 4.13. *Para todo número entero k los operadores $T_{z,k}$ son compactos para todo $z \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que los operadores $T_{z,k}$ son Hilbert-Schmidt, para todo número entero k . Comenzaremos considerando que el núcleo integral de los operadores $T_{z,k}$ satisfacen la desigualdad

$$|N_{z,k}(s, t, y, x)| \leq |\{(H_0 - z^2 + k)^{-1} \varphi\}(s, x)|$$

De este modo, para todo número entero k la norma Hilbert-Schmidt de los operadores $T_{z,k}$ satisface la desigualdad

$$\begin{aligned} \|T_{z,k}\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} e^{-a|y|} dy \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\{(H_0 - z^2 + k)^{-1} \varphi\}(s, x)|^2 e^{-a|x|} dx ds \\ &= \frac{4}{a^3} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\{(H_0 - z^2 + k)^{-1} \varphi\}(s, x)|^2 e^{-a|x|} dx ds \end{aligned}$$

Para acotar la última expresión hemos de tener presente que

$$e^{i\sqrt{z^2-k}|y|} = \frac{y \cdot \nabla e^{i\sqrt{z^2-k}|y|}}{i\sqrt{z^2-k}|y|^2}, \quad (4.2)$$

obteniendo para la resolvente de H_0 la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \{(H_0 - z^2 + k)^{-1} \varphi\}(s, x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y \cdot \nabla e^{i\sqrt{z^2-k}|y|}}{4\pi i \sqrt{z^2-k} |y|^2} \varphi(s, x-y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\sqrt{z^2-k}|y|} \nabla \cdot \left(\frac{y \varphi(s, x-y)}{4\pi i \sqrt{z^2-k} |y|^2} \right) dy \end{aligned}$$

siendo la última igualdad consecuencia de integrar por partes. Luego, considerando que $|\varphi(t, x)|$ y $|(\nabla \varphi)(t, x)|$ están acotados por $Ce^{-a|x|}$, tendremos la desigualdad

$$|\{(H_0 - z^2 + k)^{-1} \varphi\}(s, x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{\sqrt{|\operatorname{Re} z| |\operatorname{Im} z|} |y|}}{4\pi |z^2 - k|^{1/2}} \frac{1 + |y|}{|y|^2} e^{-a|x-y|} dy$$

Por lo tanto, para todo $0 < \alpha < 1$ se cumple

$$\begin{aligned} \|T_{z,k}\|_2^2 &\leq C^2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|y|)e^{\sqrt{|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z||y|}}}{|y|^2 \sqrt{8a^3\pi|z^2-k|}} e^{-a\frac{\alpha}{2}(|x-y|+|x|)} dy \right]^2 e^{-(1-\alpha)a|x|} dx \\ &\leq C^2 \frac{8\pi}{a^3(1-\alpha)^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1+|y|)e^{-(\frac{a\alpha}{2}-\sqrt{|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|})|y|}}{|y|^2 \sqrt{8a^3\pi|z^2-k|}} dy \right)^2 \\ &= C^2 \frac{8\pi}{a^6(1-\alpha)^3} \frac{(2+a\alpha-2\sqrt{|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|})}{(a\alpha-2\sqrt{|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|})^2} \frac{1}{|z^2-k|} \end{aligned}$$

Eligiendo $\alpha = 1/2$ tendremos que

$$\|T_{z,k}\|_2^2 \leq C^2 \frac{128\pi}{a^6|z^2-k|} \frac{(4+a-4\sqrt{|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|})}{(a-4\sqrt{|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|})^2}$$

Por lo tanto, para todo número entero k la familia de operadores $T_{z,k}$ es compacto para todo $z \in \Omega$. \blacksquare

Lema 4.14. *Los operadores $A_{z,N} = \sum_{|k| \leq N} T_{z,k}$ aproximan uniformemente a T_z , uniformemente sobre compactos de Ω .*

DEMOSTRACIÓN. Para toda $\psi \in \mathcal{K}_a$, $\|\psi\|_{\mathcal{K}_a} = 1$, se tiene que

$$\|T_z\psi - A_{z,N}\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 = \sum_{|k| > N} \|T_{z,k}\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2$$

Definiendo

$$F_k(x, y) = \langle e_k, \langle \varphi(\cdot), \psi(\cdot) \rangle_{\mathcal{H}_a} (\varphi(\cdot, x-y) - y \cdot (\nabla \varphi)(\cdot, x-y)) \rangle$$

y utilizando la identidad (4.2) tendremos que la norma de $T_{z,k}$ actuando sobre ψ está acotada por

$$\begin{aligned} \|T_{z,k}\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\sqrt{z^2-k}|y|} \nabla \left(\frac{y(\widehat{P_\varphi\psi})(k, x-y)}{4\pi i \sqrt{z^2-k}|y|^2} \right) dy \right|^2 e^{-a|x|} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{\sqrt{|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z||y|}}}{4\pi|z^2-k|^{1/2}|y|^2} |F_k(x, y)| dy \right)^2 e^{-a|x|} dx. \end{aligned}$$

Pero la última expresión está acotada por

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-(a/2-2\sqrt{|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|})|y|}}{4\pi|z^2-k||y|^2} dy \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F_k(x, y)|^2}{4\pi|z^2-k||y|^2} e^{-a(|x|-|y|/2)} dy dx \\ &\leq \frac{2}{a-4\sqrt{|\operatorname{Re} z||\operatorname{Im} z|}} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F_k(x, y)|^2}{4\pi|z^2-k||y|^2} e^{-a(|x|-|y|/2)} dy dx \end{aligned}$$

