PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO ULTRAMÉTRICO SOBRE UN CUERPO K CON UNA VALUACIÓN DE RANGO INFINITO

por

Héctor Moreno Barrera

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Profesor Guía: Herminia Ochsenius Alarcón.

Comisión Informante: Wim Schikhof
Juan Rivera-Leterier
Claudio Fernández

Diciembre, 2013
Santiago, Chile

Índice general

Agradecimientos

A mi familia, por el amor infinito que me han entregado y los sacrificios que han hecho por mí en todos estos años. Por el apoyo y comprensión que han sido fundamentales en toda mi vida estudiantil.

A mi profesora guía Herminia Ochsenius, por todos las enseñanzas, consejos, apoyo y la confianza que siempre depositó en mí.

A los profesores Claudio Fernández y Juan Rivera-Letelier por aceptar leer cuidadosamente mi tesis e integrar la comisión informante.

A Conicyt, por haberme otorgado la beca de estudios de Doctorado en Chile.

A la Vicerrectoria de Investigación de la PUC, por sus becas de Ayudante e Instructor Becario.

Quiero agradecer en especial al profesor Wim Schikhof, por sus colaboraciones, consejos y sugerencias fueron muy importantes durante mis estudios de doctorado. A pesar de las difíciles circunstancias, tuvo la disposición de leer cuidadosamente mi tesis y de haber integrado la comisión informante.

Introducción

En 1980, H. Keller construye el primer espacio de tipo Hilbert sobre un cuerpo K distinto de $\mathbb{R}$. Es infinito dimensional, completo en la topología de la norma inducida por un producto interno, y en él es válido el teorema de Proyección. Son las características algebraicas de K: su orden no arquimediano y la estructura del grupo cuociente $K^+\backslash(K^+)^2$, las que permitieron la construcción del espacio (ver [**4**]). Pero la investigación hasta la fecha se ha centrado en los espacios de tipo Hilbert, y no se ha realizado un estudio de K desde el punto de vista del cálculo y análisis ultramétrico, que es el tema de esta Tesis.

Por otra parte K admite una valuación no arquimediana, cuyo grupo de valores Γ, linealmente ordenado por $\leq$, es la unión de una sucesión estrictamente creciente de subgrupos cada uno de los cuales es un subconjunto convexo del grupo. Esto es, la valuación de K es de rango infinito. A partir de los estudios en cuerpos p-ádicos hay muchos y profundos estudios centrados en el análisis en cuerpos valuados con grupo de valores isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ (valuaciones de rango 1). En particular se está desarrollando una teoría sobre uno de ellos, el cuerpo de Levi-Civita, que es además real cerrado. Sobre cuerpos con valuaciones de rango infinito hay pocos trabajos, y en general se les pide que sean algebraicamente cerrados (y por tanto no ordenables). Esta tesis está en deuda con todos ellos, en particular con el libro Ultrametric Calculus de W. Schikhof, en tanto que han presentado líneas de estudio y desarrollado nuevos conceptos para abordar las dificultades que se presentan. Pero la estructura de K hace que, o bien la teoría difiera sustancialmente de los resultados allí obtenidos, o bien que ellos sean válidos, pero con demostraciones diferentes. En particular, aquí el interjuego entre el orden, la valuación y la ultramétrica definida en K es central en la demostración de los teoremas, así como en la existencia de los numerosos contraejemplos a las versiones clásicas de los teoremas del cálculo y análisis.

Se adjuntan como Anexos a la Tesis los dos artículos publicados en la serie Contemporary Mathematics. Los teoremas demostrados en ellos se citan aquí sin demostración.

En los Preliminares se describe el cuerpo K. El capítulo 1 se centra en las funciones analíticas, cuyo comportamiento difiere tanto del caso clásico como del correspondiente a los cuerpos con valuaciones de rango 1. Puesto que K es ordenado tienen sentido los enunciados de teoremas sobre extremos relativos. Hay contraejemplos para ellos en el caso general de funciones continuas pero se puede demostrar su validez, con la excepción del teorema de valor intermedio, en el caso de funciones analíticas.

El segundo capítulo traslada a K la noción de funciones C^n, desarrollada en [**3**], que es la versión más exigente de la propiedad de ser continuamente diferenciables. En este marco se establece un teorema de función inversa, y en el caso $n = 1$ un teorema de función implícita. Se discute también la existencia de antiderivadas.

El último capítulo tiene una historia distinta. Puesto que en cuerpos ordenados se pueden definir intervalos y su longitud, es natural pensar en medidas, hay una teoría bien desarrollada en el cuerpo de Levi-Civita, que ha permitido establecer en forma natural un proceso de integración (ver [**6**]). Al estudiar este trabajo pensando en la valuación no arquimediana de ese cuerpo surgió la pregunta por la medida de la bola unitaria. Se pudo establecer que ella no es medible, y como consecuencia, que todo intervalo (a, b) en Levi-Civita contiene infinitos subconjuntos convexos no medibles, en agudo contraste con el caso clásico. El trabajo fue publicado recientemente y constituye el Anexo 2 cuyo resumen es este capítulo.

Capítulo 0

Preliminares: El cuerpo K

El cuerpo K que constituye un objeto central en esta investigación, es ordenado, posee una valuación de rango infinito y es ultrametrizable. Resumimos aquí los resultados obtenidos en la sección Preliminares de [**1**], y damos la notación que será usada en la Tesis.

Se construye primero el cuerpo F_∞ adjuntando a $\mathbb{R}$ el conjunto de variables $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, es decir,

$$F_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

donde $F_0 := \mathbb{R}$, y $F_n = F_{n-1}(X_n)$ si $n \geq 1$.

Ordenamos F_∞ en la forma siguiente. Consideramos $F_0 = \mathbb{R}$ con el orden usual. Para $n \geq 1$, el cuerpo $F_n = F_{n-1}(X_n) = F_0(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se ordena según potencias de X_n: un polinomio $P(X_n) = a_0 + a_1X_n + ... + a_sX_n^s \in F_{n-1}[X_n]$ es positivo en F_n si y solo si $a_s > 0$ en F_{n-1}, y un cuociente de polinomios $\lambda = \dfrac{p(X_n)}{q(X_n)}$ es positivo en F_n si y solo si el polinomio $p(X_n)q(X_n)$ lo es. Por tanto, F_∞ tiene el orden inducido. Este orden es no arquimediano ya que $\mathbb{N}$ es un conjunto acotado, por ejemplo por X_1. Además, induce el valor absoluto definido por $|x| = \text{máx}\{x, -x\}$

Este orden genera una topología en F_∞ cuya base de vecindades del cero es la colección de conjuntos $U_\epsilon = \{a \in F_\infty : |a| < \epsilon\}$ para todo $\epsilon \in F_\infty$.

Construiremos ahora una valuación no arquimediana en F_∞. Comenzamos definiendo su grupo de valores. Para cada $i = 1, 2, 3, 4, ...$ escogemos un número real $g_i > 1$ y consideramos el subgrupo cíclico multiplicativo G_i generado por g_i con el orden usual de $\mathbb{R}$. Definimos Γ como

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in (g_1^{n_1}, g_2^{n_2}, g_3^{n_3}, ..., g_i^{n_i}, ...) \in \prod_{i=1}^{\infty} G_i : \ n_i \in \mathbb{Z} \text{ y } supp(\gamma) \text{ es finito} \right\},$$

donde $supp(\gamma) := \{i \in \mathbb{N} : \ n_i \neq 0\}$. Γ es un grupo linealmente ordenado con la operación componente a componente y con el orden antilexicográfico, cuyo elemento identidad es $1 = (1, 1, 1, 1, 1, ...)$.

Para cada $m \geq 1$ ponemos

$$H_m = G_1 \times G_2 \times ... \times G_m \times \{1\} \times \{1\} \times ...$$

y tenemos que $\{1\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset ...$ son los subgrupos convexos de Γ. Por ello el grupo (y por extensión, la valuación que se define a continuación) se dice de rango infinito. Esto lleva a una teoría con diferencias importantes respecto al caso de rango 1. Allí el grupo de valores tiene como único subgrupo convexo propio a $\{1\}$ y es por tanto isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}^+, \cdot)$.

Adjuntamos a Γ un menor elemento 0 que cumple $0 \cdot g = g \cdot 0 = 0$. Definimos entonces la valuación de Krull $v : F_\infty \to \Gamma \cup \{0\}$ como

1. $v|_{\mathbb{R}}$ es la valuación trivial,
2. $v(X_n) := (1, ..., 1, g_n, 1, ...)$.

Notación: En lo que sigue, usaremos con frecuencia $\hat{g}_n := v(X_n)$, y por tanto $\hat{g}_n^{-1} = v(\frac{1}{X_n})$.

Para definir normas de funciones en K, necesitaremos la completación por cortaduras de Dedekind de Γ, denotada por $\Gamma^{\#}$, sobre la cual actúa Γ por

$$g \cdot s = \sup_{\Gamma^{\#}}\{gr : r \in G, r \leq s\},$$

para $g \in \Gamma$ y $s \in \Gamma^{\#}$.

F_∞ es ultrametrizable. En efecto, sea $\phi : F_\infty^+ \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(0) = 0$, y

$$\phi(x) = 2^{-\min\{m \in \mathbb{N}:\, X_m^{-1} \leq x\}}$$

si $x \neq 0$. De forma directa se verifica que la función $d : F_\infty \times F_\infty \to \mathbb{R}^+$ definida por $d(x, y) = \phi(|x-y|)$ es ultramétrica en F_∞.

Definición 0.0.1. El cuerpo K es la completación del espacio ultramétrico (F_∞, d), su topología se denotará por τ.

Las afirmaciones siguientes se demuestran en [**1**]:

- El orden $\leq$, la valuación v y la ultramétrica d definen la misma topología en F_∞. Más aún, (F_∞, d), $(F_\infty, \leq)$ y (F_∞, v) definen las mismas sucesiones de Cauchy.
- La valuación v de F_∞ se extiende a K y (K, v) es un cuerpo valuado completo.
- El orden $\leq$ de F_∞ se extiende a K y $(K, \leq)$ es un cuerpo ordenado completo.

Las topologías definidas en K por las extensiones de la valuación y del orden coinciden con τ. En particular, se tienen las inclusiones:

$$\{y \in K :\ d(x, y) < \frac{1}{2^{n+1}}\} \subset \{y \in K :\ |x - y| < \frac{1}{X_n}\} \subset \{y \in K :\ d(x, y) < \frac{1}{2^n}\},$$

así como

$$\{y \in K :\ |x - y| < \frac{1}{X_n}\} \subset \{y \in K : v(x - y) < \hat{g}_n^{-1}\} \subset \{y \in K :\ |x - y| < \frac{1}{X_{n-1}}\}.$$

Indicaremos a continuación otros hechos básicos (ver [**1**], [**4**], o [**5**]):

- Puesto que es inducida por una valuación no arquimediana, τ es cero-dimensional y los conjuntos
$$B_a(r) = \{x \in K :\ v(x - a) \leq r\}$$
$$B_a(r^-) = \{x \in K :\ v(x - a) < r\}$$
son abiertos y cerrados (clopen) en (K, τ) para todo $a \in K$ y $r \in \Gamma$.
- (K, τ) no es localmente compacto, pues
$$\{x \in K :\ v(x) \leq 1\} = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} (a + \{x \in K :\ v(x) < 1\}) = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \{x \in K :\ v(x - a) < 1\}$$
es un cubrimiento no numerable de $B_0(1)$ que no tiene subcubrimiento finito. Esto implica que la bola unitaria en K no es compacta.

- K no es separable ya que $\mathbb{R}$ es un conjunto no numerable y discreto en K.
- $B_0(1)$ es un anillo local cuyo ideal maximal es la bola $B_0(1^-)$. Por lo tanto $k := B_0(1)/B_0(1^-)$ es el cuerpo residual asociado al subgrupo convexo $\{1\}$, y es isomorfo a $\mathbb{R}$.
- Por ser un cuerpo ordenado, K no es algebraicamente cerrado. Pero tampoco es real cerrado.

Observación 0.0.2. La sucesión $\left(\frac{1}{X_n}\right)_n$ es coinicial en K^+, por lo tanto converge a 0 en (K, τ). También la sucesión asociada $\hat{g}_n^{-1} = v(\frac{1}{X_n})$ tiende a 0 en $\Gamma \cup \{0\}$. Este hecho se usará con frecuencia en las acotaciones.

Puesto que K es un espacio (ultra)métrico, las definiciones de los conceptos básicos del cálculo como límites, continuidad, convergencias, etc, son las usuales. Equivalentemente, se expresarán en términos de la valuación o del orden.

Capítulo 1

Funciones en K y los teoremas clásicos del cálculo

Puesto que K es un cuerpo ordenado, es interesante plantear la pregunta sobre la validez de los teoremas del valor intermedio, valor medio, Rolle, entre otros. El problema es complejo ya que en este caso tenemos un cuerpo que no es real cerrado y no es localmente compacto. Mostraremos primero, mediante contraejemplos, que versiones generales de estos teoremas no son válidos. A continuación se estudian las propiedades de las funciones analíticas en K. Los resultados centrales de este capítulo muestran que en este caso las dificultades desaparecen.

Comenzamos con algunas definiciones previas.

Definición 1.0.3. Sea $X \subset K$. Si $f : X \to K$ es una función acotada, definimos

$$\|f\|_\infty = \sup_{\Gamma^\#}\{v(f(x)) :\ x \in X\}.$$

Definición 1.0.4. Sea $X \subset K$ y $f : X \to K$ una función. Diremos que f es localmente constante en X si para cada punto $a \in X$ existe una vencindad V_a de a tal que f es constante en $V_a \cap X$.

Teorema 1.0.5. *Sea $f : X \to K$ una función continua, entonces, dado $\epsilon \in \Gamma$, existe una función localmente constante $g : X \to K$ tal que $v(f(z) - g(z)) < \epsilon$ para todo $z \in X$.*

Demostración. La demostración propuesta en [**3**] es válida para este caso. Se basa en probar que la relación $\sim$ en X definida por

$$x \sim y \quad \text{si} \quad v(f(x) - f(y)) < \epsilon$$

es una relación de equivalencia, cuyas clases de equivalencia son conjuntos U_i $(i \in I)$ abiertos y cerrados a la vez (clopen). Luego, para cada $i \in I$ se fija $a_i \in U_i$ y se define la función $g : X \to K$ como $g(x) = a_i$ si $x \in U_i$. Observamos que g es localmente constante en X y $v(f(x) - g(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$. □

Si f es localmente constante en X, entonces X admite una partición en conjuntos clopen U_i y f es constante en cada U_i. Las funciones localmente constantes por tanto son continuas y con derivada 0 en todo punto.

Ejemplo 1.0.6 (No se satisface el teorema del valor intermedio)**.** Sea $f : [0, 1] \to K$ definida por $f(x) = x^2$. Observamos que f es continua en K y que $f(0) < \frac{1}{X_1} < f(1)$. Pero X_1 no es un cuadrado en K, de lo contrario, si $X_1 = a^2$ para algún $a \in K$ entonces $(g_1, 1, 1, \ldots) = v(X_1) = v(a)^2$ lo que contradice la definición de los elementos que contiene Γ.

Ejemplo 1.0.7 (Una función continua y acotada en un intervalo cerrado pero que no tiene máximo ni mínimo)**.** Sea $J = B_0(1^-)$, por tanto el cuerpo residual k asociado al subgrupo convexo $\{1\}$ es igual a

$$k = \{a + J :\ a \in \mathbb{R}\}.$$

La función $f : [-X_1, X_1] \to K$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} a & \text{si } z \in a + J \\ 0 & \text{si no.} \end{cases},$$

cumple las condiciones pedidas.

Ejemplo 1.0.8 (Un función diferenciable, no inyectiva y con derivada constante distinta de 0)**.** Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ definimos los conjuntos

$$B_n = \left\{ z \in K : v\left(z - \frac{1}{X_n}\right) < \hat{g}_{2n}^{-1} \right\}.$$

Claramente los conjuntos B_n son clopen; además observamos que si $z \in B_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces $v(z) = \hat{g}_n^{-1}$, lo que implica que $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $m \neq n$. Definimos la función $f : K \to K$ como

$$f(z) = \begin{cases} z - \frac{1}{X_{2n}} & \text{si } z \in B_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}. \\ z & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos que f no es inyectiva en ninguna vecindad de 0, pues $v(\frac{1}{X_n} - \frac{1}{X_{2n}} - \frac{1}{X_n}) = v(\frac{1}{X_{2n}})$ lo que implica que

$$f\left(\frac{1}{X_n} - \frac{1}{X_{2n}}\right) = \frac{1}{X_n} - \frac{1}{X_{2n}} = f\left(\frac{1}{X_n}\right).$$

La función $g(z) = z - f(z)$ es localmente constante y por tanto diferenciable en K con derivada 0. Luego f es diferenciable, no es inyectiva en ninguna vecindad de 0 y $f' \equiv 1$.

En la última sección de este capítulo mostraremos que las dificultades desaparecen para el caso de funciones analíticas.

1.1. Funciones Analíticas

La mayoría de los resultados que presentaremos en esta sección fueron probados detalladamente en [**1**], por lo tanto solo daremos sus enunciados.

Definición 1.1.1. Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una sucesión en K. La serie de potencias $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ es el límite de la sucesión $s_0(z), s_1(z), \ldots$ de polinomios en la variable z dados por $s_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$.

Como es usual, llamamos región de convergencia de la serie de potencias $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ al conjunto $\{z \in K : (s_n(z))_n \text{ converge}\}$.

El teorema siguiente muestra la diferencia fundamental con el análisis clásico, así como el del cálculo ultramétrico para cuerpos con valuación de rango 1.

Teorema 1.1.2 ([**1**], 3.2)**.** *Una serie de potencias de la forma* $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ *con* $a_j \in K$ *converge si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Corolario 1.1.3. *Si S es la región de convergencia de una serie de potencias*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j \qquad (z_0 \in S)$$

entonces, o bien $S = K$, o bien $S = \{z_0\}$.

Señalamos una importante consecuencia del Teorema 1.1.2 que es la imposibilidad de definir las funciones exponencial, logaritmo o trigonométricas como series de potencias en el sentido clásico, pues por la definición de v se tiene que $v\left(\pm\frac{1}{n!}\right) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Teorema 1.1.4 ([**1**], 3.3)**.** *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias que converge en K. Luego, para cada $a \in K$ la serie anterior converge uniformemente en $B_a(r)$ para todo $r \in \Gamma$. La función*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in K)$$

es diferenciable y su derivada es

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \qquad (z \in K).$$

Definición 1.1.5. Sea $D \subseteq K$ abierto. Diremos que una función $f : D \to K$ es **analítica en** D si existen elementos $u \in D$ y $a_0, a_1, \ldots \in K$ tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-u)^n \qquad (z \in D).$$

Teorema 1.1.6 ([**1**], 3.6)**.** *Sea f una función analítica en un abierto D. Luego para cada $v \in D$ existen $b_0, b_1, \ldots \in K$ tales que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-v)^n$ para todo $z \in D$.*

Observamos que la continuación analítica es trivial en este caso. Por otro lado, si f es una función analítica en un abierto D, podemos extender $f(z)$ para todo $z \in K$. Puesto que $0 \in K$, el teorema 1.1.6 nos asegura que existen elementos $a_0, a_1, a_2, ...$ en K tales que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ para todo $z \in K$, en particular, para todo $z \in D$. Concluímos que $f(z)$ es una función analítica en D si y solo si existen $a_0, a_1, \ldots \in K$ tales que para cada $z \in D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Al igual que en caso de funciones analíticas definidas sobre $\mathbb{C}$, los ceros de una función analítica no constante no se pueden acumular. Más aún, dada una bola B en K, una función analítica f en K solo puede contener a lo más un número finito de ceros contenidos en B. Esta situación se debe al siguiente teorema.

Teorema 1.1.7 ([**1**], 3.7)**.** *Sea f una función analítica en un abierto D. Si existe una sucesión $\{z_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos distintos en D con $f(z_k) = 0$, entonces $f \equiv 0$ en D.*

Del mismo modo que en los casos clásicos y rango 1, se podría pensar que si f es analítica en un abierto U y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U$ entonces $\frac{1}{f}$ es analítica en U. El siguiente ejemplo muestra que la afirmación anterior es falsa.

Ejemplo 1.1.8. Consideremos la funcion analítica $f : B_0(1) \to K$ dada por la siguiente serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{X_n} z^n.$$

Si existiese una función analítica $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ sobre $B_0(1)$ tal que $f(z)g(z) = 1$, entonces $b_0 = 1$ y

$$b_n = -\sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{1}{X_{n-i}} \qquad (n \geq 1).$$

Por inducción sobre n, se puede probar directamente que $v(b_n) = v(X_1)^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto la función g no es analítica en $B_0(r)$, pues la sucesión $(b_n)_n$ no converge a 0 si $n \to \infty$.

Teorema 1.1.9 (Principio del Máximo). *Sea f una función analítica en $B_0(r)$ con $r \in \Gamma$ y sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ su desarrollo en series de potencias, entonces existe* $\max\{v(f(z)) :\ v(z) \leq r\}$, *y en ese caso*

$$\max\{v(f(z)) :\ v(z) \leq r\} = \max\{v(f(z)) :\ v(z) = r\} = \max_{n \in \mathbb{N}}\{v(a_n) r^n\} < \infty.$$

Demostración. Supongamos que f es analítica en $B_0(1)$ y consideramos k el cuerpo residual con respecto al subgrupo convexo $\{1\}$ de Γ. Sin perder generalidad suponemos que $\max_n v(a_n) = 1$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0$, proyectando en k se obtiene el polinomio

$$\overline{f}(t) = \sum_{n=0}^{m} \overline{a_n} \overline{t}^n \neq \overline{0}$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. Como este último es un polinomio con coeficientes en k, existe $s \in k$ tal que $s \neq \overline{0}$ y $\overline{f}(s) \neq \overline{0}$ (pues $|k| = \infty$). Considerando $b \in K$ con $\overline{b} = s$, tenemos que

$$v\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n\right) = 1$$

por lo tanto

$$\max\{v(f(z)) :\ v(z) \leq 1\} = \max\{v(f(z)) :\ v(z) = 1\} = 1 \left(= \max_{n \in \mathbb{N}}\{v(a_n)(1)^n\}\right).$$

Para el caso $r \in \Gamma$ arbitrario, podemos aplicar lo anterior para la función $g(z) = f(az)$ con $a \in K$, $v(a) = r$ y $z \in B_0(1)$. $\square$

Corolario 1.1.10 (**Teorema de Liouville**). *Sea f una función entera. Si existe $r \in \Gamma$ tal que $v(f(z)) \leq r$ para todo $z \in K$, entonces f es constante.*

Demostración. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es acotada en todo K, por el Principio del Máximo tenemos que $v(a_n)s^n \leq r$ para todo $s \in \Gamma$, lo que implica que $v(a_n) \leq (s^n)^{-1} r$. Considerando la sucesión $s_m = X_m$, observamos en particular que

$$v(a_n) \leq \lim_{m \to \infty} v(X_m^n)^{-1} r = 0$$

para todo $n \geq 1$. Luego, $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$. □

Puesto que K no es localmente compacto, no hay un teorema de aproximación polinomial para funciones continuas. De hecho el siguiente ejemplo muestra el caso de una función continua en $B_0(\hat{g}_1)$ que no es aproximable uniformemente por polinomios.

Ejemplo 1.1.11. Como en el ejemplo 1.0.6, sea $J = B_0(1^-)$. Pero ahora definimos $f : B_0(\hat{g}_1) \to K$ por

$$f(z) = \begin{cases} n & \text{si } z \in n + J \\ 0 & \text{si no} \end{cases},$$

donde $n \in \mathbb{N}$. Observamos f es localmente constante en $B_0(\hat{g}_1)$ y por tanto es continua. Si $\epsilon < \frac{1}{X_1}$ y existe un polinomio $p(z)$ tal que $v(f(z) - p(z)) < \epsilon$ para todo $z \in B_0(\hat{g}_1)$, tenemos que $f(z) = p(z) + w(z)$ con $v(w(z)) < \epsilon$. Aplicando el Principio del Máximo a $p(z)$, $v(p(z))$ alcanza el máximo en $\{z \in K : v(z) = \gamma_1\}$, pero en este conjunto

$$\begin{aligned} v(p(z)) &= v(f(z) + (p(z) - f(z))) \\ &\leq \max\{v(f(z)), v(p(z) - f(z))\} \\ &\leq \max\{0, v(w(z))\} < \epsilon < 1. \end{aligned}$$

Sin embargo, $v(p(n)) = v(f(n) - w(n)) = v(n - w(n)) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pues $v(w(n)) < \epsilon < 1$.

Una consecuencia importante del Principio del Máximo explica la situación anterior.

