



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Grupo de Monodromía de Cubrimientos Factorizados de Superficies de Riemann
Compactas

por

MARTHA JUDITH ROMERO ROJAS

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
como requisito para optar al grado de
doctor en Matemáticas.

Dirigida por:

Rubí E. Rodríguez- Pontificia Universidad Católica de Chile

Comisión Informante:

Milagros Izquierdo - Linköping University (Suecia)
Gonzalo Riera - Pontificia Universidad Católica de Chile
Anita Rojas - Universidad de Chile

Agosto de 2013
Santiago, Chile

Agradecimientos

La realización de una tesis doctoral supone un trabajo arduo de gran trascendencia que no es posible sin la concurrencia de muchas voluntades. A lo largo de todo el proceso he contraído deudas de gratitud con muchas personas a las que me gustaría expresar, desde estas páginas, mi más sincero agradecimiento.

En primer lugar quiero agradecer a mis directores, Ángel Carocca y Rubí Rodríguez, por la competencia, el esfuerzo y dedicación que les ha significado la orientación de este trabajo. A ambos les agradezco no sólo sus comentarios y aportes, sino también su inagotable paciencia. Particularmente quiero agradecer al profesor Ángel por su apoyo incondicional durante la realización de mis estudios de doctorado, porque a pesar de tener otras muchas ocupaciones se comprometió y trabajó intensamente para que este trabajo llegara a buen término, nunca podré corresponder como merecería tantos años de conocimiento y sabiduría empleados en mi formación.

También quiero agradecer a la comisión informante, profesores Milagros Izquierdo, Gonzalo Riera y Anita María Rojas, por su diligencia, sus oportunas sugerencias y sus valiosos comentarios.

Agradezco a la Comisión Nacional de Investigación y Tecnología - CONICYT, por el soporte económico que me brindó durante la realización de mis estudios de doctorado.

Agradezco especialmente a mi familia, a mis padres porque siempre me han apoyado en las decisiones que he tomado a lo largo de la vida, hayan sido buenas o malas, y especialmente por enseñarme a luchar por lo que quiero y a terminar lo que empiezo. A mis hermanas por la comprensión mostrada en este lapso de la investigación, por su actitud positiva y por su confianza en mi capacidad para terminar este trabajo animándome a seguir hasta el final. A mi hijo por su infinita comprensión y cariño, por permitir que realice mis sueños, porque ha sabido disculpar y entender mis ausencias y por ser mi inspiración para alcanzar mis metas.

A mi amado Felipe por ser mi compañía durante todos estos años de estudio, por su inestimable apoyo, por darme fuerza, valor y aliento para seguir adelante, por ser mi

inspiración y mi motivación en cada momento de este camino, porque su dulce presencia hizo que mi vida fuese mucho más agradable.

A mis amigos, especialmente a Claudio, Maribel, Mariela, porque siempre han tenido una palabra de ánimo, porque me han apoyado en las buenas y en las malas y han compartido conmigo muchos momentos gratos e ingratos. Bien saben lo importantes que son para mí y, aunque algunos están lejos, tengo la suerte de poder sentirme siempre acompañada. A Daniela que ha sido mi amiga y compañera de lucha, por estar incondicionalmente a mi lado, a Sole porque además de toda su ayuda en los procesos administrativos, es una persona con la que siempre puede contar.

Quiero agradecer a la Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), por el soporte necesario que me brindaron para poder realizar mis estudios de doctorado. En este sentido, mi agradecimiento se extiende a cada una de las personas que de una manera u otra me colaboraron durante mi estadía en la PUC. A la Universidad del Cauca por concederme una comisión de estudios y a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile, especialmente a la profesora Anita, por facilitarme un espacio para trabajar allá en la última etapa de mi tesis.

Probablemente, me haya olvidado de muchas otras personas que se relacionan directamente con aportes u otro tipo de colaboraciones para el desarrollo de esta tesis, a ellos y a todos los recién mencionados, les agradezco por su ayuda en la realización de esta tesis, que si bien es consecuencia de un trabajo individual, contó con el gran apoyo realizado desinteresadamente por parte de mucha gente.

Martha Romero
13 de agosto de 2013

Contenido

Lista de Símbolos	vii
Resumen	1
Introducción	3
1. Preliminares	5
1.1. Superficies de Riemann	5
1.2. Acciones de Grupo en Superficies de Riemann	11
1.3. Género de una Superficie Cociente Intermedia	16
2. Representación de Monodromía y Cubrimientos Galois	19
2.1. Grupo Fundamental y Representación de Monodromía	19
2.2. Cubrimiento de Galois de un cubrimiento	23
2.3. Cubrimientos Intermedios y Cubrimientos de Galois	26
3. Cubrimientos abelianos	31
3.1. Correspondencia de Galois	32
3.2. Representación del grupo de Galois	42
4. Grupo de Galois del Cubrimiento	45
4.1. Aspectos Generales	45
4.2. Caso Cíclico	48
4.3. Caso Abeliano	53
5. Grupos Tipo Weyl	59
5.1. Geometría del grupo $\mathfrak{G}_m := \mathbb{Z}_n^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$	59
5.2. Geometría del grupo $\mathfrak{G}_m := (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$	68
5.3. Geometría del grupo $\mathfrak{G}_m := (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$	78
5.4. Correspondencia Geométrica de los generadores	83
Apéndices	

A. Ejemplos	95
A.1. $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6)^4 \rtimes \mathbf{S}_5$	96
A.2. $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)^3 \rtimes \mathbf{S}_4$	99
B. N es como G	103
C. Extensión de la proposición 5.1.1	107
Bibliografía	111

Lista de Símbolos

$ G ; g $: orden del grupo G ; orden del elemento $g \in G$.
$H \leq G$: H es subgrupo de G .
$N \trianglelefteq G$: N es subgrupo normal de G .
G/N	: grupo cociente de G por el subgrupo normal N .
$ G : H $: índice de H en G .
$H \times K$: producto directo de los grupos H y K .
$H \rtimes K$: producto semidirecto de los grupos H y K .
$\langle g \rangle$: subgrupo generado por g .
$C_G(H) ; N_G(H)$: centralizador de H en G ; normalizador de H en G .
$Z(G)$: centro de G .
$[H, K]$: subgrupo conmutador de H y K .
H^g	: subgrupo conjugado de H por el elemento g .
H_G	: núcleo del subgrupo H en G .
$H \cong N$: H es isomorfo como grupo a N .
\mathbb{O}_p^G	: órbita de p por G .
G_p	: subgrupo estabilizador de p en G .
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$: se usan para denotar superficies de Riemann.
\mathcal{Z}_G	: superficie cociente de \mathcal{Z} por la acción del grupo G .
π_H	: cubrimiento intermedio (Galois) por la acción de $H \leq G$ en \mathcal{Z} , esto es, $\pi_H : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_H$.
π^H	: cubrimiento intermedio (posiblemente no Galois) producido por la acción de $H \leq G$, esto es, $\pi^H : \mathcal{Z}_H \rightarrow \mathcal{Z}_G$.

\mathbb{Z}_n	: grupo cíclico de n elementos.
\mathbb{Z}_n^m	: producto directo de m copias de \mathbb{Z}_n .
\mathbf{S}_m	: grupo simétrico de grado m .
\mathbb{P}^1	: plano proyectivo complejo.
$H \lesssim G$: H es isomorfo a un subgrupo de G .
$C^G(g)$: clase de conjugación de $g \in G$.

Resumen

Sean $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento de grado n , de las superficies de Riemann compactas \mathcal{X} e \mathcal{Y} . El grupo de monodromía $M(\varphi \circ \psi)$ del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ es el grupo asociado a la Clausura de Galois de la extensión de cuerpos de funciones meromorfas $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$ sobre $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$.

En este trabajo presentaremos resultados sobre el grupo de monodromía del cubrimiento factorizado dado por $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois abeliano. Determinaremos la estructura del grupo $M(\varphi \circ \psi)$ utilizando resultados sobre la existencia de funciones meromorfas en \mathcal{Y} con monodromía local dada por involuciones que son producto de n transposiciones, estableciendo un sistema natural de generadores para el grupo $M(\varphi \circ \psi)$. Además, mostraremos la existencia de superficies de Riemann con grupo de monodromía $M(\varphi \circ \psi) \cong (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, cuando $g(\mathcal{X}) \geq r$ y (n_1, n_2, \dots, n_r) es el tipo del grupo abeliano del cubrimiento $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$.

Abordaremos este problema desde un punto de vista grupo-teórico y se usarán resultados conocidos acerca de grupos, monodromía y cubrimientos.

Introducción

Sea \mathcal{X} una superficie de Riemann compacta de género $g(\mathcal{X})$ y $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento de grado m . El grupo de monodromía $M(\varphi)$ del cubrimiento es el grupo asociado a la Clausura de Galois de la extensión de cuerpos de funciones meromorfas $\mathcal{M}(\mathcal{X})/\mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$. Una propiedad elemental del grupo $M(\varphi)$ es que tiene una representación natural como subgrupo transitivo del grupo simétrico \mathbf{S}_m y su determinación, en general, no es un problema de fácil solución.

Varios autores han estudiado el problema de determinar la estructura del grupo $M(\varphi)$ considerando distintas propiedades del cubrimiento φ . Aspectos importantes y que dan inicio a un estudio sistemático de este problema, fueron considerados por O. Zariski [Zar78]. En [MV04] se estudian problemas relacionados, considerando φ un cubrimiento simple, es decir la fibra $\varphi^{-1}(p)$ sobre cada punto rama $p \in \mathbb{P}^1$ consiste exactamente de $m - 1$ puntos distintos. En este caso se prueba que el grupo $M(\varphi)$ es isomorfo a \mathbf{S}_m y es generado geoméricamente por transposiciones. Recíprocamente, se puede probar que si $m > g(\mathcal{X}) + 1$, entonces existe un cubrimiento simple f de grado m , con esto $M(f)$ el grupo de monodromía de f es isomorfo a \mathbf{S}_m . Algunos autores han estudiado problemas equivalentes para otros grupos o familias de grupos, referencias para este problema y similares son [Izq95], [Zar78], [GN95], [GS07], [AP05], [AH10], [MV04].

Consideremos ahora \mathcal{Y} una superficie de Riemann compacta de género $g(\mathcal{Y})$ y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento de grado n . Dificultad equivalente a la situación descrita anteriormente tiene el problema de determinar $M(\varphi \circ \psi)$: el grupo de monodromía del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$. De esta forma, es de interés determinar la estructura geométrica del grupo $M(\varphi \circ \psi)$ a partir de propiedades de los cubrimientos φ y ψ . Problemas de esta naturaleza han sido considerado por varios autores, algunas referencias para este tipo de problemas son [Rec94], [DDH89], [Fri89], [Vet07], [Kan06], [ACR10].

Probablemente la situación más estudiada para un cubrimiento compuesto $\varphi \circ \psi$ es el caso cuando $n = 2$ y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es no ramificado. Los resultados en esta dirección incluyen estudios sistemáticos de grupos de Weyl de tipo WB_n y WD_n , ver [Suz82].

En [BF86] Biggers-Fried, comenzando con φ un cubrimiento simple de grado m , estudian el grupo de monodromía del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ donde $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es un cubrimiento Galois no ramificado. En este caso se tiene que

$$M(\varphi \circ \psi) = \left\langle g_1, g_2, \dots, g_r : \prod_{i=1}^r g_i = 1, \mathcal{R} \right\rangle,$$

donde \mathcal{R} representa las relaciones apropiadas en el grupo, $g_i^2 = 1$ y $r = 2(g(\mathcal{X}) + m - 1)$. Bajo la hipótesis adicional $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ con grupo de Galois cíclico isomorfo a \mathbb{Z}_n , Biggers-

Fried prueban que $M(\varphi \circ \psi)$ es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{Z}_n^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$.

Nuestro interés es generalizar los resultados citados anteriormente, para este propósito en este trabajo estudiaremos cubrimientos factorizados $\mathcal{Y} \xrightarrow{\psi} \mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1$ donde $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es un cubrimiento Galois no ramificado de grado n con grupo de Galois abeliano. Determinaremos la estructura del grupo de monodromía $M(\varphi \circ \psi)$ y un sistema natural de generadores geométricos, representando naturalmente el grupo $M(\varphi \circ \psi)$ como subgrupo transitivo de \mathbf{S}_{mn} . Abordaremos este problema desde un punto de vista grupo-teórico.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma: Los dos primeros capítulos están dedicados a presentar definiciones básicas y resultados conocidos que se usarán en el desarrollo de este trabajo.

Los capítulos restantes están dedicados a la presentación de los resultados obtenidos en el transcurso de esta investigación. En el capítulo 3 presentamos los resultados de teoría de grupos que podemos obtener del cubrimiento estudiado, especialmente se estudia el cubrimiento $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ no ramificado y sus implicaciones en la naturaleza de los generadores del grupo de monodromía. En el capítulo 4 se presenta el resultado fundamental de la investigación, esto es, presentamos el grupo de monodromía del cubrimiento factorizado $\mathcal{Y} \xrightarrow{\psi} \mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1$. Finalmente en el capítulo 5, se da una realización del grupo de monodromía como subgrupo de \mathbf{S}_{mn} generado por elementos de orden 2 que son producto de n transposiciones y se muestra la existencia de Superficies de Riemann con este grupo de monodromía.