Adicionalmente, la serie de los términos $|F_k(x, y)|^2$ converge y está acotada por

$$\frac{64\pi^2 C^4}{a^6} (1 + |y|) e^{-2a|x-y|}$$

concluyendo así que

$$\begin{aligned} \sum_{|k|>N} \|T_{z,k}\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 &\leq \frac{B(a, z)}{\inf_{|k|>N} |z^2 - k|} \sum_{|k|>N} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|F_k(x, y)|^2}{4\pi|y|^2} e^{-a(|x|-|y|/2)} dy dx \\ &\leq \frac{16\pi C^4 B(a, z)}{\inf_{|k|>N} |z^2 - k|} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |y|) e^{-2a|x-y|}}{a^6 |y|^2} e^{-a(|x|-|y|/2)} dy dx \\ &\leq \frac{16\pi C^4 B(a, z)}{\inf_{|k|>N} |z^2 - k|} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + |y|) e^{-a(|x-y|+|y|/2)}}{a^6 |y|^2} dy dx \\ &= \frac{1024(2 + a)\pi^3 C^4 B(a, z)}{a^{11} \inf_{|k|>N} |z^2 - k|} \end{aligned}$$

donde $B(a, z) = 2(a - 4\sqrt{|\operatorname{Re} z| |\operatorname{Im} z|})^{-1}$. Luego, para cada subconjunto compacto de $Q \subset \Omega$ se cumple que existe $\delta > 0$ tal que

$$\inf_{z \in Q} |z^2 - k| > \delta,$$

para todo número entero k . Por lo tanto

$$\sup_{z \in Q} \|T_z \psi - A_{z,N} \psi\|_{\mathcal{K}_a} \leq \frac{C(a, Q)}{\inf_{z \in Q} \inf_{|k|>N} |z^2 - k|} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

siendo $C(a, Q)$ una constante que depende únicamente de a y del compacto $Q \subset \Omega$. ■

El siguiente teorema es consecuencia directa del lema anterior.

Teorema 4.15. *La familia de operadores T_z es compacta y analítica sobre Ω .*

2.2 PERTURBACIÓN NO AUTÓNOMA $H_0 = -i \mathbf{e} \cdot \nabla$

A lo largo de esta sección entenderemos \mathbf{x} la variable n -dimensional y \mathbf{e} , por simplicidad, el vector de \mathbb{R}^n cuyas entradas son unos. Consideremos $\varphi = \varphi(t, \mathbf{x})$ y el Hamiltoniano

$$K = -i \frac{\partial}{\partial t} + H_0 + P_\varphi$$

siendo $H_0 = -i \mathbf{e} \cdot \nabla$ siendo ∇ el operador gradiente n -dimensional y, P_φ el operador proyector definido por

$$(P_\varphi \psi)(t, \mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}) \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(t, \mathbf{y})} \psi(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

En vía de determinar resonancias para K procederemos como la Sección 1 definiendo la familia de operadores

$$(T_z \psi)(\mathbf{x}) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (H_0 - z - k)^{-1} \widehat{(P_\varphi \psi)}(k, \mathbf{x}) e_k(t).$$

En nuestro caso la resolvente del operador H_0 está dada por

$$((H_0 - z)^{-1} \phi)(\mathbf{x}) = -i \int_0^\infty \phi(\mathbf{x} - t\mathbf{e}) e^{itz} dt$$

Así, los operadores T_z se puede aproximar usando la suma parcial de los operadores

$$(T_{z,k} \psi)(t, \mathbf{x}) = -(H_0 - z - k)^{-1} \widehat{(P_\varphi \psi)}(k, \mathbf{x}) e_k(t)$$

con núcleo integral

$$N_{z,k}(s, t, \mathbf{y}, \mathbf{x}) = -e^{a|\mathbf{y}|} e_k(t-s) \overline{\varphi(s, \mathbf{y})} \{(H_0 - z - k)^{-1} \varphi\}(s, \mathbf{x})$$

En lo sucesivo de esta sección, probaremos que los operadores T_z son compactos y analíticos sobre el conjunto

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid 4|\operatorname{Im} z| < a, \operatorname{Im} z \leq 0, z^2 \notin \mathbb{Z}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| > 0\}$$

Lema 4.16. *Para todo número entero k los operadores $T_{z,k}$ son compactos Ω .*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que para todo número entero k los operadores $T_{z,k}$ son Hilbert-Schmidt, para todo $z \in \Omega$. Para ello hemos de tener en consideración que el núcleo integral de los operadores $T_{z,k}$ satisfacen la siguiente desigualdad

$$|N_{z,k}(s, t, \mathbf{y}, \mathbf{x})| \leq |\{(H_0 - z^2 - k)^{-1} \varphi\}(s, \mathbf{x})|$$

De este modo, para todo número entero k la norma Hilbert-Schmidt de los operadores $T_{z,k}$ satisface la desigualdad

$$\begin{aligned} \|T_{z,k}\|_2^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|\mathbf{y}|} d\mathbf{y} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} |\{(H_0 - z - k)^{-1} \varphi\}(s, \mathbf{x})|^2 e^{-a|\mathbf{x}|} d\mathbf{x} ds \\ &= \frac{(n-1)! m(S_{n-1})}{2\pi a^n} \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} |\{(H_0 - z - k)^{-1} \varphi\}(s, \mathbf{x})|^2 e^{-a|\mathbf{x}|} d\mathbf{x} ds \end{aligned}$$

siendo $m(S_{n-1})$ la medida de Lebesgue del casquete de la esfera unitaria S_{n-1} de \mathbb{R}^n . Para acotar la última desigualdad hemos de tener presente

$$((H_0 - z)^{-1} \varphi)(t, \mathbf{x}) = \frac{\varphi(t, \mathbf{x})}{z} - \frac{1}{z} \int_0^\infty \mathbf{e} \cdot (\nabla \varphi)(t, \mathbf{x} - s\mathbf{e}) e^{isz} ds$$