Teorema 1.1.12. *Sean $a \in K$ y $r \in \Gamma$. Si $p_n : B_a(r) \to K$ es una sucesión de polinomios en $K[X]$ que es de Cauchy con respecto a $\| \|_\infty$ en $B_a(r)$, entonces p_n converge uniformemente a una función analítica $f : B_a(r) \to K$.*

Demostración. Sea $r \in \Gamma$, sin perder generalidad suponemos que $a = 0$. Sea $\epsilon > 0$ con $\epsilon < r^i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $(p_n(z))_n$ una sucesión de polinomios(en $K[x]$) que es de Cauchy con respecto a $\| \|_\infty$ en $B_0(r)$. Consideremos los siguientes casos:

Si $\{deg(p_n(z)) : n \in \mathbb{N}\}$ es finito, entonces la sucesión de polinomios es de la forma

$$p_n(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i^{(n)} z^i \qquad \left(a_i^{(n)} \in K\right)$$

para algún $m \in \mathbb{N}$. Puesto que (p_n) es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|p_t - p_u\|_\infty < \epsilon^2$ para todo $t, u \geq N$ y para todo $i \in \{0, .., m\}$. Aplicando el Principio del Máximo a $(p_t - p_u)$, observamos que

$$v\left(a_i^{(t)} - a_i^{(u)}\right) r^i \leq \max_{1 \leq i \leq m} v\left(a_i^{(t)} - a_i^{(u)}\right) r^i = \|p_t - p_u\|_\infty < \epsilon^2$$

Por lo tanto, por la elección de ϵ, $v(a_i^{(t)} - a_i^{(u)}) < \epsilon$ para todo $t, u \geq N$ y para todo $i \in \{0, .., m\}$, lo que implica que la sucesión $(a_i^{(n)})_n$ es de Cauchy uniformemte en i y por tanto es convergente en K.

Sea $a_i = \lim_{n\to\infty} a_i^{(n)}$, entonces utilizando argumentos clásicos se puede probar directamente que $(p_n)_n$ converge uniformemente a $p(z) = \sum_{i=0}^{m} a_i z^i$ en $B_0(r)$.

Si $\{deg(p_n(z)) : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, escogemos una subsucesion $(q_n(z))_n$ de $(p_n(z))_n$ con $deg(q_k) < deg(q_{k+1})$, y claramente $(q_n(z))_n$ es una sucesión de Cauchy. Supongamos que

$$q_n(z) = \sum_{i=0}^{M_n} a_i^{(n)} z^i$$

donde $M_n = deg(q_n(z))$. Puesto que $a_i^{(n)} = 0$ si $i \geq M_n$, escribimos

$$q_n(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^{(n)} z^i.$$

Por argumentos similares a los utilizados en el caso anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$v(a_i^{(t)} - a_i^{(u)}) < \epsilon \qquad (t, u \geq N) \qquad\qquad (*)$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto la sucesión $(a_i^{(n)})_n$ es de Cauchy uniformemente en i y por tanto es convergente en K. Sea $a_i = \lim_{n\to\infty} a_i^{(n)}$. Fijando u y haciendo $t \to \infty$ en $(*)$, tenemos que $v(a_i - a_i^{(N)}) < \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Además, $a_i^{(N)} = 0$ si $i > M_N$, lo que implica que

$$v(a_i) = v(a_i - a_i^{(N)}) < \epsilon \qquad (i > M_N).$$

Por lo tanto $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$, y por el Teorema 1.1.2 la función $p(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ está bien definida en $B_0(r)$. Con argumentos clásicos se puede probar que la sucesión $(q_n(z))_n$ converge uniformemente a $p(z)$ en $B_0(r)$. Por otra parte,

$$\|p_n - p\|_\infty \leq \text{máx}\{\|p_n - q_n\|_\infty \|q_n - p\|_\infty\}.$$

Puesto que $(q_n(z))_n$ es una subsucesión de $(p_n(z))_n$ y esta última es de Cauchy uniformemente en $B_0(r)$, entonces $(p_n(z) - q_n(z))_n \to 0$ si $n \to \infty$ uniformemente en $B_0(r)$. Por lo tanto, se concluye que la sucesión de polinomios $p_n(z)$ converge uniformemente a una función analítica $p(z)$. □

Corolario 1.1.13. *Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones analítcas definidas en $B_0(r)$ para algún $r \in \Gamma$. Si $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ uniformemente en $B_0(r)$, entonces f es una función analítica en $B_0(r)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\epsilon > 0$. Existe una sucesión de polinomios $(p_n)_n$ tal que $\|f_n - p_n\|_\infty < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \text{máx}\{\|f - f_n\|_\infty, \|f_n - p_n\|_\infty\}.$$

Por la convergencia de f_n se tiene que $\lim_{n\to\infty} p_n = f$ uniformemente en $B_0(r)$, y el teorema anterior afirma que f es analítica en $B_0(r)$. □

1.2. Los Teoremas clásicos del cálculo en K

Sea $f : K \to K$ una función analítica no constante y $x_0 \in K$. Tenemos que $f(z)$ tiene una expansión en series de potencias en torno a x_0 de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n.$$

Con argumentos clásicos, se prueba que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $x \in K$ existe $m_x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $f^{(m_x)}(x) \neq 0$, de lo contrario, $f(z)$ sería una función constante. Luego, para todo $x \in K$ se tiene que

$$\text{mín}\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \ f^{(n)}(x) \neq 0\}$$

existe.

Proposición 1.2.1. *Sea $f : K \to K$ una función analítica no constante, y sea $x_0 \in K$. Si*

$$m = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \ f^{(n)}(x_0) \neq 0\},$$

entonces x_0 es un extremo relativo si y solo si m es par. En ese caso, x_0 es un máximo si $f^{(m)}(x_0) < 0$, y es un mínimo si $f^{(m)}(x_0) > 0$.

Demostración. Si f es analítica en K, entonces tiene una expansión en torno a x_0 de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (z - x_0)^n \qquad (z \in K).$$

Sea $h \in K$, reemplazando z por $x_0 + h$ en la fórmula anterior tenemos que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f^{(m)}(x_0) h^m}{m!} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n.$$

Probaremos que existe una vecindad de h tal que $f(x_0 + h) - f(x_0)$ y $\dfrac{f^{(m)}(x_0) h^m}{m!}$ tienen el mismo signo en aquella vecindad.

Puesto que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (z - x_0)^n$ converge en K, se tiene que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0$. Por lo tanto, existe $g \in G$ tal que para todo $n \geq m$

$$v\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right) < g,$$

así como $g_1, g_2 \in G$ tales que

$$g_1^{-1} < g \qquad \text{y} \qquad g_2^{-1} < g^{-1} v\left(\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\right).$$

Sea $\delta \in K$ tal que $v(\delta) < \text{mín}\{g_1^{-1}, g_2^{-1}, 1\}$, entonces para todo $h \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ y $n > m$ se tiene que

$$v(h) \leq v(\delta) < \text{mín}\{g_1^{-1}, g_2^{-1}, 1\} \qquad \text{y}$$

$$v\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^{n-m}\right) < g \, \text{mín}\{g_1^{-1}, g_2^{-1}, 1\} \leq v\left(\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}\right),$$

es decir,

$$v\left(\frac{f^{(n)}(x_0)h^n}{n!}\right) < v\left(\frac{f^{(m)}(x_0)h^m}{m!}\right).$$

Luego,

$$v\left(\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n\right) \leq \text{máx}\left\{v\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n\right) : n \geq m+1\right\} < v\left(\frac{f^{(m)}(x_0)h^m}{m!}\right),$$

lo que implica que

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n\right| < \frac{|f^{(m)}(x_0)||h|^m}{m!}.$$

Por propiedades del valor absoluto, concluímos que en la expresión

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{f^{(m)}(x_0)h^m}{m!} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n,$$

$f(x_0+h) - f(x_0)$ y $\dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}h^m$ tienen el mismo signo.

Ahora bien, x_0 es extremo relativo de f si y sólo si el signo de $f(x_0+h) - f(x_0)$ es el mismo para todo $h \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$. Esto se cumple si y sólo si m es par, de lo contrario h^m sería negativo si $h < 0$ y positivo si $h > 0$. Luego x_0 es máximo relativo (resp. mínimo relativo) si y sólo si m es par y $f^{(m)}(x_0) < 0$ (resp. $f^{(m)}(x_0) > 0$).

□

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.2.2. *Si x_0 es extremo relativo de f entonces $f'(x_0) = 0$.*

Teorema 1.2.3 (**Extremos absolutos**). *Sean $a, b \in K$ con $a < b$ y $f[a,b] :\to K$ una función analítica, entonces $f(z)$ alcanza su máximo y mínimo absoluto en $[a,b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f(z)$ es una función analítica no constante. Si $f(z)$ no tiene extremos relativos en (a,b), entonces el máximo de $f(z)$ en $[a,b]$ es $\text{máx}\{f(a), f(b)\}$ y su mínimo en $[a,b]$ es $\text{mín}\{f(a), f(b)\}$. Luego, el teorema es cierto en este caso.

Supongamos ahora que

$$A := \{x \in [a,b] : x \text{ es extremo relativo de } f(z)\} \neq \emptyset.$$

Por el corolario anterior, si $x_0 \in A$ entonces x_0 es un cero de $f'(z)$. Pero $f'(z)$ es una función analítica, y por el teorema 1.1.7, el conjunto de ceros de f' en $[a,b]$ es finito, luego $|A| < \infty$.

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los elementos de A, entonces el máximo de $f(z)$ en $[a,b]$ es

$$\text{máx}\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$$

y su mínimo en $[a,b]$ es

$$\text{mín}\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)\}.$$

□

Corolario 1.2.4 (**Teorema de Rolle**). *Sean $a, b \in K$ con $a < b$ y $f[a,b] :\to K$ una función analítica no constante. Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Puesto que $f(z)$ no es constante, entonces por el Corolario anterior $f(z)$ alcanza su máximo y mínimo absoluto en $[a,b]$. Pero $f(a)=f(b)$, entonces existe $c\in(a,b)$ que es extremo relativo de f, es decir, $f'(c)=0$. $\square$

Corolario 1.2.5 (**Teorema del valor medio**). *Sean $a,b\in K$ con $a<b$ y $f[a,b]:\to K$ una función analítica no constante. Luego, existe $c\in(a,b)$ tal que*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demostración. Definimos la función $g:K\to K$ por

$$g(z)=f(z)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(z-a) \qquad (z\in K).$$

Observamos que $g(z)$ es analítica y que $g(a)=g(b)$, entonces por el Teorema de Rolle existe $c\in(a,b)$ tal que

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=g'(c)=0,$$

es decir,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$\square$

Corolario 1.2.6. *Sea $f:[a,b]\to K$ una función analítica.*

1. *Si $f'(z)>0$ para todo $z\in(a,b)$ entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$.*
2. *Si $f'(z)<0$ para todo $z\in(a,b)$ entonces f es estrictamente decreciente en $[a,b]$.*

Demostración. Es directo usando el Teorema del valor medio. $\square$

Observación 1.2.7. Sin embargo, dado el ejemplo 1.0.6, observamos que el teorema del valor intermedio no se cumple para el caso de funciones analíticas.

Capítulo 2

Funciones C^n

En [**3**], Schikhof muestra que el concepto usual de funciones continuamente diferenciables no es suficiente para establecer el teorema de la función inversa o resultados sobre antiderivación en el cálculo ultramétrico de rango 1. Pero si se puede construir esta teoría al definir funciones C^n.

La pregunta quedó abierta en el caso de K, ya que su grupo de valores es de rango infinito. En este capítulo mostraremos que la teoría se extiende a nuestro caso y permite responder afirmativamente a las siguientes preguntas:

1. ¿Es posible formular un teorema de la función implícita?.
2. ¿Es posible formular un teorema de la función inversa para funciones C^n?.
3. Dada una función $f \in C(X \to K)$, ¿existe una función $g \in C^1(X \to K)$ tal que $g' = f$?.
4. Dada una función $f \in C^{n-1}(X \to K)$, ¿existe una función $g \in C^n(X \to K)$ tal que $g' = f$?.

El capítulo se divide en las siguientes partes:

A. Funciones C^1: nociones generales, Teorema de la función inversa e implícita y antiderivación $C \to C^1$(secciones 2.1 a 2.3).
B. Funciones C^n que incluyen: Formulación de lemas básicos necesarios, Fórmula de Taylor, Antiderivación $C^{n-1} \to C^n$, Invertibilidad local de funciones C^n(secciones 2.4 y 2.5).

2.1. Funciones continuamente diferenciables

En lo que sigue de este capítulo, X es un subconjunto no vacío de K sin puntos aislados. Recordemos que el grupo de valores de la valuación lo denotamos por Γ, y que

$$\hat{g}_n := v(X_n).$$

Además, el conjunto de las funciones $f : X \to K$ que son continuas en X lo denotamos por $C(X \to K)$.

Anteriormente probamos que la función

$$f(z) = \begin{cases} z - \frac{1}{X_{2n}} & \text{si } z \in B_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}. \\ z & \text{en otro caso.} \end{cases},$$

donde

$$B_n = \left\{ z \in K : v\left(z - \frac{1}{X_n}\right) < \hat{g}_{2n}^{-1} \right\} \qquad (n > 1),$$

es diferenciable con derivada continua no nula. Sin embargo, f no es inyectiva en ninguna vecindad de 0, y por tanto no existe una inversa local en $f(0)$. Por tanto, la definición usual de funciones continuamente diferenciables no asegura el teorema de la función inversa. Daremos a continuación una nueva definición de ellas.

Para una función $f : X \to K$, definimos la función $\Phi_1 f$ de dos variables como

$$\Phi_1 f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \qquad (x, y \in X,\ x \neq y).$$

Definición 2.1.1. Diremos que una función f es **continuamente diferenciable** en $a \in X$ o C^1 en a si

1. Es diferenciable en a.
2. Si para todo $\epsilon \in \Gamma$ existe $\delta \in \Gamma$ tal que si $v(x - a) < \delta$, $v(y - a) < \delta$ y $x \neq y$ entonces

$$v\left(\Phi_1 f(x, y) - f'(a)\right) < \epsilon.$$

f es **continuamente diferenciable** en X si lo es para cada $a \in X$. Diremos que f es C^1 en X ó $f \in C^1(X \to K)$.

En el caso del análisis real, como consecuencia del teorema del valor medio, esta definición es equivalente a la definición clásica.

Proposición 2.1.2. *Sea $f : X \to K$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f es continuamente diferenciable en X.*
2. *La función $\Phi_1 f$ puede extenderse de manera única a una función continua $\overline{\Phi}_1 f$ sobre $X \times X$.*
3. *Existe una función continua $R : X \times X \to K$ tal que*

$$f(x) = f(y) + (x - y)R(x, y) \qquad (x, y \in X).$$

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Podemos definir $\overline{\Phi}_1 f(x, y) = \Phi_1 f(x, y)$ si $x \neq y$ y $\overline{\Phi}_1 f(x, x) = f'(x)$. Se puede verificar directamente que $\overline{\Phi}_1 f$ es continua sobre $X \times X$. La continuidad de $\overline{\Phi}_1 f$ verifica la unicidad de esta función, y por tanto es la única extensión continua.
$2 \Rightarrow 3$. Basta con considerar $R(x, y) = \overline{\Phi}_1 f(x, y)$ con $x, y \in X$.
$3 \Rightarrow 1$. Es directo por la continuidad de $R(x, y)$ en $X \times X$. □

Podemos entonces establecer un teorema de función inversa en este marco, en forma similar al obtenido en [**3**] para cuerpos con valuación de rango 1. Sin embargo, nuestra demostración difiere fundamentalmente de esta, ya que el cuerpo K no es henseliano.

Teorema 2.1.3 (Invertibilidad local para funciones C^1). *Sea $f : X \to K$ una función definida en alguna vecindad de $a \in X$. Si f es C^1 en a y $f'(a) \neq 0$, entonces para algún $r \in \Gamma$ suficientemente pequeño la restricción $f : B_a(r) \to B_{f(a)}(v(f(a))r)$ de f a $B_a(r)$ es inyectiva y sobre. La inversa local g de f*

$$g : B_{f(a)}(v(f(a))r) \to B_a(r)$$

es C^1 en $f(a)$ y $g'(f(a)) = f'(a)^{-1}$.

Demostración. Como f es C^1 en a, para alguna bola $B_a(r)$ se tiene que

$$\sup\left\{ v\left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(a)\right) : x, y \in B_a(r),\, x \neq y \right\} < v(X_1^{-1} f'(a)).$$

Claramente f es inyectiva en $B_a(r)$ y que además $f(B_a(r)) \subseteq B_{f(a)}(v(f'(a))r)$. Por otro lado, sea $c \in B_{f(a)}(v(s)r)$ donde $s = f'(a)$, entonces debemos probar que la función $x \mapsto f(x) - c$ tiene un cero en $B_a(r)$. Definimos la función h por $h(z) = z - s^{-1}(f(z) - c)$ y claramente se tiene que $h(B_a(r)) \subseteq B_a(r)$. Sea $x, y \in B_a(r)$, entonces

$$\begin{aligned} v(h(x) - h(y)) &= v(x - y - s^{-1}(f(x) - f(y))) \\ &= v(s^{-1}(x - y))\ v\left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - s\right) \\ &< v(X_1^{-1}(x - y)). \end{aligned}$$

Luego, $|h(x) - h(y)| < |X_1^{-1}(x - y)|$ para todo $x, y \in B_a(r)$, lo que implica que

$$\phi(|h(x) - h(y)|) \leq \phi(|X_1^{-1}(x - y)|) \leq \phi(|X_1^{-1}|)\phi(|x - y|)$$

y por tanto $d(h(x), h(y)) \leq \frac{1}{2}d(x, y)$. Puesto que las topologías generadas por d, $|\ |$ y $v(\ )$ son iguales, aplicamos el teorema del punto fijo de Banach a h y obtenemos que esta última función tiene un único punto fijo en $B_a(r)$. Se concluye que $f : B_a(r) \to B_{f(a)}(v(f(a))r)$ es sobre.

Utilizando la desigualdad triangular fuerte observamos que

$$v(f(x) - f(y)) = v(f'(a))v(x - y).$$

Luego, la función $g : B_{f(a)}(v(f(a))r) \to B_a(r)$ es un múltiplo de una isometría y por tanto es continua. Sea $z, t \in B_{f(a)}(v(f(a))r)$, entonces

$$\Phi_1 g(z, t) = (\Phi_1 f(g(z), g(t)))^{-1}$$

y $g'(f(a)) = \lim_{(z,t)\to(f(a),f(a))} \Phi_1 g(z, t) = \lim_{(u,v)\to(a,a)} (\Phi_1 f(u, v))^{-1} = f'(a)^{-1}$ obteniendose la afirmación.

□

2.2. Antiderivación $C \to C^1$.

Recordemos que X es un subconjunto no vacío de K sin puntos aislados. Probaremos que toda función $f \in C(X \to K)$ tiene una antiderivada $F \in C^1(X \to K)$. Comenzamos con algunas definiciones previas.

Recordemos que para $g \in \Gamma$ y $s \in \Gamma^{\#}$,

$$g \cdot s = \sup_{\Gamma^{\#}}\{gr : r \in G,\ r \leq s\}.$$

Una **aproximación de la identidad** sobre X es una sucesión $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ de aplicaciones $X \to X$ tales que σ_0 es constante, $\sigma_m \circ \sigma_n = \sigma_n \circ \sigma_m = \sigma_n$ si $m \geq n$, y tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in X$

$$v(x - y) < \hat{g}_n^{-1} \text{ implica } \sigma_n(x) = \sigma_n(y),$$

$$v(\sigma_n(x) - x) < \hat{g}_n.$$

Definición 2.2.1. Sea $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ una aproximación de la identidad sobre X. Para una función continua $f : X \to K$ definimos

$$(Pf)(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

donde $x_n = \sigma_n(x)$, $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.2.2. Pf está bien definida. En efecto, de la condición $v(\sigma_n(x)-x) < \hat{g}_n^{-1}$ concluimos que la sucesión x_n converge a x. Puesto que f es continua, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)(x_{n+1}-x_n) = 0$$

en la topología de K, obteniendose la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n)(x_{n+1}-x_n)$.

Lema 2.2.3. *La función P de la definición 2.2.1 satisface las siguientes propiedades:*

1. *P es una aplicación lineal $C(X \to K) \to C^1(X \to K)$,*
2. *$(Pf)' = f$ para toda $f \in C(X \to K)$,*
3. *Si $f \in C(X \to K)$ es acotada, entonces $\|\Phi_1(Pf)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.*

Demostración. Sea $a \in X$ y $\epsilon \in \Gamma$. Como f es continua, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $v(f(x)-f(a)) < \epsilon$ si $v(x-a) < \hat{g}_m^{-1}$. Sean $x, y \in X$ tales que $\max\{v(x-a), v(y-a)\} \leq \hat{g}_m^{-1}$. Para probar 1 y 2, es suficiente establecer que

$$v(\Phi_1(Pf)(x,y) - f(a)) < \epsilon.$$

Puesto que $\max\{v(x-a), v(y-a)\} \leq \hat{g}_m^{-1}$, existe un único $s \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{g}_{s+1}^{-1} \leq v(x-y) \leq \hat{g}_s^{-1}$ con $s \geq m$. Luego, de la definición de aproximación de la identidad tenemos que

$$x_i = y_i \text{ si } 0 \leq i \leq s \text{ y,}$$

$$x_{s+1} \neq y_{s+1}.$$

Por otra parte, tomando la función constante $h(x) := f(a)$

$$(Ph)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} h(x)(x_{n+1}-x_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(a)(x_{n+1}-x_n).$$

Cada suma parcial S_k de la serie anterior es igual a $f(a)(x_{k+1}-x)$, pero tenemos que se cumple la condición $v(\sigma_n(x)-x) < \hat{g}_n^{-1}$, lo que implica que $(Ph)(x) = f(a)(x-x_0)$. Luego,

$$Pf(x) - Pf(y) - (x-y)f(a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)(x_{n+1}-x_n) - \sum_{n\in\mathbb{N}} f(y_n)(y_{n+1}-y_n) - (x-y+x_0-x_0)f(a)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)(x_{n+1}-x_n) - \sum_{n\in\mathbb{N}} f(y_n)(y_{n+1}-y_n) - (x-x_0)f(a) + (y-x_0)f(a)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)(x_{n+1}-x_n) - \sum_{n\in\mathbb{N}} f(y_n)(y_{n+1}-y_n) - (x-x_0)f(a) + (y-y_0)f(a)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)(x_{n+1}-x_n) - \sum_{n\in\mathbb{N}} f(y_n)(y_{n+1}-y_n) - \sum_{n\in\mathbb{N}} f(a)(x_{n+1}-x_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} f(a)(y_{n+1}-y_n)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} (f(x_n)-f(a))(x_{n+1}-x_n) - \sum_{n\in\mathbb{N}} (f(y_n)-f(a))(y_{n+1}-y_n)$$

$$= (f(x_s)-f(a))(x_{s+1}-x_s) - (f(y_s)-f(a))(y_{s+1}-y_s) + \sum_{n>s} (f(x_n)-f(a))(x_{n+1}-x_n) - \sum_{n>s} (f(y_n)-f(a))(y_{n+1}-y_n)$$

$$= (f(x_s)-f(a))(x_{s+1}-x_s) - (f(x_s)-f(a))(y_{s+1}-x_s) + \sum_{n>s} (f(x_n)-f(a))(x_{n+1}-x_n) - \sum_{n>s} (f(y_n)-f(a))(y_{n+1}-y_n)$$

$$= (f(x_s)-f(a))(x_{s+1}-y_{s+1}) + \sum_{n>s} (f(x_n)-f(a))(x_{n+1}-x_n) - \sum_{n>s} (f(y_n)-f(a))(y_{n+1}-y_n).$$

Observamos que,

$$v(x_n - a) \leq \text{máx}\{v(x_n - x), v(x - a)\} \leq \hat{g_n}^{-1}$$

si $n \geq s$, y por la continuidad de f tenemos que $v(f(x_n) - f(a)) \leq \epsilon$ si $n \geq s$, de la misma forma se prueba que $v(f(y_n) - f(a)) \leq \epsilon$ si $n \geq s$.

Por otra parte,

$$v(x_{s+1} - y_{s+1}) \leq \text{máx}\{v(x_{s+1} - x), v(x - y), v(y - y_{s+1})\} \leq \text{máx}\{\hat{g}_{s+1}^{-1}, v(x - y)\} = v(x - y),$$

y para $n > s$ tenemos que

$$v(x_{n+1} - x_n) \leq \text{máx}\{v(x_{n+1} - x), v(x_n - x)\} \leq \hat{g}_n^{-1} \leq \hat{g}_{s+1}^{-1} \leq v(x - y).$$

Por lo tanto,

$$v((Pf)(x) - (Pf)(y) - (x - y)f(a)) \leq \epsilon\, v(x - y),$$

lo que implica que $Pf \in C^1(X \to K)$. Esto concluye la demostración de las dos primeras afirmaciones del lema.

Para demostrar la tercera, consideramos $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces

$$(Pf)(x) - (Pf)(y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(x_n)(x_{n+1} - x_n) - \sum_{n \in \mathbb{N}} f(y_n)(y_{n+1} - y_n).$$

De forma similar a la parte anterior, se prueba que $v(x_{n+1} - x_n)$ y $v(y_{n+1} - y_n)$ están acotados superiormente por $v(x - y)$, lo que implica que

$$v((Pf)(x) - (Pf)(y)) \leq v(x - y) \cdot \|f\|_\infty.$$

$\square$

Destacamos que como corolario se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 2.2.4 (Antiderivación $C \to C^1$). *Toda función $f \in C(X \to K)$ tiene una antiderivada $F \in C^1(X \to K)$.*

Demostración. La demostración es directa. $\square$

2.3. El teorema de la función implícita

Comenzamos esta sección con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3.1. Recordemos que en el ejemplo 1.0.8, probamos que la función $f : K \to K$ definida por

$$f(z) = \begin{cases} z - \frac{1}{X_{2n}} & \text{si } z \in B_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \\ z & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde

$$B_n = \left\{ z \in K : v\left(z - \frac{1}{X_n}\right) < \hat{g}_{2n}^{-1} \right\},$$

es una función diferenciable, con derivada no nula pero que no es inyectiva en ninguna vecindad del cero.