Finalmente en los apéndices, se presentan ejemplos concretos de la realización del grupo de Galois $M(\varphi \circ \psi)$ para valores específicos de n y m . Además se incluyen dos demostraciones, la primera de que $M(\varphi \circ \psi)$ contiene un subgrupo propio con sus mismas propiedades geométricas y la segunda es la prueba del teorema 5.3.1.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación presentaremos definiciones, propiedades y algunos resultados generales usados en el desarrollo de los capítulos posteriores.

1.1. Superficies de Riemann

Comenzaremos esta sección con una definición ampliamente conocida:

Definición 1.1.1. Una *Superficie de Riemann* \mathcal{Z} es un espacio topológico Hausdorff, conexo tal que existe una colección $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ llamadas cartas, que satisface:

- (a) U_α es abierto en \mathcal{Z} para todo α , $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathcal{Z}$
- (b) $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$, V abierto, es un homeomorfismo
- (c) $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es analítica siempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Es decir, una superficie de Riemann es una variedad analítica compleja de dimensión 1.

Los ejemplos más conocidos de superficies de Riemann son:

1. abiertos del plano complejo son superficies de Riemann, particularmente el plano complejo es una superficie de Riemann.
2. La esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, con las cartas:

$$\begin{array}{l} \phi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \phi_2 : \widehat{\mathbb{C}} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z \quad \quad \quad z \mapsto \frac{1}{z} \end{array}$$

3. La curva suave afín:

$$\mathcal{Z} = \{(s, t) \in \mathbb{C}^2 : f(s, t) = 0\},$$

donde f es un polinomio irreducible y no singular, es decir, no existe una solución común para el sistema:

$$f(s, t) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = 0,$$

es una superficie de Riemann. De hecho las cartas aquí se definen usando el teorema de la función implícita así: Dado $p = (s_0, t_0) \in \mathcal{Z}$, entonces si $\frac{\partial f(p)}{\partial t} \neq 0$, por el teorema de la función implícita, existe una función holomorfa $h(s)$ tal que en una vecindad U de p , \mathcal{Z} es el gráfico de $t = h(s)$, de esta forma $\pi_s : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ definida por $\pi_s((s, t)) = s$, con inversa $\pi_s^{-1} : V \rightarrow U$, definida por $\pi_s^{-1}(z) = (z, h(z))$, nos da una carta compleja en \mathcal{Z} . Si es $\frac{\partial f(p)}{\partial s} \neq 0$ procedemos de la misma forma con la otra proyección. Ahora, dado que el polinomio es no singular, al menos una de las derivadas es no nula en cada punto de \mathcal{Z} , luego el dominio de las cartas cubre a \mathcal{Z} . No es difícil ver que las cartas son compatibles puesto que si ambas cartas se obtienen usando la proyección π_s , o la proyección π_t , la composición de la inversa de una con la otra nos da la identidad, que es holomorfa. Entonces asumamos que una carta se obtuvo por la proyección π_s y la otra por π_t . Sea $p = (s_0, t_0)$ un punto de su dominio común U , si asumimos que cerca de p , \mathcal{Z} es localmente de la forma $t = h(s)$ para alguna función holomorfa h . Entonces en $\pi_s(U)$ cerca de s_0 , la inversa de π_s , envía a z en $(z, h(z))$. Así la composición $\pi_t \circ \pi_s^{-1}$ envía z a $h(z)$, la cual es holomorfa. Así, las cartas son compatibles y dan estructura compleja a \mathcal{Z} . De otro lado \mathcal{Z} es Hausdorff, como subespacio de \mathbb{C}^2 , además por un resultado conocido, no fácil de probar, dado que f es irreducible, se tiene que \mathcal{Z} es conexo, es decir \mathcal{Z} es una superficie de Riemann.

En este trabajo se mencionarán resultados generales de superficies de Riemann, aunque nuestro interés está en las superficies de Riemann compactas. Notemos que una superficie compacta puede cubrirse por un número finito de abiertos homeomorfos a discos de \mathbb{R}^2 , luego tiene una base numerable de abiertos. Esto implica, entre otras cosas, que es metrizable.

A continuación mencionaremos algunos conceptos importantes de las funciones definidas entre superficies de Riemann:

En lo que sigue \mathcal{Z}_1 y \mathcal{Z}_2 son superficies de Riemann.

Definición 1.1.2. Una función $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ es *holomorfa en* $p \in \mathcal{Z}_1$ si y sólo si existen cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ en \mathcal{Z}_1 , con $p \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ en \mathcal{Z}_2 , con $f(p) \in U_2$ tal que la composición $\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$ es holomorfa en $\phi_1(p)$. Diremos que f es *holomorfa* si es holomorfa en \mathcal{Z}_1 .

Definición 1.1.3. Un *Isomorfismo* (o Biholomorfismo) entre superficies de Riemann es una función holomorfa $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ la cual es biyectiva, con inversa $f^{-1} : \mathcal{Z}_2 \rightarrow \mathcal{Z}_1$ holomorfa. Un isomorfismo $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ es llamado un *Automorfismo de* \mathcal{Z} .

Las propiedades básicas de las funciones entre superficies de Riemann se deducen fácilmente del siguiente teorema:

Teorema 1.1.1. *Sea $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann y sea $p \in \mathcal{Z}_1$. Entonces existen cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1 \subseteq \mathbb{C}$ con $p \in U_1$ y $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2 \subseteq \mathbb{C}$ con $f(p) \in U_2$ de modo que $f(U_1) \subset U_2$, $\phi_1(p) = \phi_2(f(p)) = 0$ y para todo $z \in \phi_1(U_1)$ se cumple $(\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1})(z) = z^k$, para cierto natural k .*

DEMOSTRACIÓN. Componiendo dos cartas con traslaciones apropiadas, se puede suponer que $\phi_1(p) = \phi_2(f(p)) = 0$. Restringiendo ϕ_1 se puede hacer que $f(U_1) \subset U_2$. Sea $H = \phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}$, H es una función holomorfa no constante en $\phi(U_1)$ tal que $H(0) = 0$, luego existe un k tal que $H(z) = z^k g(z)$, donde g es una función holomorfa en 0 tal que $g(0) \neq 0$. Restringiendo ϕ_1 de nuevo se puede suponer que g no se anule en $\phi_1(U_1)$. Tomando una rama uniforme de la raíz k -ésima en un entorno de $g(0)$ (y restringiendo aun más ϕ_1 si es necesario) construimos una función holomorfa $h : \phi_1(U_1) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(z)^k = g(z)$. Así pues, $H(z) = (zh(z))^k$. La función $zh(z)$ tiene derivada no nula en 0 , por lo que es inyectiva en un entorno de 0 . Restringiendo ϕ_1 una vez más se puede suponer que es inyectiva en $\phi_1(U_1)$. Componiendo ϕ_1 con esta función se obtiene una nueva carta sobre U_1 , digamos ϕ_0 , de modo que si $x \in U_1$ y $w = \phi_1(x)h(\phi_2(x)) \in \phi_0(U_1)$,

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1}(w) = \phi_2(f(x)) = f(\phi_2(x)) = (\phi_1(x)h(\phi_2(x)))^k = w^k.$$

Así pues, las cartas ϕ_0 y ϕ_2 cumplen lo pedido. ■

La función z^k (como toda función holomorfa no constante) es abierta, luego f es abierta en un entorno de cada punto, luego es abierta. El número k dado por el teorema anterior puede caracterizarse con independencia de las cartas consideradas:

Para todo entorno U de p suficientemente pequeño existe un entorno V de $f(p)$ de modo que todo punto en V distinto de $f(p)$ tiene exactamente k preimágenes por f en U .

Esto se sigue claramente de que la función z^k tiene esta propiedad en 0 . Por lo tanto, k está completamente determinado por f y p .

Definición 1.1.4. Sea $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann y $p \in \mathcal{Z}_1$. El número natural k que cumple la propiedad anterior se llama *índice de ramificación* de f en p y lo representaremos por $\text{mult}_p(f)$.

La función z^k se anula solamente en 0 , luego todo punto $p \in \mathcal{Z}_1$ tiene un entorno en el que $f(z) \neq f(p)$. Equivalentemente, para cada $y \in \mathcal{Z}_2$, la fibra $f^{-1}(y)$ es discreta y, si además suponemos que \mathcal{Z}_1 es compacto, entonces, es finita. La función z^k tiene derivada no nula en todo punto distinto de 0 , luego es localmente inyectiva salvo en $z = 0$. Esto hace que la función f sea localmente inyectiva en todo punto de U excepto posiblemente en p . Así, el conjunto de puntos donde f no es localmente inyectiva es discreto en \mathcal{Z}_1 . Por compacidad es finito.

Definición 1.1.5. Sea $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas y sea $A \subset \mathcal{Z}_1$ el conjunto (finito) de puntos de \mathcal{Z}_1 donde f no es localmente inyectiva. Los puntos de $B = f(A)$ se llaman *valores de ramificación de f* .

Observe que f es localmente inyectiva alrededor de un punto $p \in \mathcal{Z}_1$ si y solo si $\text{mult}_p(f) = 1$. El teorema siguiente recoge la discusión anterior y algunos otros resultados.

Teorema 1.1.2. *Sea $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann. Entonces*

- i) f es abierta, cerrada y sobreyectiva.*
- ii) Para cada $y \in \mathcal{Z}_2$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es finito.*
- iii) Para cada $y \in \mathcal{Z}_2$ y cada abierto V que contenga a $f^{-1}(y)$, existe un entorno abierto U de y tal que $f^{-1}(U) \subset V$*
- iv) Para cada punto de $y \in (\mathcal{Z}_2 \setminus B)$ existe un entorno abierto U de y tal que*

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n V_i,$$

donde los conjuntos V_i son abiertos disjuntos en \mathcal{Z}_1 y todas las aplicaciones $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ son transformaciones conformes.

DEMOSTRACIÓN.

- (a) Ya se mencionó que f es abierta y por compacidad es cerrada. Por consiguiente, $f(\mathcal{Z}_1)$ es abierto y cerrado en \mathcal{Z}_2 , luego por conexión $f(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{Z}_2$.
- (b) Ya se probó.
- (c) El conjunto $\mathcal{Z}_1 \setminus V$ es cerrado en \mathcal{Z}_1 , luego $T = f(\mathcal{Z}_1 \setminus V)$ es cerrado en \mathcal{Z}_2 y no contiene a y , luego $U = \mathcal{Z}_2 \setminus T$ es un entorno abierto de y que cumple lo pedido.
- (d) Sea $f^{-1}(y) = x_1, \dots, x_n$, donde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Como y es un punto de $\mathcal{Z}_2 \setminus B$, cada x_i tiene un entorno abierto W_i tal que $f|_{W_i}$ es inyectiva. Podemos tomar los W_i disjuntos dos a dos. Entonces $\mathcal{Z}_1 = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_n$ es un abierto que contiene a $f^{-1}(y)$, luego por el ítem anterior existe un entorno abierto U de y tal que $f^{-1}(U) \subset W$. Se puede suponer que $U \subset f(W_i)$ para todo i . Sea $V_i = W_i \cap f^{-1}(U)$. Es claro que los conjuntos V_i cumplen lo pedido.

■

Finalmente probaremos que el número de preimágenes de los puntos de $\mathcal{Z}_2 \setminus B$ es constante:

Corolario 1.1.3. *Sea $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces existe un número natural n tal que cada punto $b \in \mathcal{Z}_2 \setminus B$, tiene exactamente n preimágenes por f . Además, si $f^{-1}(b) = \{p_1, \dots, p_n\}$, existe un entorno abierto U de b en \mathcal{Z}_2 y entornos abiertos disjuntos V_i en \mathcal{Z}_1 de cada p_i de modo que $f^{-1}(U) = V_1 \cup \dots \cup V_n$ y las restricciones $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ son conformes.*

DEMOSTRACIÓN.

El conjunto $\mathcal{Z}_2 \setminus B$ es conexo (pues si a una superficie conexa le quitamos un conjunto finito de puntos no perdemos la conexión). Sea $\mathcal{P}(y)$ el número de preimágenes de y , parte (d) del teorema anterior prueba que \mathcal{P} es localmente constante en $\mathcal{Z}_2 \setminus B$, y por conexión necesariamente \mathcal{P} es constante en $\mathcal{Z}_2 \setminus B$. El resto del teorema es consecuencia directa del teorema anterior. ■

Definición 1.1.6. Se llama *grado* de una función holomorfa no constante $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ entre superficies de Riemann compactas, al número de preimágenes de cualquiera de los puntos de $\mathcal{Z}_2 \setminus B$. Este número se representa por $\eta(f)$.

El siguiente teorema nos da más información sobre los puntos de ramificación.

Teorema 1.1.4. *Sea $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Para cada punto $y \in \mathcal{Z}_2$ se cumple*

$$\eta(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{mult}_x(f).$$

DEMOSTRACIÓN.