Puesto que $|\varphi(\mathbf{x})|, |(\nabla\varphi)(\mathbf{x})| \leq Be^{-a|\mathbf{x}|}$ podemos concluir que

$$|((H_0 - z)^{-1}\varphi)(\mathbf{x})| \leq \frac{Be^{-a|\mathbf{x}|}}{|z|} + \frac{B}{|z|} \int_0^\infty e^{-a|\mathbf{x}-t\mathbf{e}|} e^{-\text{Im} z t} dt$$

Obteniendo así

$$\|T_{z,k}\|_2 \leq \frac{B}{|z+k|} \frac{(n-1)! m(S_{n-1})}{a^n} \left(\sqrt{\frac{1}{2^n}} + \sqrt{\frac{2^{n+1}(n-1)! m(S_{n-1})}{a^n |a + 4 \text{Im} z|}} \right),$$

puesto que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^\infty e^{-a|\mathbf{x}-t\mathbf{e}|} e^{-\text{Im} z t} dt \right|^2 e^{-a|\mathbf{x}|} d\mathbf{x} \\ & \leq \frac{(n-1)! m(S_{n-1})}{a^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-a|\mathbf{x}-t\mathbf{e}|} e^{-2\text{Im} z t} e^{-a|\mathbf{x}|} dt d\mathbf{x} \\ & \leq \frac{(n-1)! m(S_{n-1})}{a^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty e^{-(\frac{a}{2}\sqrt{n}+2\text{Im} z)t} e^{-\frac{a}{2}|\mathbf{x}|} dt d\mathbf{x} \\ & = \frac{2^{n+1}(n-1)! m(S_{n-1})}{a^n |a\sqrt{n} + 4 \text{Im} z|} \end{aligned}$$

■

Lema 4.17. *Para todo número natural N los operadores $A_{z,N} = \sum_{|k| \leq N} T_{z,k}$ aproximan uniformemente a T_z , uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω .*

DEMOSTRACIÓN. Para toda $\psi \in \mathcal{K}_a$, $\|\psi\|_{\mathcal{K}_a} = 1$, se tiene que

$$\|T_z \psi - A_{z,N} \psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 = \sum_{|k| > N} \|T_{z,k} \psi\|_{\mathcal{K}_a}^2$$

donde los operadores $T_{z,k}$ están dados por

$$(T_{z,k}\psi)(t, \mathbf{x}) = - \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\widehat{\langle \varphi, \psi \rangle}_{\mathcal{H}_a})(j) (H_0 - z - k)^{-1} \widehat{\varphi}(k - j, \mathbf{x})$$

Acotando el módulo cuadrado de los operadores $T_{z,k}$ tendremos

$$\begin{aligned} |(T_{z,k}\psi)(t, x)|^2 & \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |(\widehat{\langle \varphi, \psi \rangle}_{\mathcal{H}_a})(j)|^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |(H_0 - z - k)^{-1} \widehat{\varphi}(j, \mathbf{x})|^2 \\ & \leq \frac{(n-1)! m(S_{n-1})}{(2a)^n} \|\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |(H_0 - z - k)^{-1} \widehat{\varphi}(j, \mathbf{x})|^2 \end{aligned}$$

Además, sabemos que la resolvente de H_0 satisface la igualdad

$$((H_0 - z)^{-1}\hat{\varphi})(j, \mathbf{x}) = \frac{\varphi(j, \mathbf{x})}{z} - \frac{1}{z} \int_0^\infty \mathbf{e} \cdot (\nabla\varphi)(j, \mathbf{x} - s\mathbf{e}) e^{isz} ds.$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{|z+k|^2}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |(H_0 - z - k)^{-1}\hat{\varphi}(j, \mathbf{x})|^2 \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(t, \mathbf{x})|^2 dt + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^\infty |(\nabla\varphi)(j, \mathbf{x} - s\mathbf{e})| e^{-\text{Im}z s} ds \right)^2 \end{aligned}$$

Pero la última expresión está acotada por

$$\begin{aligned} & B^2 e^{-2a|\mathbf{x}|} + \frac{2}{a+4\text{Im}z} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty |(\nabla\varphi)(t, \mathbf{x} - s\mathbf{e})|^2 e^{\frac{a}{2}s} ds dt \\ & \leq B^2 e^{-2a|\mathbf{x}|} + \frac{B^2}{a+4\text{Im}z} \cdot \int_0^\infty e^{-2a|\mathbf{x}-s\mathbf{e}|} e^{\frac{a}{2}s} ds \\ & \leq B^2 e^{-2a|\mathbf{x}|} + \frac{B^2}{|a+4\text{Im}z|} \cdot \frac{6e^{\frac{2a}{3}|\mathbf{x}|}}{4\sqrt{n}-3} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} & \sum_{|k|>N} \|T_{z,k}\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 \\ & \leq \left(\frac{B(n-1)!m(S_{n-1})}{a^n\sqrt{2}} \right)^2 \left(\frac{1}{3^n} + \frac{6 \cdot 3^n (4\sqrt{n}-3)^{-1}}{|a+4\text{Im}z|} \right)^2 \|\psi\|_{\mathcal{K}_a}^2 \sum_{|k|>N} \frac{1}{|z+k|^2} \end{aligned}$$

que converge a cero cuando $N \rightarrow \infty$. ■

Finalmente, la familia de operadores T_z es una aproximación uniforme de operadores analíticos y compactos, hecho que nos permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.18. *Los operadores T_z son una familia compacta y analítica sobre Ω .*

3 CONCLUSIONES

Bajo ciertas condiciones para el potencial $V(t, x)$ el Hamiltoniano $H(t) = H_0 + V(t)$ es autoadjunto sobre $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, al igual que el Hamiltoniano $K = -i\frac{\partial}{\partial t} + H_0 + V$ es autoadjunto sobre el espacio de Floquet

$\mathcal{K} = L^2([0, 2\pi]; \mathcal{H})$, resultados obtenidos por Howland (ver [14]) si el potencial es periódico en la variable temporal.