Consideramos ahora $F : K \times K \to K$ definida por $F(x, y) = f(y) - x$. Es inmediato que se cumplen:

1. $F(0, 0) = 0$,
2. $F_x(x, y) = -1$ y $F_y(x, y) = 1$ son continuas en $K \times K$,
3. $F_y(0, 0) = 1 \neq 0$.

Supongamos que existen vecindades U, V de 0, y una aplicación $h : U \to V$ tales que

$$\{(x, y) \in U \times V : F(x, y) = 0\} = \{(x, h(x)) : x \in U\}.$$

Ahora al tomar, con n suficientemente grande, $x = \frac{1}{X_n} - \frac{1}{X_{2n}} \in U$, $y_1 = \frac{1}{X_n}$, e $y_2 = \frac{1}{X_n} - \frac{1}{X_{2n}} \in V$, se tiene que

$$x = \frac{1}{X_n} - \frac{1}{X_{2n}} = f(y_1) = f\left(\frac{1}{X_n}\right) = f\left(\frac{1}{X_n} - \frac{1}{X_{2n}}\right) = f(y_2).$$

Entonces $F(x, y_1) = F(x, y_2) = 0$ lo que implica que la aplicación h no es función. De este modo, el teorema de la función implícita no se cumple en K en su forma clásica.

Las dificultades desaparecen si exigimos condiciones adicionales. Necesitaremos dos resultados previos.

Lema 2.3.2. *Sea $X \subset K$ sin puntos aislados y sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones C^1 en X. Supongamos que $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe puntualmente en X y que $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_1 f_n$ existe uniformemente en $X \times X \setminus \Delta$. Entonces $f \in C^1(X \to K)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\Phi}_1 f_n = \overline{\Phi}_1 f$ uniformemente en $X \times X$.*

Demostración. Sea $a \in X$, primero probaremos que f es C^1 en a. Sea $\epsilon \in \Gamma$ y sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Observamos que

$$\begin{aligned} v(f'_{n+1}(a) - f'_n(a)) \leq \text{máx}\Bigg\{& v\left(f'_{n+1}(a) - \frac{f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)}{x - y}\right), v\left(\frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} - f'_n(a)\right), \\ & v\left(\frac{f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)}{x - y} - \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}\right)\Bigg\}. \end{aligned}$$

Puesto que $(\Phi_1 f_n)_n$ converge uniformemente en $X \times X \setminus \Delta$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$\sup_{\Gamma^\#}\left\{v\left(\frac{f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y)}{x - y} - \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}\right) : x, y \in X,\ x \neq y\right\} < \epsilon.$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n_0$. Recordemos que $f_n \in C^1(X \to K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en particular para todo $n \geq n_0$. Entonces existe una vecindad V_m de a tal que para todo $x, y \in V_m$

$$\sup_{\Gamma^\#}\left\{v\left(f'_{m+1}(a) - \frac{f_{m+1}(x) - f_{m+1}(y)}{x - y}\right), v\left(\frac{f_m(x) - f_m(y)}{x - y} - f'_m(a)\right)\right\} < \epsilon.$$

Luego, si $x, y \in V_m$ con $x \neq y$ entonces

$$\begin{aligned} v(f'_{m+1}(a) - f'_m(a)) \leq \text{máx}\Bigg\{& v\left(f'_{m+1}(a) - \frac{f_{m+1}(x) - f_{m+1}(y)}{x - y}\right), v\left(\frac{f_m(x) - f_m(y)}{x - y} - f'_m(a)\right), \\ & v\left(\frac{f_{m+1}(x) - f_{m+1}(y)}{x - y} - \frac{f_m(x) - f_m(y)}{x - y}\right)\Bigg\} \\ < \epsilon.& \end{aligned}$$

Como $n \geq n_0$ es arbitrario, obtenemos que $(f'_n(a))_n$ es una sucesión de Cauchy en K. Pero la existencia de n_0 es independiente de $a \in X$, pues solo depende de la convergencia uniforme de $(\Phi_1 f_n)_n$ en $X \times X \setminus \Delta$. Por lo tanto, $(f'_n)_n$ converge uniformemente en K.

Sea $m_a = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(a)$, si $x, y \in V_m$ con $x \neq y$ entonces

$$v\left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - m_a\right) \leq \text{máx}\left\{v\left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y}\right), v\left(f'_n(a) - m_a\right),\right.$$

$$v\left(\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}-f_n'(a)\right)\Bigg\}.$$

Por argumentos similares a los utilizados en la parte anterior, se prueba que f es C^1 en a y $f'(a)=m_a$.

Para la segunda afirmación, solo basta verificar que la sucesión $(f_n')_n$ converge uniformemente en X, pero esto último está dado en la primera parte de la demostración. Por lo tanto, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\Phi}_1 f_n=\overline{\Phi}_1 f$ uniformemente en $X\times X$. □

El lema anterior nos permite construir un espacio métrico completo.

Sea $f\in C^1(X\to K)$ y supongamos que $\|f\|_\infty$ y $\|\Phi_1 f\|_\infty$ existen. Definimos $\|f\|_1=\text{máx}\{\|f\|_\infty,\|\Phi_1 f\|_\infty\}$ y

$$BC^1(X\to K):=\{f\in C^1(X\to K):\ \|f\|_1\,\text{existe}\}.$$

Este es un espacio normado sobre K (en el sentido de [**5**]) y $\|f\|_1$ es no arquimediana con valores en $\Gamma^\#$. La topología dada por la norma se denotará por $\tau(B)$, y sus entornos basales tienen la forma

$$A_f(q^-)=\{g\in BC^1(X\to K):\ \|g-f\|_1<q\}.$$

para cada $f\in BC^1(X\to K)$ y $q\in\Gamma^\#$.

Por otra parte definimos una (ultra)métrica d_1 en $BC^1(X\to K)$ utilizando para ello la ultramétrica $d:K\to\mathbb{R}^+$ (ver Preliminares). Recordamos que el conjunto de valores de d es discreto, por lo que hablamos de máximos en vez de supremos. En forma precisa, tenemos:

$$d_1:\ BC^1(X\to K)\times BC^1(X\to K)\to\mathbb{R}^+$$

$$d_1(f,g):=\text{máx}\left\{\text{máx}_{x\in X}\{d(f(x),g(x))\},\ \text{máx}_{(x,y)\in X\times X\setminus\Delta}\{d(\Phi_1 f(x,y),\Phi_1 g(x,y))\}\right\},$$

Es una verificación directa que d_1 es una ultramétrica en $BC^1(X\to K)$; por tanto induce una topología en este conjunto.

Sea $B_f(n)=\{g\in BC^1(X\to K):\ \text{máx}_{x\in X}\,d(f(x),g(x))<\frac{1}{2^n}\}$ y $B_{\Phi_1 f}(n)=\{g\in BC^1(X\to K):\ \text{máx}_{x\in X}\,d(\Phi_1 f,\Phi_1 g)<\frac{1}{2^n}\}$ y recordemos que para todo $a\in K$ y $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\{z\in K:\ d(z,a)<\frac{1}{2^n}\}\subset\{z\in K:\ v(z-a)<\hat{g}_n^{-1}\}\subset\{z\in K:\ d(z,a)<\frac{1}{2^{n-1}}\}.$$

De aquí se derivan las siguientes inclusiones para todo $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$B_f(n)\subset\{g\in BC^1(X\to K):\ \|f-g\|_\infty<\hat{g}_n^{-1}\}\subset B_f(n-1),$$

$$B_{\Phi_1 f}(n)\subset\{g\in BC^1(X\to K):\ \|\Phi_1 f-\Phi_1 g\|_\infty<\hat{g}_n^{-1}\}\subset B_{\Phi_1 f}(n-1).$$

Luego para todo f,g en $BC^1(X\to K)$, si $d_1(f,g)<\frac{1}{2^n}$ entonces $\|f-g\|_1<\hat{g}_n^{-1}$ lo que a su vez implica que $d_1(f,g)<\frac{1}{2^{n-1}}$.

Por lo tanto, las topologías inducidas por $\|\ \|_1$ y d_1 en $BC^1(X\to K)$ son iguales.

La ultramétrica d_1 genera una uniformidad en $BC^1(X\to K)$ de la siguiente manera: para cada $s\in\mathbb{R}^+$ consideramos los conjuntos

$$V_s=\{(f,g):\ f,g\in BC^1(X\to K),\ d_1(f,g)<s\}.$$

Se puede probar directamente que el conjunto $\{V_s:\ s\in\mathbb{R}^+\}$ es una base para una uniformidad U_{d_1} en $BC^1(X\to K)$.

Por otra parte, para cada $r \in \Gamma^{\#}$ consideramos los conjuntos

$$S_r = \{(f,g) : \; f,g \in BC^1(X \to K), \; \|f-g\|_1 < r\}.$$

Se satisface las siguientes propiedades:

1. $(S_r)^{-1} = \{(g,f) : (f,g) \in S_r\} = S_r$,
2. $S_r \cap S_t = S_k$, donde $k = \text{mín}\{s,t\}$,
3. $S_r \circ S_r = \{(f,h) : \text{ existe } g \in BC^1(X \to K) \text{ tal que } (f,g),(g,h) \in S_r\} = S_r$.

Por lo tanto, $\{S_r : r \in \Gamma^{\#}\}$ es una base para una uniformidad $U_{\| \|_1}$. Dada la relación que existe entre las bolas abierta generadas por d_1 y $\| \|_1$, se tiene que $V_{\frac{1}{2^n}} \subset S_{\hat{g}_n^{-1}} \subset V_{\frac{1}{2^{n-1}}}$. Entonces, los conjuntos $\{V_s : s \in \mathbb{R}^+\}$ y $\{S_r : r \in \Gamma^{\#}\}$ son bases para una misma uniformidad, es decir, $U_{d_1} = U_{\| \|_1}$. Esta uniformidad en común la denotamos por $\mathcal{U}$.

El espacio uniforme $(BC^1(X \to K),\mathcal{U})$ es ultrametrizable, entonces este es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge en $BC^1(X \to K)$. Por lo tanto, si $\mathcal{B}$ es una base de $\mathcal{U}$, entonces una sucesión f_n es de Cauchy si y sólo si para todo miembro U de $\mathcal{B}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m,n \geq n_0$ implica $(a_m,a_n) \in U$. Luego, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(BC^1(X \to K),\mathcal{U})$.
2. Para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m,n \geq n_0$ entonces $d_1(a_m,a_n) < \epsilon$.
3. Para todo $\epsilon \in \Gamma^{\#}$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $m,n \geq n_1$ entonces $\|a_m - a_n\|_1 < \epsilon$.

Lema 2.3.3. $(BC^1(X \to K), d_1)$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $(BC^1(X \to K), d_1)$.

Dada la relación entre $\| \|_1$ y d_1 establecida anteriormente, basta probar que $(f_n)_n$ converge en $(BC^1(X \to K), \| \|_1)$.

Sea $\epsilon \in \Gamma^{\#}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k,n \geq m$,

$$\text{máx}\{\|\Phi_1 f_k - \Phi_1 f_n\|_\infty, \|f_k - f_n\|_\infty\} < \epsilon.$$

Para cada $x \in K$ observamos que $v(f_k(x) - f_n(x)) \leq \|f_k - f_n\|_\infty < \epsilon$, entonces cada sucesión $(f_n(x))_n$ es de Cauchy y por lo tanto converge en K.

Definimos la función $f : X \to K$ como $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Probaremos que f_n converge uniformemente a f en X. Puesto que,

$$\text{máx}\{\|\Phi_1 f_k - \Phi_1 f_n\|_\infty, \|f_k - f_n\|_\infty\} < \epsilon \qquad (k,n \geq m),$$

entonces para todo $x \in K$

$$v(f_k(x) - f_n(x)) < \epsilon \qquad (k,n \geq m).$$

Si $k \to \infty$ en el lado izquierdo de la expresión anterior, para todo $x \in K$ se tiene que

$$v(f(x) - f_n(x)) < \epsilon \qquad (n \geq m).$$

Por lo tanto, $\|f - f_n\|_\infty < \epsilon$ para todo $n \geq m$.

Ahora, si $(x,y) \in X \times X \setminus \Delta$,

$$\Phi_1 f(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} = \lim_{n\to\infty} \Phi_1 f_n(x,y).$$

Pero, para todo $n,k \geq m$

$$\sup_{\Gamma^{\#}} \{v\left(\Phi_1 f_k(x,y) - \Phi_1 f_n(x,y)\right) : x,y \in X, \; x \neq y\} \leq \|f_k - f_n\|_1 < \epsilon.$$

Entonces, procediendo de la misma forma que en el caso de f, si $k \to \infty$ tenemos que $\|\Phi_1 f - \Phi_1 f_n\|_\infty < \epsilon$ para todo $n \geq m$ en $X \times X \setminus \Delta$.

Luego, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ uniformemente en X y $\lim_{n\to\infty} \Phi_1 f_n(x,y)$ existe uniformemente en $X \times X \setminus \Delta$, por el Lema anterior se obtiene que $f \in C^1(X \to K)$ y $\lim_{n\to\infty} \overline{\Phi}_1 f_n = \overline{\Phi}_1 f$ uniformemente en $X \times X$. Por lo tanto, f_n converge a f en $(BC^1(X \to, K), \|\ \|_1)$.

Por otro lado, considerando $m \in \mathbb{N}$ de la parte anterior,

$$\begin{aligned} v(f(x)) &= v(f_m(x) + f(x) - f_m(x)) \\ &\leq \text{máx}\{v(f_m(x)), v(f(x) - f_m(x)))\} \\ &\leq \text{máx}\{v(f_m(x)), \|f - f_m\|_\infty\} \\ &\leq \text{máx}\{\|f_m\|_\infty, \epsilon\}. \end{aligned}$$

Puesto que $f_m \in BC^1(X \to K)$, tenemos que $\|f\|_\infty < \infty$. En forma similar se prueba que $\|\Phi_1 f\|_\infty < \infty$. Por lo tanto, $f \in BC^1(X \to K)$. □

Corolario 2.3.4. *Si C es un subconjunto cerrado de K, entonces $(BC^1(X \to C), d_1)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $BC^1(X \to C)$. Por la proposición anterior, $BC^1(X \to K)$ es completo con la métrica d_1. Observamos que $BC^1(X \to C) \subset BC^1(X \to K)$, entonces existe una función $f \in BC^1(X \to K)$ tal que f_n converge a f en $(BC^1(X \to K), d_1)$. Debemos probar que $f \in BC^1(X \to C)$.

Puesto que $f \in BC^1(X \to K)$, tenemos que f es C^1 en X y $\|f\|_1 < \infty$, entonces solo debemos verificar que $f(X) \subset C$. Pero, $(f_n(x))_n$ es una sucesión en C para cada $x \in B_{x_0}(r)$, y como C es cerrado en K, se tiene que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in C$. □

Enunciamos ahora el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.3.5 (Teorema de la Función Implícita). *Sea $F : K^2 \to K$ una función continua y $(x_0, y_0) \in K^2$. Supongamos que*

1. *$F(x_0, y_0) = 0$,*
2. *la función G definida por*

$$G(x, y, y') = \frac{F(x, y) - F(x, y')}{y - y'}$$

   se extiende a una función continua $\overline{G} : K^3 \to K$,
3. *la función H definida por*

$$H(x, x', y) = \frac{F(x, y) - F(x', y)}{x - x'}$$

   se extiende a una función continua $\overline{H} : K^3 \to K$,
4. *$F_y(x_0, y_0) \neq 0$.*

Entonces existen vecindades U y V de x_0 e y_0 respectivamente, y una única función $\psi \in C^1(U \to V)$ tal que $F(x, \psi(x)) = 0$ para todo $x \in U$.

Demostración. La prueba del teorema tiene tres partes. En la primera se escoge apropiadamente valores de r y δ para que $B_{x_0}(r)$ sea eventualmente el entorno U y $B_{y_0}(\delta)$ el entorno V. Luego en el espacio métrico completo $(BC^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta)), d_1)$ se elige una función h, se prueba que está bien definida, y que es una contracción. El teorema del punto fijo de Banach permite completar la prueba.

Sea $s = F_y(x_0, y_0)$. Observamos que el límite de $G(x_0, y_0, y)$ cuando $y \to y_0$ es $\overline{G}(x_0, y_0, y_0) = F_y(x_0, y_0)$.

Puesto que $\overline{G}$ es continua en K^3 y $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, existe $\delta \in \Gamma$ tal que si $x \in B_{x_0}(\delta)$, $y, y' \in B_{y_0}(\delta)$ con $y \neq y'$, entonces

$$v\left(\frac{F(x,y) - F(x,y')}{y - y'} - s\right) < \hat{g}_1^{-1} v(s).$$

Por la desigualdad triangular fuerte observamos que

$$v(F(x,y) - F(x,y')) = v(s)v(y - y')$$

si $y, y' \in B_{y_0}(\delta)$, $x \in B_{x_0}(\delta)$. Del mismo modo, usando la continuidad de $\overline{H}$ en K^3, se puede probar que existe $\delta_1 \in \Gamma$ tal que si $x, x' \in B_{x_0}(\delta_1)$, $y \in B_{y_0}(\delta_1)$ entonces

$$v(F(x,y) - F(x',y)) = v(s)v(x - x').$$

Por otro lado, $F(x,y)$ es continua en (x_0, y_0) y $F(x_0, y_0) = 0$, entonces existe $\delta_2 \in \Gamma$ tal que $v(F(x, y_0)) \leq s \cdot \delta$ si $x \in B_{x_0}(\delta_2)$.

Sea $r = \text{mín}\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$ y consideramos el conjunto

$$BC^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta)) := \{f \in C^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta)) : \text{máx}\{\|f\|_\infty, \|\Phi_1 f\|_\infty\} < \infty\}.$$

Recordemos que $B_{y_0}(\delta)$ es un subconjunto cerrado de K, entonces por el corolario 2.3.4 se tiene que $(BC^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta)), d_1)$ es un espacio métrico completo.

Para $f \in BC^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta))$, definimos la función

$$h : BC^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta)) \to BC^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta))$$

como

$$(h(f))(x) := f(x) - s^{-1}F(x, f(x)).$$

Probaremos que h está bien definida. Si $x \in B_{x_0}(r)$, entonces

$$\begin{aligned} v((h(f))(x) - y_0) &= v(f(x) - s^{-1}F(x, f(x)) - s^{-1}F(x, y_0) + s^{-1}F(x, y_0) - y_0) \\ &\leq \text{máx}\{v(f(x) - y_0), v(s^{-1})v(F(x, f(x)) - F(x, y_0)), v(s^{-1}F(x, y_0))\}. \end{aligned}$$

Puesto que $v(F(x,y) - F(x,y')) = v(s)v(y - y')$ si $y, y' \in B_{y_0}(\delta)$, $x \in B_{x_0}(r)$, tenemos que

$$v(s^{-1})v(F(x, f(x)) - F(x, y_0)) = v(f(x) - y_0).$$

Por otra parte, $v(F(x, y_0)) \leq v(s)\,\delta$ si $v(x - x_0) \leq r$, lo que implica que $v((h(f))(x) - y_0) \leq \delta$. Luego, $(h(f))(x) \in B_{y_0}(\delta)$.

Sean $x, y \in B_{x_0}(\delta)$ con $x \neq y$, entonces

$$\begin{aligned}\Phi_1(h(f))(x,y) &= \frac{f(x) - s^{-1}F(x,f(x)) - f(y) + s^{-1}F(y,f(y))}{x-y} \\ &= \Phi_1 f(x,y) - s^{-1}\left(\frac{F(x,f(x)) - F(x,f(y)) + F(x,f(y)) - F(y,f(y))}{x-y}\right) \\ &= \Phi_1 f(x,y) - s^{-1}\left(\frac{F(x,f(x)) - F(x,f(y))}{x-y} + \frac{F(x,f(y)) - F(y,f(y))}{x-y}\right).\end{aligned}$$

Como $f \in BC^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta))$ y $\overline{G}, \overline{H}$ son continuas en K^3, tenemos que $h(f)$ es C^1 en $B_{x_0}(r)$. Recordemos que si $x, y \in B_{x_0}(r)$ y $f(x), f(y) \in B_{y_0}(\delta)$, entonces $v(F(x,f(y)) - F(y,f(y))) = v(s)v(x-y)$ y $v(F(x,f(x))) - F(x,f(y))) = v(s)v(f(x)-f(y))$. Luego, de la expresión

$$\Phi_1(h(f))(x,y) = \Phi_1 f(x,y) - s^{-1}\left(\frac{F(x,f(x)) - F(x,f(y))}{x-y} + \frac{F(x,f(y)) - F(y,f(y))}{x-y}\right)$$

podemos concluir que

$$\begin{aligned}v(\Phi_1(h(f))(x,y)) &\leq \text{máx}\left\{v(\Phi_1 f(x,y)), v(s^{-1})v(s\,\Phi_1 f(x,y)), v(s)^{-1}v(x-y)^{-1}v(s)v(x-y)\right\} \\ &\leq \text{máx}\{v(\Phi_1 f(x,y)), 1\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\Phi_1(h(f))\|_\infty < \infty$ y $h(f) \in BC^1(B_{x_0}(\delta) \to B_{y_0}(r))$, lo que implica que h está bien definida.

Finalmente, probaremos que

$$h : (BC^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta)), d_1) \to (BC^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta)), d_1)$$

es una contracción, y por tanto tiene un punto fijo.

Sean $f, g \in BC^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta))$, luego para todo $x \in B_{x_0}(r)$ con $f(x) \neq g(x)$

$$\begin{aligned}v((h(f))(x) - (h(g))(x)) &= v((f(x) - s^{-1}F(x,f(x))) - (g(x) - s^{-1}F(x,g(x)))) \\ &= v((f(x) - g(x)) - s^{-1}(F(x,f(x)) - F(x,g(x)))) \\ &= v(s^{-1}(f(x)-g(x)))v\left(s - \frac{F(x,f(x)) - F(x,g(x))}{f(x)-g(x)}\right).\end{aligned}$$

Puesto que para cada $x \in B_{x_0}(r)$ se tiene que $f(x), g(x) \in B_{y_0}(\delta)$, y de la condición

$$v\left(\frac{F(x,y) - F(x,y')}{y-y'} - s\right) < \hat{g}_1^{-1}v(s),$$

observamos que

$$v\left(\frac{F(x,f(x)) - F(x,g(x))}{f(x)-g(x)} - s\right) < \hat{g}_1^{-1}v(s).$$

Luego, si $x \in B_{x_0}(r)$ tal que $f(x) \neq g(x)$,

$$\begin{aligned}v((h(f))(x) - (h(g))(x)) &= v((f(x) - s^{-1}F(x,f(x))) - (g(x) - s^{-1}F(x,g(x)))) \\ &\leq v\left(\frac{F(x,f(x)) - F(x,g(x))}{f(x)-g(x)} - s\right) v(s^{-1})v(f(x)-g(x)) \\ &< \hat{g}_1^{-1}v(f(x)-g(x)).\end{aligned}$$

Del mismo modo que en la demostración del Teorema de la función inversa para funciones C^1,

$$d((h(f))(x),(h(g))(x)) \leq \frac{1}{2}d(f(x),g(x))) \qquad (x \in B_{x_0}(\delta), f(x) \neq g(x)).$$

Si $f(x) = g(x)$ para algún $x \in B_{x_0}(r)$, entonces $(h(f))(x) = (h(g))(x)$ y se cumple la desigualdad anterior. Por lo tanto, para todo $x \in B_{x_0}(r)$ se tiene que

$$d((h(f))(x),(h(g))(x)) \leq \frac{1}{2}d(f(x),g(x))) \leq \frac{1}{2}d_1(f,g).$$

Siguiendo el mismo tipo de argumento se prueba que

$$d(\Phi_1(h(f))(x,y),\Phi_1(h(g))(x,y)) \leq \frac{1}{2}d(\Phi_1 f(x,y),\Phi_1 g(x,y)) \leq \frac{1}{2}d_1(f,g) \qquad (x,y \in B_{x_0}(r)).$$

Por lo tanto, h es una contracción. Por el Teorema del punto fijo de Banach existe un única función

$$\psi \in BC^1(B_{x_0}(r) \to B_{y_0}(\delta))$$

tal que $(h(\psi))(x) = \psi(x)$. Pero $(h(\psi))(x) = \psi(x) - s^{-1}F(x,\psi(x))$, es decir, $F(x,\psi(x)) = 0$ para todo $x \in B_{x_0}(r)$.

□

2.4. Funciones C^n

Al igual que en el caso de las funciones continuamente diferenciales, introduciremos una nueva noción de función C^n. Por tanto daremos nuevas definiciones siguiendo las líneas de [**3**], donde se construyó esta teoría para cuerpos con valuaciones de rango 1.

Definición 2.4.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\nabla^n X := \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in X^n : \text{ si } i \neq j \text{ entonces } x_i \neq x_j\}.$$

El n-ésimo cuociente de diferencias $\Phi_n f : \nabla^{n+1}X \to K$ de una función $f : X \to K$ se define inductivamente como $\Phi_0 f = f$ y

$$\Phi_n f(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) = \frac{\Phi_{n-1}f(x_1,x_3,\ldots,x_{n+1}) - \Phi_{n-1}f(x_2,x_3,\ldots,x_{n+1})}{x_1 - x_2},$$

donde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) \in \nabla^{n+1}X$.