La demostración de este resultado se puede ver en [Mir95, p.47] ■

Las superficies de Riemann que aquí se consideran son superficies compactas, conexas y orientables (toda variedad analítica es orientable como variedad real). La estructura topológica de estas superficies es conocida: toda superficie real compacta conexa y orientable es homeomorfa a una esfera con g asas o, equivalentemente, con g agujeros, o a la suma conexa de g toros. El número g se llama género de la superficie, para una superficie \mathcal{W} , denotamos su género por $g(\mathcal{W})$ o simplemente g si no hay lugar a confusión, entendiendo que la esfera es la superficie de género $g = 0$. Dos superficies compactas, conexas y orientables son homeomorfas si y solo si tienen el mismo género. Estos resultados aparecen en los libros de topología algebraica, ver por ejemplo [Mas91].

Una caracterización más operativa del género de una superficie viene dada en términos de triangulaciones. Recordemos que un triángulo T en una superficie \mathcal{Z} es un homeomorfismo en la imagen $T : \Delta \rightarrow \mathcal{Z}$, donde Δ es un triángulo usual, por ejemplo

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Las aristas y los vértices de T son las imágenes por T de las aristas y vértices de Δ . Si \mathcal{Z} es compacta, una triangulación de \mathcal{Z} es un conjunto finito de triángulos en \mathcal{Z} cuyas

imágenes cubran \mathcal{Z} y de modo que dos cualesquiera de ellas sean disjuntas o bien tengan una arista o un vértice en común. Las imágenes de los triángulos se llaman caras de la triangulación. Puede probarse que toda superficie compacta \mathcal{Z} admite una triangulación, así como que $\chi_{\mathcal{Z}} = V - A + C$, donde V , A y C son respectivamente el número de vértices, aristas y caras de una triangulación dada, no depende de la triangulación con la que se calcula, sino que es un invariante conocido como característica de Euler de \mathcal{Z} . Además si \mathcal{Z} es conexa y orientable de género g , entonces $\chi_{\mathcal{Z}} = 2 - 2g$. Así, por ejemplo, la característica de Euler de la esfera es 2, mientras que la del toro es 0. Todos estos hechos se prueban con relativa facilidad salvo la existencia de triangulaciones.

El siguiente resultado es de gran importancia en el desarrollo de este trabajo:

Teorema 1.1.5. (Formula de Riemann-Hurwitz) *Sea $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann compactas. Entonces*

$$2g(\mathcal{Z}_1) - 2 = 2\eta(f)(g(\mathcal{Z}_2) - 1) + \sum_{p \in \mathcal{Z}_1} (\text{mult}_p(f) - 1)$$

donde $g(\mathcal{Z}_1)$ y $g(\mathcal{Z}_2)$ denotan el género de \mathcal{Z}_1 y \mathcal{Z}_2 respectivamente.

Terminaremos esta sección con algunas definiciones sobre funciones especiales entre superficies de Riemann:

Definición 1.1.7. Un *cubrimiento* (suave) de \mathcal{Z} es una función continua, sobreyectiva $f : U \rightarrow \mathcal{Z}$ tal que para cada $v \in \mathcal{Z}$ existe un abierto W , $v \in W$ tal que $f^{-1}(W)$ es union disjunta de conjuntos abiertos U_i con $f|_{U_i} : U_i \rightarrow W$ un homeomorfismo.

Definición 1.1.8.

- (a) Un *cubrimiento ramificado* $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$, es por definición una función holomorfa sobreyectiva.
- (b) Un punto en \mathcal{Z}_1 es un *punto de ramificación* de f si f no es localmente inyectiva en él.
- (c) La imagen de un punto de ramificación es un valor de ramificación de f . En este caso, el conjunto de puntos de ramificación es un subconjunto discreto en \mathcal{Z}_1 . Si \mathcal{Z}_1 y \mathcal{Z}_2 son cerradas, el conjunto de valores de ramificación es finito. Observe que $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow f^{-1}(B) \rightarrow V \setminus B_P$ es un cubrimiento holomorfo, donde $B_P \subset V$ es el conjunto de valores de ramificación de f , de grado finito.

El cubrimiento ramificado puede ser descrito en cada punto de ramificación según la siguiente definición:

Definición 1.1.9. Sea $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ un cubrimiento ramificado, B el conjunto de valores de ramificación, para $b \in B$ consideramos su fibra $f^{-1}(b) = \{q_1, q_2, \dots, q_s\} \subset \mathcal{Z}_1$, la *estructura cíclica* de f en b es una s -tupla (n_1, n_2, \dots, n_s) donde n_i es el índice de ramificación de f en q_i . Esto es, f es $n_i : 1$ en q_i .

Definición 1.1.10.

Una *transformación de cubrimiento* de un cubrimiento (suave) $\mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$ es un automorfismo de \mathcal{Z}_1 , el cual intercambia los puntos que tienen la misma proyección en \mathcal{Z}_2 .

El conjunto de transformaciones de cubrimiento forman un grupo, con la composición de funciones, llamado Grupo de Galois del cubrimiento, notado por: $\text{Gal}(f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2)$.

Definición 1.1.11. El grupo de Galois de un cubrimiento es llamado transitivo si existe una transformación del grupo que lleva cualquier punto p_1 sobre p en cualquier otro punto p_2 sobre p . En esta situación llamamos al cubrimiento $f : \mathcal{Z}_1 \rightarrow \mathcal{Z}_2$, *cubrimiento Galois* o cubrimiento regular.

Observación 1.1.1. Si f es un cubrimiento ramificado Galois su estructura cíclica en un punto rama b es una tupla constante (n_b, \dots, n_b) , donde n_b es el orden del estabilizador de los puntos en $f^{-1}(b)$ y el tamaño de la tupla es el índice. El recíproco no es cierto. Por esta razón un cubrimiento de Galois es descrito por los números n_b para cada punto rama, ésta es llamada la *signatura* de el grupo.

Definición 1.1.12. Un cubrimiento de la línea proyectiva, $f : Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ es llamado *simple*, si para cada punto de \mathbb{P}^1 , existen por lo menos $\eta(f) - 1$ preimágenes.

Observación 1.1.2. Si $f : Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento simple de grado $\eta(f) = m$, el número de puntos de ramificación de f es $2g(\mathcal{Z}) + 2m - 2$.

Nos interesa considerar el cubrimiento ramificado producido por la acción de un grupo finito en una superficie de Riemann Compacta, por esto en la siguiente sección trataremos con acciones de grupos en superficies de Riemann.

1.2. Acciones de Grupo en Superficies de Riemann

Uno de los conceptos fundamentales en este trabajo es el de acción de grupo, con el cual comenzaremos esta sección.

Definición 1.2.1. Sea G un grupo y \mathcal{Z} una Superficie de Riemann. Una *acción* de G en \mathcal{Z} es una función $G \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$, denotada por $(g, p) \mapsto g \cdot p$ la cual satisface

- (a) $(gh) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$ para $g, h \in G$ y $p \in \mathcal{Z}$
- (b) $e \cdot p = p$ para todo $p \in \mathcal{Z}$, donde $e \in G$ es la identidad.

Técnicamente, llamada una *acción izquierda* en \mathcal{Z} .

Notemos que si se fija $g \in G$, la función $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ definida por $g(p) = g \cdot p$ es una biyección.

Directamente relacionados con la definición de acción están los siguientes conceptos, que son válidos aún cuando \mathcal{Z} sea un conjunto cualquiera.

Definición 1.2.2. La *Órbita* de un punto $p \in \mathcal{Z}$ es el conjunto,

$$\mathbb{O}_p^G = \{y \in \mathcal{Z} : y = g \cdot p \text{ para algún } g \in G\}$$

Definición 1.2.3. El *Estabilizador* de un punto $p \in \mathcal{Z}$ es el subgrupo de G ,

$$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$$

Observación 1.2.1.

- (a) Los puntos en la misma órbita tienen estabilizadores conjugados. Esto es, para $p \in \mathcal{Z}$, $G_{g \cdot p} = g G_p g^{-1}$.
- (b) Si G es un grupo finito, entonces $|G| = |\mathbb{O}_p^G| |G_p|$

Para cada $p \in \mathcal{Z}$ se tiene un subgrupo estabilizador, nos interesa la intersección de todos estos subgrupos, la cual se define a continuación:

Definición 1.2.4. El *Núcleo* de una acción de G en \mathcal{Z} es el subgrupo

$$K = \{g \in G : g \cdot p = p \text{ para todo } p \in \mathcal{Z}\}.$$

$$K = \bigcap_{p \in \mathcal{Z}} G_p = \bigcap_{g \in G} G_p^g$$

Observación 1.2.2.

- (a) El Núcleo es un subgrupo normal de G .
- (b) El grupo cociente G/K actúa en \mathcal{Z} con Núcleo trivial y con órbitas idénticas a las de la acción de G . Este tipo de acción se llama *Acción Efectiva*.

Siguiendo con la idea de acciones en superficies de Riemann. Una acción también puede ser *Holomorfa* o *Continua*, si para todo $g \in G$, la biyección $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ definida por $g(p) = g \cdot p$ es holomorfa o continua.

Las acciones de grupo sobre superficies de Riemann tienen ciertas propiedades especiales que describiremos a continuación:

Proposición 1.2.1. *Sea G un grupo actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann, y sea p un punto arbitrario (pero fijo) de \mathcal{Z} . Supongamos que el subgrupo estabilizador G_p es finito. Entonces G_p es un grupo cíclico.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Mir95, p. 76]. ■

En particular, si \mathcal{Z} es compacta, $\text{Aut}(\mathcal{Z})$ es finito y en consecuencia G_p es un grupo cíclico, donde p es un punto arbitrario (pero fijo) de \mathcal{Z} .

Proposición 1.2.2. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann \mathcal{Z} . Entonces el conjunto de puntos de \mathcal{Z} con estabilizador no trivial es discreto.*

Así para las superficies de Riemann compactas que consideraremos se tendrá sólo un conjunto finito de puntos con estabilizador no trivial.

Más aún, si G es un grupo finito, el conjunto de todas las orbitas es una Superficie de Riemann, que llamaremos *Superficie Cociente* y se denotará por \mathcal{Z}_G .

No es inmediato que \mathcal{Z}_G sea una superficie de Riemann, por esto en lo que sigue intentaremos darle estructura compleja al espacio cociente \mathcal{Z}_G , encontraremos cartas complejas usando la siguiente proposición:

Proposición 1.2.3. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann \mathcal{Z} . Sea $p \in \mathcal{Z}$ (fijo). Entonces existe una vecindad (abierto) U de p tal que:*

- (a) U es invariante bajo la acción del subgrupo estabilizador G_p , esto es $g \cdot u \in U$ para todo $g \in G_p$ y todo $u \in U$.
- (b) $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ para todo $g \notin G_p$.
- (c) La función $\alpha : U/G_p \rightarrow \mathcal{Z}_G$ inducida por la que envía un punto de U a su órbita, es un homeomorfismo sobre un conjunto abierto de \mathcal{Z}_G .
- (d) Ningún punto de U excepto p queda fijo por los elementos de G_p .

DEMOSTRACIÓN. Ver [Mir95, p. 77] ■

Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta \mathcal{Z} , con cociente \mathcal{Z}_G . Supongamos que $y \in \mathcal{Z}_G$ es un punto imagen de un punto de ramificación de la función cociente $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_G$. Sean x_1, x_2, \dots, x_s los puntos de \mathcal{Z} tales que $\pi(x_i) = y$ para $i = 1, 2, \dots, s$, ellos pertenecen a la misma órbita bajo la acción de G en \mathcal{Z} , de tal forma que tienen subgrupos estabilizadores conjugados, en particular cada subgrupo estabilizador tiene el mismo orden, digamos $|G_{x_i}| = r$ para todo i . Más aún, el número s de elementos en la órbita es el índice del subgrupo estabilizador en G , esto es:

$$s = \frac{|G|}{r}$$

Lema 1.2.1. *Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann compacta \mathcal{Z} , con función cociente $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_G$, entonces para todo punto imagen de un punto de ramificación $y \in \mathcal{Z}_G$ existe un entero $r \geq 2$ tal que $\pi^{-1}(y)$ consiste exactamente de $|G|/r$ elementos de \mathcal{Z} , y en cada uno de estos puntos π tiene multiplicidad r .*

En este contexto, el teorema 1.1.5 dice:

Corolario 1.2.1. Fórmula de Riemann-Hurwitz

Sea G un grupo finito actuando holomorfa y efectivamente en una superficie de Riemann Compacta \mathcal{Z} , con función cociente $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_G$. Suponga que existen k valores de ramificación y_1, y_2, \dots, y_k en \mathcal{Z}_G y supongamos que π tiene multiplicidad r_i en los $S_i = |G|/r_i$ puntos arriba de y_i , entonces

$$2g(\mathcal{Z}) - 2 = |G| \left[2g(\mathcal{Z}_G) - 2 + \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) \right] \quad (1.1)$$

Si G es un grupo de automorfismos es de la superficie de Riemann \mathcal{Z} , entonces la proyección natural $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_G$ es un cubrimiento ramificado.

Sea B es el conjunto de valores de ramificación de $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_G$, para $p \in B$ consideramos su fibra $\pi^{-1}(p) = \{q_1, q_2, \dots, q_s\} \subset \mathcal{Z}$, la estructura cíclica de π en p es una tupla (n_p, n_p, \dots, n_p) donde n_p es el índice de ramificación de π en q_i . Esto es, π es $n_p : 1$ en q_i .