A partir de la segunda fórmula de la resolvente para los Hamiltonianos de Floquet $K_0 = -i\frac{\partial}{\partial t} + H_0$ y $K = K_0 + V$

$$(K - z^2)^{-1}V = (K_0 - z^2)^{-1}V(1 + (K_0 - z^2)^{-1}V)^{-1}, \quad \text{Im } z > 0$$

tendremos

$$(K - z^2)^{-1}V = T_z(1 - T_z)^{-1}.$$

En la ecuación anterior hemos hecho el cambio $T_z = (K_0 - z^2)V$, operador que ha sido extendido analíticamente del semiplano superior a una región hiperbólica del semiplano inferior, en el Capítulo 4.

En [32], Steinberg demuestra que si un operador $T(z) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, \mathcal{H} espacio de Hilbert, es analítico y compacto, para todo $z \in \Omega$, entonces o bien el operador $(1 - T(z))$ es nunca invertible o bien el operador $(1 - T(z))^{-1}$ es meromorfo.

Los resultados expuestos en las secciones anteriores nos permiten afirmar que el operador $(K - z^2)^{-1}V$ tiene una extensión meromorfa del semiplano superior a la región del semiplano inferior delimitada por la curva $4|\text{Re } z||\text{Im } z| < a$, con $\text{Im } z \leq 0$ y $z^2 \notin \mathbb{Z}$. Más aún, si z es un polo para el operador $(K - z^2)^{-1}V$ entonces existe $\psi \in \mathcal{K}_a$ tal que $u(t, x) = e^{-iz^2t}\psi(t, x)$ es solución outgoing a la ecuación (4.1). Por lo tanto z^2 es una frecuencia de scattering para el potencial V .

Para el caso autónomo, es aceptado que resonancias aparecen como polos de extensiones analíticas de la resolvente del Hamiltoniano $H = H_0 + V$, siendo $V = V(x)$. Pero potenciales V independientes del tiempo son un caso particular del problema periódico. Por ello resulta natural preguntarse si la resolvente del operador $K = K_0 + V$, con $V = V(x)$, conserva las resonancias del caso autónomo.

No es difícil de probar que el operador $(K - z^2)^{-1}V$ coincide con $(H - z^2)^{-1}V$ sobre \mathcal{H}_a , luego toda resonancia del Hamiltoniano H será polo de la extensión analítica de la resolvente del operador K . Aunque esto no nos da la certeza que todo polo de $(K - z^2)^{-1}V$ se presente como polo de $(H - z^2)^{-1}V$, y por tanto sea caracterizada como una resonancia.

Por otro lado, Steinberg demuestra que los polos del operador $(1 - T(\epsilon, z))^{-1}$ se mueven continuamente sobre \mathbb{C} , si $T(\epsilon, z)$ es analítica en z y conjuntamente continua en la variable ϵ y z . En particular, si el Hamiltoniano $H = H_0 + V_0$, siendo $H_0 = -\Delta$ operador de Laplace, actuando sobre $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ posee un valor propio y $V_\epsilon \rightarrow V_0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ en la norma

$$|f|_\infty = \sup_{t,x} |f(t, x)e^{a|x|}|,$$

entonces el operador sobre \mathcal{K}_a

$$(T_{\epsilon,z}\psi)(t, x) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (H_0 - z + k)^{-1} \widehat{(V_\epsilon\psi)}(k, y) e_k(t)$$

es analítico y compacto sobre \mathcal{K}_a , y converge uniformemente al operador $T_{0,z}$. Por lo tanto, los valores propios de H_0 se convierten en frecuencias de scattering del operador $K_\epsilon = K_0 + V_\epsilon$.

Un análisis similar, tanto para los polos de la resolvente como la dependencia continua de los mismos, puede hacerse al Hamiltoniano de Floquet K_0 que es perturbado por un operador proyección P_φ .

Finalmente, el problema de determinar frecuencias de scattering en el caso radial, en dimensión tres, ha sido simplificado al solo considerar soluciones outgoing radiales, ya que soluciones no radiales involucran trabajar con los esféricos armónicos y los Hamiltonianos

$$K_0 = i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad K = K_0 + V(t, r)$$

siendo l un número natural y $V(t, r)$ una función periódica en la variable t .

En el caso que consideramos el operador $K = -i\frac{\partial}{\partial t} + H_0 + V(t)$ siendo H_0 el operador de Laplace actuando sobre $L^2([0, \infty))$ o sobre $L^2(\mathbb{R})$, la existencia de las frecuencias de scattering siguen de aplicar los resultados de Steinberg. En el caso que la perturbación periódica es de rango uno, el tratamiento es el mismo al recién expuesto.

Otros Resultados

A lo largo de esta tesis hemos presentado resultados de Scattering Clásico y extensiones analíticas de la resolvente sobre espacios de Floquet. En este capítulo presentaremos algunos resultados un resultado que permite estimar el *tiempo de vida*, un indicador de la presencia de resonancia, cuando el conmutador entre el Hamiltoniano y el *operador tiempo* es un operador positivo. Estos resultados buscan abordar de una perspectiva diferente la presencia de resonancias para operadores que dependen periódicamente del tiempo.

1 TIEMPO DE VIDA

Como ya hemos comentado en el Capítulo 1, las resonancias han sido estudiadas desde distintos puntos de vista. Entre ellos podemos mencionar *tiempo de vida* de un estado φ . Sea \mathcal{H} espacio de Hilbert, el tiempo de vida de un estado $\varphi \in \mathcal{H}$ está dado por

$$\mathcal{T}_H(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \varphi, e^{-iHt} \varphi \rangle_{\mathcal{H}}|^2 dt,$$

que representa la cantidad de tiempo que el sistema permanece en el estado φ . La función integrando $|\langle \varphi, e^{-iHt} \varphi \rangle_{\mathcal{H}}|^2$ es denominada *probabilidad de supervivencia* y representa la probabilidad que, en el instante de tiempo t , el sistema se encuentre en el estado inicial φ .