Para cada $n \geq 1$ consideraremos X^n con la topología producto con respecto a la topología relativa a X. Diremos que f **es una función** C^n en X si $\Phi_n f$ puede extenderse a una función continua

$$\overline{\Phi}_n f : X^{n+1} \to K.$$

El conjunto de las funciones C^n en X será denotado por $C^n(X \to K)$. Definimos además

$$C^\infty(X \to K) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(X \to K),$$

y sus elementos se llamarán funciones C^∞.

En el siguiente lema estableceremos propiedades de $\Phi_n f$.

Lema 2.4.2. *Sean $f,g : X \to K$ y $\lambda,\mu \in K$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Luego, se tienen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $(x,y,z,x_1,\ldots,x_{n-1}) \in \nabla^{n+2}X$ entonces*

$$(x-y)\Phi_n f(x,y,x_1,\ldots,x_{n-1}) + (y-z)\Phi_n f(y,z,x_1,\ldots,x_{n-1}) = (x-z)\Phi_n f(x,z,x_1,\ldots,x_{n-1}).$$

2. $\Phi_n f$ *es una función simétrica de sus* $n+1$ *variables, es decir, es invariante bajo permutaciones* $\sigma \in S_{n+1}$.
3. *Si* $(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) \in \nabla^{2n} X$, *entonces*
$$\Phi_{n-1} f(x_1, \ldots, x_n) - \Phi_{n-1} f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \Phi_n f(a_1, \ldots, a_j, x_j, \ldots, x_n).$$
4. $\Phi_n(\lambda f + \mu g) = \lambda \Phi_n f + \mu \Phi_n g$.
5. *Si* $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \nabla^{n+1} X$, *entonces*
$$\Phi_n(fg) = \sum_{j=0}^{n} \Phi_j f(x_1, \ldots, x_{j+1}) \Phi_{n-j} g(x_{j+1}, \ldots, x_n).$$
6. *Si* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in X$, $g = \frac{1}{f}$, $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \nabla^{n+1} X$, *entonces*
$$\Phi_n g = -f(x_1)^{-1} \sum_{j=1}^{n} \Phi_j f(x_1, \ldots, x_{j+1}) \Phi_{n-j} g(x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

Demostración. 1. De la definición de $\Phi_n f$, tenemos que
$$\begin{aligned} &(x-y)\Phi_n f(x, y, x_1, \ldots, x_{n-1}) + (y-z)\Phi_n f(y, z, x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &= (\Phi_{n-1} f(x, x_1, \ldots, x_{n-1}) - \Phi_{n-1} f(y, x_1, \ldots, x_{n-1})) + (\Phi_{n-1} f(y, x_1, \ldots, x_{n-1}) - \Phi_{n-1} f(z, x_1, \ldots, x_{n-1})) \\ &= (\Phi_{n-1} f(x, x_1, \ldots, x_{n-1}) - \Phi_{n-1} f(z, x_1, \ldots, x_{n-1})) = (x-z)\Phi_n f(x, z, x_1, \ldots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

2. Procederemos por inducción sobre $n \geq 2$. El caso $n = 2$ está dado por la definición de $\Phi_1 f$. Por otra parte, por 1 se prueba directamente que
$$\Phi_n f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}) = \Phi_n f(x_3, x_2, x_1, \ldots, x_{n+1}).$$
La hipótesis de inducción nos dice que $\Phi_{n-1} f$ es simétrica, lo que implica que $\Phi_n f$ invariante bajo las permutaciones de x_2, x_3 y permutaciones de $x_1, x_4, \ldots, x_{n+1}$. Por lo tanto, podemos deducir que es invariante bajo la permutación $x_{\sigma(i)} = x_{i+1}$ si $1 \leq i \leq n$ y $x_{\sigma(n+1)} = x_1$. Pero la hipótesis de inducción también implica que $\Phi_n f$ es invariante por permutaciones de x_1, x_2. Por lo tanto, $\Phi_n f$ es invariante bajo la transposición $(1\,2)$ y el ciclo $(1\,2 \cdots n+1)$ que son generadores del grupo S_n.

3. Por la definición de $\Phi_n f$,
$$\begin{aligned} &\Phi_{n-1} f(x_1, \ldots, x_n) - \Phi_{n-1} f(a_1, \ldots, a_n) = (\Phi_{n-1} f(x_1, \ldots, x_n) - \Phi_{n-1} f(a_1, x_2, \ldots, x_n)) \\ &+ (\Phi_{n-1} f(a_1, x_2, \ldots, x_n) - \Phi_{n-1} f(a_1, a_2, x_3, \ldots, x_n)) + \ldots + (\Phi_{n-1} f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n) - \Phi_{n-1} f(a_1, \ldots, a_n)) \\ &= (\Phi_{n-1} f(x_1, \ldots, x_n) - \Phi_{n-1} f(a_1, x_2, \ldots, x_n)) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} (\Phi_{n-1} f(a_1, \ldots, a_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) - \Phi_{n-1} f(a_1, \ldots, a_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_n)) \\ &= -(a_1 - x_1)\Phi_n f(a_1, x_1, \ldots, x_n) + (x_n - a_n) \sum_{j=2}^{n} \Phi_n f(a_1, \ldots, a_j, x_j, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

4. Es directo usando la definición de $\Phi_n f$.

5. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \nabla^{n+1}X$. El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que es cierto para $n-1$ con $n > 1$. La definición de $\Phi_n(fg)$ nos dice que

$$\Phi_n(fg)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{(\Phi_{n-1}(fg)(x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}) - \Phi_{n-1}(fg)(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})}{x_1 - x_2}.$$

Consideremos $a_1 = x_1$, $b_1 = x_2$ y $a_i = b_i = x_{i+1}$ para $i \geq 2$. Por hipótesis de inducción

$$\Phi_n(fg)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j f(a_1, \ldots, a_{j+1}) \Phi_{n-1-j} g(a_{j+1}, \ldots, a_n)}{a_1 - b_1}$$

$$-\frac{\sum_{j=0}^{n-1} \Phi_j f(b_1, \ldots, b_{j+1}) \Phi_{n-1-j} g(b_{j+1}, \ldots, b_n)}{a_1 - b_1}.$$

Haciendo cálculos elementales, obtenemos

$$\Phi_n(fg)(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{\Phi_0 f(x_1)\Phi_{n-1} g(x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}) - \Phi_0 f(x_2)\Phi_{n-1} g(x_2, \ldots, x_{n+1})}{x_1 - x_2}$$

$$+\sum_{j=2}^{n} \Phi_j f(x_1, x_2, \ldots, x_{j+1}) \Phi_{n-j} g(x_{j+1}, \ldots, x_{n+1})$$

$$= \frac{\Phi_0 f(x_1)\Phi_{n-1} g(x_1, x_3, \ldots, x_{n+1})}{x_1 - x_2} + \frac{(\Phi_0 f(x_1) - \Phi_0 f(x_2))\Phi_{n-1} g(x_2, \ldots, x_{n+1})}{x_1 - x_2}$$

$$-\frac{\Phi_0 f(x_1))\Phi_{n-1} g(x_2, \ldots, x_{n+1})}{x_1 - x_2} + \sum_{j=2}^{n} \Phi_j f(x_1, x_2, \ldots, x_{j+1}) \Phi_{n-j} g(x_{j+1}, \ldots, x_{n+1})$$

$$= \frac{\Phi_0 f(x_1)(\Phi_{n-1} g(x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}) - \Phi_{n-1} g(x_2, \ldots, x_{n+1}))}{x_1 - x_2} + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j f(x_1, x_2, \ldots, x_{j+1}) \Phi_{n-j} g(x_{j+1}, \ldots, x_{n+1})$$

$$= \Phi_0 f(x_1)\Phi_n g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j f(x_1, x_2, \ldots, x_{j+1}) \Phi_{n-j} g(x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}).$$

6. Si $(fg) = 1$, entonces $\Phi_n(fg) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Utilizando la parte anterior

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \Phi_j f(x_1, \ldots, x_j) \Phi_{n-j} g(x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

$$= f(x_1)\Phi_n g(x_1, \ldots, x_{n+1}) + \sum_{j=0}^{n} \Phi_j f(x_1, \ldots, x_j) \Phi_{n-j} g(x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

obteniendo la afirmación.

□

Corolario 2.4.3. *$C^n(X \to K) \subset C^{n-1}(X \to K)$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración. Sea $f \in C^n(X \to K)$. Si $(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) \in \nabla^{2n} X$, por 3 del lema anterior

$$\Phi_{n-1} f(x_1, \dots, x_n) - \Phi_{n-1} f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \Phi_n f(a_1, \dots, a_j, x_j, \dots, x_n).$$

Fijamos $a_1, a_2, \dots, a_n$ distintos entre sí. Puesto que $f \in C^n(X \to K)$, podemos extender continuamente el lado derecho de la expresión anterior para todo $(x_1, \dots, x_n) \in X$ y por definición $f \in C^{n-1}(X \to K)$. $\square$

Lema 2.4.4. *Sea $f \in C^{n-1}(X \to K)$ para algún $n \geq 1$. Luego $\Phi_n f$ puede extenderse a una función continua $\Phi_n^* f$ en $X^{n+1} \setminus \Delta$, donde la diagonal Δ es el conjunto*

$$\Delta := \{(x, x, x, \dots, x) : x \in X\}.$$

Demostración. Para $1 \leq i, j \leq n+1$, $i \neq j$ definimos los conjuntos

$$U_{i,j} = \{(x_1, \dots, x_{n+1} : x_i \neq x_j)\}.$$

Sean $x_i, x_j \in X$ tales que $x_i \neq x_j$. Tenemos que la topología en K es Haussdorf, por lo tanto la diagonal en X es cerrada en $X \times X$. Entonces existe $\delta_{i,j} \in G$ tal que el conjunto

$$\{(x, y) \in X \times X : \max\{v(x - x_i), v(y - x_j)\} < \delta_{i,j}\}$$

está contenido propiamente en $X \times X \setminus \Delta$.

Sea $\delta = \min\{\delta_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n+1\}$, entonces

$$\{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in X^{n+1} : \max\{v(a_k - x_k) : 1 \leq k \leq n+1\} < \delta\} \subset U_{i,j},$$

y por tanto $U_{i,j}$ es abierto en X^{n+1}. Además,

$$\bigcup_{i,j} U_{i,j} = X^{n+1} \setminus \Delta.$$

Definimos $h_{i,j} : U_{i,j} \to K$ por

$$h_{i,j}(x_1, \dots, x_{n+1}) := (x_i - x_j)^{-1} (\overline{\Phi}_{n-1} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}) - \overline{\Phi}_{n-1} f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})).$$

Puesto que $f \in C^{n-1}(X \to K)$, $h_{i,j}$ es una función continua sobre $U_{i,j}$ y que extiende a $\Phi_{n-1} f$. Luego, definimos

$$\Phi_n^* f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) := h_{i,j}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

si $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in U_{i,j}$, y

$$\Phi_n^* f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \Phi_n f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

si $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \nabla^{n+1} X$. La buena definición y la continuidad está dada porque los abiertos $U_{i,j}$ son disjuntos entre sí y por la continuidad de $h_{i,j}$ sobre cada $U_{i,j}$. $\square$

Definición 2.4.5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una función $f : X \to K$ se dice que **es C^n en un punto** $a \in X$, si el siguiente límite

$$\lim_{u \to \overline{a},\, u \in \nabla^{n+1} X} \Phi_n f(u) \qquad (\overline{a} = (a, \dots, a) \in X^{n+1})$$

existe.

Teorema 2.4.6. *Una función es C^n en X si y solo si f es C^n en cada $a \in X$.*

Demostración. Si $f \in C^n(X \to K)$, claramente f lo es en cada $a \in X$.
Por otro lado, supongamos que f es C^n en cada $a \in X$. Probaremos por inducción sobre $n \geq 1$ que $f \in C^n(X \to K)$. El caso $n = 1$ está dado por la Proposición 2.1.2. Ahora supongamos que es cierto para $n-1$ si $n > 1$.

Sea $a \in X$. Por la hipótesis de inducción se tiene que f es C^{n-1} en X. Luego, por el lema 2.4.4, $\Phi_n f$ se puede extender a una función continua $\Phi_n^* f$ en $X^{n+1} \setminus \Delta$.

Definimos la función $\overline{\Phi}_n f : X^{n+1} \to K$ como sigue:

$$\overline{\Phi}_n f(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \begin{cases} \Phi_n^* f(a_1, \ldots, a_{n+1}) & \text{si } (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in X^{n+1} \setminus \Delta \\ \\ \lim\limits_{u \to a,\ u \in \nabla^{n+1} X} \Phi_n f(u) & \text{si } a = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \Delta \end{cases}.$$

Para probar la continuidad de $\overline{\Phi}_n f$ en X^{n+1}, solo basta probar que es continua en Δ.

Sea $\epsilon \in G$ y supongamos que $a = (a, a, \ldots, a)$. Consideramos $l := \lim\limits_{u \to a,\ u \in \nabla^{n+1} X} \Phi_n f(u) \in K$, entonces existe $\delta \in G$ tal que si $(u_1, \ldots, u_{n+1}) \in \nabla^{n+1} X$ y $\max\{v(u_i - a_i)\} < \delta$ implica

$$v(\Phi_n f(u_1, \ldots, u_{n+1}) - l) < \epsilon.$$

Probaremos que para todo $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in X^{n+1}$ tal que $\max\{v(y_i - a_i)\} < \delta$ se tiene que $v(\overline{\Phi}_n f(y_1, \ldots, y_{n+1}) - l) < \epsilon$.

Supongamos que existe $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in X^{n+1}$ tal que $\max\{v(y_i - a_i)\} < \delta$ y

$$v(\overline{\Phi}_n f(y_1, \ldots, y_{n+1}) - l) > \epsilon.$$

Puesto que $l = \lim\limits_{u \to a,\ u \in \nabla^{n+1} X} \Phi_n f(u)$ existe, se tiene que $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in X^{n+1} \setminus (\nabla^{n+1} X \cup \Delta)$, o bien, $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \Delta$. Si $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in X^{n+1} \setminus (\nabla^{n+1} X \cup \Delta)$, entonces por la continuidad de $\Phi_n^* f$ en $X^{n+1} \setminus \Delta$ existe $\delta_1 \in G$ tal que si $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in X^{n+1} \setminus \Delta$ y $\max\{v(x_i - y_i)\} < \delta_1$ implica

$$(\Phi_n^* f(x_1, \ldots, x_{n+1}) - \Phi_n^* f(y_1, \ldots, y_{n+1})) < \epsilon.$$

Sin perder generalidad supongamos que $\delta_1 < \delta$.

Luego, si $\max\{v(x_i - y_i)\} < \delta_1$ y $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \nabla^{n+1} X$

$$v(x_i - a_i) \leq \max\{v(x_i - y_i), v(y_i - a_i)\} < \delta,$$

lo que implica que

$$v(\overline{\Phi}_n f(x_1, \ldots, x_{n+1}) - l) < \epsilon.$$

Por otra parte,

$$v(\overline{\Phi}_n f(x_1, \ldots, x_{n+1}) - l) \leq \max\{v(\overline{\Phi}_n f(x_1, \ldots, x_{n+1}) - \overline{\Phi}_n f(y_1, \ldots, y_{n+1})), v(\overline{\Phi}_n f(y_1, \ldots, y_{n+1}) - l)\}.$$

Puesto que $v(\overline{\Phi}_n f(y_1, \ldots, y_{n+1}) - l) > \epsilon$ y $v(\overline{\Phi}_n f(x_1, \ldots, x_{n+1}) - \overline{\Phi}_n f(y_1, \ldots, y_{n+1})) < \delta$, por la desigualdad triangular fuerte

$$v(\overline{\Phi}_n f(x_1, \ldots, x_{n+1}) - l) = \epsilon,$$

lo que contradice que $v(\overline{\Phi}_n f(x_1, \ldots, x_{n+1}) - l) < \epsilon$. Por lo tanto, si $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in X^{n+1} \setminus (\nabla^{n+1} X \cup \Delta)$ y $\max\{v(y_i - a_i)\} < \delta$ entonces $v(\overline{\Phi}_n f(y_1, \ldots, y_{n+1}) - l) < \epsilon$.

Utilizando el mismo tipo de argumento se puede probar que si $(y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \Delta$ y $\max\{v(y_i - a_i)\} < \delta$ entonces $v(\overline{\Phi}_n f(y_1, \ldots, y_{n+1}) - l) < \epsilon$. $\square$

Para los siguientes resultados, introduciremos la siguiente definición.

Definición 2.4.7. Sea $f \in C^n(X \to K)$, definimos la función $D_n f : X \to K$ como

$$D_n f(a) := \overline{\Phi}_n f(a, a, \ldots, a) \qquad (a \in X).$$

Teorema 2.4.8 (Fórmula de Taylor). *Sea $f \in C^n(X \to K)$. Entonces para todo $x, y \in X$*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + \sum_{j=1}^{n-1} (x-y)^j D_j f(y) + (x-y)^n \overline{\Phi}_n f(x, y, y, \ldots, y) \\ &= f(y) + \sum_{j=1}^{n} (x-y)^j D_j f(y) + (x-y)^n (\overline{\Phi}_n f(x, y, y, \ldots, y) - D_n f(y)). \end{aligned}$$

Demostración. Sea $f \in C^n(X \to K)$. Por la Proposición 2.1.2, la fórmula de Taylor es cierta para el caso $n = 1$. Sea $n \geq 2$ y supongamos que la fórmula es válida para $n - 1$. Por el corolario 2.4.3 se tiene que $f \in C^{n-1}(X \to K)$, además por la hipótesis de inducción

$$f(x) = f(y) + \sum_{j=1}^{n-2} (x-y)^j (D_j f)(y) + (x-y)^{n-1} \overline{\Phi}_{n-1} f(x, y, y, \ldots, y) \qquad (x, y \in X).$$

Por otro lado, de la definición de $\Phi_n f$, tenemos que para todo $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \nabla^{n+1} X$

$$\Phi_{n-1} f(x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}) = \Phi_{n-1} f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}) + (x_1 - x_2) \Phi_n f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

Puesto que f es C^n, y por tanto es C^{n-1}, la expresión anterior también se mantiene para $\overline{\Phi}_n f$ y $\overline{\Phi}_{n-1} f$. Luego, si $x, y \in X$, $x_1 = x$ y $x_i = y$ para todo $2 \leq i \leq n + 1$ entonces

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{n-1} f(x, y, \ldots, y) &= \overline{\Phi}_{n-1} f(y, y, \ldots, y) + (x-y) \overline{\Phi}_n f(x, y, \ldots, y) \\ &= D_{n-1} f(y) + (x-y) \overline{\Phi}_n f(x, y, \ldots, y). \end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + \sum_{j=1}^{n-2} (x-y)^j D_j f(y) + (x-y)^{n-1} \overline{\Phi}_{n-1} f(x, y, y, \ldots, y) \\ &= f(y) + \sum_{j=1}^{n-2} (x-y)^j D_j f(y) + (x-y)^{n-1} (D_{n-1} f(y) + (x-y) \overline{\Phi}_n f(x, y, \ldots, y)) \\ &= f(y) + \sum_{j=1}^{n-1} (x-y)^j D_j f(y) + (x-y)^n \overline{\Phi}_n f(x, y, \ldots, y). \end{aligned}$$

□

2.4.1. Diferenciación $C^n \to C^{n-1}$.

En esta parte probaremos que la imagen de una función C^n bajo la aplicación D_j es una función C^{n-j}, en particular, la derivada de una función C^n es una función C^{n-1}.

Lema 2.4.9. *Sea $n \geq 1$ y $f \in C^{n-1}(X \to K)$. Luego para todo $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \nabla^{n+1} X$ tenemos que*

$$\Phi_j (D_{n-j} f)(x_1, \ldots, x_{j+1}) = \sum_{u \in S_{j_n}} \Phi_n^* f(u) \qquad (1 \leq j \leq n)$$

donde S_{j_n} es el conjunto de todos los $(x_{m_1}, \ldots, x_{m_n}) \in X^{n+1}$ para los cuales $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{n+1}$ y $\{m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}\} = \{1, 2, \ldots, j+1\}$. S_{j_n} tiene $\binom{n}{j}$ elementos.

Demostración. Un elemento de S_{j_n} está determinado por la cantidad de veces que aparece cada x_i. Si k_i es la cantidad de veces que aparece x_i en un elemento $x \in S_{j_n}$, entonces calcular $|S_{j_n}|$ equivale a calcular la cantidad de soluciones enteras de la ecuación

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_{j+1} = n + 1$$

con $k_i \geq 1$, que es $\binom{n-j+j-1-1}{n-j} = \binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$. Para probar la fórmula, procederemos por inducción sobre $n \geq 1$. Supongamos que $n = 1$, entonces

$$\Phi_1(D_0 f)(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \Phi_1^* f(x_1, x_2),$$

y la afirmación es cierta en este caso.

Ahora supongamos que el lema es cierto para $n-1$ con $n > 1$. Debemos probar que la fórmula es cierta para $2 \leq j \leq n$. Sea $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \nabla^{n+1} X$. Por definición de $\Phi_n f$ y por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\begin{aligned}\Phi_j(D_{n-j} f)(x_1, \ldots, x_{j+1}) &= \frac{\Phi_{j-1}(D_{n-j} f)(x_1, x_3, \ldots, x_{j+1}) - \Phi_{j-1}(D_{n-j} f)(x_2, \ldots, x_{j+1})}{x_1 - x_2} \\ &= (x_1 - x_2)^{-1} \left(\sum_{u \in A} \Phi_{n-1}^* f(u) - \sum_{u \in B} \Phi_{n-1}^* f(u) \right)\end{aligned}$$

donde A y B son subconjuntos de $\{(x_{m_1}, \ldots, x_{m_n}) \in X^n : m_1 \leq \ldots \leq m_n\}$ determinado por $\{m_1, \ldots, m_n\} = \{1, 3, \ldots, j+1\}$ y $\{m_1, \ldots, m_n\} = \{2, 3, \ldots, j+1\}$ respectivamente. Si intercambiamos 1 y 2 en A y B respectivamente, obtenemos una correspondencia $u \leftrightarrow u'$ entre A y B.

Sea $u = (u_1, \ldots, u_n) \in A$. Luego existe $k \geq 1$ tal que $u_1 = u_2 = \ldots = u_k = x_1$ y $u_{k+1} = x_3$, entonces

$$u = (x_1, \ldots, x_1, u_{k+1}, \ldots, u_n)$$

y su correspondiente imagen u' en B es

$$u' = (x_2, \ldots, x_2, u_{k+1}, \ldots, u_n).$$

Puesto que $f \in C^{n-1}(X \to K)$, por continuidad podemos extender el Lema 2.4.2 a $\overline{\Phi}_{n-1} f$ y obtenemos que

$$\Phi_{n-1}^* f(u) - \Phi_{n-1}^* f(u') = (x_1 - x_2) \sum_{t \in A_u} \Phi_n^* f(t)$$

donde A_u es el conjunto de todos los $(x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_{n+1}}) \in X^{n+1}$ tales que

$$m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{k+1}$$

$$\{m_1, m_2, \ldots, m_{k+1}\} = \{1, 2\}$$

$$(x_{m_{k+2}}, \ldots, x_{m_{n+1}}) = (u_{k+1}, \ldots, u_n)$$

$$\{m_{k+2}, m_{k+3}, \ldots, m_{n+1}\} = \{3, \ldots, n+1\}.$$

Tenemos que $A_u \subset S_{j_n}$. Por otra parte, si $v = (v_1 \ldots, v_{n+1}) \in S_{j_n}$ existe $k_1 \geq 1$ tal que $v_{k_1} = x_2$ y $v_{k_1+1} = x_3$, observamos que $v \in A_u$ con

$$u = (x_1, \ldots, x_1, v_{k_1+1}, \ldots, v_{n+1}).$$

Ahora si $u \neq \overline{u}$, entonces deben diferir en una coordenada y repitiendo la construcción anterior se puede concluir que $A_u \cap A_{\overline{u}} = \emptyset$. Luego, $\{A_u : \ u \in A\}$ es una partición de S_{j_n}. Como S_{j_n} es un conjunto finito,

$$\Phi_j(D_{n-j}f)(x_1, \ldots, x_{j+1}) = \sum_{u \in A} \sum_{t \in A_u} \Phi_n^* f(t) = \sum_{t \in S_{j_n}} \Phi_n^* f(t).$$

□

Como corolario tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.4.10. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f \in C^n(X \to K)$, entonces $D_{n-j}f \in C^j(X \to K)$. Además, $D_j(D_{n-j}f) = \binom{n}{j} D_n f$ $(0 \leq j \leq n)$.*

Demostración. Por el Lema anterior, tenemos que

$$\Phi_j(D_{n-j}f)(x_1, \ldots, x_{j+1}) = \sum_{u \in S_{j_n}} \Phi_n^* f(u) \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Puesto que $f \in C^n(X \to K)$, el lado derecho de la expresión anterior se puede extender continuamente a todo X^{n+1}. Por lo tanto,

$$\overline{\Phi}_j(D_{n-j}f)(x_1, \ldots, x_{j+1}) = \sum_{u \in S_{j_n}} \overline{\Phi}_n f(u) \qquad (1 \leq j \leq n)$$

es una extensión continua de $\Phi_j(D_{n-j}f)$.