En este caso el cubrimiento $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_G$ puede ser caracterizado por un vector de datos, que definimos a continuación:

Definición 1.2.5. Sea $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_G$ la proyección canónica. El vector $(\gamma; m_1, m_2, \dots, m_r)$, donde γ es el género de \mathcal{Z}_G , $r \leq 2\gamma + 2$, es el número de valores de ramificación y m_i , es el orden del subgrupo estabilizador, no trivial, del punto de ramificación q_i , se denomina *vector de datos de ramificación* (branching data) o *signatura* de G en \mathcal{Z} .

Definición 1.2.6. Un arreglo $2g(\mathcal{Z}_G) + r$, $(a_1, a_2, \dots, a_\gamma, b_1, b_2, \dots, b_\gamma, c_1, c_2, \dots, c_r)$ de elementos de G es llamado un *Vector Generador de Tipo* $(\gamma; m_1, m_2, \dots, m_r)$ si se satisface

- (a) G es generado por los elementos $(a_1, a_2, \dots, a_\gamma, b_1, b_2, \dots, b_\gamma, c_1, c_2, \dots, c_r)$;
- (b) orden $(c_i) = m_i$ y
- (c) $\prod_{i=1}^r [a_i, b_i] \prod_{j=1}^r c_j = 1$.

Observación 1.2.3.

- (a) El vector de datos de ramificación es único si los m_j son listados en orden no decreciente.

- (b) Dado que $\gamma = 0$ se presenta con mucha frecuencia, por conveniencia en la notación, omitimos en el vector de datos de ramificación la parte correspondiente a γ . Notemos que en este caso en el vector generador no aparecen los elementos a_i ni los b_i .
- (c) También, por conveniencia en la notación, usaremos abreviaturas tales como $(2^4, 3^2)$ para $(2, 2, 2, 2, 3, 3)$.

El siguiente teorema nos garantiza, bajo ciertas condiciones, la existencia de una superficie de Riemann con acción de un grupo finito G :

Teorema 1.2.2. Teorema de Existencia de Riemann

Un grupo finito G actúa en la superficie \mathcal{Z} , de género g , con vector de datos de ramificación $(\gamma; m_1, m_2, \dots, m_r)$ si y solo si la ecuación de Riemann-Hurwitz se satisface, y G tiene vector generador $(a_1, a_2, \dots, a_\gamma, b_1, b_2, \dots, b_\gamma, c_1, c_2, \dots, c_r)$.

Veamos un ejemplo del uso del teorema de existencia:

Ejemplo 1.2.1. Consideremos $G = \mathbf{S}_3 = \langle a, b : a^3, b^2, abab \rangle$, buscaremos posibilidades para el género de una superficie \mathcal{Z} , en la que actúe \mathbf{S}_3 , holomorfa y efectivamente. Por la fórmula 1.1. tenemos:

$$g(\mathcal{Z}) = |G| \left[g(\mathcal{Z}_G) - 1 + \frac{1}{2} \left(\alpha \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \beta \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right) \right] + 1$$

Si suponemos que $g(\mathcal{Z}_G) = 0$, y reemplazamos $|G| = |\mathbf{S}_3| = 6$ obtenemos:

$$g(\mathcal{Z}) = -5 + 3 \left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} \right)$$

y ahora podemos pensar en que $\alpha = 0$, es decir que sólo hay puntos de ramificación con subgrupo estabilizador de orden 2, entonces, para $\beta = 4$, obtenemos $g(\mathcal{Z}) = 1$, para $\beta = 6$ obtenemos $g(\mathcal{Z}) = 4$.

Para $\alpha = 1$ y $\beta = 4$ tenemos $g(\mathcal{Z}) = 3$.

En efecto, en el primer caso podemos tomar como vector generador: (ab, b, a^2b, b) , en el segundo caso: (ab, b, a^2b, b, b, b) y finalmente, podemos tomar el vector: (a^2b, b, b, b, a) , notemos que en estos casos, dado que $g(\mathcal{Z}_G) = 0$, solo tenemos en el vector generador elementos del tipo c_i , según la definición 1.2.6. En cada caso los elementos elegidos satisfacen las condiciones del teorema 1.2.2. De esta forma nos asegura que existen superficies de géneros 1, 4, 3 con acción, holomorfa y efectiva, de S_3 .

Terminaremos el capítulo con una sección dedicada a las superficies cocientes intermedias.

1.3. Género de una Superficie Cociente Intermedia

En esta sección presentaremos un resultado que nos da información sobre las superficies cocientes intermedias, es decir las superficies cocientes que se producen cuando pensamos en la acción de un subgrupo H de un grupo G que sabemos que actúa en una superficie de Riemann \mathcal{Z} . Para empezar incluiremos el concepto de clase doble y algunos hechos básicos sobre las clases dobles.

Definición 1.3.1. Sean H y K dos subgrupos de un grupo G . El conjunto

$$HxK = \{h x k : h \in H, k \in K\},$$

es llamado una *Clase Doble* de G con respecto a H y K .

Proposición 1.3.1. Sea G un grupo y sean H y K subgrupos de G .

- i) Una Clase Doble es un conjunto $HxK = \{h x k : h \in H, k \in K\}$.
- ii) Existe una única clase doble que contiene a $g \in G$, esta es HgK .
- iii) Las clases dobles son disjuntas. G es union disjunta de clases dobles.
- iv) Una clase doble es unión de clases laterales derechas de H y de clases laterales izquierdas de K . La clase doble HgK contiene exactamente $|H : K^{g^{-1}} \cap H|$ clases izquierdas de K .

v) La cardinalidad de una clase doble esta dada por:

$$|HgK| = |K| |H : K^{g^{-1}} \cap H|$$

vi) Si n es el número de clases dobles con respecto a H y K en G . Tenemos que:

$$|G| = |Hg_1K| + \dots + |Hg_nK| = |K| (|H : K^{g_1^{-1}} \cap H| + \dots + |H : K^{g_n^{-1}} \cap H|) \quad (1.2)$$

Entonces,

$$|G : K| = \sum_{i=1}^n |H : K^{g_i^{-1}} \cap H|$$

DEMOSTRACIÓN. ver [Suz82, p.23]. ■

El siguiente resultado conocido como Lema de Cauchy Frobenius nos permite conocer el número de clases dobles:

Lema 1.3.1. El número de órbitas, $|G \backslash X|$, de un grupo finito G actuando en un conjunto finito X es igual al numero promedio de puntos fijos

$$|G \backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|,$$

donde X_g denota el conjunto de puntos fijos por g .

DEMOSTRACIÓN. ver [DM96, p.24]. ■

Usaremos este lema, para calcular $|H \backslash G / K|$:

Sea $U \leq G \times G$ consideremos la acción

$$\begin{aligned} U \times G &\rightarrow G \\ ((a, b), g) &\mapsto agb^{-1} \end{aligned}$$

Para aplicar el lemma de Cauchy-Frobenius debemos conocer el número de puntos fijos por cada $(a, b) \in U$, ($|G_{(a,b)}|$)

$$\begin{aligned} G_{(a,b)} &= \{g \in G : agb^{-1} = g\} \\ &= \{g \in G : a = bgb^{-1}\} \end{aligned}$$

De modo que:

$$\begin{aligned} |G_{(a,b)}| &= |\{g \in G : a = bgb^{-1}\}| \\ &= \begin{cases} |C_G(a)| = |C_G(b)|, & \text{si } a \text{ y } b \text{ son conjugados} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Así por el lema de Cauchy-Frobenius se tiene:

$$\begin{aligned} |U \backslash \backslash G| &= \frac{1}{|U|} \sum_{(a,b)} |G_{(a,b)}| \\ &= \frac{1}{|U|} \sum_{(a,b): a \sim b} |C_G(a)| \\ &= \frac{1}{|U|} \sum_{(a,b)} \frac{|C^G(a) \cap C^G(b)|}{|C^G(a)|} |C_G(a)| \\ &= \frac{|G|}{|U|} \sum_{(a,b) \in U} \frac{|C^G(a) \cap C^G(b)|}{|C^G(a)|^2} \end{aligned}$$

Si C es una conjunto de representantes de las clases de conjugación de elementos de G , se tiene:

$$|U \backslash \backslash G| = \frac{|G|}{|U|} \sum_{g \in C} \frac{|(C^G(g) \times C^G(g)) \cap U|}{|C^G(g)|}.$$

En particular

$$H \backslash G / K = \{HgK : g \in G\} = (H \times K) \backslash \backslash G,$$

luego

$$|H \backslash G / K| = \frac{|G|}{|H||K|} \sum_{g \in C} \frac{|(C^G(g) \cap H) \cap K|}{|C^G(g)|}. \quad (1.3)$$

Definición 1.3.2. Sea \mathcal{Z} una superficie de Riemann compacta y G su grupo de automorfismos. Sean p_1, p_2, \dots, p_r la colección maximal de puntos de ramificación no equivalentes, respecto a G . Para cada $j = 1, 2, \dots, r$, consideramos su estabilizador G_j . Definimos la *Signatura Geométrica de G en \mathcal{Z}* como la tupla:

$$(\mathfrak{g}(\mathcal{Z}_G); [m_1, C_1], \dots, [m_r, C_r])$$

donde $\mathfrak{g}(\mathcal{Z}_G)$ es el género de \mathcal{Z}_G , m_i es el orden del subgrupo estabilizador G_i y C_i es la clase de conjugación representada por G_i

La siguiente proposición establece una fórmula para el género de los cocientes intermedios:

Proposición 1.3.2. *Sea \mathcal{Z} una superficie con acción de G , con signatura geométrica*

$$\Gamma = (\mathfrak{g}(\mathcal{Z}_G); [m_1, C_1], \dots, [m_r, C_r])$$

para cada $H \leq G$, sea \mathcal{Z}_H la superficie cociente obtenida de \mathcal{Z} por la acción de H entonces, el género de \mathcal{Z}_H esta dado por:

$$\mathfrak{g}(\mathcal{Z}_H) = |G : H|(\mathfrak{g}(\mathcal{Z}_G) - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{G_i \in \Gamma} (|G : H| - |H \backslash G / G_i|) \quad (1.4)$$

donde $|H \backslash G / G_i|$ denota el cardinal de un conjunto de representantes de la clases dobles.

DEMOSTRACIÓN. ver [Roj07]. ■

Miramos en el ejemplo 1.2.1. que el grupo \mathbf{S}_3 actúa, holomorfa y efectivamente, en una superficie \mathcal{Z} de género 3, produciendo una superficie cociente $\mathcal{Z}_{\mathbf{S}_3}$ de género cero con vector generador era (a^2b, b, b, a) , según la firma $(3, 2^4)$. Consideremos el subgrupo de \mathbf{S}_3 generado por b , es decir $H = \langle b \rangle = \{0, b\}$, usaremos la fórmula dada en la proposición 1.3.2. para encontrar el género de la superficie cociente \mathcal{Z}_H . como $\mathfrak{g}(\mathcal{Z}_{\mathbf{S}_3}) = 0$, reemplazando tenemos:

$$\mathfrak{g}(\mathcal{Z}_H) = 3(-1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{G_i \in \Gamma} (|G : H| - |H \backslash G / G_i|)$$

En este caso, $G_1 = \langle a \rangle = \{1, a, a^2\}$, $G_2 = \langle a^2b \rangle = \{1, a^2b\}$, $G_3 = G_4 = G_5 = \langle b \rangle = \{1, b\}$, además $|H \backslash G / G_1| = 1$, $|H \backslash G / G_2| = 2$ y $|H \backslash G / G_3| = |H \backslash G / G_4| = |H \backslash G / G_5| = 2$. Reemplazando tenemos:

$$\mathfrak{g}(\mathcal{Z}_H) = 3(-1) + 1 + \frac{1}{2}(6)$$

así, $\mathfrak{g}(\mathcal{Z}_H) = 1$.

Representación de Monodromía y Cubrimientos Galois

En este capítulo presentaremos algunos resultados conocidos sobre la representación de monodromía de un cubrimiento, los cuales serán utilizados para estudiar los cubrimientos Galois.

2.1. Grupo Fundamental y Representación de Monodromía

Definición 2.1.1. Sea \mathcal{Z} una superficie de Riemann, $q \in \mathcal{Z}$ un punto base fijo.

- (a) Un *Lazo* con base en q es una función $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{Z}$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = q$.
- (b) Dos lazos α_1 y α_2 se llaman *homotópicos* si existe una función continua $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{Z}$ tal que $F(0, t) = \alpha_1(t)$ y $F(1, t) = \alpha_2(t)$ para todo t , y $F(s, 0) = F(s, 1) = q$ para todo s .

La homotopía de lazos es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los loops con base en q , esto da lugar a la definición de Grupo Fundamental.

Definición 2.1.2. El *grupo fundamental* de \mathcal{Z} , con base en q es el conjunto de todas las clases de homotopía de loops basados en q y se denota por $\Pi_1(\mathcal{Z}, q)$.

Definición 2.1.3. Sea $f : (\mathcal{Y}, y_0) \rightarrow (\mathcal{X}, x_0)$ un cubrimiento tal que $f(y_0) = x_0$. El *homomorfismo inducido* por p , relativo al punto base x_0 es:

$$\begin{aligned} f_* : \Pi_1(\mathcal{Y}, y_0) &\rightarrow \Pi_1(\mathcal{X}, x_0) \\ [\alpha] &\mapsto [p \circ \alpha]. \end{aligned}$$

En [Mun75, p.344] se puede ver que p_* es un homomorfismo inyectivo.