En general, un tiempo de vida excepcionalmente grande puede ser indicativo de la presencia de una resonancia. Una manera de comprender este hecho es cuando la $\mu_{\varphi}(E) = \langle \varphi, \chi_E(H) \varphi \rangle_{\mathcal{H}}$, con χ_E la función indicatriz del conjunto E , es una medida absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. En tal caso existe p_{φ} función densidad para la medida μ_{φ} , y tendremos que

$$\mathcal{T}_H(\varphi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{p}_{\varphi}(t)|^2 dt$$

siendo \hat{f} la transformada de Fourier de f . Si p_φ es una función densidad concentrada al rededor de un punto, se espera que su transformada de Fourier se desparrame sobre \mathbb{R} . En este tipo de casos $\mathcal{T}_H(\varphi)$ es significativamente grande. Es claro que si φ es un vector propio, entonces la función densidad se concentra en un punto, y en tal caso el tiempo de vida es infinito.

Varias preguntas concernientes al tiempo de vida han sido abordadas por Asch, Astaburuaga, Bourget, Cortés y Fernández en [1], [2]

- (i) El conjunto $\{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mathcal{T}_H(\varphi) < \infty\}$ es denso en \mathcal{H} si y sólo si H es absolutamente continuo
- (ii) El conjunto $D(\mathcal{T}_H) = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mathcal{T}_H(\varphi) < \infty\}$ es un subespacio de \mathcal{H} y la función $\mathcal{T}_H : D(\mathcal{T}_H) \rightarrow \mathcal{H}$ es convexa y homogénea. Entonces $\mathcal{T}_H(\varphi)$, no tiene máximo local.

Para un sistema cuántico general,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H(t) \psi,$$

la definición de la probabilidad de supervivencia y tiempo de vida no es sencilla. Si $U(t, s)$ es el propagador asociado a la dinámica generada por $H(t)$, definimos la *probabilidad de supervivencia*, dado un estado inicial φ al tiempo s , como

$$P(\varphi, t, s) = |\langle \varphi, U(t, s) \varphi \rangle_{\mathcal{H}}|^2.$$

El tiempo de vida al tiempo t es entonces

$$\mathcal{T}_t(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \varphi, U(t, t-s) \varphi \rangle_{\mathcal{H}}|^2 ds$$

y, simplemente, el *tiempo de vida* será definido como

$$\mathcal{T}(\varphi) = \sup_t \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \varphi, U(t, t-s) \varphi \rangle_{\mathcal{H}}|^2 ds.$$

Podemos notar que en el caso autónomo el propagador $U(s, t) = e^{-iH(t-s)}$, luego las definiciones del caso no autónomo coinciden con el caso autónomo.

En el caso no autónomo caracterizar el dominio de \mathcal{T} y sus máximos locales no han sido estudiados aún.

V. Cortés y C. Fernández: Si $K = -i \frac{\partial}{\partial t} + H(t)$ el operador de Floquet, entonces el principio de incertidumbre *energía-tiempo* (Lavine, 1994, ver [21])

$$\mathcal{T}_K(f) \| (K - \lambda) f \|_{\mathcal{K}} \geq 1$$

puede ser usado para demostrar que

$$\mathcal{T}(\varphi) \sup_t \| (H(t) - \lambda) \varphi \|_{\mathcal{H}} \geq 1,$$

La anterior desigualdad nos permite determinar, cuando $\mathcal{T}(\varphi)$ es finito, una cota inferior para el tiempo de vida.

Proposición 5.1. *Si el conjunto*

$$D(\mathcal{T}) = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \mathcal{T}(\varphi) < \infty\}$$

es denso, entonces el operador de Floquet K es absolutamente continuo.

DEMOSTRACIÓN. Dado $f \in \mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ tendremos que

$$\langle f, e^{-iK\sigma} f \rangle_{\mathcal{K}} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t), U(t, t - \sigma) f(t - \sigma) \rangle_{\mathcal{H}} dt$$

Entonces, para $f(t) = a(t)\varphi$,

$$\langle a\varphi, e^{-iK\sigma} a\varphi \rangle_{\mathcal{K}} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{a(t)} a(t - \sigma) \langle \varphi, U(t, t - \sigma) \varphi \rangle_{\mathcal{H}} dt$$

A partir de lo anterior sigue que

$$\begin{aligned} |\langle a\varphi, e^{-iK\sigma} a\varphi \rangle_{\mathcal{K}}|^2 &\leq \sup_t |\langle \varphi, U(t, t - \sigma) \varphi \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{a(t)} a(t - \sigma) dt \right|^2 \\ &\leq \sup_t |\langle \varphi, U(t, t - \sigma) \varphi \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \end{aligned}$$

Entonces, $\tau_K(a\varphi) < \infty$ para toda $\varphi \in D(\mathcal{T}_H)$. El resultado sigue del hecho que el subespacio generado por los vectores de la forma $a\varphi$ es denso. ■

Cuando el Hamiltoniano $H(t)$ es periódico, de período 2π se considera el *tiempo de vida promedio*,

$$\langle \mathcal{T} \rangle(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{T}_s(\varphi) ds$$

cantidad que coincide con el tiempo de vida usual si $H(t) = H$ es independiente del tiempo. En [2], se demuestra que el tiempo de vida promedio satisface la siguiente principio de incertidumbre

$$1 \leq \langle \mathcal{T} \rangle(\varphi) \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|(H(t) - \lambda_0)\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 dt}$$

si $(H(t) - \lambda_0)\varphi \neq 0$ para $t \in [0, 2\pi)$. Adicionalmente se prueba que el tiempo de vida del operador $K = -\frac{\partial}{\partial t} + H(t)$ satisface la siguiente desigualdad

$$\mathcal{T}_K(f) \leq \langle \mathcal{T} \rangle(\varphi)$$

2 UN MODELO

Aquí consideramos una función potencial atractiva delta sujeta a una perturbación periódica en el tiempo

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = H_0\varphi + V(t)\varphi,$$

donde

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} - 2\delta(x), \quad \text{on } L^2(\mathbb{R})$$

y

$$V(t) = -2\eta(t)\delta(x), \quad \eta(t) \text{ periódica}$$

Este modelo ha sido estudiado por Costin, Lebowitz, Rokhlenko (ver [8]). Ellos probaron que bajo ciertas condiciones de $\eta(t)$ hay completa *ionización*, es decir la probabilidad de supervivencia converge a cero.