Por otra parte, como $D_{n-j}f \in C^j(X \to K)$, en la expresión anterior hacemos $x_i \to a$ para cada $1 \leq i \leq n$, obteniendo

$$(D_j(D_{n-1}f))(a) = \sum_{u \in S_{j_n}} (D_n f)(a) = \binom{n}{j} (D_n f)(a).$$

□

Lema 2.4.11. *Sea $n \geq 1$. Para $f \in C^{n-1}(X \to K)$ y $(x, y) \in \nabla^2 X$, sean*

$$\begin{aligned} \rho_1 f(x,y) &= \Phi_n^* f(x, y, y, \ldots, y) \\ \rho_2 f(x,y) &= \Phi_n^* f(x, x, y, \ldots, y) \\ &\vdots \\ \rho_n f(x,y) &= \Phi_n^* f(x, x, \ldots, x, y). \end{aligned}$$

Luego, cada función $\rho_j f(x,y)$ es continua en $\nabla^2 X$ y satisface la condición

$$\begin{bmatrix} \Phi_1^* D_{n-1} f(x,y) \\ \Phi_2^* D_{n-2} f(x,y) \\ \vdots \\ \Phi_{n-1}^* D_1 f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n-1}{1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \binom{n-2}{n-2} & \binom{n-1}{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_n f(x,y) \\ \rho_{n-1} f(x,y) \\ \vdots \\ \rho_1 f(x,y) \end{bmatrix}.$$

Demostración. La continuidad de cada $\rho_i f(x,y)$ sobre $\nabla^2 X$ está dada por la continuidad de $\Phi_n^* f$ sobre $X^{n+1} \setminus \Delta$. Por el lema 2.4.9

$$\Phi_j(D_{n-j}f)(x_1, \ldots, x_{j+1}) = \sum_{u \in S_{j_n}} \Phi_n^* f(u) \qquad (1 \leq j \leq n)$$

donde S_{j_n} es el conjunto de todos los $(x_{m_1}, \ldots, x_{m_n}) \in X^{n+1}$ para los cuales $m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_{n+1}$ y $\{m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}\} = \{1, 2, \ldots, j+1\}$. Puesto que $\Phi_n^* f$ está definida sobre $X^n \setminus \Delta$, en el lado izquiero de la expresión anterior hacemos $x_1 \to x$ y $x_i \to y$ si $2 \leq i \leq n$. Luego,

$$\lim_{x_1 \to x,\ x_i \to y} \Phi_j(D_{n-j} f)(x_1, \ldots, x_{j+1}) = \Phi_j^*(D_{n-j} f)(x, y, \ldots, y).$$

En el lado derecho, por argumentos combinatorios, observamos que existen $\binom{n-s}{j-1}$ elementos de la forma $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ tales que

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_s = x_1, \qquad u_{s+1} = x_2.$$

Como las variables deben aparecer al menos una vez, $s \in \{1, \ldots, n+1-j\}$. Si $x_1 \to x$ y $x_i \to y$ si $2 \leq i \leq n$ en cada uno de estos elementos mencionados, observamos que

$$\lim_{x_1 \to x, x_i \to y} \Phi_n^* f(u) = \rho_s f(x, y).$$

Por lo tanto,

$$\Phi_j^*(D_{n-j} f)(x, y, \ldots, y) = \sum_{s=1}^{n+1-j} \binom{n-s}{j-1} \rho_s f(x, y) = \sum_{i=j-1}^{n-1} \binom{i}{j-1} \rho_{n-i} f(x, y).$$

□

2.4.2. Antiderivación $C^{n-1} \to C^n$.

Definición 2.4.12. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f \in C^{n-1}(X \to K)$. Consideramos x_m como en la definición 2.2.1, es decir, $x_m = \sigma_m(x)$ donde $(\sigma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una aproximación de la identidad. Escribimos

$$P_n f(x) := \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_m)}{(j+1)!} (x_{m+1} - x_m)^{j+1} \qquad (x \in X).$$

Probaremos que si $f \in C^{n-1}(X \to K)$ entonces la función $P_n f$ es una antiderivada C^n de f. Para ello, estableceremos algunos resultados previos.

Teorema 2.4.13 (Fórmula de Taylor para $P_n f$)**.** *Sea $n \in \setminus\{0\}$, $f \in C^{n-1}(X \to K)$. Luego*

$$P_n f(x) - P_n f(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(x-y)^j}{j!} f^{(j-1)}(y) + (x-y)^n R_n(x, y) \ \ (x, y \in X)$$

donde $R_n(x, y)$ es una función continua que se anula en la diagonal Δ.

Demostración. Definimos $R_n : X \times X \to K$ como

$$R_n(x, y) := (x-y)^{-n} \left(P_n f(x) - P_n f(y) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x-y)^j}{j!} f^{(j-1)}(y) \right).$$

Probaremos que efectivamente $R(x, y)$ es una función continua sobre $X \times X$ y que $\lim_{x,y \to a} R(x, y) = 0$ para cada $a \in X$. Recordemos que

$$P_n f(x) := \sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_m)}{(j+1)!} (x_{m+1} - x_m)^{j+1} \qquad (x \in X).$$

Por el Lema 2.4.9, $f^{(j)} \in C^{n-j-1}(X \to K)$. Aplicando la fórmula de Taylor a $f^{(j)}$, para cada $j \in \mathbb{N}$ existen funciones continuas $\Lambda_j : X \times X \to K$ que se anulan en la diagonal tal que

$$f^{(j)}(x_m) = \sum_{s=0}^{n-j-1} \frac{(x_m - y)^s}{s!} f^{(s+j)}(y) + (x_m - y)^{n-j-1}\Lambda_j(x_m, y).$$

Reemplazando esta última expresión en la fórmula para $P_n f(x)$, tenemos que

$$P_n f(x) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(j+1)!} \left(\sum_{s=0}^{n-j-1} \frac{(x_m - y)^s}{s!} f^{(s+j)}(y) + (x_m - y)^{n-j-1}\Lambda_j(x_m, y) \right) (x_{m+1} - x_m)^{j+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} ((x-y)^k - (x_0-y)^k) \frac{1}{(k+1)!} f^{(k)}(y) + \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(j+1)!} (x_m - y)^{n-j-1} (x_{m+1} - x_m)^{j+1} \Lambda_j(x_m, y).$$

De la misma forma se tiene que

$$P_n f(y) = \sum_{k=0}^{n-1} ((y-y)^k - (y_0-y)^k) \frac{1}{(k+1)!} f^{(k)}(y) + \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(j+1)!} (y_m - y)^{n-j-1} (y_{m+1} - y_m)^{j+1} \Lambda_j(y_m, y)$$

Recordemos que $x_0 = y_0$, entonces

$$P_n f(x) - P_n f(y) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(j+1)!} \left((x_m - y)^{n-j-1} (x_{m+1} - x_m)^{j+1} \Lambda_j(x_m, y) \right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(x-y)^j}{j!} f^{j-1}(y)$$

$$- \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(j+1)!} (y_m - y)^{n-j-1} (y_{m+1} - y_m)^{j+1} \Lambda_j(y_m, y) + \sum_{k=0}^{n-1} (x-y)^k \frac{1}{(k+1)!} f^{(k)}(y)$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{N}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(j+1)!} \left((x_m - y)^{n-j-1} (x_{m+1} - x_m)^{j+1} \Lambda_j(x_m, y) - (y_m - y)^{n-j-1} (y_{m+1} - y_m)^{j+1} \Lambda_j(y_m, y) \right).$$

Luego,

$$v(P_n f(x) - P_n(y))$$

$$\leq \max_{m\in\mathbb{N},\, 1\leq j\leq n-1} \{ v((x_m - y)^{n-j-1} (x_{m+1} - x_m)^{j+1} \Lambda_j(x_m, y)), v((y_m - y)^{n-j-1} (y_{m+1} - y_m)^{j+1} \Lambda_j(y_m, y)) \}.$$

Sea $\epsilon \in G$. Como $\Lambda_j(u, v)$ es continua en $X \times X$, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que si $\max\{v(x-a), v(y-a)\} < \hat{g}_s^{-1}$ implica $v(\Lambda_j(x, y)) < \epsilon$. Por otra parte, existe $t \geq s$ tal que $x_i = y_i$ si $0 \leq i \leq t$ y $x_{t+1} \neq y_{t+1}$. Observamos que $\hat{g}_{t+1}^{-1} \leq v(x-y) < \hat{g}_t^{-1}$. Luego, si $m \geq t$

$$v(x_m - y) = v(x_m - x + x - y) \leq \max\{v(x_m - x), v(x-y)\} \leq \max\{\hat{g}_m^{-1}, v(x-y)\} = \epsilon(v(x-y))^n,$$

y

$$v(x_{m+1} - x_m) \leq \{v(x_{m+1} - x), v(x_m - x)\} \leq \hat{g}_m^{-1} \leq v(x-y).$$

Por lo tanto,

$$v((x_m - y)^{n-j-1} (x_{m+1} - x_m)^{j+1} \Lambda_j(x_m, y)) \leq (v(x-y))^n v(\Lambda_j(x_m, y)) \leq (v(x-y))^n \epsilon.$$

Si $0 \leq t < m$, observamos que $v((x_t - y)^{n-j-1} (x_{t+1} - x_t)^{j+1} \Lambda_j(x_t, y)) = 0$. De similar forma se prueba que

$$v((y_m - y)^{n-j-1} (y_{m+1} - y_m)^{j+1} \Lambda_j(y_m, y)) \leq \epsilon \qquad (\forall m \in \mathbb{N}).$$

Luego, si $\max\{v(x-a), v(y-a)\} < \hat{g}_s^{-1}$ entonces $v((x-y)^n R_n(x, y)) \leq (v(x-y))^n \epsilon$, y eso concluye la demostración. $\square$

Lema 2.4.14. *Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f \in C^{n-1}(X \to K)$ tal que $f' \in C^{n-1}(X \to K)$. Supongamos que*

$$f(x) = f(y) + \sum_{j=1}^{n} (x-y)^j \frac{f^{(j)}(y)}{j!} + (x-y)^n R_n(x,y) \qquad (x, y \in X),$$

donde R_n es una función continua y que se anula en la diagonal. Luego para cada $a \in X$ y todo j con $1 \leq j \leq n$

$$\lim_{x,y \to a} \rho_j f(x,y) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

donde cada ρ_j están definidos en el lema 2.4.11.

Demostración. Sean $x, y \in X$. Por la fórmula de Taylor tenemos que

$$f(x) = f(y) + \sum_{j=1}^{n-1} (x-y)^j \frac{f^{(j)}(y)}{j!} + (x-y)^{n-1} (\overline{\Phi}_n f(x, y, \ldots, y) - D_{n-1} f(y)).$$

Igualando con la expresión de la hipótesis, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(y)}{n!} + R_n(x,y) &= (x-y)^{n-1} (\overline{\Phi}_{n-1} f(x, y, \ldots, y) - D_{n-1} f(y)) \\ &= \Phi_n^* f(x, y, \ldots, y) = \rho_1 f(x,y). \end{aligned}$$

Puesto que R_n es continua y se anula en la diagonal Δ,

$$\lim_{x,y \to a} \rho_1 f(x,y) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Consideremos la expresión obtenida en la demostración del Teorema 2.4.11,

$$\Phi_j^*(D_{n-j} f)(x, y, \ldots, y) = \sum_{i=j-1}^{n-1} \binom{i}{j-1} \rho_{n-i} f(x,y).$$

Si $j = n-1$,

$$\begin{aligned} \Phi_{n-1}^*(D_1 f)(x, y, \ldots, y) &= \sum_{i=n-2}^{n-1} \binom{i}{n-2} \rho_{n-i} f(x,y) \\ &= \binom{n-2}{n-2} \rho_2 f(x,y) + \binom{n-1}{n-2} \rho_1 f(x,y) \\ &= \rho_2 f(x,y) + n \rho_1 f(x,y). \end{aligned}$$

Despejando $\rho_2 f(x,y)$, obtenemos

$$\rho_2 f(x,y) = \Phi_{n-1}^*(D_1 f)(x, y, \ldots, y) - n \rho_1 f(x,y).$$

Si $x, y \to a$, por el Teorema 2.4.10

$$\lim_{x,y \to a} \rho_2 f(x,y) = \binom{n}{n-1} (D_n f)(a) - (n-1) \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$= n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} - (n-1) \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

De similar forma se prueba que si $j = n-2$, entonces $\lim_{x,y\to a} \rho_3 f(x,y) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Repitiendo recursivamente el proceso para $j = n-2, n-3, \ldots, 1$ se prueba que

$$\lim_{x,y\to a} \rho_{n-j} f(x,y) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

□

Lema 2.4.15. *Sea $n \geq 1$ y $f \in C^{n-1}(X \to K)$. Sean B y S bolas en K. Supongamos que para cada $j \in \{1,2,\ldots,n\}$*

$$\rho_j f(x,y) \in S \qquad\qquad (x, y \in B \cap X, x \neq y).$$

Luego, $\Phi_n^* f(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in S$ para todo $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}) \in X^{n+1} \setminus \Delta$ tal que $x_i \in B$ para cada $i \in \{1,2\ldots,n\}$

Demostración. Sea $\Lambda := \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in X^{n+1} \backslash \Delta :\ x_i \in B$ para cada $i\}$. Para $j \in \{2,\ldots,n+1\}$, sea

$$\Lambda_j := \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \Lambda :\ \{x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\} \text{ tiene exactamente } j \text{ elementos distintos entre si}\}.$$

Luego $\Lambda = \bigcup_{j=2}^{n+1} \Lambda_j$. Puesto que cada $\rho_j(x,y) \in S$, observamos que $\Phi_n^* f(\Lambda_2) \subset S$.

Supongamos que el Lema es cierto para $j-1$ con $3 \leq j \leq n+1$. Probaremos que cada elemento de $\Phi_n^* f(\Lambda_j)$ es una combinación convexa de elementos de $\Phi_n^* f(\Lambda_{j-1})$. Sea $u \in \Lambda_j$. Por la simetría de $\Phi_n^* f$, podemos suponer sin perder generalidad que u es de la forma

$$u = (x_1,\ldots,x_1,x_2,\ldots,x_2,\ldots,x_3,\ldots)$$

tal que x_1,x_2,x_3 son distintos entre sí, y que $v(x_1-x_2) \geq \max\{v(x_1-x_3), v(x_2-x_3)\}$. Supongamos que x_1 se repite k veces y que x_2 se repite l veces, entonces por simplicidad denotamos u de la siguiente forma:

$$u = (x_1^k, x_2^l, x_3, \ldots).$$

Aplicando el Lema 2.4.2 parte 1 a $\Phi_n^* f$, observamos que

$$\Phi_n^* f(x_1^k, x_2^l, x_3, \ldots) = \frac{x_1-x_3}{x_1-x_2}\Phi_n^* f(x_1^k, x_2^{l-1}, x_3, \ldots) + \frac{x_2-x_3}{x_1-x_2}\Phi_n^* f(x_1^{k-1}, x_2^l, x_3, \ldots),$$

y esta es una combinación convexa. Si $l-1 \geq 1$, podemos continuar escribiendo $\Phi_n^* f(x_1^k, x_2^{l-1}, x_3, \ldots)$ como combinación lineal convexa de $\Phi_n^* f(x_1^k, x_2^{l-2}, x_3, \ldots)$ y $\Phi_n^* f(x_1^k, x_2^{l-1}, x_3, \ldots)$. De la misma forma podemos continuar si $k-1 \geq 1$. Por lo tanto, podemos escribir $\Phi_n^* f(u)$ como combinación convexa de elementos de la forma $\Phi_n^*(v)$ donde $v = (x_3, \ldots)$, lo que implica que $v \in \Lambda_{j-1}$. Por la hipótesis de inducción, tenemos que $\Phi_n^*(v) \in S$ y por lo anterior podemos concluir que $\Phi_n^*(u) \in S$. □

Lema 2.4.16. *Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y sea f diferenciable tal que $f' \in C^{n-1}(X \to K)$. Supongamos que*

$$f(x) = f(y) + \sum_{j=1}^{n} (x-y)^j \frac{f^{(j)}(y)}{j!} + (x-y)^n R_n(x,y) \qquad (x,y \in X),$$

donde $R_n(x,y)$ es una función continua que se anula sobre la diagonal Δ. Luego, $f \in C^n(X \to K)$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre $n \geq 1$. El caso $n = 1$ viene de la definición de $\Phi_1 f$. Supongamos que es cierto para $n-1$ con $n > 1$, entonces tenemos que $f \in C^{n-1}(X \to K)$. Por el Lema 2.4.14 tenemos que

$$\lim_{x,y\to a} \rho_j(x,y) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

para cada $a \in X$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$. Del Lema 2.4.15, podemos deducir que

$$\lim_{x,y \to a} \Phi_n^* f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

donde $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in X^{n+1} \setminus \Delta$. Por lo tanto, f es C^n en $a \in X$, y por el Teorema 2.4.6 $f \in C^n(X \to K)$. $\square$

Después de todo el trabajo previo, podemos demostrar el resultado principal de esta sección para dar una respuesta a una de las preguntas que planteamos al principio de esta sección.

Teorema 2.4.17. *Toda función $f \in C^{n-1}(X \to K)$ tiene una antiderivada $F \in C^n(X \to K)$.*

Demostración. El caso $n = 1$ está dado por el teorema 2.2.4. Sea $n \geq 2$. Consideramos $F(x) = (P_n f)(x)$. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $a \in X$, entonces

$$\begin{aligned} v(\Phi_1(P_n f)(x,y) - f(a)) &= v\left(\frac{(P_n f)(x) - (P_n f)(y)}{x-y} - f(a)\right) \\ &= v\left(\frac{(P_n f)(x) - (P_n f)(y) - f(a)(x-y)}{x-y}\right) \end{aligned}$$

Sea $\epsilon \in \Gamma$ con $\epsilon < 1$. Aplicando el Teorema 2.4.13,

$$\begin{aligned} v(\Phi_1(P_n f)(x,y) - f(a)) &= v((x-y)^{-1}) v\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(x-y)^j}{j!} f^{(j-1)}(y) + (x-y)^n R_n(x,y) - f(a)(x-y)\right) \\ &= v((x-y)^{-1}) v\left(\sum_{j=2}^{n} \frac{(x-y)^j}{j!} f^{(j-1)}(y) + (f(y) - f(a))(x-y) + (x-y)^n R_n(x,y)\right) \\ &\leq v((x-y)^{-1}) \max\left\{ v\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(x-y)^{j+1}}{(j+1)!} f^{(j-1)}(y)\right), v((f(y)-f(a))(x-y)), v((x-y)^n R_n(x,y)) \right\} \\ &\leq \max\left\{ v\left(\sum_{j=2}^{n} \frac{(x-y)^{j-1}}{j!} f^{(j-1)}(y)\right), v(f(y) - f(a)), v((x-y)^{n-1} R_n(x,y)) \right\}. \end{aligned}$$

Sea $g \in \Gamma$ con $g > 1$ y tal que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$v(\overline{\Phi}_i f(a, \ldots, a)) < g.$$

Como $f \in C^{n-1}(X \to K)$, entonces por el corolario 2.4.3 se tiene que $f \in C^i(X \to K)$ para cada $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. Luego existe $\delta_i \in \Gamma$ tal que si $(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}) \in X^{i+1}$ y

$$\max\{v(x_k - a) : \ 1 \leq k \leq i+1\} < \delta_i$$

entonces

$$v(\overline{\Phi}_i f(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}) - \overline{\Phi}_i f(a, \ldots, a)) < g.$$

Por la desigualdad triangular fuerte tenemos

$$v(\overline{\Phi}_i f(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1})) \leq \max\{v(\overline{\Phi}_i f(a, \ldots, a)), v(\overline{\Phi}_i f(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}) - \overline{\Phi}_i f(a, \ldots, a))\}.$$

Por lo tanto, si $\delta = \min\{\delta_i : \ 1 \leq \delta \leq n-1\}$ y

$$A_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}) \in X^{i+1} : \max\{v(x_k - a) : \ 1 \leq k \leq i+1\} < \delta\},$$

entonces tenemos que para todo $1 \leq i \leq n-1$

$$\sup\{v(\Phi_i f(x_1, x_2, \ldots, x_{i+1})) : (x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}) \in A_i\} \leq g.$$

Sea $y \in X$ tal que $v(y-a) < \delta$. Hacemos $x_k \to y$, y obtenemos que para todo $j \in \{2, \ldots, n\}$

$$v(f^{(j-1)}(y)) = v((j-1)! D_{j-1} f(y)) \leq g.$$

Dada la continuidad de f y $R_n(x,y)$ en X, existen $r_1, r_2 \in \Gamma$ tales que

$$(v(y-a) < r_2) \Rightarrow (v(f(y) - f(a)) < \epsilon),$$

$$(\text{máx}\{v(x-a), v(y-a)\} < r_1) \Rightarrow (v(R(x,y)) < \epsilon).$$

Finalmente, si consideramos $r = \text{mín}\{r_1, r_2, \delta, \epsilon, 1\}$ tenemos que $v((x-y)^{n-1}) \leq 1$ y

$$\begin{aligned} v(\Phi_1(P_n f)(x,y) - f(a)) &\leq \text{máx}\left\{v((x-y)^{j-1} f^{(j-1)}(y)), v(f(y) - f(a)), v((x-y)^{n-1} R_n(x,y))\right\} \\ &\leq \text{máx}\{g\epsilon, \epsilon, g\epsilon\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(P_n f)' = f$.

Para la otra parte de la afirmación, por el teorema 2.4.13

$$\begin{aligned} P_n f(x) - P_n f(y) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(x-y)^j}{j!} f^{(j-1)}(y) + (x-y)^n R_n(x,y) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(x-y)^j}{j!} ((P_n f)')^{(j-1)}(y) + (x-y)^n R_n(x,y) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(x-y)^j}{j!} (P_n f)^{(j)}(y) + (x-y)^n R_n(x,y). \end{aligned}$$

Por el lema 2.4.16 se tiene que $P_n f$, que es una antiderivada de f, pertenece a $C^n(X \to K)$. $\square$

2.5. El teorema de la función inversa para funciones C^n.

Lema 2.5.1. *Sea $f : X \to K$ una función inyectiva y sea $g : f(X) \to X$ su inversa. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, y sea S_n el conjunto formado por las siguientes funciones definidas sobre $\nabla^{n+1} f(X)$*

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \Phi_1 g(x_{i_1}, x_{i_2}) \qquad (i_1 < i_2) \\ &(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \Phi_2 g(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \qquad (i_1 < i_2 < i_3) \\ &\qquad\vdots \\ &(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \Phi_{n-1} g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \qquad (i_1 < i_2 < \ldots < i_n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \Phi_1 f(g(x_{i_1}), g(x_{i_2})) \qquad (i_1 < i_2) \\ &(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \Phi_2 f(g(x_{i_1}), g(x_{i_2}), g(x_{i_3})) \qquad (i_1 < i_2 < i_3) \\ &\qquad\vdots \\ &(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \Phi_{n-1} f(g(x_{i_1}), \ldots, g(x_{i_n})) \qquad (i_1 < i_2 < \ldots < i_n) \\ &(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \Phi_{n-1} f(g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n), g(x_{n+1})) \end{aligned}$$

Sea R_n el anillo generado por S_n. Luego $\Phi_n g \in R_n$.

Demostración. Si $n = 2$, el teorema es trivial por definición de $\Phi_1 g$. Supongamos que es cierto para $n-1$ con $n \geq 3$.

Sea $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \nabla^{n+1} f(X)$, entonces por definición

$$\Phi_n g(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1 - x_2)^{-1}(\Phi_{n-1} g(x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}) - \Phi_{n-1} g(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1})).$$

La hipótesis de inducción nos dice que $\Phi_{n-1} g \in R_{n-1}$. Si $h \in R_{n-1}$ definimos

$$\Delta h(x_1, \ldots, x_n) := (x_1 - x_2)^{-1}(h(x_1, x_3, \ldots, x_n) - h(x_2, \ldots, x_n)).$$

Para probar que $\Phi_n g \in R_n$ basta probar que el conjunto $B := \{h \in R_{n-1} : \ \Delta h \in R_n\}$ es un anillo que contiene a S_{n-1}, pues en ese caso se tendría que $B = R_{n-1}$.

La aplicación Δ es lineal pues Φ_n lo es, entonces $(B, +)$ es un grupo. Sea $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \nabla^{n+1} f(X)$ y $h, t \in B$. Por el Lema 2.4.2, observamos que

$$\Delta(ht) = t(x_1, x_3, \ldots, x_n)\Delta h(x_1, \ldots, x_n) + h(x_2, x_3, \ldots, x_n)\Delta t(x_1, \ldots, x_n).$$

Puesto que $h, t \in R_{n-1}$, las funciones

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto h(x_2, \ldots, x_{n+1})$$

y

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto t(x_1, x_3, \ldots, x_{n+1})$$

pertenecen a R_n, y por definición $\Delta h, \Delta t \in R_n$. Luego, B es un anillo.