Proposición 2.1.1. *Sea $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento e $y_0, y_1 \in f^{-1}(x_0)$. Los subgrupos $f_*(\Pi_1(\mathcal{Y}, y_0))$ y $f_*(\Pi_1(\mathcal{Y}, y_1))$ son conjugados en $\Pi_1(\mathcal{X}, x_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Los grupos $\Pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$ y $\Pi_1(\mathcal{Y}, y_1)$ son isomorfos. Si γ es el camino de y_0 a y_1 en \mathcal{Y} , el isomorfismo es dado por $[c] \mapsto [\gamma][c][\gamma^{-1}]$, donde $[c] \in \Pi_1(\mathcal{Y}, y_1)$. Proyectando γ a \mathcal{X} obtenemos un camino cerrado que da un elemento $f_*[\gamma] \in \Pi_1(\mathcal{X}, x_0)$. Como todos los elementos de $\Pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$ son de la forma $f_*[\gamma]f_*[c]f_*[\gamma^{-1}]$ para $[c] \in \Pi_1(\mathcal{Y}, y_1)$, $f_*(\Pi_1(\mathcal{Y}, y_0))$ y $f_*(\Pi_1(\mathcal{Y}, y_1))$ son conjugados. ■

Definición 2.1.4. Un cubrimiento $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ se llama *Galois* o *Normal* si la imagen de $\Pi_1(\mathcal{Y}, y_0)$ bajo p es un subgrupo normal de $\Pi_1(\mathcal{X}, x_0)$.

Observación 2.1.1. Un cubrimiento es normal si y solo si ningún camino en \mathcal{X} es al mismo tiempo la imagen de un camino cerrado y un camino no cerrado.

Proposición 2.1.2. *Sea \mathcal{X} una superficie de Riemann, $q \in \mathcal{X}$ un punto base, entonces existe una correspondencia 1-1 entre el conjunto de clases de isomorfismos de cubrimientos conexos $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ y el conjunto de clases de conjugación de subgrupos $H \leq \Pi_1(\mathcal{X}, q)$.*

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, \text{ conexos,} \\ \text{módulo isomorfismo} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Subgrupos } H \leq \Pi_1(\mathcal{X}, q), \\ \text{módulo conjugación} \end{array} \right\}$$

DEMOSTRACIÓN. Este es un resultado ampliamente conocido y su demostración se puede ver en [Mir95, p.85]. ■

Observemos que para $f_1^* \in f^{-1}(q)$ el grupo fundamental con punto base en él, es tal que $f_*(\Pi_1(\mathcal{Y}, p_1^*))$ corresponde al subgrupo H de $\Pi_1(\mathcal{X}, q)$, esto es $\Pi_1(\mathcal{Y}, f_1^*)$ es isomorfo a H . Además, podemos ver cada punto de \mathcal{Y} como la clase de equivalencia consistente de parejas (p, C) , donde $p \in V$ y C es una curva que une a q con p ; dos pares (p_1, C_1) and (p_2, C_2) podrán ser identificados como el mismo punto en \mathcal{Y} si $p_1 = p_2$ y $C_1 C_2^{-1} \in H$.

Teorema 2.1.1. *Sean $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento, $K = f_*\Pi_1(\mathcal{Y}, p)$ y $F = \Pi_1(\mathcal{X}, q)$, con $p \in f^{-1}(q)$. Entonces, f es regular o Galois (esto es su grupo de Galois es transitivo) si y solo si K es un subgrupo normal de F ; en este caso, el grupo de transformaciones de cubrimiento es isomorfo a F/K .*

DEMOSTRACIÓN. Ver [Spr57, 92] ■

La siguiente definición es muy importante en el desarrollo de este trabajo pues nos permite estudiar los cubrimientos desde el punto de vista grupo-teórico.

Definición 2.1.5. Sea $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento conexo de grado d entre superficies de Riemann, la *representación de monodromía* de f es el homomorfismo de grupos $\rho : \Pi_1(\mathcal{X}, q) \rightarrow \mathbf{S}_d$ con imagen transitiva en \mathbf{S}_d .

Para $\alpha \in \Pi_1(\mathcal{X}, q)$, consideramos la fibra de q , $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_n\}$, tenemos

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_d \\ \tilde{\sigma}_1(1) & \tilde{\sigma}_2(1) & \dots & \tilde{\sigma}_d(1) \end{pmatrix},$$

donde $\tilde{\sigma}_i(1)$ es el punto final del levantamiento de σ empezando en p_i .

Lema 2.1.1. *Sean $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento conexo y $\rho : \Pi_1(\mathcal{X}, q) \rightarrow \mathbf{S}_d$ su representación de monodromía, entonces,*

- i) \mathcal{Y} conexo implica $Im(\rho)$ es un subgrupo transitivo de \mathbf{S}_d .*
- ii) $f_*(\Pi_1(\mathcal{Y}, p)) = \rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1}^1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos la segunda parte. Considere $\tau \in \Pi_1(\mathcal{Y}, p_1)$, entonces $f(\tau) \in f_*(\Pi_1(\mathcal{Y}, p_1)) \leq \Pi_1(\mathcal{X}, q)$ y $f(\tau)$ es tal que su levantamiento empezando en p_1 es cerrado, entonces

$$\rho(f(\tau)) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_d \\ p_1 & p_{i2} & \dots & p_{id} \end{pmatrix}$$

entonces $f_*(\Pi_1(\mathcal{Y}, p_1)) \subseteq \rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1}^1)$.

Por otro lado, si $\sigma \in \rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1}^1)$, su levantamiento empezando en p_1 es cerrado, entonces $\sigma \in f_*(\Pi_1(\mathcal{Y}, p_1))$ ■

Proposición 2.1.3. *Sean \mathcal{X} una superficie de Riemann y $q \in \mathcal{X}$ un punto base. Entonces existe una correspondencia 1-1 entre el conjunto de clases de isomorfismos de isomorfismos de cubrimientos conexos $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ de grado d y el conjunto de homomorfismos $\rho : \Pi_1(\mathcal{X}, q) \rightarrow \mathbf{S}_d$ con imagen transitiva bajo conjugación en \mathbf{S}_d .*

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, \text{ cubrimiento conexo,} \\ \text{de grado } d \\ \text{módulo isomorfismo} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{homomorfismos} \\ \rho : \Pi_1(\mathcal{X}, q) \rightarrow \mathbf{S}_d, \\ \text{con imagen transitiva} \\ \text{módulo conjugación en } \mathbf{S}_d \end{array} \right\}$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, asociamos a cada cubrimiento conexo finito $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ de grado d su representación de monodromía, $\rho : \Pi_1(\mathcal{X}, q) \rightarrow \mathbf{S}_d$. Recíprocamente, dado el homomorfismo $\rho : \Pi_1(\mathcal{X}, q) \rightarrow \mathbf{S}_d$ con imagen transitiva, consideremos el subgrupo \mathbf{S}_{d-1} que fija el 1 y el conjunto

$$H = \{\gamma \in \Pi_1(\mathcal{X}, q) : \rho(\gamma) \in \mathbf{S}_{d-1}\}$$

H es un subgrupo de $\Pi_1(\mathcal{X}, q)$ con $|\Pi_1(\mathcal{X}, q) : H| = d$, y de acuerdo al proposición 2.1.2, existe un cubrimiento $f_\rho : \mathcal{Y}_\rho \rightarrow \mathcal{X}$ de grado d asociado a H ; por construcción su representación de monodromía es ρ . ■

Proposición 2.1.4. Sean \mathcal{X} una superficie de Riemann compacta, B un subconjunto finito de \mathcal{Y} y $q \in \mathcal{X} \setminus B$ un punto base. Entonces existe una correspondencia 1-1 entre el conjunto de clases de isomorfismos de cubrimientos conexos $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ de grado d con puntos rama en B y el conjunto de homomorfismo $\rho : \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) \rightarrow \mathbf{S}_d$ con imagen transitiva bajo conjugación en \mathbf{S}_d .

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, \text{ funciones holomorfas,} \\ \text{de grado } d \\ \text{con puntos rama en } B \\ \text{módulo isomorfismo} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{homomorfismos} \\ \rho : \Pi_1(\mathcal{X}, q) \rightarrow \mathbf{S}_d, \\ \text{con imagen transitiva} \\ \text{módulo conjugación en } \mathbf{S}_d \end{array} \right\}$$

Además, para todo $b \in B$, si γ es un pequeño lazo al rededor de $b \in \mathcal{X} \setminus B$ con punto base en q y si $\rho(\gamma)$ tien estructura cíclica (m_1, m_2, \dots, m_k) . Entonces tenemos k elementos u_j en la fibra de b y la correspondiente función f_ρ tiene multiplicidad m_j en u_j , para cada j .

DEMOSTRACIÓN. [Mir95, p.89] ■

Corolario 2.1.2. Sean $\mathcal{X} = \mathbb{P}^1$ y un subconjunto $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \in \mathcal{Y}$. Entonces tenemos una correspondencia 1-1 entre

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1, \text{ funciones holomorfas,} \\ \text{de grado } d \\ \text{con puntos rama en } B \\ \text{módulo isomorfismo} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n - \text{tuplas} \\ \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \subset \mathbf{S}_d, \\ \text{tales que } \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_n = 1 \\ \text{y } \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \rangle \text{ es transitivo en } \mathbf{S}_d \\ \text{módulo conjugación en } \mathbf{S}_d \end{array} \right\}$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [Mir95, p.92] ■

Resumiendo,

Teorema 2.1.3. Sean $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento ramificado de grado d , B el conjunto de puntos rama, ρ su representación de monodromía y

$$\Gamma^{(i)} := \rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1}^{(i)}) = \rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1}^{(i)} \cap \text{Im}(\rho)), \quad i = 1, 2, \dots, d$$

entonces,

- i) $\Gamma^{(i)}$ es conjugado de $\Gamma^{(j)}$ para todo i, j
- ii) $\Pi_1(\mathcal{Y} \setminus f^{-1}(B), p_1) \cong f_*(\Pi_1(\mathcal{Y} \setminus f^{-1}(B), p_1)) = \Gamma^{(1)} \leq \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q)$
- iii) $|\Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) : \Gamma^{(i)}| = d$
- iv) $\ker \rho = \bigcap_{i=1}^d \Gamma^{(i)}$

Teorema 2.1.4. Sean $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento ramificado de grado d , B el conjunto de puntos rama, ρ su representación de monodromía y

$$\Gamma^{(i)} := \rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1}^{(i)}) = \rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1}^{(i)} \cap \text{Im}(\rho)), \quad i = 1, 2, \dots, d$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes,

- i) f es Galois
- ii) El grupo de Galois de f actúa transitivamente en \mathcal{Y}
- iii) $f_*(\Pi_1(\mathcal{Y} \setminus f^{-1}(B), p_1)) \leq \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q)$
- iv) $\Gamma^{(i)} = \Gamma^{(j)}$ para todo i, j
- v) $\ker \rho = \Gamma^{(i)}$
- vi) $\ker \rho = f_*(\Pi_1(\mathcal{Y} \setminus f^{-1}(B), p_1))$
- vii) $\text{Gal}(f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}) \cong \text{Im}(\rho)$

2.2. Cubrimiento de Galois de un cubrimiento

En esta sección desarrollamos algunos resultados sobre cubrimiento de Galois de un cubrimiento. Este es un concepto interesante y fundamental en este trabajo.

Definición 2.2.1. Sean \mathcal{X}, \mathcal{Y} superficies de Riemann y $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento. La *clausura de Galois* de f es un cubrimiento Galois, $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ de menor grado posible tal que existe una secuencia de cubrimientos

$$\mathcal{Z} \xrightarrow{\hat{f}'} \mathcal{Y} \xrightarrow{f} \mathcal{X},$$

tal que $g = f \circ \hat{f}'$.

Note que módulo equivalencia la clausura de Galois es única.

Proposición 2.2.1. Sea $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento (ramificado) de grado d entre superficies de Riemann compactas \mathcal{X}, \mathcal{Y} . Sea ρ su representación de monodromía. Entonces, el cubrimiento de Galois de f es el cubrimiento asociado a $\ker \rho$.

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo a lo presentado en la proposición 2.1.1 tenemos que el cubrimiento $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ corresponde al subgrupo $\rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1})$. Siguiendo su definición, el cubrimiento de Galois corresponde al sub-grupo maximal del conjunto

$$\mathcal{C} = \{N \leq \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q), N \leq \rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1} \cap \text{Im}(\rho))\}$$

Es claro que el elemento maximal de $\mathcal{C} = \cap_i \Gamma^{(i)} = \rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1} \cap \text{Im}(\rho))_{\Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q)} = \ker(\rho)$. ■

De la proposición anterior, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{Z} & & \\
 & \swarrow f' & \downarrow g & & \\
 \mathcal{Y} & & & & \\
 & \searrow f & & & \\
 & & \mathcal{X} & & \\
 & & & & \\
 & & \ker(\rho) & & 1 \\
 & \swarrow & \downarrow & & \swarrow \\
 \rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1}) & & \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{S}_d \\
 & \searrow & & & \downarrow \\
 & & & & \mathbf{S}_{d-1} \\
 & & & & \swarrow \\
 & & & & \rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1})
 \end{array}$$

Proposición 2.2.2. De acuerdo a la situación anterior, al diagrama y fijando $G = \text{Im}(\rho) \leq \mathbf{S}_d$, entonces:

- i) $f' : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ y $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ son Galois.
- ii) $\mathcal{X} = \mathcal{Z}_G$
- iii) $\mathcal{Y} = \mathcal{Z}_{(\mathbf{S}_{d-1} \cap G)}$

DEMOSTRACIÓN. Estos son resultados de la teoría de cubrimientos, para su demostración usaremos principalmente el teorema 2.1.4. Antes de continuar, notemos que $g = f \circ f'$ implica $g_* = (f \circ f')_* = f_* \circ f'_*$, de modo que $g_* : \Pi_1(\mathcal{Z} \setminus g^{-1}(B), q_2) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, p_1)$, $f'_* : \Pi_1(\mathcal{Z}, g^{-1}(B), q_2) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{Y} \setminus f^{-1}(B), p_1)$.