El operador H_0 actúa como

$$H_0\varphi = -\varphi'' - 2\varphi(0),$$

para $\varphi \in \mathcal{H}^1$.

Éste tiene solo un estado acotado $\varphi_0(x) = e^{-|x|}$ con energía $\lambda_0 = -1$. También, tiene espectro continuo $[0, \infty)$.

Consideremos entonces el problema,

$$\begin{cases} i\varphi_t = -\varphi_{xx} - 2\varphi(0)(1 + \eta(t))\delta, \\ \varphi(x, 0) = e^{-|x|} \end{cases}$$

Ellos probaron que

$$|\langle \varphi_0, \varphi(t) \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty.$$

También, para $\eta(t) = r \sin(\omega t)$, con r pequeño y ω^{-1} no demasiado cerca de un entero, ellos obtuvieron un decaimiento del orden $t^{-3/2}$.

Uno puede probar un resultado similar para la solución $U(t, s)\varphi_0$ de

$$\begin{cases} i\varphi_t = -\varphi_{xx} - 2\varphi(0)(1 + \eta(t))\delta \\ \varphi(x, s) = \varphi_0(x) \end{cases}$$

Teorema 5.2.

$$\mathcal{T}(\varphi_0) = \sup_t \int_{-\infty}^{\infty} |\langle \varphi_0, U(t, t-s) \rangle_{\mathcal{H}}|^2 ds < \infty.$$

Observación. φ_0 no vive en el dominio de $H(t)$, entonces, no podemos aplicar el principio de incertidumbre energía-tiempo para estimar $\mathcal{T}(\varphi_0)$ desde abajo.

3 OPERADOR TIEMPO

Consideremos nuevamente el Hamiltoniano independiente del tiempo H , actuando sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} .

El concepto de operador tiempo como un observable que satisface una Relación de Conmutación Canónica con H , es controversial. Acorde a Pauli, esto no puede ser definido para todo sistema cuántico sin contradicciones.

Ejemplo.

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} \quad \text{sobre } L^2(\mathbb{R}).$$

$$T_0 = \frac{1}{4}(QP^{-1} + P^{-1}Q),$$

donde $Q\varphi(x) = x\varphi(x)$, $P\varphi(x) = -i\varphi'(x)$.
Claramente,

$$(RCC) \quad T_0H_0 - H_0T_0 = i, \quad \text{sobre } D(T_0H_0) \cap D(H_0T_0)$$

También, T_0 es autoadjunto y se satisface

$$(i) \quad e^{-isT_0}e^{-itH_0} = e^{-ist}e^{-itH_0}e^{-isT_0}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad T_0e^{-itH_0} - e^{-itH_0}T_0 = te^{-itH_0}.$$

El operador T_0 fue introducido por Aharonov y Bohm (1961) y este es un operador tiempo (porque de (ii)) para el hamiltoniano libre. En [23], Miyamoto define un operador tiempo para un hamiltoniano general H .

Definición 5.3. T es un **operador tiempo** si éste es simétrico y satisface

$$[T, e^{-itH}] = te^{-itH}.$$

Observación. Si T es un operador tiempo entonces

$$[T, H] = i,$$

pero el recíproco es, en general, falso.

Observación. De la forma explícita para el núcleo integral de e^{-itH_0} , uno tiene la aproximación estimada,

$$|\langle \psi, e^{-iH_0t}\psi \rangle| \leq \|\psi\|_{L^1} \|e^{-iH_0t}\psi\|_{L^\infty}$$

$$\leq \frac{\|\psi\|_{L^1}^2}{\sqrt{t}}$$

Entonces, $\psi \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow |\langle \psi, e^{iH_0 t} \psi \rangle|^2 \leq C/t$.

También, del Lema de the Riemann–Lebesgue,

$$|\langle \psi, e^{-iH_0 t} \psi \rangle|^2 \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow 0$$

para todo $\psi \in L^2(\mathbb{R})$.

Definición 5.4. Dado un operador simétrico T y un estado $\psi \in D(T)$ se definen:

1. $\langle T \rangle_\psi = \langle \psi, T\psi \rangle$ la **esperanza** de T en el estado ψ .
2. $(\Delta T)_\psi = \|(T - \langle T \rangle_\psi)\psi\|$ la **varianza** de T en el estado ψ

Miyamoto en [23] prueba que si existe un operador tiempo T asociado a un Hamiltoniano H , entonces la probabilidad de supervivencia decae cuadráticamente al infinito, y por tanto el tiempo de vida es finito. Esto es cierto para todo estado en el dominio de T .

En ciertas ocasiones es posible determinar un operador T de modo que

$$[T, H] = P$$

con P un operador positivo. Ello motiva la siguiente definición

Definición 5.5. Diremos que T es un operador **P -tiempo** para el operador H si T es un operador simétrico y

$$[T, e^{-itH}] = tPe^{-itH}$$

siendo P un operador positivo.