Ahora sea $h \in S_{n-1}$, entonces tenemos los siguientes casos

1. h es de la forma
$$h(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_j g(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{j+1}}) \qquad (1 \leq j \leq n-2).$$
Si $1 \notin \{i_1, \ldots, i_{j+1}\}$, entonces
$$h(x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}) = h(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}),$$
es decir, $\Delta h = 0 \in B$. Si $i_1 = 1$, para $(x, y, x_2, \ldots x_n) \in \nabla^{n+1} f(X)$ se tiene que
$$h(x, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_j g(x, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{j+1}})$$
$$h(y, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_j g(y, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{j+1}})$$
y por tanto
$$\Delta h(x, y, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_{j+1} g(x, y, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{j+1}}),$$
lo que implica que $\Delta h \in R_n$ y $h \in B$.
2. h es de la forma
$$h(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_j f(g(x_{i_1}), g(x_{i_2}), \ldots, g(x_{i_{j+1}})) \qquad (1 \leq j \leq n-2).$$
Si $1 \notin \{i_1, \ldots, i_{j+1}\}$, de la misma forma que en el caso anterior se tiene que
$$h(x_1, x_3, \ldots, x_{n+1}) = h(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}),$$
lo que implica que $\Delta h = 0 \in B$. Si $i_1 = 1$, para $(x, y, x_2, \ldots x_n) \in \nabla^{n+1} f(X)$ se tiene que
$$h(x, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_j g(x, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{j+1}})$$
$$h(y, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_j g(y, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{j+1}})$$
y por tanto
$$\Delta h(x, y, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_{j+1} f(g(x), g(y), g(x_{i_2}), \ldots, g(x_{i_{j+1}})).$$

Luego Δh es un producto de dos funciones en S_n. Por lo tanto $\Delta h \in R_n$ y $h \in B$.

□

Tenemos el teorema central de esta sección,

Teorema 2.5.2 (Teorema de la función inversa para funciones C^n). *Sea $f \in C^n(X \to K)$ y sea $a \in X$ tal que $f'(a) \neq 0$. Entonces existe una vecindad U de a tal que $f : U \cap X \to f(U \cap X)$ es inyectiva y su inversa local $g : f(U \cap X) \to U \cap X$ es una función C^n.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. El caso $n = 1$ está dado por el Teorema 2.1.3. Supongamos que el Teorema es cierto para el caso $n - 1$ con $n > 1$.

Sea $f \in C^n(X \to K)$ y $a \in X$ tal que $f'(a) \neq 0$, entonces por la hipótesis de inducción existe una vecindad U de a tal que f es inyectiva en $U \cap X$ y su inversa local $g : f(U \cap X) \to U \cap X$ es una función C^{n-1}.

Para probar que $g \in C^n(X \to K)$, aplicamos el Lema anterior a f y g, y tenemos que $\Phi_n g \in R_n$. Como $f, g \in C^{n-1}(X \to K)$, las funciones que pertenecen a R_n pueden extenderse continuamente a $(f(U \cap X))^{n+1}$. Eso termina la demostración. □

Capítulo 3

Conjuntos no medibles en el cuerpo de Levi-Civita

En [**6**], K. Shamseddine y M. Berz establecieron una Teoría de la Medida en el cuerpo de Levi-Civita, $\mathcal{R}$, que les permite definir funciones medibles en subconjuntos medibles y con ello la integral de tales funciones. Todas sus definiciones y teoremas se dan en el marco del orden de este cuerpo. Pero $\mathcal{R}$ admite también una valuación no arquimediana v, que es compatible con el orden en el sentido que $|a| \leq |b| \Rightarrow v(a) \leq v(b)$. Por tanto la pregunta que surge naturalmente es por la medida de la bola unitaria $B_0(1) = \{x \in \mathcal{R} : \, v(x) \leq 1\}$.

En el artículo que se adjunta como Anexo 2 se establece que $B_0(1)$ no es medible, y como corolario obtenemos que todo intervalo $(a, b) \subset \mathcal{R}$ contiene una infinitud de subconjuntos convexos que no son medibles. Presentamos aquí un resumen, primeramente se describirá el cuerpo de Levi-Civita y luego se citan los resultados principales.

3.1. Preliminares: El cuerpo de Levi-Civita.

Definición 3.1.1. Un subconjunto $S \subset \mathbb{Q}$ se llama *finito-izquierdo* si para cada $q \in \mathbb{Q}$ el conjunto $\{s \in S \ : s < q\}$ es finito.
Consideramos el conjunto de las funciones $F = \{x : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\}$ y sea $supp(x) = \{s \in \mathbb{Q} \ : x(s) \neq 0\}$ el soporte de x. Entonces definimos el cuerpo de Levi-Civita por

$$\mathcal{R} := \{x \in F : \ supp(x) \text{ es finito izquierdo}\}$$

.

Notación: Sea $x \in \mathcal{R}$, la imagen de un elemento $q \in \mathbb{Q}$ bajo x se denota por $x[q]$ y será $\lambda(x) := \min supp(x)$ si $x \neq 0$, $\lambda(x) := \infty$ si $x = 0$.

Definimos la suma y multiplicación en $\mathcal{R}$ por

$$(x+y)[q] = x[q] + y[q],$$
$$(x \cdot y)[q] = \sum_{q_x + q_y = q} x[q_x] y[q_y].$$

La multiplicación en $\mathcal{R}$ está bien definida, pues para cada $q \in \mathbb{Q}$ existe una cantidad finita de sumandos en $\displaystyle\sum_{q_x + q_y = q} x[q_x] y[q_y]$. Se prueba directamente que $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ es efectivamente un cuerpo. Cada número real r se puede identificar en $\mathcal{R}$ con la función $r : \mathbb{Q} \to \mathcal{R}$ definida por

$$r[q] = \begin{cases} 0 & \text{if } q \neq 0 \\ r & \text{if } q = 0 \end{cases},$$

más aún, esta asignación es un isomorfismo de anillos . Por lo tanto $\mathcal{R}$ extiende al cuerpo $\mathbb{R}$.

Definimos ahora un **orden** en $\mathcal{R}$: Sean $x \neq y$ en $\mathcal{R}$, diremos que $x \leq y$ si $(x-y)[\lambda(x-y)] < 0$. Como es usual, $x \geq y$ si $y \leq x$. La relación binaria $\leq$ es un orden lineal y $(\mathcal{R}, \leq)$ es un cuerpo ordenado. El orden $\leq$ induce un valor absoluto $|\,|$ en el sentido usual, es decir, $|x| = \max\{x, -x\}$ para todo $x \in \mathcal{R}$. Notamos además que este orden es no-arquimediano, ya que $\mathbb{N}$ es acotado por cualquier función x tal que $\lambda(x) > 0$ y $x[\lambda(x)] > 0$ en $\mathbb{R}$.

Por otra parte, definimos la función $v : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^+$ por

$$v(x) = \begin{cases} e^{-\lambda(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Se verifica directamente que v es una **valuación no arquimediana** en $\mathcal{R}$ que, como en [**5**] 1.4.1, define una ultramétrica. La valuación v es **compatible** con el orden definido anteriormente en el siguiente sentido, para todo $a, b \in \mathcal{R}$ con $|a| \leq |b|$ entonces $v(a) \leq v(b)$. Equivalentemente, si $v(a) > v(b)$ implica que $|a| > |b|$.

Definición 3.1.2. El elemento $d \in \mathcal{R}$ es la función definida por $d[1] = 1$ y $d[q] = 0$ si $q \neq 1$.

Observamos que para $n \geq 1$

$$d^n[q] = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq n \\ 1 & \text{si } q = n \end{cases}.$$

El orden y la valuación v inducen una topología en $\mathbb{R}$ respectivamente. Tenemos que estas topologías son iguales, esta topología en común la denotamos por τ. $(\mathcal{R}, \tau)$ es un espacio ultramétrico, completo pues las sucesiones de Cauchy en $\mathcal{R}$ convergen. Observamos que la sucesión $(d^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente decreciente y que $\lim_{n\to\infty} d^n = 0$, por lo tanto es una sucesión coinicial en $\mathcal{R}^+ \setminus \{0\}$.

3.2. Conjuntos no medibles en $\mathcal{R}$

En lo que sigue, $I_{a,b}$ es un intervalo en $\mathcal{R}$ con puntos finales a, b $(a < b)$ de la forma (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ o $[a, b)$. El largo de un intervalo $I = I_{a,b}$ es $l(I) := b - a$. Las siguientes definiciones fueron introducidas por K. Shamseddine y M. Berz, para más detalles ver [**6**].

Definición 3.2.1. Diremos que $A \subset \mathcal{R}$ es **medible** si para todo $n \in \mathbb{N}$ existen conjuntos $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ y $\{J_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ de intervalos disjuntos dos a dos contenidos en $\mathcal{R}$ tales que

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^n \subset A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^n,$$

las series $\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n)$ and $\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)$ convergen en $\mathcal{R}$, y

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n) \right| < d^n.$$

Observamos que en esta definición si $m > n$ el conjunto de intervalos $\{I_k^m : k \in \mathbb{N}\}$ (respectivamente $\{J_k^m : k \in \mathbb{N}\}$) no tiene necesariamente relación con $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ (respectivamente $\{J_k^n : k \in \mathbb{N}\}$). Para obtener el resultado deseado fue necesario demostrar el siguiente lema, (mencionado en [**6**]).

Lema 3.2.2 ([**2**], 2.4). *Sea A un conjunto medible, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existen colecciones $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ y $\{J_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ de intervalos contenidos en $\mathcal{R}$ disjuntos dos a dos tales que*

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^{n-1} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^n \subset A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^n \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^{n-1},$$

las series $\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n)$ *y* $\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)$ *convergen en* $\mathcal{R}$*, y*

$$\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n) < d^n.$$

Más aún los límites

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n) \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)$$

existen en $\mathcal{R}$ *y son iguales.*

Podemos ahora definir una medida μ.

Definición 3.2.3. Sea $\mathbb{A}$ la clase de los conjuntos medibles en $\mathcal{R}$. Definimos la función $\mu : \mathbb{A} \to \mathcal{R}^+$ por:

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n),$$

Utilizando el lema 3.2.2, en [**2**] se prueba que μ es una función bien definida, en el sentido de que si A es medible entonces $\mu(A)$ es independiente de la elección de las colecciones de intervalos $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ y $\{J_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ que satisfacen las condiciones de la definición 3.2.1.

Teorema 3.2.4 ([**2**])**.** *μ satisface las siguientes propiedades:*

- $\mu(I) = l(I)$ *para todo intervalo* $I = I_{a,b}$.
- *Si* $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ *es una sucesión de intervalos de* $\mathcal{R}$ *disjuntos dos a dos tales que* $l(E_k) \in \mathcal{R}^+$ *y* $\sum_{k=0}^{\infty} l(E_k)$ *converge en* $\mathcal{R}$*, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} l(E_k).$$

- *Si* A *es medible entonces* $A + \lambda$ *también lo es, y* $\mu(A) = \mu(A+\lambda)$ *para todo* $\lambda \in \mathcal{R}$.

Con respecto a la monotonía de μ citamos a [**6**], pg. 377: Si $B \subset A \subset \mathcal{R}$ y si A, B así como $A \setminus B$ son medibles, entonces $\mu(B) \leq \mu(A)$.

El resultado principal, de este capítulo son los dos teoremas siguientes:

Teorema 3.2.5 ([**2**], 2.6)**.** *Para todo* $\delta \in \mathbb{R}$ *se tiene que la bola*

$$B_0(\delta) = \{x \in \mathcal{R} : v(x) \leq \delta\}$$

no es medible. En particular, la bola unitaria $B_0(1)$ *no es medible.*

Ahora consideramos un intervalo $I_{a,b}$ en $\mathcal{R}$. Dado que la valuación v es compatible con el orden definido en $\mathcal{R}$, para todo $x_0 \in I_{a,b}$ existe $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $B_{x_0}(\epsilon) \subset I_{a,b}$. Si $B_{x_0}(\epsilon)$ fuese medible entonces $B_0(\epsilon) = -x_0 + B_{x_0}(\epsilon)$ también lo sería, lo que contradice el teorema 3.2.5. Por tanto:

Teorema 3.2.6 ([**2**], 2.7)**.** *Todo intervalo* $I_{a,b}$ *en* $\mathcal{R}$ *contiene un subconjunto convexo no vacío* C *que no es medible.*

Como $\mathcal{R}$ es ordenado y completo, cada intervalo contiene $I_{a,b}$ con $a < b$ contiene infinitos puntos x_0 que son distintos de a y b, lo que establece el siguiente corolario:

Corolario 3.2.7 ([**2**], 2.8). *Todo intervalo $I_{a,b}$ contiene infinitos conjuntos convexos que no son medibles.*

Bibliografía

[1] H. M. Moreno, *Toward an ultrametric calculus in a field K with an infinite rank valuation*, in Advances in non-Archimedean Analysis, Contemp. Math., vol. 551, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 221-230.

[2] H. M. Moreno, *Non-measurable sets in the Levi-Civita field*, in Advance in Ultrametric Analysis, Contemp. Math., vol. 596, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 163-177.

[3] W.H. Schikhof, *Ultrametric calculus: An introduction to p-adic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 4. Cambridge University Press (1984).

[4] H. Keller, *Ein nicht-klassischer Hilbertscher Raum*, Math Z. 172 (1980), $41-49$.

[5] H. Ochsenius and W. Schikhof, *Banach spaces over fields with an infinite rank valuation*, In p-Adic Functional Analysis, Lecture Notes in pure and applied mathematics 207, edited by J. Kakol, N. De Grande-De Kimpe and C. Perez-Garcia. Marcel Dekker (1999), 233-293.

[6] K. Shamseddine and M. Berz, *Measure theory and integration in Levi-Civita field*. Contemp. Math. 319, Amer. Math. Soc. (2003), $369-387$.

[7] K. Shamseddine and M. Berz, *Convergence on the Levi-Civita field and study of power series*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker (2000), 283-299.

[8] M.P. Solèr, *Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces*. Communications in Algebra 23 (1995), $219-243$.

[9] P. Ribenboim, *Théorie des valuations*. Deuxième édition multigraphiée. Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 9 (Été, 1964), Les Presses de l'Universitd́e Montréal, Montreal, Que. 1968.

Contemporary Mathematics
Volume **551**, 2011

Toward an ultrametric calculus in a field K with an infinite rank valuation.

Héctor M. Moreno

Abstract. K is the scalar field of the first orthomodular (or Form Hilbert) space, described by H. Keller in 1980. It has a non-archimedean order, an infinite rank valuation as well as an explicitly defined ultrametric, all of which induce the same topology. We will present results concerning analytic functions, and show some examples that sharply contrast with the case of rank one valuations. Finally we prove a theorem concerning local invertibility for C^1 functions.

1. Introduction

Ultrametric Calculus over valued fields of rank one is a well developed theory (see [**1**]), and for the last years it has been studied in the case of the field of Levi Civita, where the valuation has rank 1. In the case of fields with valuations of infinite rank, R. Hobeika (Ph.D Thesis, University of Paris VI, 1976) studied power series an Laurent series on Krull valued fields F, and showed that the domain of convergence of a power series is either K or reduced to a point. Therefore the classical definition of an analytic function on an open subset only gives entire functions on K. Y. Perrin extended the notion of analytic functions on an open subset, following ideas of Krasner ([**3**]) and studied properties of these functions (algebraic operations, derivation, characterization of the set of their zeros, Weierstrass theorem, Mittag-Leffler theorem). (See [**4**], [**5**], [**6**] and [**7**]). However the fields she considers are always algebraically closed.

We approach the study of ultrametric calculus from another direction. We will consider here the field K, described in [**2**]. Its importance comes from the fact that it is the prototypical canonical example of a scalar field for orthomodular non-classical spaces of Hilbert type. According to the theorem of M.P. Soler (see [**8**]), these fields can never be algebraically closed. K has a non-archimedean order, which extends the usual ordering of its subfield $\mathbb{R}$. This order induces an ultrametrizable topology, that is also generated by a valuation v of infinite rank. A crucial difference with the Levi Civita field, that is also an ordered field, is the fact that there is no distinguished element $d > 0$ such that

$$\forall \epsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ (d^k < \epsilon),$$

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46S10; Secundary 46H35.
Key words and phrases. ultrametric calculus, valued fields, analytic functions.
Partially suported by Fondecyt Proyecto 1080194.

but instead "infinitely many degrees of infinity". This has as a consequence that K has properties that sharply contrast with these fields as well as with the classical fields of reals or complex numbers. We recall for instance that the region of convergence of power series is either one point, or the whole K, and there exists elements $z \in K$ such that $0 < z < 1$ but the sequence $\{z^n\}$ does not converge to zero. In this paper we aim to give an introduction to Ultrametric Calculus in K. We describe in the Preliminaries the field K, its ordering and the valuation v. Then we show results for analytic functions that are clearly different from the case of rank one, or that coincide with them but with completely different proofs. We also give counterexamples to some theorems for the real or complex case.

2. Preliminaries

2.1. The field K. Let us consider $F_0 = \mathbb{R}$ with its usual ordering, and the set of variables $\{X_1, X_2, X_3, \ldots\}$. For any $n \geq 1$ define $F_n := F_0(X_1, \ldots, X_n)$ and let

$$F_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

.

We order F_n by powers of X_n, a polynomial $P(X_n) = a_0 + a_1 X_n + ... + a_s X_n^s \in F_{n-1}[X_n]$ is positive in F_n if and only if $a_s > 0$ in F_{n-1}. For $\lambda \in F_n$, $\lambda = \dfrac{p(X_n)}{q(X_n)}$ with $p(X_n), q(X_n) \in F_{n-1}[X_n]$ and $q(X_n) \neq 0$, we shall say that λ is a positive element in F_n if and only if $p(X_n)q(X_n) > 0$. Since the ordering of F_n extends the ordering of F_{n-1}, F_∞ is an ordered field. In fact given $\lambda \in F_\infty$ there exists $n \in \mathbb{Z}$ such that $\lambda \in F_n$, hence $\lambda > 0$ in F_∞ if and only if the same is true in F_n. Notice that this ordering is non-archimedean.

As usual $|\lambda|$ will denote the absolute value of $\lambda \in F_\infty$, that is to say,

$$|\lambda| = \begin{cases} \lambda, & \text{if } \lambda \geq 0 \\ -\lambda, & \text{if that is not the case.} \end{cases}$$

The order of F_∞, induces a topology in the field, which has as a base of zero neighborhoods the collection of sets $U_\epsilon = \{a \in K : |a| < \epsilon\}$ for all ϵ in F_∞.

We consider now a non-archimedean valuation in F_∞. Firstly we define the value group.

For every $i = 1, 2, 3, 4, ...$ we pick a real number $g_i > 1$ and we consider the multiplicative cyclic subgroup G_i generated by g_i, ordered by the usual ordering of $\mathbb{R}$. We define Γ by

$$\Gamma := \left\{ \gamma \in (g_1^{n_1}, g_2^{n_2}, g_3^{n_3}, ..., g_i^{n_i}, ...) \in \prod_{i=1}^{\infty} G_i : \; n_i \in \mathbb{Z} \text{ such that } supp(\gamma) \text{ is finite} \right\},$$

with $supp(\gamma) := \{i \in \mathbb{N} : n_i \neq 0\}$. Γ is a linearly ordered group with the componentwise operation and the antilexicographical ordering. The identity is $1 = (1, 1, 1, 1, 1, ...)$.

For every $m \geq 1$ we put

$$H_m = G_1 \times G_2 \times ... \times G_m \times \{1\} \times \{1\} \times ...$$

and then $\{1\} = H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset ...$ are the convex subgroups of Γ. Therefore this is a group of infinite rank.

The valuation $v : F_\infty \to \Gamma \cup \{0\}$ is the unique valuation defined on F_∞ such that

(1) $v|_{\mathbb{R}}$ is the trivial valuation

(2) $v(X_n) = \hat{g}_n := (1, ..., 1, g_n, 1, ...)$.

where 0 is a minimal element adjoined to Γ such that $0 \cdot g = g \cdot 0 = 0$.

Let $r \in \Gamma$ and $a \in F_\infty$. The *open ball with center a and radius r* is the set

$$B_a(r^-) = \{x \in K : \ v(x - a) < r\}.$$

Now we define an ultrametric in F_∞. Let $\phi : F_\infty^+ \to \mathbb{R}$ be given by

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} 2^{n+1} & \text{if } X_n^s < \alpha \leq X_{n+1}^r \text{ for all } s \in \mathbb{Z} \text{ and some } r \in \mathbb{Z}^+. \\ 2 & \text{if } s < \alpha < X_1^r \text{ for all } s \in \mathbb{Z}^+ \text{ and some } r \in \mathbb{Z}^+. \\ 1 & \text{if } \frac{1}{s} \leq \alpha \leq r, \text{ with } r, s \in \mathbb{Z}^+. \\ \frac{1}{2} & \text{if } \frac{1}{X_1^r} < \alpha < s \text{ for all } s \in \mathbb{Z}^+ \text{ and some } r \in \mathbb{Z}^+. \\ 2^{-(n+1)} & \text{if } \frac{1}{X_{n+1}^r} < \alpha \leq \frac{1}{X_n^s} \text{ for all } s \in \mathbb{Z} \text{ and some } r \in \mathbb{Z}^+. \\ 0 & \text{if } \alpha = 0. \end{cases}$$

where $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$. A direct computation shows that the map $d : F_\infty \times F_\infty \to \mathbb{R}^+$ defined by

$$d(x, y) = \phi(|x - y|)$$

is indeed an ultrametric for F_∞.

It can be proven directly that each of the following collections of subsets of F_∞

$$B_o = \{O_a(t^-) : \ a, t \in F_\infty\}$$
$$B_d = \{C_a(s^-) : \ a \in F_\infty, \ s \in \mathbb{R}^+\}$$
$$B_v = \{B_a(r^-) : \ a \in F_\infty, \ r \in \Gamma\}$$

where

$$O_a(t^-) = \{x \in F_\infty : \ |x - a| < t\}$$
$$C_a(s^-) = \{x \in F_\infty : \ d(x - a) < s\}$$
$$B_a(r^-) = \{x \in F_\infty : \ v(x - a) < r\}.$$

is a subbasis for a topology in K. But since for every $x \in F_\infty$ the following inclusions hold.

$$C_x\left(\frac{1}{2^{n-1}}^-\right) \subset O_x\left(\frac{1}{X_n}^-\right) \subset C_x\left(\frac{1}{2^n}^-\right)$$
$$O_x\left(\frac{1}{X_n}^-\right) \subset B_x((\hat{g}_n^{-1})^-) \subset O_x\left(\frac{1}{X_{n-1}}^-\right)$$

for every $n \geq 1$, these topologies are identical. This common topology will be denoted by τ.

(F_∞, τ) is an ultrametrizable topological space, therefore we can consider K the completion of F_∞ by Cauchy sequences (nets). The topology in K is generated by the extension of d to K,

$$d(x, y) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$$

where $x, y \in K$ and $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ are sequences in F_∞ such that $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Let $a, b \in K$ and $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sequences in F_∞ such that $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ and $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. It can be proved directly that K is a field with the operations $a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$, $ab = \lim_{n\to\infty}(a_n b_n)$ and $a^{-1} = \lim_{n\to\infty} a_n^{-1}$.

On the other hand, we extend the order of F_∞ to K by defining the binary relation $\leq$ in K as $a \leq b$ if and only if $a = b$, or, $a \neq b$ and there exist sequences in F_∞ such that $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ and $(a_n - b_n) \leq 0$ for all $n \geq N$ for some $N \in \mathbb{N}$.

PROPOSITION 2.1. $(K, \leq)$ is an ordered field.

The order in K induces an absolute value, which will also be denoted by $|\,|$.

Let $a \in K$ with $a \neq 0$, there exists a sequence $(a_n)_n$ in F_∞ that converges to a. Hence, for some $N \in \mathbb{N}$ we have that

$$v(a_n) = v(a_n - a_N + a_N) = v(a_N) \quad (n \geq N).$$

Therefore we can extend the valuation v of F_∞ to K as $v(a) = v(a_N)$, and it can be proved directly that (K, v) is a valued field with a valuation of infinite rank.

As in the case of F_∞, each of the maps d, v and $|\,|$ induce the same topology τ in K, and (K, τ) is a topological field. We remark that K is not locally compact since

$$\{x \in K : \ v(x) \leq 1\} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} (a + \{x \in K : \ v(x) < 1\}) = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \{x \in K : \ v(x - a) < 1\}$$

is a countable covering by disjoint open sets and thus it cannot have a finite sub-covering. This implies that the unit ball in K is not compact.

In addition K is not separable since $\mathbb{R}$ is an uncountable discrete set in K.

3. The Main Result.

An ultrametric calculus for the field K is currently being developed. New results have been obtained that sharply contrast with the case of fields with a rank one valuation.

3.1. Analytic functions.

DEFINITION 3.1. Let $a_0, a_1, \ldots$ be a sequence in K. The power series $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ is the sequence of polynomial functions en the variable z given by $s_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$. The region of convergence of the power series $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ is the set

$$\{z \in K : (s_n(z))_n \text{ converges in } K\}$$

THEOREM 3.2. *A power series* $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ *with* $a_j \in K$ *converges, for* $z \neq 0$, *if and only if* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

PROOF. Assume that the sequence is convergent, then $\lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0$. Let z be an element in K, there exist a convex subgroup $H_m \neq \{Id\}$ of Γ such that for all $n \in \mathbb{N}$, $v(z^n) \in H_m$. Choose $y \in K$ such that $v(y) \in H_{m+1} \setminus H_m$ and $v(y) < v(z^n)$ for all $n \in \mathbb{N}$. It follows that

$$v(a_n)v(y) < v(a_n)v(z^n) \to 0$$

when $n \to \infty$. Therefore $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

On the other hand, let us suppose that $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. For any $z \in K$ and $m \in \mathbb{N}$ such that $v(z) \in H_m$, choose $y \in K$ with $v(y) \in H_{m+1} \setminus H_m$, $v(z^n) < v(y)$ for every $n \in \mathbb{N}$. Then

$$v(a_n)v(z^n) < v(a_n)v(y) \to 0$$

when $n \to \infty$, and the power series $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ converges in K. $\square$

A direct consequence of Theorem 3.2 is the fact that the usual series expansion for the exponential, logarithm, and trigonometric functions are not convergent in K.