- i) Por la proposición 2.1.1 tenemos que $\Pi_1(\mathcal{Z} \setminus g^{-1}(B), q_2) \cong \ker(\rho)$, luego

$$f'_*(\Pi_1(\mathcal{Z}, g^{-1}(B), q_2)) \leq \Pi_1(\mathcal{Y} \setminus f^{-1}(B), p_1) \text{ y } g_*(\Pi_1(\mathcal{Z}, g^{-1}(B), q_2)) \leq \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q),$$

luego $f' : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ y $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ son Galois.

- ii)

$$\begin{aligned}
 \text{Gal}(\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}) &= \frac{\Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q)}{g_*(\Pi_1(\mathcal{Z}, g^{-1}(B), q_2))} \\
 &= \frac{\Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q)}{\ker(\rho)} \\
 &\cong \text{Im}(\rho) = G
 \end{aligned}$$

- iii)

$$\begin{aligned}
 \text{Gal}(\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}) &= \frac{\Pi_1(\mathcal{Y} \setminus f^{-1}(B), p_1)}{f'_*(\Pi_1(\mathcal{Z}, g^{-1}(B), q_2))} \\
 &= \frac{\rho^{-1}(\mathbf{S}_{d-1})}{\rho^{-1}(id)} \\
 &\cong \mathbf{S}_{d-1} \cap G
 \end{aligned}$$

■

El siguiente lema establece una relación entre el cubrimiento f , su representación de monodromía ρ y su cubrimiento de Galois.

Lema 2.2.1. *Considere $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento (ramificado) de grado d entre superficies de Riemann, sea B el conjunto de puntos rama, $q \in \mathcal{X} \setminus B$ un punto base, y $\rho : \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) \rightarrow \mathbf{S}_d$ su representación de monodromía. Entonces, el cubrimiento de Galois de f tiene grupo de Galois isomorfo a $\text{Im}(\rho)$.*

La última parte de esta sección está dedicada a identificar aspectos importantes del cubrimiento de Galois de un cubrimiento $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$. Para ello recordemos la definición de representación permutacional.

Definición 2.2.2. Sea G un grupo, $N \leq G$. La *representación permutacional* asociada a N es dada por la acción de G en las clases derechas de N y se construye como sigue:

Sea $\Omega = \{Ng_1, \dots, Ng_s\}$ el conjunto de clases derechas de N , con $s = |G : N|$; tenemos que G actúa en Ω por multiplicación derecha, esto produce una permutación de los elementos en Ω , entonces tenemos un homomorfismo $\phi : G \rightarrow \mathbf{S}_s$.

Un hecho básico acerca de este homomorfismo es que el núcleo de esta representación es:

$$\begin{aligned} \ker(\phi) &= \{k \in G : Ng_ik = Ng_i \forall Ng_i \in \Omega\} \\ &= \{k \in G : g_i^{-1}kg_i \in N \forall g_i \in G\} \\ &= \bigcap_{g \in G} N^g = N_G \end{aligned}$$

Ahora, veremos como se ve el cubrimiento de Galois. Para esto consideramos ϕ la representación permutacional de $G = \text{Im}(\rho)$,

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) & \xrightarrow{\rho} & \text{Im}(\rho) = G \\ & \searrow^{g_1 = \phi \circ \rho} & \downarrow \phi \\ & & \mathbf{S}_{|G|} \end{array}$$

Tenemos:

i) $\ker(\rho) = \ker(g_1)$, en efecto:

$$\begin{aligned} \ker(\phi) &= \{\alpha \in \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) : \phi(\rho(\alpha)) = id_{\mathbf{S}_{|G|}}\} \\ &= \{\alpha \in \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) : \rho(\alpha) \cdot g = g \forall g \in G\} \\ &= \{\alpha \in \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) : \rho(\alpha) = 1_G\} \\ &= \ker(\rho) \end{aligned}$$

ii) $g_1^{-1}(\mathbf{S}_{|G|-1}) = \rho^{-1}(\{g \in G : g * 1 = 1\}) = \rho^{-1}(1) = \ker(\rho)$, en efecto:

$$\begin{aligned}
g_1^{-1}(\mathbf{S}_{|G|-1}) &= \{\alpha \in \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) : g_1(\alpha) \in \mathbf{S}_{|G|-1}\} \\
&= \{\alpha \in \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) : \phi(\rho(\alpha)) \in \mathbf{S}_{|G|-1}\} \\
&= \{\alpha \in \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) : \rho(\alpha) \in \phi^{-1}(\mathbf{S}_{|G|-1})\} \\
&= \{\alpha \in \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) : \rho(\alpha) \in \{g \in G : \phi_g(1_G) = 1_G\}\} \\
&= \rho^{-1}\{g \in G : g \cdot 1_G = 1_G\} \\
&= \rho^{-1}(1_G) = \ker(\rho).
\end{aligned}$$

Así, el cubrimiento asociado a $g_1^{-1}(\mathbf{S}_{|G|-1})$, de la proposición 2.1.4, el cual se extiende a una función analítica en \mathcal{X} , con puntos rama en B e índice de ramificación dado por la estructura de ciclos de g_1 , corresponde al cubrimiento de Galois de f , porque el subgrupo de $\Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q)$ escrito como $g_1(\mathbf{S}_{|G|-1})$ y el escrito como $\ker(\rho)$ son el mismo subgrupo de $\Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q)$, entonces el cubrimiento de Galois de f , $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ tiene puntos rama en B y la estructura cíclica de este, en cada punto de B está dada por la estructura de ciclos de g_1 .

Resta describir, como es la ramificación sobre los puntos de B , lo cual es equivalente a describir la estructura de ciclos de g_1 . Consideremos $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$, para todo b_i existe $\delta_i \in \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q)$, que no rodea ningún punto de B diferente a b_i , para tal δ_i sean $c_i = \rho(\delta_i) \in G$, su imagen por ρ , $m_i = |c_i|$ y $n_i = |G : \langle c_i \rangle|$. Entonces la estructura de ciclos de $g_1(\delta_i)$ es $\underbrace{(m_i, m_i, \dots, m_i)}_{n_i}$, $i = 1..r$, ya que la estructura se da por la acción de G en las clases izquierdas de 1. Así tenemos,

Proposición 2.2.3. *Dado un cubrimiento ramificado $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ entre superficies de Riemann, con puntos rama en $B = \{b_1, \dots, b_r\} \subset \mathcal{X}$ y representación de monodromía ρ ; su cubriente de Galois, el cual es una función analítica ramificada $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ entre superficies de Riemann, tiene sus puntos rama en $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ y cada uno tiene $|G : \langle \rho(\delta_i) \rangle|$ preimágenes y es $\langle \rho(\delta_i) \rangle$ a 1 en cada una, donde δ_i es un pequeño lazo al rededor de b_i .*

2.3. Cubrimientos Intermedios y Cubrimientos de Galois

Los resultados presentados en esta sección son de gran utilidad en el desarrollo de este trabajo y están tomados de [Roj02].

Proposición 2.3.1. *Sea \mathcal{Z} una superficie de Riemann con G -acción con signatura geométrica $(\gamma; [m_1, C_1], \dots, [m_r, C_r])$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\} \subset \mathcal{Z}_G$ el conjunto de puntos rama y $q \in \mathcal{Z}_G \setminus B$ un punto base; entonces para cada $H \leq G$, la estructura cíclica de $\pi^H : \mathcal{Z}_H \rightarrow \mathcal{Z}_G$ sobre cada punto $b_i \in B$ es la estructura cíclica de un elemento g_i tal*

que $\langle g_i \rangle \in C_i$ dado por la representación permutacional de G en clases izquierdas de H , $\phi_H : G \rightarrow S_{|G:H|}$.

DEMOSTRACIÓN. El cubrimiento $\pi^H : \mathcal{Z}_H \rightarrow \mathcal{Z}_G$ tiene sus puntos rama B_H , contenidos en B , supongamos que $\{b_h, \dots, b_r\} = B \setminus B_H$ entonces

$$\Pi_1(\mathcal{Z}_G \setminus B_H, q) \cong \frac{\Pi_1(\mathcal{Z}_G \setminus B, q)}{\langle \delta_j : j = h, \dots, r \rangle}$$

donde δ_j es un pequeño lazo alrededor de b_i , $i = h, \dots, r$; Sean

$$\zeta : \Pi_1(\mathcal{Z}_G \setminus B_H, q) \rightarrow \frac{\Pi_1(\mathcal{Z}_G \setminus B, q)}{\langle \delta_j : j = h, \dots, r \rangle},$$

tal isomorfismo, y

$$pr : \Pi_1(\mathcal{Z}_G \setminus B, q) \rightarrow \frac{\Pi_1(\mathcal{Z}_G \setminus B, q)}{\langle \delta_j : j = h, \dots, r \rangle}$$

la proyección natural. Entonces, la representación de monodromía para π^H , notada por ρ_H , está definida por:

$$\begin{aligned} \rho_H : \Pi_1(\mathcal{Z}_G \setminus B_H, q) &\rightarrow \mathbf{S}_{|G:H|} \\ \delta &\mapsto \phi_H \circ (\tilde{\delta}), \end{aligned}$$

donde $\tilde{\delta} \in pr^{-1}(\zeta(\delta))$, $\rho : \Pi_1(\mathcal{Z}_G \setminus B, q) \rightarrow \mathbf{S}_{|G|}$ es la representación de monodromía del cubrimiento total $\pi_G : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_G$ y ϕ_H es la representación permutacional de G en clases derechas de H . Así, tenemos el siguiente diagrama:

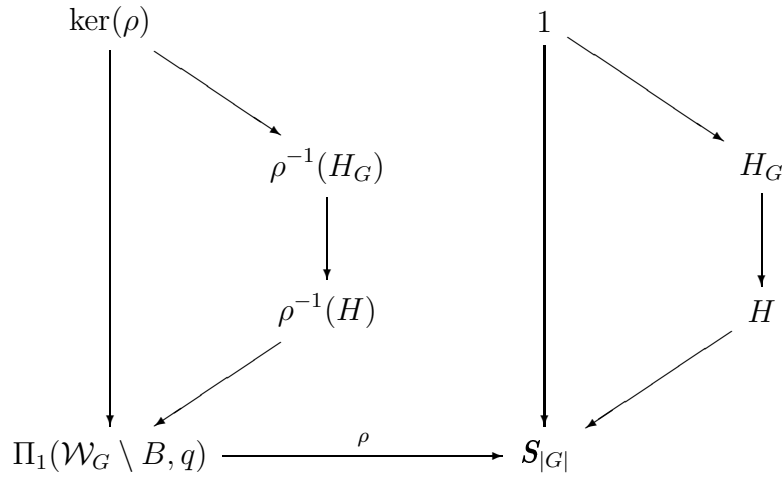
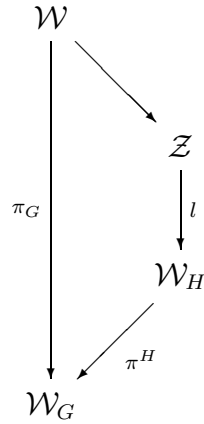
$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(\mathcal{Z}_G \setminus B, q) & \xrightarrow{\rho} & G \leq S_{|G|} \\ & \searrow \phi_H \circ \rho & \downarrow \phi_H \\ & & \mathbf{S}_{|G:H|} \end{array}$$

Como la estructura cíclica de un cubrimiento sobre un punto rama es la estructura cíclica de la imagen, por la representación de monodromía del cubrimiento, de un pequeño lazo alrededor de este, tenemos que esta dada por la representación permutacional de G en las clases derechas de H . ■

Ahora, recordemos la correspondencia establecida en la proposición 2.1.2, \mathcal{X}, \mathcal{Y} superficies de Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}, \text{ conexos,} \\ \text{módulo isomorfismo} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Subgrupos } H \leq \Pi_1(\mathcal{X}, q), \\ \text{módulo conjugación} \end{array} \right\}$$

Proposición 2.3.2. Sea \mathcal{W} una superficie de Riemann con acción de $G \leq \mathcal{S}_G$, $\pi_G : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_G$ la proyección natural con puntos rama en $B \subset \mathcal{W}_G$, $q \in \mathcal{W}_G \setminus B$ un punto base y $\rho : \Pi_1(\mathcal{W}_G \setminus B, q) \rightarrow \mathcal{S}_{|G|}$, la representación de monodromía para π_G . Si $H \leq G$ y $\pi^H : \mathcal{W}_H \rightarrow \mathcal{W}_G$, tenemos los siguientes diagramas:

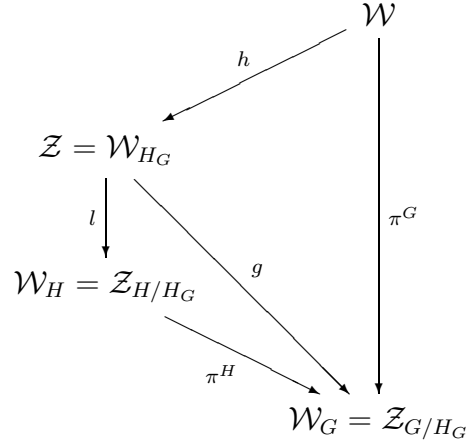


entonces,

i) El cubrimiento $\pi^H : \mathcal{W}_H \rightarrow \mathcal{W}_G$ corresponde a $\rho^{-1}(H) \leq \Pi_1(\mathcal{W}_G \setminus B, q)$.

ii) El cubrimiento de Galois para π^H , $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{W}_G$, corresponde al subgrupo $\rho^{-1}(H_G) \leq \Pi_1(\mathcal{W}_G \setminus B, q)$ y $\text{Gal}(g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{W}_G) \cong G/H_G$, entonces los grupos

actuando en cada superficie son:



Corolario 2.3.1. Sea \mathcal{W} una superficie de Riemann compacta con acción de G , dado $H \leq G$, el cubrimiento de Galois de $\pi^H : \mathcal{W}_H \rightarrow \mathcal{W}_G$ es $\pi^G : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_G$ si y solo si $H_G = 1$.