Teorema 5.6. Si T es un operador P -tiempo para el operador H , entonces

$$\frac{|\langle \psi, te^{-itH} \psi \rangle|^2}{4\|P^{-1}\|^2} \leq \left\{ \frac{(\Delta T)_{P^{-1}\psi}}{\|P^{-1}\|^2} + |\langle T \rangle_\psi| \right\}^2 + \{(\Delta T)_\psi + |\langle T \rangle_{P^{-1}\psi}|\}^2$$

para todo $\psi \in D(T)$ con $\|\psi\| = 1$.

DEMOSTRACIÓN. A partir de la relación de conmutación $[T, e^{-itH}] = tPe^{-itH}$ obtendremos las siguientes igualdades

$$itP \cos(tH) = [T, \sin(tH)], \quad -itP \sin(tH) = [T, \cos(tH)]$$

Dado que P es un operador positivo entonces es invertible, luego para toda $\psi \in D(T)$, con $\|\psi\| = 1$, tendremos

$$\begin{aligned} |\langle \psi, te^{-itH} \psi \rangle|^2 &= |\langle \psi, t \cos(-itH) \psi \rangle|^2 + |\langle \psi, t \sin(-itH) \psi \rangle|^2 \\ &= |\langle P^{-1}\psi, [T, \sin(tH)]\psi \rangle|^2 + |\langle P^{-1}\psi, [T, \cos(tH)]\psi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que $[T - \alpha, \sin(tH)] = [T, \sin(tH)]$ y $[T - \alpha, \cos(tH)] = [T, \cos(tH)]$. Luego, a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$\begin{aligned} & |\langle P^{-1}\psi, [T, \sin(tH)]\psi \rangle| \\ &= |\langle P^{-1}\psi, [T - \alpha, \sin(tH)]\psi \rangle| \\ &\leq 2\|(T - \alpha)P^{-1}\psi\| \|\sin(tH)\psi\| + 2\|\sin(tH)P^{-1}\psi\| \|(T - \alpha)\psi\| \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & |\langle P^{-1}\psi, [T, \cos(tH)]\psi \rangle| \\ &= |\langle P^{-1}\psi, [T - \alpha, \cos(tH)]\psi \rangle| \\ &\leq 2\|(T - \alpha)P^{-1}\psi\| \|\cos(tH)\psi\| + 2\|\cos(tH)P^{-1}\psi\| \|(T - \alpha)\psi\| \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la desigualdad de Jensen se concluye que

$$\begin{aligned} \frac{|\langle \psi, te^{-itH}\psi \rangle|^2}{4\|P^{-1}\|^2} &\leq \frac{\|(T - \alpha)P^{-1}\psi\|^2}{\|P^{-1}\|^2} + \|(T - \alpha)\psi\|^2 \\ &\leq \left\{ \frac{(\Delta T)_{P^{-1}\psi}}{\|P^{-1}\|^2} + |\langle T \rangle_\psi| \right\}^2 + \{(\Delta T)_\psi + |\langle T \rangle_{P^{-1}\psi}|\}^2 \end{aligned}$$

luego de elegir $\alpha = \langle T \rangle_\psi + \langle T \rangle_{P^{-1}\psi}$. ■

Así, el teorema anterior da un buen decaimiento para la probabilidad de supervivencia, cuando el estado inicial vive en $D(T)$. Adicionalmente es posible probar que un operador P -tiempo no tiene valores propios, para ello será necesario el siguiente resultado.

Teorema 5.7. *Si T es un operador P -tiempo para el operador H , entonces*

$$|\langle \psi, Pe^{-itH}\psi \rangle|^2 \leq \frac{4(\Delta T)_\psi}{t^2},$$

para todo $\psi \in D(T)$ con $\|\psi\| = 1$.

DEMOSTRACIÓN. A partir de la relación de conmutación $[T, e^{-itH}] = tPe^{-itH}$ obtendremos las siguientes igualdades

$$itP \cos(tH) = [T, \sin(tH)], \quad -itP \sin(tH) = [T, \cos(tH)]$$

Luego para toda $\psi \in D(T)$, con $\|\psi\| = 1$, tendremos

$$\begin{aligned} |\langle \psi, tPe^{-itH}\psi \rangle|^2 &= |\langle \psi, tP \cos(-itH)\psi \rangle|^2 + |\langle \psi, tP \sin(-itH)\psi \rangle|^2 \\ &= |\langle \psi, [T, \sin(tH)]\psi \rangle|^2 + |\langle \psi, [T, \cos(tH)]\psi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple que $[T - \alpha, \sin(tH)] = [T, \sin(tH)]$ y $[T - \alpha, \cos(tH)] = [T, \cos(tH)]$. Luego, a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene

$$\begin{aligned} |\langle \psi, [T, \cos(tH)]\psi \rangle| &= |\langle \psi, [T - \alpha, \cos(tH)]\psi \rangle| \\ &\leq 2\|\cos(tH)\psi\|\|(T - \alpha)\psi\| \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |\langle \psi, [T, \sin(tH)]\psi \rangle| &= |\langle \psi, [T - \alpha, \sin(tH)]\psi \rangle| \\ &\leq 2\|\sin(tH)\psi\|\|(T - \alpha)\psi\| \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la desigualdad de Jensen se concluye que

$$|\langle \psi, tPe^{-itH}\psi \rangle|^2 \leq 4\|(T - \alpha)\psi\|^2$$

La demostración concluye eligiendo $\alpha = \langle T \rangle_\psi$. ■

Corolario 5.8. *Si T es un operador P -tiempo para el operador H , entonces el operador T no tiene valores propios.*

DEMOSTRACIÓN. Si ψ es vector propio del operador T entonces del Teorema 5.7 se deduce que

$$|\langle \psi, Pe^{-itH}\psi \rangle| = 0, \quad \text{para todo } t > 0$$

En particular, calculando el límite de t tendiendo a cero se tendrá

$$|\langle \psi, P\psi \rangle| = 0$$

Dado que P es un operador positivo, la igualdad anterior se puede escribir como

$$\|P^{1/2}\psi\| = 0,$$

concluyendo así que $\psi = 0$. ■

Otros resultados que son consecuencia directa de los teoremas anteriores son los siguientes:

Corolario 5.9. *Si $(\Delta T)_\psi, (\Delta T)_{P^{-1}\psi} < \infty$ entonces $\mathcal{T}_H(\varphi) < \infty$.*

Corolario 5.10. $D(T) \subset D(\mathcal{T}_H)$

Referencias

- [1] Asch J., Astaburuaga M. A., Briet P., Cortés V. H., Duclos, P., Fernández C. *Sojourn time for rank one perturbations*. J. Math. Phys. **47**, no. 3, 033501, 14 pp, (2006).
- [2] Asch J., Bourget O., Cortés V. H., Fernández C. *Remarks on Sojourn Time Estimates for Periodic Time-dependent Quantum Systems*. Spectral analysis of quantum Hamiltonians, 1 - 10, Oper. Theory Adv. Appl., 224, Birkh"auser/Springer Basel AG, Basel, 2012.
- [3] Astaburuaga M.A. and Fernández C. *Newtonian Scattering in Hilbert Space*. J. Math. Anal. Appl. 151 (1990), no. 1, 129 - 139.
- [4] Astaburuaga M. A., Fernández C. and Cortés V. *The direct and inverse problem in Newtonian scattering*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 118, pp 119-131 (1991).
- [5] Cooper J. and Strauss W. *Abstract Scattering Theory for Time-Periodic System with Applications to Electromagnetism*. Indiana Univ. J. Math. **34** (1985), 33-83.
- [6] Cooper J. Perla G. and Strauss W. *On the Scattering Frequencies of Time-Dependent Potentials*. Math. Meth. in the Appl. Sci. **8** (1986), 576-584.
- [7] Colton D. and Fress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Second Edition., Springer-Verlag, New York, 1998.
- [8] Costin O., Costin R. D., Lebowitz J. L., Rokhlenko A. *Evolution of a Model Quantum System Under Time Periodic Forcing: Conditions for Complete Ionization*. Comm. Math. Phys. 221 (2001), no. 1, 1 - 26.
- [9] Fernández. C. *Outgoing States and Resonant Behaviour*. Proceedings of the Second International Workshop Stochastic Analysis and Mathematical Physics, ANESTOC'96, World Scientific, 72-81, (1998).

-
- [10] Fernández C. and Rebolledo R. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Santiago, Ediciones Universidad Católica de Chile, 1999.
- [11] Gasiorowicz S. *Quantum Physics*. John Wiley&Sons, 1995.
- [12] Hislop P.D. and Sigal I.M. *Introduction to Scattering Theory, With Applications to Schrödinger Operators*. Springer, 1995.
- [13] Howland J. S. *Stationary Scattering Theory for time-dependent Hamiltonians*, Math. Ann. **207**, 315-335, 1974.
- [14] Howland J. S. *Scattering Theory for Hamiltonians Periodic in Time*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), n° 3, 471-494.
- [15] Huang Min-Jei. *On the absolutely continuous subspaces of Floquet operators*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 124 (1994), n° 4, 703 - 712.
- [16] Iгореvich Arnold V. *Ergodic Problems of Classical Mechanics*. W. A. Benjamin, 1968, p. 23.
- [17] Ioannis A. Władysław M. and Zdzisław S. *Implementability of Liouville Evolution, Koopman and Banach-Lamperti Theorems in Classical and Quantum Dynamics*. Open Sys. & Information Dyn. **9**: 301-313, 2002.
- [18] Jensen A. and Ozawa T. *Classical and Quantum Scattering for Stark Hamiltonians with slowly decaying potentials*. Annales de l'I. H. P., section A, tome 54, n° 3 (1991), p. 229-243.
- [19] Koopman B., *Hamiltonian Systems and Transformations in Hilbert Space* Proc. Nat. Acad. Sci. USA **17** 315 (1931)
- [20] Lax P. and Phillips R., *Scattering Theory*, Academic Press, 1st ed., 1969; 2nd ed., 1989.
- [21] Grabowski M. *Letters in Mathematical Physics*, Volume 8, Number 6 (1984), 455-458.
- [22] Loe, B. *A pole-free Strip for Potential Scattering*, J. Differential Equation, 99, 112-138 (1992).
- [23] Miyamoto, M. *A generalized Weyl relation approach to the time operator and its connection to the survival probability*. J. Math. Phys. 42, 1038-1052 (2001)
- [24] Newton R. G. *Scattering Theory of Wave and Particles*, Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 1982.

-
- [25] Reed M. and Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol 1, Funcional Analysis*, Academic Press, New York, 1980.
- [26] Reed M. and Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol 1, Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York, 1979.
- [27] Reed M. and Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol 3, Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1979.
- [28] Reed M. and Simon B. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol 4, Analysis of Operators*, Academic Press, New York, 1979.
- [29] Simon B. *Wave Operators for Classical Particle Scattering*. Comm. Math. Phys. 23 (1971), p. 37-48.
- [30] Simon B. *Resonances and Complex Scaling: A Rigorous Overview*. International Journal of Quantum Chemistry Volume 14, Issue 4, pages 529-542, October 1978.
- [31] Simon, B. *Spectral Analysis of Rank one Perturbations and Applications*, Lecture at the Vancouver Summer School in Mathematical Physics, 1993.
- [32] Steinberg S. *Meromorphic Families of Compact Operators*, Arch. Rational Mech. Anal. 13, 372-379 (1968).
- [33] Stewart J. “*Early Transcendentals*”, Books/Cole, Cengage Learning, 2012.
- [34] Yajima, K. “*Scattering Theory for Schrödinger Operators with Potentials Periodic in Time*”. J. Math. Soc. Jpn. 29, 729-743 (1977)