THEOREM 3.3. *Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ be a convergent power series in K. Then for every $a \in K$ this series converges uniformly in $B_a(r)$, for all $r \in \Gamma$. The function*

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (z \in K)$$

is differentiable and its derivative is the function

$$z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \qquad (z \in K).$$

PROOF. Let $\epsilon > 0$. Choose $y \notin B_a(r)$ such that $v(y) > v(z)$ for every $z \in B_a(r)$. Since the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converges, we observe that $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, this implies that there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such tha $\max_{n \geq n_0} v(a_n)v(y) < \epsilon$. Hence for any $z \in B_a(r)$

$$v\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n\right) \leq \max_{n \geq n_0} v(a_n)v(z^n) \leq \max_{n \geq n_0} v(a_n)v(y) < \epsilon.$$

We conclude that the power series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converges uniformly in $B_a(r)$.

Since standard classical arguments hold true in this case, for the proof of the second statement it is enough to observe the following. For all $n \geq 1$, $v(na_n z^{n-1}) = v(z^{-1})v(a_n z^n)$, hence the power series $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converges for all $z \in K$. $\square$

DEFINITION 3.4. Let $D \subseteq K$ be a non-empty open set. A function $f : D \to K$ is analytic in D if there are elements $u \in D$, $r \in \Gamma$ and $a_0, a_1, \ldots \in K$ such that for every $z \in D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-u)^n.$$

Let us now study the following situation. In the real or complex case, as well as in rank one valued fields, if f is a analytic in an open ball U and $f(z) \neq 0$ for any $z \in U$ then $\frac{1}{f}$ is analytic in U.
The following example shows that this statement is false in K.

EXAMPLE 3.5. Let us consider the function $f : B_0(1) \to K$ defined by the power series

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{X_n} z^n.$$

It is clearly an analytic function. By theorem 3.7 there exists $r \in \Gamma$ such that $f(z) \neq 0$ for all $z \in B_0(r)$. However if there were an analytic function $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ in $B_0(r)$ such that $f(z)g(z) = 1$, then $b_0 = 1$ and

$$b_n = -\sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{1}{X_{n-i}} \qquad (n \geq 1).$$

By induction on n, it can be proved directly that $v(b_n) = v(X_1)^{-n}$ for every $n \in \mathbb{N}$. Therefore g is not analytic in $B_0(r)$, since the sequence $(b_n)_n$ does not converge to 0 when $n \to \infty$.

THEOREM 3.6. *Let f be an analytic function in a open subset D. Then for every $v \in D$ there exists $b_0, b_1, \ldots \in K$ such that $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-v)^n$ for all $z \in D$.*

PROOF. The proof given in [**1**] is valid for this case. □

Analytic continuation is trivial in this case. On the other hand, let $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-u)^n$ be an analytic function in an open set D. By theorem 3.2, we can extend this function for all $z \in K$, and the theorem 3.6 assures us that there are $a_1, a_2, ... \in K$ such that for every $z \in K$ we have that $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, in particular, for every $z \in D$. Therefore, we can conclude that a function is analytic in D if and only if there exists $a_0, a_1, ... \in K$ such that for every $z \in D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

For the proof of the next theorem we need to introduce the residual fields $\hat{k}_n$, $n \in \mathbb{N}$, associated to K. Recall that for $n \in \mathbb{N}$ the convex subgroup H_n is defined by

$$H_n = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n \times \{1\} \times \{1\} \times ...$$

Let us consider now

$$R_n = \{z \in K : v(z) \leq s \quad \text{for some } s \in H_n\}$$

$$D_n = \{z \in K : v(z) < s \quad \text{for all } s \in H_n\}$$

Then R_n is a local ring with maximal ideal D_n. In fact, R_n is the valuation ring corresponding to the valuation $v_n : K \to \Gamma/H_n \cup \{0\}$. The residual field is $\hat{k}_n := R_n/D_n$. It is isomorphic to $\mathbb{R}(X_1, \ldots, X_n)$. Clearly, if $m < n$ then $R_m \subset R_n$. The canonical homomorphism from R_n to $\hat{k}_n$ will be denoted by θ_m.

THEOREM 3.7. *Let f be an analytic function on the ball $B_a(r)$. If there is a sequence $\{w_k\}_k$ in $B_a(r)$ such that $w_i \neq w_j$ for $i \neq j$ and $f(w_k) = 0$ for all $k \in \mathbb{N}$, then $f \equiv 0$.*

PROOF. Let $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ be analytic in $B_a(r)$, without loss of generality we can assume that $\max_j v(a_j) = 1$. Now $B_a(r) \subseteq B_0(s)$ for some $s \in \Gamma$, therefore there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $v(w_k) \in R_m$ for all k. Since $\max_j v(a_j) = 1$, $f(z)$ induces a function $\theta_n(f(z))$ in any residual field $\hat{k}_n$, $n \geq m$. But $\lim_k a_k = 0$, therefore $\theta_n(f(z))$ is a polynomial with coefficients in $\hat{k}_n$. Let us first consider the projection θ_m from R_m to $\hat{k}_m$. For every w_k we have that $\theta_m(w_k)$ is a zero of $\theta_m(f(z))$. But a polynomial can only have a finite number of zeros in a field, therefore for a cofinite subset of $\{w_k\}_k$ we have that $\theta_m(w_k) = 0$ in $\hat{k}_m$. This means that there is a subsequence $\{w_k^{(m)}\}_k$ of $\{w_k\}_k$ such that for $r \neq s$, $v(w_r^{(m)} - w_s^{(m)}) \in D_m$.

Now consider the sequence $\{w_k^{(m)}\}_k$. We observe that $w_k^{(m)} \in R_{m+1}$ and $f(w_k^{(m)}) = 0$ for all $k \in \mathbb{N}$. By the argument used above, there exists a subsequence $\{w_k^{(m+1)}\}_k$

of $\{w_k^{(m)}\}_k$ such that $v(w_r^{(m+1)} - w_s^{(m+1)}) \in D_{m+1}$. This procedure can be continued, and we obtain a sequence of sequences

$$\begin{array}{cccc} w_1^{(m+1)} & w_2^{(m+1)} & w_3^{(m+1)} & \cdots \\ w_1^{(m+2)} & w_2^{(m+2)} & w_3^{(m+2)} & \cdots \\ w_1^{(m+3)} & w_2^{(m+3)} & w_3^{(m+3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

such that each sequence is a subsequence of the predecesor and for each $j \in \mathbb{N}$, $v(w_r^{(m+j)} - w_s^{(m+j)}) \in D_{m+j}$ for all $r, s \in \mathbb{N}$. The sequence $\{w_k^{(m+k)}\}_{k\geq 1}$ is still a subsequence of $\{w_k\}_k$, and satisfies $v(w_r^{(m+r)} - w_s^{(m+s)}) \in D_{m+d}$ where $d = \min\{r, s\}$. Hence, $\{w_k^{(m+k)}\}_{k\geq 1}$ is a Cauchy sequence of zeros of $f(z)$ that converges in K. By classical arguments we prove that this implies that $a_n = 0$ for every $n \in \mathbb{N}$ and $f(z) \equiv 0$. □

Definition 3.8. Let $X \subset K$. A function $f : X \to K$ is locally constant on X if for every $a \in X$ there is a neighbourhood V_a of a such that f is constant in $V_a \cap X$.

If f is locally constant on X, then X admits a partition into relatively clopen sets U_i, and f is constant on each U_i. The locally constant functions are continous. In adition they are differentiable but not analytic.

Remark 3.9 (No intermediate value theorem). K is an ordered field, therefore one could ask if the intermediate value theorem holds true for continuous functions. But is not the case, since locally constant functions that take a finite numbers of values are, in particular, continuous. As an example consider the following locally constant function.

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } v(z) \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In adition, let $g(z) = z^2 - X_1$. It is clearly an analityc function in $[0, X_3]$. However $g(0) = -X_1$ and $g(X_3) = X_3^2 - X_1$, but $g(z) = 2X_1$ has no solution in K because X_1 is not a square in this field.

3.2. C^1 functions. Our purpose is to establish a theorem of invertibility for continuously differentiable functions.
If we define them as continuous functions with continuous derivatives, we can find examples that satisfy these conditions but do not have a local inverse. This is shown in the following example, based in [**1**]. Define $f : K \to K$ by

$$f(z) = \begin{cases} z - \frac{1}{X_{2n}} & \text{if } z \in B_n \text{ for some } n \in \mathbb{N}. \\ z & \text{otherwise.} \end{cases}$$

with $B_n = \left\{ z \in K : v\left(z - \frac{1}{X_n}\right) < \hat{g}_{2n}^{-1} \right\}$ and $n \geq 1$.

The sets B_n are both open and closed, in addition we observe that if $z \in B_n$ for some $n \in \mathbb{N}$ then $v(z) = g_n^{-1}$, which implies that $B_n \cap B_m = \emptyset$ if $m \neq n$. Therefore f is well defined.

We have that f is not injective in any neighbourhood of 0, since $v(\frac{1}{X_n} - \frac{1}{X_{2n}} - \frac{1}{X_n}) = v(\frac{1}{X_{2n}})$ which implies that

$$f\left(\frac{1}{X_n} - \frac{1}{X_{2n}}\right) = f\left(\frac{1}{X_n}\right) = \frac{1}{X_n} - \frac{1}{X_{2n}}.$$

On the other hand the map

$$g(z) = z - f(z) = \begin{cases} \frac{1}{X_{2n}} & \text{if } z \in B_n \text{ for some } n \in \mathbb{N}. \\ 0 & \text{in any other case.} \end{cases}$$

is locally constant and therefore differentiable in K with derivative zero, From this we can conclude that f is differentiable, it is not injective in any neighbourhood of zero and $f' \equiv 1$, therefore there is no local inverse in $f(0)$.

Definition 3.10. Let X be a set with no isolated points. We say that a function f is **continuously differentiable** in $a \in X$ if

(1) it is diferentiable in a.
(2) for every $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that if $v(x-a) < \delta$, $v(y-a) < \delta$ and $x \neq y$ then

$$v\left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(a)\right) < \epsilon.$$

f is continuously differentiable in X(f is C^1 in X) if it is so in every $a \in X$.

The following theorem is well known in the case of rank one valuations. But its proof relies in the fact that those fields are henselian, since they are complete. This is not true for K, since the field of formal power series $\mathbb{R}((X_1, X_2, ...))$ is a maximal proper extension of K. A new proof is given, which relies on the ultrametrizability of the topology of K.

Theorem 3.11 (Local invertibility for C^1 functions). *Let X be a set with no isolated points and $f : X \to K$ be a function defines in some neighbourhood of $a \in X$. If f is C^1 in a and $f'(a) \neq 0$ then for some small enough $r \in \Gamma$ the restriction $f : B_a(r) \to B_{f(a)}(v(f(a))r)$ of f to $B_a(r)$ is inyective and surjective. The local inverse g of f*

$$g : B_{f(a)}(v(f(a))r) \to B_a(r)$$

is C^1 in $f(a)$ and $g'(f(a)) = f'(a)^{-1}$.

Proof. Since f is C^1 in a, there is a ball $B_a(r)$ such that

$$\sup_{\Gamma^{\#}} \left\{ v\left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(a)\right) : \, x, y \in B_a(r), \, x \neq y \right\} < v(X_1^{-1} f'(a)).$$

By the strong triangle inequality we can conclude that

$$v(f(x) - f(y)) = v(f'(a))v(x - y) \;\; (x, y \in B_a(r)).$$

Therefore f is injective in $B_a(r)$ and $f(B_a(r)) \subseteq B_{f(a)}(v(f'(a))r)$.

On the other hand, let $c \in B_{f(a)}(v(s)r)$ where $s = f'(a)$. In order to prove that the restriction $f : B_a(r) \to B_{f(a)}(v(f(a))r)$ of f to $B_a(r)$ is surjective, we must prove that the function $x \mapsto f(x) - c$ has a zero in $B_a(r)$. For that we define the function h by $h(z) = z - s^{-1}(f(z) - c)$. Clearly $h(B_a(r)) \subseteq B_a(r)$.

Let $x, y \in B_a(r)$, then

$$\begin{aligned} v(h(x)-h(y)) &= v(x-y-s^{-1}(f(x)-f(y))) \\ &= v(s^{-1}(x-y))\ v\left(\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-s\right) \\ &< v(X_1^{-1}(x-y)). \end{aligned}$$

Hence, $|h(x)-h(y)| < |X_1^{-1}(x-y)|$ for every $x, y \in B_a(r)$, which implies that

$$\phi(|h(x)-h(y)|) \leq \phi(|X_1^{-1}(x-y)|) \leq \phi(|X_1^{-1}|)\phi(|x-y|).$$

Therefore $d(h(x), h(y)) \leq \frac{1}{2}d(x,y)$, we obtain that h is a contraction in the metric space (K, d). Since K is complete and d is an ultrametric whose topology coincides with that induced by $|\ |$ and $v(\ )$, we apply Banach's fixed point theorem to h and we obtain the fact that this map has a unique fixed point in $B_a(r)$. This means that $f : B_a(r) \to B_{f(a)}(v(f(a))r)$ is surjective.

Let g be the algebraic inverse of $f : B_a(r) \to B_{f(a)}(v(f(a))r)$. The fact that

$$v(f(x)-f(y)) = v(f'(a))v(x-y) = v(f'(a))v(g(f(x))-g(f(y)))\quad (x, y \in B_a(r))$$

implies the continuity of g in $B_{f(a)}(v(f(a))r)$. Let $z, t \in B_{f(a)}(v(f(a))r)$, then

$$g'(f(a)) = \lim_{(z,t)\to(f(a),f(a))} \frac{g(z)-g(t)}{z-t} = \lim_{(u,v)\to(a,a)} \frac{u-v}{f(u)-f(v)} = f'(a)^{-1}$$

where $f(u) = z$ and $f(v) = t$, proving the second part of the theorem. ☐

References

[1] W.H. Schikhof, *Ultrametric calculus: An introduction to p-adic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 4. Cambridge University Press (1984).

[2] H. Keller, *Ein nicht-klassischer Hilbertscher Raum*, Math Z. 172 (1980), 41 – 49.

[3] M. Krasner, *Rapport sur le prolongement analytique uniforme dans les corps valués complets par la méthode des éléments analytiques quasi-connexes*, Bull. Soc. Math. France (1974), 39 – 40.

[4] Y. Feynerol-Perrin, *Répartitions des zéros des éléments et des fonctions analytiques sur un ouvert dun corps valué au sens de Krull* , Cr. Acad. Sc. Paris 287 (1978).

[5] Y. Feynerol-Perrin, *Fonctions analytiques dans les corps valués de rang superieur à un*, Compositio Math. 49 (1983), 51 – 74.

[6] Y. Feynerol-Perrin et Labib Haddad, *Un théorème de Mittag-Leffler pour les fonctions méromorphes sour un corps valué su sens de Krull*, Compositio Math. 57 (1986), 249 – 269.

[7] Y. Feynerol-Perrin, *Transformations conformes dans les corps Hederiques.* Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 24 (1989), 219 – 238.

[8] M.P. Solèr, *Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces.* Communications in Algebra 23 (1995), 219 – 243.

[9] P. Ribenboim, *Théorie des valuations.* Deuxième édition multigraphiée. Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 9 (Été, 1964), Les Presses de l'Universitde Montréal, Montreal, Que. 1968.

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.
E-mail address: hmoreno@mat.puc.cl

Contemporary Mathematics
Volume **596**, 2013

Non-measurable sets in the Levi-Civita field

Héctor M. Moreno

Abstract. In Shamseddine and Berz (2003) a measure theory on Levi-Civita field, $\mathcal{R}$ was developed. This work relies heavily on the fact that this field is an extension of $\mathbb{R}$ that has a non-archimedean ordering, with respect to which it is real closed, and complete in the order topology. However, using the fact that it also is a valued field, with a valuation v compatible with the order, we prove that it has infinitely many non-measurable convex subsets. In particular the unit ball $B_0(1) = \{x \in \mathcal{R} : \ v(x) \leq 1\}$ cannot be measured.

1. Preliminaries

Definition 1.1. Let $\mathcal{R}$ be the set

$$\mathcal{R} := \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : \ \{x \in \mathbb{Q} : \ f(x) \neq 0\} \text{ is left-finite in } \mathbb{R}\},$$

that is, the elements of $\mathcal{R}$ are functions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ such that, below every rational number q there are only finitely many points where f does not vanish.

The value of the function $x \in \mathcal{R}$ at $q \in \mathbb{Q}$ is denoted by $x[q]$ and $\lambda(x) := \min supp(x)$ if $x \neq 0$, $\lambda(x) = \infty$ if $x = 0$.

Addition and multiplication are given by

$$(x + y)[q] = x[q] + y[q],$$

$$(x \cdot y)[q] = \sum_{q_x + q_y = q} x[q_x]y[q_y].$$

Multiplication is a well defined operation in $\mathcal{R}$, since for every $q \in \mathbb{Q}$ there are only a finite number of summands in $\sum_{q_x+q_y=q} x[q_x]y[q_y]$. It can be proven in a direct way that $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ is a field. The real numbers $\mathbb{R}$ are identified with the functions

$$r[q] = \begin{cases} 0 & \text{if } q \neq 0 \\ r & \text{if } q = 0 \end{cases} .$$

Moreover the embedding above is compatible with addition and multiplication. Therefore $\mathcal{R}$ is a field extension of $\mathbb{R}$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 46S10; Secundary 46H35.

Key words and phrases. ordered fields, valued fields, measure theory.

Partially suported by Beca Doctorado Mecesup.

Now we will introduce an order relation as well as a non-archimedean valuation on $\mathcal{R}$. The interplay between them will be crucial in the proof of our main theorem in the last section.

The **order** in $\mathcal{R}$ is defined as follows. For $x \neq y$ in $\mathcal{R}$, we shall say that $x < y$ if $(x-y)[\lambda(x-y)] < 0$. As usual $x > y$ means $y < x$. Now $\leq$ is a linear order and $(\mathcal{R}, \leq)$ is an ordered field. The order induces an 'absolute value '$|\,|$, in the classical sense, $|x| = \max\{x, -x\}$ for all x.

On the other hand we define a map $v : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^+$ by

$$v(x) = \begin{cases} e^{-\lambda(x)} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}.$$

Then v is a **non-archimedean valuation** on $\mathcal{R}$, and it defines as usual an ultrametric. The valuation v is **compatible** with the order defined before in the following sense.

LEMMA 1.2. *For all $a, b \in \mathcal{R}$ if $|a| \leq |b|$ then $v(a) \leq v(b)$. Equivalently, $v(a) > v(b)$ implies $|a| > |b|$.*

For the proof we remark that it is a direct consequence of the fact that $\lambda(a+b) \geq \min\{\lambda(a), \lambda(b)\}$.

DEFINITION 1.3. The element $d \in \mathcal{R}$ is the element defined by $d[1] = 1$ and $d[q] = 0$ for $q \neq 1$.

Notice that for $n \geq 1$

$$d^n[q] = \begin{cases} 0 & \text{if } q \neq n \\ 1 & \text{if } q = n \end{cases}.$$

REMARK 1.4. Clearly for all $r \in \mathbb{R}^+$, $d < r$ and $d^m < rd^n$ whenever $m > n$.

We now study $\mathcal{R}$ as a topological field. It is a direct verification that each of the following families of susets of $\mathcal{R}$

$$B_o = \{O_a(t^-) : a \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{R}^+\}$$
$$B_v = \{B_a(r^-) : a \in \mathcal{R}, r \in \mathbb{R}^+\}$$

where

$$O_a(t^-) = \{x \in \mathcal{R} : |x-a| < t\}$$
$$B_a(r^-) = \{x \in \mathcal{R} : v(x-a) < r\}.$$

is a subbase for a topology in $\mathcal{R}$. But, since for all $x \in \mathcal{R}$ and all $n \geq 1$ the following inclusions hold,

$$B_x\left((e^{-n})^-\right) \subset O_x\left((d^n)^-\right) \subset B_x\left((e^{-(n-1)})^-\right)$$

we conclude that the topologies are equal. This unique topology will be denoted by τ. $(\mathcal{R}, \tau)$ is an ultrametric space, complete in the sense that every Cauchy sequence in $\mathcal{R}$ converge. Notice that the sequence $(d^n)_n$ is strictly decreasing and $\lim_{n\to\infty} d^n = 0$, hence it is a coinitial sequence in $\mathcal{R}^+ \setminus \{0\}$.

For our purposes we need to introduce general definitions of convergence of sequences and series in $\mathcal{R}$; see [**2**]. For a detailed study of convergence of sequences and series in $\mathcal{R}$, we refer the reader to [**4**].

Definition 1.5. Let T a countable set and $n \mapsto a_n$ a mapping from T into $\mathcal{R}$. We shall say that

(1) $\lim_{n\in T} a_n = a \in \mathcal{R}$, if for every $\epsilon > 0$ in $\mathbb{R}$ there exists a finite subset $T' \subset T$ such that $v(a_n - a) < \epsilon$ for every $n \in T \setminus T'$.

(2) $\sum_{n\in T} a_n = s \in \mathcal{R}$, if for every $\epsilon > 0$ in $\mathbb{R}$ there exists a finite subset $T' \subset T$ such that for every finite subset T'', for which $T' \subset T'' \subset T$, the following holds.

$$v\left(s - \sum_{n\in T''} a_n\right) < \epsilon.$$

In the case $T = \mathbb{N}$ we obtain the usual definitions of $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ and $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$ as stated in the following Lemma.

Lemma 1.6. *Let $(a_n)_n$ be a sequence in $\mathcal{R}$, and a, s elements in $\mathcal{R}$, then*

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *if and only if* $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = a$*, where* $a \in \mathcal{R}$.

(2) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$ *if and only if* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$*, where* $s \in \mathcal{R}$.

Proof. Choose $\epsilon > 0$ in $\mathbb{R}$.

(1) If $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $v(a_n - a) < \epsilon$ if $n \geq n_0$. Then with $T' = \{1, 2, \ldots, n_0\}$ we observe that $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = a$. On the other hand, if $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = a$ there exists a finite subset T' of $\mathbb{N}$ such that $v(a - a_n) < \epsilon$ for $n \in T \setminus T'$. Since T' is finite, we consider $n_0 = \max T'$, hence if $n \geq n_0$ we have that $v(a - a_n) < \epsilon$. Therefore $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(2) Suppose that $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$, then there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$v\left(s - \sum_{j=0}^{n} a_j\right) < \epsilon$$

for all $n \geq n_0$. With $T' = \{0, 1, \ldots, n_0\}$, we obtain $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$.

On the other hand, if $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s$ there exists a finite subset T' of $\mathbb{N}$ such that for every finite subset T'' for which $T' \subset T'' \subset T$, we have that

$$v\left(s - \sum_{n\in T''} a_n\right) < \epsilon.$$

Since T' is finite, we observe that for $m \notin T'$,

$$
\begin{aligned}
v(a_m) &= v\left(\sum_{n \in T' \cup \{m\}} a_n - \sum_{n \in T'} a_n\right) \\
&\leq \max\left\{v\left(\sum_{n \in T' \cup \{m\}} a_n - s\right), v\left(s - \sum_{n \in T'} a_n\right)\right\} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}
$$

We conclude that $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$. From the first part of the Lemma we observe $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Hence the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converges and it is equal to s, since if this were not so, we would have a contradiction with the first part of the proof.

□

This lemma permits us to give formal proofs of some classical facts about series.

PROPOSITION 1.7. *Let $(a_i)_i$ be a sequence in $\mathcal{R}$ such that $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converges in the valuation topology of $\mathcal{R}$, then for every bijection σ of $\mathbb{N}$ we have that*

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_{\sigma(i)}.$$

PROOF. Let σ be a permutation of $\mathbb{N}$. We consider $T = \{\sigma(i) : i \in \mathbb{N}\}$ and we have that $T = \mathbb{N}$. Hence

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{\sigma(i)} = \sum_{n \in T} a_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

□

LEMMA 1.8. *Let T be a countable set and $\{a_n : n \in T\}$ a subset of $\mathcal{R}$. Hence $\lim_{n \in T} a_n = 0$ if and only if $\sum_{n \in T} a_n$ exists.*

PROOF. Suppose that $\lim_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$. Since T is a numerable set, there exists a surjective map $\sigma : \mathbb{N} \to T$. For each $i \in \mathbb{N}$, let $b_i := a_{\sigma(i)}$. Then

$$\lim_{n \in T} a_n = \lim_{i \in \mathbb{N}} a_{\sigma(i)} = \lim_{i \in \mathbb{N}} b_i = 0,$$

and by Lemma 1.6 we conclude

$$\sum_{n \in T} a_n = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{\sigma(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} a_{\sigma(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$$

.