Corolario 2.3.2. Sea $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento ramificado de grado d entre superficies de Riemann, B su conjunto de puntos rama, $q \in \mathcal{X} \setminus B$ un punto base, $\rho_f : \Pi_1(\mathcal{X} \setminus B, q) \rightarrow G \leq \mathcal{S}_d$ y $g : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}$ su cubrimiento de Galois; entonces para cada $N \leq G$ tenemos:

- i) El cubrimiento de Galois de $\pi^N : \mathcal{W}_N \rightarrow \mathcal{X}$ es g si y solo si $N_G = 1$.
- ii) El cubrimiento de Galois de π^N es el correspondiente a $\rho_f^{-1}(N_G)$
- iii) Sea $t : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{W}_N$ el cubrimiento de Galois de π^N , tenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{Gal}(t : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{W}_N) &= N/N_G \\
 \mathcal{W}_N &\cong \mathcal{Z}_{(N/N_G)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Gal}(\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{Z}) &= N_G \\
 \mathcal{Z} &\cong \mathcal{W}_{(N_G)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Gal}(\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}) &= G/N_G \\
 \mathcal{X} &\cong \mathcal{Z}_{(G/N_G)}
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Sobre la clasificación de cubrimientos abelianos

Sean $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado m , esto es un cubrimiento tal que la fibra $\varphi^{-1}(p)$ sobre cada punto rama $p \in \mathbb{P}^1$ consiste exactamente de $m - 1$ puntos distintos, y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois abeliano. Estamos interesados en determinar \mathfrak{G} , el grupo de monodromía o grupo de Galois de la Clausura de Galois del cubrimiento compuesto $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$.

La clausura de Galois de $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento de Galois $\widehat{\varphi} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grado el menor posible tal que existe una secuencia de cubrimientos

$$\mathcal{Z} \xrightarrow{\widehat{\psi}} \mathcal{Y} \xrightarrow{\varphi \circ \psi} \mathbb{P}^1$$

con $(\varphi \circ \psi) \circ \widehat{\psi} = \widehat{\varphi}$.

En [BF86], Biggers y Fried, estudian el grupo de monodromía, \mathfrak{G} , de la clausura Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$, donde $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois cíclico, isomorfo a \mathbb{Z}_n . Ellos prueban que $\mathfrak{G} \cong \mathbb{Z}_n^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$. La demostración se basa en el estudio de los cuerpos de funciones meromorfas de los factores de $\widehat{\varphi}$.

Nuestro interés está en generalizar los resultados mencionados abordando este problema desde un punto de vista grupo-teórico. De este modo determinar la estructura algebraica del grupo de Galois, asociado al cubrimiento factorizado, que será importante en el estudio de las superficies de Riemann compactas asociadas a este cubrimiento.

Comenzaremos este capítulo con algunos resultados que son consecuencia de la correspondencia entre cubrientes de superficies de Riemann y grupos.

3.1. Correspondencia de Galois

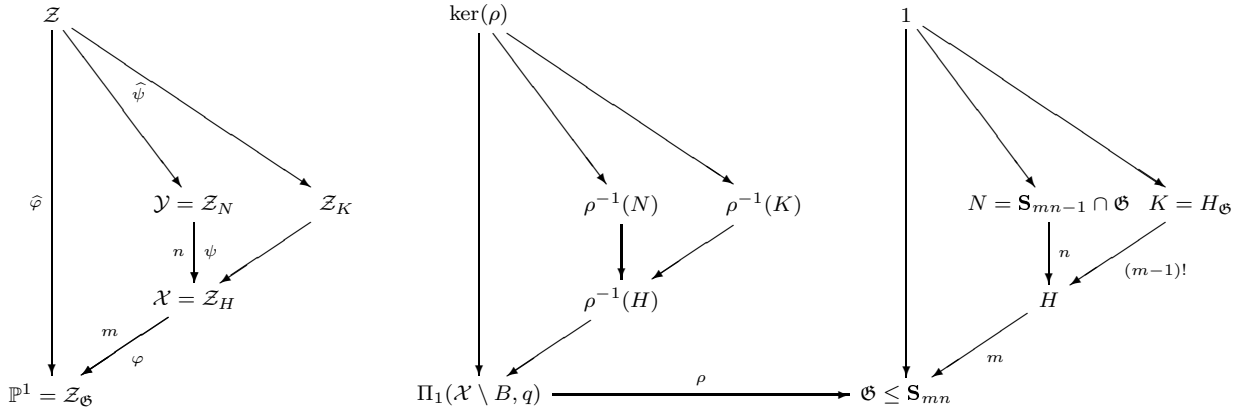
La siguiente proposición contiene propiedades conocidas para el grupo de monodromía o grupo de Galois de un cubrimiento factorizado.

Proposición 3.1.1. *Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois de la clausura de Galois, $\tilde{\varphi}$, del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$, donde $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es un cubrimiento Galois de grado n . Sea \mathcal{Z} la correspondiente superficie de Riemann asociada a $\tilde{\varphi}$.*

Entonces por el teorema de correspondencia de Galois, existen subgrupos N y H de \mathfrak{G} que satisfacen las siguientes propiedades:

- i) $\mathcal{Z}_N \cong \mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}_H \cong \mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}_{\mathfrak{G}} \cong \mathbb{P}^1$
- ii) $N_{\mathfrak{G}} = \{1\}$
- iii) H es subgrupo maximal de \mathfrak{G}
- iv) $N \trianglelefteq H$
- v) Para $K = H_{\mathfrak{G}}$ se tiene su grupo de Galois es $\mathfrak{G}/K \cong \mathbf{S}_m$, el grupo simétrico de grado m .

El siguiente diagrama, ilustra la relación de cubrimientos y subgrupos:



Aquí vemos que $\mathfrak{G} \leq \mathbf{S}_{mn}$ y que $N = \mathbf{S}_{mn-1} \cap \mathfrak{G}$, esto es N estabiliza un punto. Como $N \trianglelefteq H \leq \mathfrak{G}$ y $H = N_{\mathfrak{G}}(H)$, se tiene que:

$$|Fix(N)| = |N_{\mathfrak{G}}(N) : N| = |H : N| = n,$$

De este modo N estabiliza n puntos, en particular,

$$N = \bigcap_{i=1}^n \mathbf{S}_{mn-1}^{(im)} \cap \mathfrak{G},$$

donde $\mathbf{S}_{mn-1}^{(im)}$ es el subgrupo de \mathbf{S}_{mn} isomorfo a \mathbf{S}_{mn-1} , formado por todos los elementos que dejan fijo al elemento im , como se verá en la sección 3.2.

Observación 3.1.1. Sean G un grupo, N y H subgrupos de G , tales que $N \trianglelefteq H$, $N_G = 1$. Si H/N es abeliano, entonces para $K = H_G$ se tiene

$$K \lesssim (H/N)^m, \text{ donde } m = |G : N_G(H)|.$$

Particularmente, K es abeliano.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $K = H_G$ y sean $H^{g_1}, H^{g_2}, \dots, H^{g_m}$ los m conjugados distintos de H en G , consideremos:

$$\begin{aligned} \theta : K &\rightarrow (H/N)^{g_1} \times (H/N)^{g_2} \times \dots \times (H/N)^{g_m} \\ k &\mapsto (kN^{g_1}, kN^{g_2}, \dots, kN^{g_m}) \end{aligned}$$

θ está bien definido puesto que K es la intersección de todos los conjugados de H . Además

$$\begin{aligned} \theta(k_1 k_2) &= (k_1 k_2 N^{g_1}, k_1 k_2 N^{g_2}, \dots, k_1 k_2 N^{g_{m-1}}) \\ &= (k_1 N^{g_1} k_2 N^{g_1}, k_1 N^{g_2} k_2 N^{g_2}, \dots, k_1 N^{g_{m-1}} k_2 N^{g_{m-1}}) \text{ dado que } N^{g_i} \trianglelefteq H^{g_i} \\ &= \theta(k_1) \theta(k_2), \end{aligned}$$

luego θ es un homomorfismo de grupos.

$$\ker(\theta) = \{k \in K : kN^{g_i} = N^{g_i}, \forall g_i, i = 1, 2, \dots, m\} = K \cap \bigcap_{i=1}^m N^{g_i}.$$

Como $N^{g_i} \trianglelefteq H^{g_i}$, para todo i , se tiene que $\bigcap_{i=1}^m N^{g_i} = \bigcap_{g \in G} N^{g_i} = \{1\}$, luego $\ker(\theta) = \{1\}$ y θ es inyectivo. ■

La siguiente proposición nos permite determinar $K = H_G = \bigcap_{i=1}^m H^{g_i}$, de una forma más precisa, considerando G como grupo de Galois.

Proposición 3.1.2.

Sea $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento (ramificado) de grado $d \geq 2$, sea $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Y}$ su cubrimiento de Galois y \mathfrak{G} su grupo de Galois. Entonces, se satisfacen las siguientes afirmaciones:

i) Existe $H \leq \mathfrak{G}$ tal que $f \cong \bar{f} : \mathcal{Z}_H \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathfrak{G}}$, con $\mathcal{Z}_H \cong \mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{G}} \cong \mathcal{X}$.

ii) $K = H_{\mathfrak{G}} = \bigcap_{i=1}^{d-1} H^{g_i} = 1$, donde $H^{g_1}, H^{g_2}, \dots, H^{g_{d-1}}$ denota cualquier subconjunto de $d-1$ conjugados distintos de H .

iii) $\bigcap_{i=1}^{d-2} H^{g_i} \neq K$, para cualquier elección de $d-2$ conjugados distintos de H .

DEMOSTRACIÓN.

i) Es inmediato del teorema de correspondencia de Galois.

ii) Dado que $H = \mathfrak{G} \cap \mathbf{S}_{d-1}$, se tiene que el conjunto de subgrupos conjugados de H en \mathfrak{G} está dado por:

$$\Omega = \{H^g = \mathfrak{G} \cap (\mathbf{S}_{d-1})^g : g \in \mathfrak{G}\} \text{ y}$$

$|\Omega| = d$, luego si elegimos un sistema completo de conjugados de H , dado por $\{H^{g_i} : i = 1, \dots, d\}$ se tiene que

$$H_{\mathfrak{G}} = \bigcap_{i=1}^d H^{g_i} = \bigcap_{i=1}^d (\mathfrak{G} \cap \mathbf{S}_{d-1}^{g_i}) = \mathfrak{G} \cap \left(\bigcap_{i=1}^d \mathbf{S}_{d-1}^{g_i} \right),$$

pero sabemos que los conjugados de \mathbf{S}_{d-1} fijan un punto de modo que si queremos la intersección de ellos, ésta fija los d puntos, y

$$\bigcap_{i=1}^d \mathbf{S}_{d-1}^{g_i} = \bigcap_{i \in J} \mathbf{S}_{d-1}^{g_i} = 1, \quad J \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, \quad |J| = d-1,$$

luego

$$H_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \cap \left(\bigcap_{i=1}^d \mathbf{S}_{d-1}^{g_i} \right) = \mathfrak{G} \cap \left(\bigcap_{i \in J} \mathbf{S}_{d-1}^{g_i} \right) = 1.$$

iii) Es claro que si intersectamos cualquier subconjunto de Ω , formado por $d-2$ conjugados, este no va a fijar los d puntos, luego:

$$\bigcap_{i \in J} \mathbf{S}_{d-1}^{g_i} \neq 1, \quad J \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, \quad |J| = d-2,$$

en consecuencia,

$$\mathfrak{G} \cap \left(\bigcap_{i \in J} \mathbf{S}_{d-1}^{g_i} \right) \neq 1, \quad J \subseteq \{1, 2, \dots, d\}, \quad |J| = d-2.$$

■

Hasta este momento hemos estudiado el grupo de Galois de un cubrimiento factorizado sin considerar la ramificación del segundo factor. En la siguiente proposición estudiaremos esta situación.