On the other hand, let us suppose that $s = \sum_{n \in T} a_n$ exists in $\mathcal{R}$. Let $\epsilon > 0$ in $\mathbb{R}$, then there exists a finite subset T' of T such that for every finite subset T'' of T

that contains T' we have that $v\left(s-\sum_{n\in T''} a_n\right)<\epsilon$. If we consider $m\notin T'$,

$$\begin{aligned} v(a_m) &= v\left(s-\sum_{n\in T'\cup\{a_m\}} a_n - s + \sum_{n\in T'} a_n\right) \\ &\leq \max\left\{v\left(s-\sum_{n\in T'\cup\{a_m\}} a_n\right), v\left(s-\sum_{n\in T'} a_n\right)\right\} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Hence $\lim_{n\in T} a_n = 0$. □

Proposition 1.9. *Let $\{a_{mn}:\ m,n\in\mathbb{N}\}$ be a subset of $\mathcal{R}$ such that $\lim_{n\to\infty} a_{mn} = 0$ for every $m\in\mathbb{N}$ and $\lim_{m\to\infty} a_{mn}=0$ uniformly in n. Then,*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}.$$

Proof. Let $\epsilon>0$ in $\mathbb{R}$. Since $\lim_{m\to\infty} a_{mn}=0$ uniformly in n, we have that there exists $N\in\mathbb{N}$ such that $v(a_{mn})<\epsilon$ if $m\geq N$ and for all $n\in\mathbb{N}$. Therefore by considering $T=\{(m,n):\ m,n<N\}$, we have that $\lim_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn}=0$. By the previous lemma $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn}$ exists in $\mathcal{R}$.

We now prove the second part of the proposition. As $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn} = s$ for some $s\in\mathcal{R}$, there exists a finite subset T' of $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ such that

$$v\left(s-\sum_{(m,n)\in T''} a_{mn}\right)<\epsilon$$

for any finite subset T'' of $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ that contains T'. Choose

$$m_0=\max\{m:\ (m,n)\in T'\},$$
$$n_0=\max\{n:\ (m,n)\in T'\}.$$

We observe that

$$v\left(s-\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} a_{mn}\right) = v\left(s-\sum_{(m,n)\in Q} a_{mn}\right)<\epsilon$$

if $p,q\geq\max\{m_0,n_0\}$, since $Q=\{(m,n):\ 0\leq m\leq p,\ 0\leq n\leq q\}$ is a finite subset containing T'.

On the other hand, from the fact that $\lim_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn}=0$ we can conclude that $v(a_{mn})<\epsilon$ if $m\geq N_0$ for some $N_0\in\mathbb{N}$ and for all $n\in\mathbb{N}$. Therefore, $v\left(\sum_{m=N_0}^{\infty} a_{mn}\right)<\epsilon$ for all $n\in\mathbb{N}$.

Hence, if $N = \max\{n_0, m_0, N_0\}$ and $p \geq N$ we have that

$$v\left(s - \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\right) = v\left(s - \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{N} a_{mn} - \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=N+1}^{\infty} a_{mn}\right)$$
$$\leq \max\left\{v\left(s - \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{N} a_{mn}\right), v\left(\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=N+1}^{\infty} a_{mn}\right)\right\}$$
$$< \epsilon$$

Therefore,

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}.$$

A similar argument proves that

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} a_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}.$$

□

2. Non-measurable sets in $\mathcal{R}$.

In what follows we denote by $I_{a,b}$ an interval in $\mathcal{R}$ with end points $a,\ b$ $(a < b)$ of any of the forms (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ or $[a, b)$. The length of $I = I_{a,b}$ is $l(I) := b - a$. The following definitions were introduced by K. Shamseddine and M. Berz, for more details see [**1**].

Definition 2.1. We shall say that $A \subset \mathcal{R}$ is **measurable** if for every $n \in \mathbb{N}$ there exist sequences of pairwise disjoint intervals $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ and $\{J_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ subsets of $\mathcal{R}$ such that

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^n \subset A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^n,$$

the series $\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n)$ and $\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)$ converge in $\mathcal{R}$, and

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)\right| < d^n.$$

Proposition 2.2. *If $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$ y $\{J_k : k \in \mathbb{N}\}$ are sequences of pairwise disjoint intervals in $\mathcal{R}$ such that*

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k,$$

and both series $\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k)$ and $\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k)$ converge in $\mathcal{R}$, then

$$\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k).$$

Proof. Let $m \in \mathbb{N}$. Without loss of generality $J_1,\ J_2,\ J_3, \ldots$ are not empty. Since

$$\bigcup_{k=0}^{m} J_k \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k,$$

each J_k is properly contained in $\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$. Therefore for each $k = 0, \ldots, m$ there exist a subsequence of intervals $(I_{k_j})_j$ such that $J_k \cap I_{k_j} \neq \emptyset$ and $J_k \cap I_n = \emptyset$ if $n \neq k_j$. Therefore $J_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (I_{k_j} \cap J_k)$, and all the intervals $(I_{k_j} \cap J_k)$ are pairwise disjoint for different values of j.

We assume now that each interval $I_{k_j} \cap J_k$ is of the form $I(a_{k_j}, b_{k_j})$, $J_k = I(a, b)$, $a_{k_1} = a$ and $b_{k_2} = b$. As $J_k = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (I_{k_j} \cap J_k)$, for each $I_{k_j} \cap J_k = I(a_{k_j}, b_{k_j})$ there exists an interval $I_{k_s} \cap J_k = I(a_{k_s}, b_{k_s})$ such that $b_{k_j} = a_{k_s}$. We reorder the terms of the series $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k_j} \cap J_k)$ (which is convergent) by defining the map $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in the following way: $I_{k_{\sigma(1)}} := I_{k_1}$, $I_{k_{\sigma(2)}} := I_{k_2}$, $I_{k_{\sigma(3)}} \cap J_k := I_{k_t} \cap J_k = I(a_{k_t}, b_{k_t})$ where $a_{k_t} = b_1$, $I_{k_{\sigma(4)}} \cap J_k := I_{k_s} \cap J_k = I(a_{k_s}, b_{k_s})$ with $b_{k_s} = a_2$, and so on. By Proposition 1.7, we have that

$$\sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k_j} \cap J_k) = \sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k_{\sigma(j)}} \cap J_k).$$

On the other hand,

$$\sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k_j} \cap J_k) = \sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k_{\sigma(j)}} \cap J_k) = \sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k_{\sigma(2j)}} \cap J_k) + \sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k_{\sigma(2j+1)}} \cap J_k).$$

But $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k_{\sigma(2j)}} \cap J_k)$ converges to $-a$ and $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k_{\sigma(2j+1)}} \cap J_k)$ converges to b. Hence

$$\sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k_j} \cap J_k) = (b - a) = l(J_k).$$

The intervals J_k are pairwise disjoint, therefore $\{(I_{k_j} \cap J_k) : j \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq m\}$ is a family of intervals pairwise disjoint. By the Proposition 1.7

$$\sum_{k=0}^{m} l(J_k) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k_j} \cap J_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k).$$

Since m is arbitrary, this ends the proof. □

The facts in the following lemma have been taken from the work of K. Shamseddine and M. Berz; see [**1**]. I have included here the details of the proof since they will be needed for the main theorem.

Lemma 2.3. *Let A be a measurable set, then for all $n \in \mathbb{N}$ there exist sequences $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ and $\{J_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ of intervals in $\mathcal{R}$, pairwise disjoint, such that*

(1)
$$\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^n \subset A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^n$$

(2) *the series $\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n)$ and $\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)$ converge in $\mathcal{R}$,*

(3)
$$\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n) < d^n.$$

(4) *And if* $n > 1$

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^{n-1} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^{n} \subset A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^{n} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^{n-1},$$

Proof. By induction on n. Clearly the case $n = 1$ is true by the definition of measurability.

Now suppose that for $n = 1, \dots, N$ there exist sequences $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ and $\{J_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ of intervals in $\mathcal{R}$ pairwise disjoint such that

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^1 \subset \dots \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^N \subset A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^N \subset \dots \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^1,$$

the series $\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n)$ and $\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)$ converge in $\mathcal{R}$, and

$$\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n) < d^n.$$

By definition of measurability there are sequences $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$ and $\{J_k : k \in \mathbb{N}\}$ of pairwise disjoint intervals in $\mathcal{R}$ such that

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k \subset A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k,$$

the series $\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k)$ and $\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k)$ converge in $\mathcal{R}$, and

$$\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k) < d^{N+1}.$$

The sequences $(I_k)_k$ and $(I_k^N)_k$ will be used to construct $(I_k^{N+1})_k$. Notice that we can assume, without loss of generality, that for every $k \in \mathbb{N}$

$$I_k^N \cap A \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad I_k \cap A \neq \emptyset.$$

Now, we fix $k \in \mathbb{N}$ and subdivide I_k into pairwise disjoint intervals. Clearly there exist a subsequence $\{k_j\}_j$ such that $I_k \cap I_{k_j}^N \neq \emptyset$ and $I_k \cap I_m^N = \emptyset$ if $m \neq k_j$. For $k, j \in \mathbb{N}$ we define the intervals

$$I_{k,j} := I_k \cap I_{k_j}^N.$$

Notice that $\{I_{k,j} : k, j \in \mathbb{N}\}$ is a countable family of intervals pairwise disjoint, that $l(I_{k,j}) \leq l(I_{k_j}) \to 0$ when $j \to \infty$ (since $\lim\limits_{k\to\infty} l(I_k) = 0$), and that $l(I_{k,j}) \leq l(I_k) \to 0$ when $k \to \infty$ uniformly in j. Hence by Proposition 1.9, we have that the series $\displaystyle\sum_{(k,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} l(I_{k,j})$ exists and

$$\sum_{(k,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} l(I_{k,j}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} l(I_{k,j}) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} l(I_{k,j}).$$

Let $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ be a bijective map, then this last series can be written as

$$\sum_{(k,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} l(I_{(k,j)}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_{\sigma(k)}) = \sum_{k=0}^{\infty} l(I_{\sigma(k)})$$

Define $I_k^{N+1} := I_{\sigma(k)}$, then we have

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^{N+1} = \bigcup_{k,j\in\mathbb{N}} I_{k,j} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^N$$

which is the needed result. In addition,

$$A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^{N+1} = \bigcup_{k,j\in\mathbb{N}} I_{k,j} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k.$$

Now we construct the sequence $(J_k^{N+1})_k$.
Let us define the following sets.

$$A_1 := \{J_k : \ J_m^N \subset J_k \text{ for some } m \in \mathbb{N}\},$$
$$A_2 = \{J_m^N : \ J_k \subset J_m^N \text{ for some } k \in \mathbb{N}\},$$
$$A_3 := \{J_k : \ J_k \notin A_1, \ \text{ and for some } m \in \mathbb{N},\ J_k \cap J_m^N \neq \emptyset \text{ and } J_k \not\subset J_m^N \ \},$$
$$A_4 := \{J_m^N : \ J_m^N \notin A_2, \text{ and for some } k \in \mathbb{N},\ J_k \cap J_m^N \neq \emptyset \text{ and } J_m^N \not\subset J_k \ \},$$
$$A_5 := \{J_k : \ J_k \cap J_m^N = \emptyset \text{ for all } m \in \mathbb{N}\},$$
$$A_6 := \{J_m^N : \ J_k \cap J_m^N = \emptyset \text{ for all } k \in \mathbb{N}\}.$$

Suppose that $I \in A_3$. Since $(J_k)_k$ and $(J_k^N)_k$ are sequences of intervals pairwise disjoint, I cannot be a proper subset of any interval J_k^N or J_k; the same is true for $J \in A_4$. In addition, any interval properly contained in $A_1 \cup A_3$ can only intersect at most two intervals in $A_2 \cup A_4$, and reciprocally.

Therefore, defining for $I \in A_1 \cup A_3$,

$$P_I := \{I \cap J' : \ J' \in A_2 \cup A_4\}$$

and for $J \in A_2 \cup A_4$

$$Q_J := \{J \cap I' : \ I' \in A_1 \cup A_3\}$$

we have that both sets of intervals have cardinality less than or equal to 2.

By definition of P_I, Q_J and A_i
(1)

$$\left(\bigcup_{I\in A_1\cup A_3} (I \setminus \cup P_I)\right) \cup \left(\bigcup_{I\in A_1\cup A_3} \cup P_I\right) \cup \left(\bigcup_{J\in A_2\cup A_4} (J \setminus \cup Q_J)\right) \cup \left(\bigcup_{J\in A_2\cup A_4} \cup Q_J\right) \cup A_5 \cup A_6$$

is a countable set of pairwise disjoint intervals.

We enumerate the sets in (1) as follows

$$\left(\bigcup_{I\in A_1\cup A_3} (I \setminus \cup P_I)\right) = (J_{(k,1,1)})_k$$
$$\bigcup_{I\in A_1\cup A_3} \cup P_I = (J_{(k,1,2)})_k$$
$$\left(\bigcup_{I\in A_2\cup A_4} (J \setminus \cup Q_J)\right) = (J^N_{(k,1,1)})_k$$
$$\bigcup_{J\in A_2\cup A_4} \cup Q_J = (J^N_{(k,1,2)})_k$$
$$A_5 = \{J_{(k,2)} : \ k \in \mathbb{N}\}$$

$$A_6 = \{J^N_{(k,2)} : k \in \mathbb{N}\}.$$

Define the sequence $(J^{N+1}_k)_k$ as follows: $J^{N+1}_{6k} = J_{(k,1,1)}$, $J_{6k+1} = J_{(k,2,1)}$, $J_{6k+2} = J_{(k,2)}$, $J_{6k+3} = J^N_{(k,1,1)}$, $J_{6k+4} = J^N_{(k,1,2)}$ and $J_{6k+5} = J^N_{(k,2)}$ where $k \in \mathbb{N}$. Clearly

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} I^N_k \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I^{N+1}_k \subset A.$$

In order to study convergence of the sequence of lengths of the intervals $(I^{N+1}_k)_k$, we first enumerate the intervals in the sets $A_1 \cup A_3$ and $A_2 \cup A_4$ as follows

$$A_1 \cup A_3 = \{J_{(k,1)} : k \in \mathbb{N}\},$$

$$A_2 \cup A_4 = \{J^N_{(k,1)} : k \in \mathbb{N}\}.$$

The lengths of the intervals contained in $\cup P_I$ and $I \setminus \cup P_I$ are less than or equal to $l(I)$, the same applies with the intervals contained in $\cup Q_J$ and $I \setminus \cup Q_J$. Remember now that $\lim\limits_{k\to\infty} l(J_k) = 0$ and $\lim\limits_{k\to\infty} l(J^N_k) = 0$ for $i = 1, 2$, then $\lim\limits_{k\to\infty} l(J_{(k,i)}) = \lim\limits_{k\to\infty} l(J^N_{(k,i)}) = 0$ and

$$\lim_{k\to\infty} l(J_{(k,1,1)}) = \lim_{k\to\infty} l(J_{(k,1,2)}) = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} l(J^N_{(k,1,1)}) = \lim_{k\to\infty} l(J^N_{(k,1,2)}) = 0.$$

Therefore $\lim\limits_{k\to\infty} l(J^{N+1}_k) = 0$, and the series $\sum\limits_{k=0}^{\infty} l(J^{N+1}_k)$ converges.

On the other hand, $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} J_k \subset \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} J^{N+1}_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} l(J_k) \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} l(J^{N+1}_k)$ and

$$\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J^{N+1}_k) \le \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k) < d^{N+1}.$$

Therefore,

$$0 < \sum_{k=0}^{\infty} l(I^{N+1}_k) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J^{N+1}_k) = \sum_{k=0}^{\infty} l(I^{N+1}_k) - \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k) + \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J^{N+1}_k)$$

$$< \sum_{k=0}^{\infty} l(I^{N+1}_k) - \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k) + d^{N+1}.$$

But we had already concluded that $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} I^{N+1}_k \subset \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} I_k$ and $\sum\limits_{k=0}^{\infty} l(I^{N+1}_k) \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} l(I_k)$.

Hence,

$$0 < \sum_{k=0}^{\infty} l(I^{N+1}_k) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J^{N+1}_k) < \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} l(I^{N+1}_k) - \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k)}_{<0} + d^{N+1} < d^{N+1}.$$

This completes the proof of the lemma. $\square$

While Lemma 2.3 asserts the existence of particular sequences $(I^n_k)_k$ and $(J^n_k)_k$ which satisfy (1), (2), (3) and (4), the next lemma deals with any pair of sequences which satisfy only the definition of measurability of A.

Lemma 2.4. *Let A be a measurable set and, for every $n \in \mathbb{N}$ we consider $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$, $\{J_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ collections of intervals as in the definition of measurability. Then* $\left(\sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n)\right)_n$ *and* $\left(\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)\right)_n$ *are Cauchy sequences in $\mathcal{R}$; therefore, they converge in $\mathcal{R}$. Then both*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n) \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n).$$

exist, and they are equal.

Proof. We maintain the notation of the definition of a measurable set. Using the proof of the previous lemma, we can build sequences $\{\mathcal{I}_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ and $\{\mathcal{J}_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ of intervals in $\mathcal{R}$, pairwise disjoint, such that

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{J}_k^n \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{J}_k^{n+1} \subset A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}_k^{n+1} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}_k^n,$$

the series $\sum_{k=0}^{\infty} l(\mathcal{I}_k^n)$ and $\sum_{k=0}^{\infty} l(\mathcal{J}_k^n)$ converge in $\mathcal{R}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} l(\mathcal{I}_k^n) - \sum_{k=0}^{\infty} l(\mathcal{J}_k^n) < d^n,$$

and

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^n \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{J}_k^n \subset A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}_k^n \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k^n. \tag{2}$$

Let $n, j \in \mathbb{N}$ and notice that

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^n)\right| &= \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) + \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^n)\right| \\ &\le \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j})\right| + \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^n)\right|.\end{aligned}$$

But for every $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k^n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{J}_k^{n+1} \subset A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_k^{n+1} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k^n,$$

therefore by Proposition 2.2,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^n)\right| &\le \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} (\mathcal{I}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j})\right| + \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^n)\right| \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) + \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^n) \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^n) + \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^n) \\ &< d^{n+j} + d^n \le 2d^n,\end{aligned}$$

whence $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{I}_k^n)\right)_n$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{R}$. In a similar way we can prove $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^n)\right)_n$ is a Cauchy sequence in $\mathcal{R}$.
Now, let $n, j \in \mathbb{N}$, then

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} (I_k^n)\right| = \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) + \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^n)\right|$$

$$= \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) + \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^n) + \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^n) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^n)\right|$$

$$\leq \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j})\right| + \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^n)\right| + \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^n) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^n)\right|.$$

But, for every $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k^n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{J}_k^n \subset A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_k^n \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k^n$$

and by Proposition 2.2 we can conclude

$$0 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(J_k^{n+j}) < d^{n+j}$$

$$0 \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^n) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^n) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^n) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(J_k^n) < d^n.$$

Therefore,

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^n)\right| \leq d^{n+j} + d^n + \left|\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^{n+j}) - \sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^n)\right|.$$

Since $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} l(\mathcal{J}_k^n)\right)_n$ is a Cauchy sequence, we obtain that $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} l(I_k^n)\right)_n$ is also a Cauchy sequence in $\mathcal{R}$. As $\mathcal{R}$ is complete in the order topology, this sequence is convergent. In a similar way the convergence of $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} l(J_k^n)\right)_n$ can be established.

On the other hand, we have that for every $n \in \mathbb{N}$

$$0 < \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n) < d^n,$$

therefore if $n \to \infty$ we observe that $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n) = 0$. □

With the notations introduced in the previous definition let us consider the map $\mu : \mathbb{A} \to \mathcal{R}^+ \cup \{0\}$ defined by

$$\mu(A) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(I_k^n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n),$$

where $\mathbb{A}$ is the class of measurable sets in $\mathcal{R}$.

Supose that for every $n \in \mathbb{N}$ there exist other sequences of intervals $\{I^n_{k,1} : k \in \mathbb{N}\}$ and $\{J^n_{k,1} : k \in \mathbb{N}\}$ that satisfy the conditions in the definition of a measurable set but

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_k) \neq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_{k,1}).$$

Without loss of generality we can suppose that $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_k) < \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_{k,1})$, then there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $\sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_k) < \sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_{k,1})$ for all $n > N$. We observe that $\bigcup_{k=0}^{\infty} J^n_{k,1} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I^N_k$, and by Proposition 2.2 we have that

$$0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} l(I^n_k) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_{k,1}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} l(I^n_k) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_k) < d^n \quad \text{for every } n > N.$$

Hence $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(I^n_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_{k,1})$, which contradicts $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_k) \neq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_{k,1})$. Thus

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(J^n_{k,1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l(I^n_{k,1}),$$

and $\mu(A)$ is well defined.

Definition 2.5. For any measurable set A we shall call $\mu(A)$ the **measure of** A.

The map μ satisfies the following properties.

(1) $\mu(I) = l(I)$ for all $I = I_{a,b}$.

(2) If $\{E_k\}_{k=0}^{\infty}$ is a sequence of intervals in $\mathcal{R}$ pairwise disjoint, $l(E_k) \in \mathcal{R}^+$ and $\sum_{k=0}^{\infty} l(E_k)$ converges in $\mathcal{R}$, then

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} l(E_k).$$

Thus the notion of measurability and the definition of μ only depends on the order of $\mathcal{R}$.

(3) μ is translation invariant on the family of intervals $I_{a,b}$ of $\mathcal{R}$. Hence, if A is measurable then the same holds for $A + \lambda$ and $\mu(A) = \mu(A + \lambda)$ for all $\lambda \in \mathcal{R}$.

Now we can prove our main theorem.

Theorem 2.6. *For every $\delta > 0$ in $\mathbb{R}$ the ball*

$$B_0(\delta) = \{x \in \mathcal{R} : v(x) \leq \delta\}$$

is not measurable. In particular, the unit ball $B_0(1)$ is not measurable.

PROOF. Let $\delta > 0$ in $\mathbb{R}$. Suppose that $B_0(\delta)$ is measurable, then by definition of measurability and Lemma 2.4, for every $n \in \mathbb{N}$ there exist a sequence of intervals pairwise disjoint $\{J_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{R}$ such that

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^n \subset B_0(\delta),$$

the series $\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)$ converges, and

$$\mu(B_0(\delta)) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n) < d^n.$$

Since the sequence $(d^n)_n$ converges to 0, there exists $N_0 \in \mathbb{N}$ such that $v(d^n) < \delta$ for all $n \geq N_0$. Let us fix $n \in \mathbb{N}$ such that $n \geq N_0$, and we observe

$$J_k^n \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} J_k^n \subset B_0(\delta)$$

for every $k \in \mathbb{N}$, which implies that

$$v\left(\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)\right) \leq \max\{v(l(J_k^n)) : k \geq 0\} \leq \delta.$$

Therefore,

$$v(\mu(B_0(\delta))) \leq \max\left\{v\left(\mu(B_0(\delta)) - \sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)\right), v\left(\sum_{k=0}^{\infty} l(J_k^n)\right)\right\} \leq \max\{v(d^n), \delta\}.$$

It follows that $v(\mu(B_0(\delta))) \leq \delta$, and hence $\mu(B_0(\delta)) \in B_0(\delta)$. Therefore for all $a \in B_0(\delta)$ and $\epsilon > 0$ in $\mathcal{R}$ with $v(\epsilon) < \delta$,

$$I(a, a + \mu(B_0(\delta)) \subset I(a, a + \mu(B_0(\delta)) + \epsilon) \subset B_0(\delta).$$

Hence

$$l(I(a, a+\mu(B_0(\delta))) = \mu(B_0(\delta)) < \mu(B_0(\delta))+\epsilon = l(I(a, a+\mu(B_0(\delta))+\epsilon)) \leq \mu(B_0(\delta)),$$

that is, $\mu(B_0(\delta)) < \mu(B_0(\delta))$. But that is not possible in $(\mathcal{R}, \leq)$.
Therefore the ball $B_0(\delta)$ cannot be measured. □

THEOREM 2.7. *Every interval $I_{a,b}$ in $\mathcal{R}$ contains a non-empty convex subset C that is not measurable.*

PROOF. Let us consider $x_0 \in I_{a,b}$ (arbitrary) and $\epsilon \in \mathcal{R}$ such that $0 < \epsilon < \min\{|x_0 - a|, |b - x_0|\}$. The compatibility of v with the order of $\mathcal{R}$ assures that for all $g \in \mathbb{R}$ such that $0 < g < v(\epsilon)$ we have that $B_{x_0}(g) \subset I_{a,b}$. By the strong triangle inequality $B_{x_0}(g)$ is a convex subset (see [**3**], Definition 1.4.2 and Proposition 1.4.3). Now, if $B_{x_0}(\delta)$ were measurable, then so is $-x_0 + B_{x_0}(\delta) = B_0(\delta)$, which contradicts the main theorem. □

As $\mathcal{R}$ is an ordered complete field, each interval $I_{a,b}$ contains infinitely many numbers x_0 different from a and b. This entails the following corollary.

COROLLARY 2.8. *Every interval $I_{a,b}$ contains an infinitude of convex subsets that are not measurable in $\mathcal{R}$.*

Acknowledgement

The author wishes to thank the referee for his suggestions which improved the proof of the main theorem.

References

[1] Khodr Shamseddine and Martin Berz, *Measure theory and integration on the Levi-Civita field*, Contemp. Math., vol. 319, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, pp. 369–387, DOI 10.1090/conm/319/05583. MR1977457 (2004c:12012)

[2] W. H. Schikhof, *Ultrametric calculus: An introduction to p-adic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 1984. MR791759 (86j:11104)

[3] H. Ochsenius and W. H. Schikhof, *Banach spaces over fields with an infinite rank valuation*, p-adic functional analysis (Poznań, 1998), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 207, Dekker, New York, 1999, pp. 233–293. MR1703500 (2000i:46076)

[4] Khodr Shamseddine and Martin Berz, *Convergence on the Levi-Civita field and study of power series*, p-adic functional analysis (Ioannina, 2000), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 222, Dekker, New York, 2001, pp. 283–299. MR1838300 (2002f:12013)

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.
E-mail address: `hmoreno@mat.puc.cl`