Proposición 3.1.3. *Considere un cubrimiento factorizado $\mathcal{Y} \xrightarrow{\psi} \mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1$ y \mathcal{Z} la superficie de Riemann compacta asociada a su cubrimiento de Galois, con grupo de Galois \mathfrak{G} . Sean H y N subgrupos de \mathfrak{G} tales que $\mathcal{Z}_N \cong \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}_H \cong \mathcal{X}$. Entonces,*

$\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es no ramificado si y solo si $|H : N| |H \backslash \mathfrak{G}/G_i| = |N \backslash \mathfrak{G}/G_i|$, para todo G_i correspondiente a la signatura geométrica de \mathfrak{G} . (como en la definición 1.3.2).

DEMOSTRACIÓN. Suponga que ψ es no ramificado. Por la fórmula 1.1, (corolario 1.2.1), tenemos

$$g(\mathcal{Y}) = |H : N|(g(\mathcal{X}) - 1) + 1.$$

Por otro lado, usando la fórmula 1.4 (proposición 1.3.2), tenemos:

$$g(\mathcal{Y}) = -|\mathfrak{G} : N| + 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r (|\mathfrak{G} : N| - |N \backslash \mathfrak{G}/G_i|), \text{ y}$$

$$g(\mathcal{X}) = -|\mathfrak{G} : H| + 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r (|\mathfrak{G} : H| - |H \backslash \mathfrak{G}/G_i|),$$

luego,

$$\sum_{i=1}^r |N \backslash \mathfrak{G}/G_i| = |H : N| \sum_{i=1}^r |H \backslash \mathfrak{G}/G_i|$$

pero, $|N \backslash \mathfrak{G}/G_i| \leq |H : N| |H \backslash \mathfrak{G}/G_i|$, de modo que

$$|H : N| |H \backslash \mathfrak{G}/G_i| - |N \backslash \mathfrak{G}/G_i| \geq 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, r$$

y en consecuencia se tiene:

$$|H : N| |H \backslash \mathfrak{G}/G_i| = |N \backslash \mathfrak{G}/G_i| \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, r \quad (3.1)$$

Recíprocamente, usando la fórmula 1.4 (proposición 1.3.2), tenemos

$$g(\mathcal{Y}) = -|\mathfrak{G} : N| + 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r (|\mathfrak{G} : N| - |N \backslash \mathfrak{G}/G_i|),$$

de donde, reemplazando $|N \backslash \mathfrak{G}/G_i|$ por $|H : N| |H \backslash \mathfrak{G}/G_i|$ se obtiene:

$$g(\mathcal{Y}) = |H : N|(g(\mathcal{X}) - 1) + 1,$$

entonces, por la fórmula 1.1, (corolario 1.2.1),

$$g(\mathcal{Y}) = |H : N|(g(\mathcal{X}) - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right),$$

donde r_i es la multiplicidad de $\mathcal{Z}_H \rightarrow \mathcal{Z}_N$ en cada valor de ramificación y_i , $i = 1, \dots, k$.

luego

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{r_i}\right) = 0,$$

esto es $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es un cubrimiento no ramificado. ■

Proposición 3.1.4. *Considere las hipótesis de la proposición anterior (proposición 3.1.3). Para $K = H_{\mathfrak{G}}$, se tiene que $K \cap G_i = 1$, para cada G_i correspondiente a la signatura geométrica de \mathfrak{G} .*

DEMOSTRACIÓN. Reemplazando en la fórmula 3.1 (proposición 3.1.3), la cardinalidad de los conjuntos de clases dobles según la fórmula 1.3 se obtiene

$$\frac{|H|}{|N|} \frac{|\mathfrak{G}|}{|H||G_i|} \sum_{g \in C} \frac{|(C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H)|(C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i)|}{|C^{\mathfrak{G}}(g)|} = \frac{|\mathfrak{G}|}{|N||G_i|} \sum_{g \in C} \frac{|(C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N)|(C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i)|}{|C^{\mathfrak{G}}(g)|}$$

luego,

$$\sum_{g \in C} \frac{|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i| |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H|}{|C^{\mathfrak{G}}(g)|} = \sum_{g \in C} \frac{|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i| |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N|}{|C^{\mathfrak{G}}(g)|},$$

así,

$$\sum_{g \in C} \frac{\overbrace{(|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i|)}^{\geq 0} (|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H| - |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N|)}{\underbrace{|C^{\mathfrak{G}}(g)|}_{\geq 0}} = 0,$$

y dado que $N \leq H$, $C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N \subseteq C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H$, luego $|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H| - |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N| \geq 0$, para todo $g \in C$ de modo que:

$$\frac{(|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i|)(|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H| - |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N|)}{|C^{\mathfrak{G}}(g)|} \geq 0, \text{ para todo } g,$$

luego la ecuación anterior se satisface si y solo si:

$$(|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i|)(|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H| - |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N|) = 0,$$

entonces:

$$|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i| = 0 \quad \text{o} \quad |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H| = |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N|.$$

Notemos que si $|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N| = |(C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H)|$, debido a que $C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N \subseteq C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H$, se tiene que:

$$C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N = C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H.$$

Sea $K = H_{\mathfrak{G}}$, si se considera $k \in K$, entonces $C^{\mathfrak{G}}(k) = \{g^{-1}kg : g \in \mathfrak{G}\} \subseteq K$. Luego para cada $k \in K$ se tiene que:

$$C^{\mathfrak{G}}(k) \cap H = C^{\mathfrak{G}}(k) = C^{\mathfrak{G}}(k) \cap N,$$

luego $C^{\mathfrak{G}}(k) \subseteq N$, lo que contradice el hecho de que $N_{\mathfrak{G}} = 1$.

En consecuencia para $k \in K$, $|C^{\mathfrak{G}}(k) \cap G_i| = 0$, luego $K \cap G_i = \{1\}$, para todo $i = 1, \dots, r$. ■

En el caso particular que estamos estudiando, se cumple el recíproco de la proposición anterior. Así se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.1.5. *Considere un cubrimiento factorizado $\mathcal{Y} \xrightarrow{\psi} \mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1$, con $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple y \mathcal{Z} la superficie de Riemann compacta asociada a su cubrimiento de Galois, con grupo de Galois \mathfrak{G} . Sean H y N subgrupos de \mathfrak{G} tales que $\mathcal{Z}_N \cong \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}_H \cong \mathcal{X}$. Entonces,*

$\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es no ramificado si y solo si $K \cap G_i = 1$, para todo G_i correspondiente a la signatura geométrica de \mathfrak{G} . (como en la definición 1.3.2).

DEMOSTRACIÓN. La primera implicación se probó en la proposición anterior (proposición 3.1.4). Probaremos el recíproco. Sean H, N subgrupos de \mathfrak{G} tales que $\mathcal{Y} \cong \mathcal{Z}_N$ y $\mathcal{X} \cong \mathcal{Z}_H$, $K = H_{\mathfrak{G}}$. Entonces

Si $K \cap G_i = \{1\}$, para todo i . Sea $g \in \mathfrak{G}$ tal que $C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i \neq \emptyset$, entonces si $t \in C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i$, $t = 1$ o $t = g_i$. En el caso $t = g_i$, se tiene que $g = sg_i s^{-1}$, para algún $s \in \mathfrak{G}$. Además, $C^{\mathfrak{G}}(g) \cap K = \emptyset$.

Es claro que $C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N \subseteq C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H$, luego $|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N| \leq |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H|$. Ahora, si existe $y \in C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H$, entonces $y = m g m^{-1} = (m s) g_i (m s)^{-1}$, para algún $m \in \mathfrak{G}$. De este modo $y \in G_i^{ms}$, luego $y \in N^l$, esto es $C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H \subseteq C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N^l$, pero $|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N| = |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N^l|$, luego $|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N| = |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H|$. De este modo:

$$|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i| (|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H| - |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N|) = 0, \text{ para todo } i, \text{ para todo } g,$$

de donde:

$$\frac{|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i| (|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H| - |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N|)}{|C^{\mathfrak{G}}(g)|} = 0, \text{ para todo } i, \text{ para todo } g,$$

luego si C es un transversal de \mathfrak{G} , se tiene que:

$$\sum_{g \in C} \frac{|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i| (|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H| - |C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N|)}{|C^{\mathfrak{G}}(g)|} = 0, \text{ para todo } i,$$

luego

$$\sum_{g \in C} \frac{|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i| (|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H|)}{|C^{\mathfrak{G}}(g)|} = \sum_{g \in C} \frac{|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i| (|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N|)}{|C^{\mathfrak{G}}(g)|} \text{ para todo } i,$$

esto es,

$$\frac{|H|}{|N|} \frac{|G|}{|H||G_i|} \sum_{g \in C} \frac{|(C^{\mathfrak{G}}(g) \cap H)| (|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i|)}{|C^{\mathfrak{G}}(g)|} = \frac{|\mathfrak{G}|}{|N||G_i|} \sum_{g \in C} \frac{|(C^{\mathfrak{G}}(g) \cap N)| (|C^{\mathfrak{G}}(g) \cap G_i|)}{|C^{\mathfrak{G}}(g)|}, \text{ para todo } i,$$

Por tanto:

$$|H : N| |H \backslash \mathfrak{G} / G_i| = |N \backslash \mathfrak{G} / G_i|, \text{ para todo } i,$$

y por la proposición 3.1.3, $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ no ramifica. ■

La proposición anterior nos garantiza que los elementos generadores del grupo de Galois del cubriente compuesto $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$, no pertenecen a $K = H_{\mathfrak{G}}$, la información sobre su orden la obtendremos de la siguiente observación:

Observación 3.1.2. Dados $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$, $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Para cada $p \in \mathcal{X}$,

$$\text{mult}_p(\varphi \circ \psi) = \text{mult}_p(\psi) \cdot \text{mult}_{\psi(p)}(\varphi).$$

En particular si $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es no ramificado, se tiene que

$$\text{mult}_p(\varphi \circ \psi) = \text{mult}_p(\psi) \cdot \text{mult}_{\psi(p)}(\varphi) = 1 \cdot \text{mult}_{\psi(p)}(\varphi) = \text{mult}_{\psi(p)}(\varphi),$$

De modo que si $b \in \mathbb{P}^1$ es un punto rama de φ , con estructura cíclica (m_1, \dots, m_r) , existen puntos $\psi(p_i) \in \mathcal{Y}$, $i = 1, \dots, m_r$ tales que $\text{mult}_{\psi(p_i)}(\varphi) = m_i$ y dado que ψ no ramifica, $\text{mult}_{\psi(p_i)}(\varphi) = \text{mult}_{(p_i)}(\psi \circ \varphi)$.

Luego si $b \in \mathbb{P}^1$ es un punto rama de $\varphi \circ \psi$, la estructura cíclica es:

$$(m_1^n, m_2^n \dots, m_r^n),$$

donde n es el grado del cubrimiento ψ .

Proposición 3.1.6. Sea $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n . Entonces,

i) La estructura cíclica del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$, en cada punto rama $b \in \mathbb{P}^1$ es dada por

$$(2^n, 1^{n(m-2)}).$$

ii) Para el cubrimiento de Galois, $\widehat{\varphi} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$, del cubrimiento de Galois de $\varphi \circ \psi$, el correspondiente grupo de Galois, \mathfrak{G} tiene la siguiente presentación

$$\mathfrak{G} = \left\langle g_1, g_2, \dots, g_r : g_i^2 = 1, \prod_{i=1}^r g_i = 1, \mathcal{R} \right\rangle,$$

donde \mathcal{R} representa las relaciones apropiadas entre los generadores de grupo.

iii) Si H es el subgrupo de \mathfrak{G} tal que $\mathcal{Z}_H \cong \mathcal{X}$ y $K = H_{\mathfrak{G}}$, entonces

$$\mathfrak{G}/K = \left\langle g_1K, g_2K, \dots, g_rK : (g_iK)^2 = 1, \prod_{i=1}^r g_iK = 1, \mathcal{R} \right\rangle,$$

donde \mathcal{R} representa las relaciones apropiadas entre los generadores de grupo.

DEMOSTRACIÓN. 1 y 2 se tienen como consecuencia de la observación 3.1.2.

Para la parte 3, recordemos que del lema 3.1.4, se tiene que $K \cap G_i = 1$, para todo i , donde $G_i = \langle g_i \rangle$ tiene orden 2, luego $g_i \notin K$, de modo que:

$$G/K = \left\langle g_1K, g_2K, \dots, g_rK : (g_iK)^2 = 1, \prod_{i=1}^r g_iK = 1, \mathcal{R} \right\rangle,$$

donde \mathcal{R} representa las relaciones apropiadas entre los generadores de grupo. \blacksquare

Usaremos la siguiente proposición para mostrar que hemos obtenido un conjunto generador geométrico para el cociente.

Proposición 3.1.7. *Sea $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_r, \prod_{i=1}^r g_i = 1, \mathcal{R} \rangle$, el grupo de Galois del cubrimiento Galois $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ entonces para todo $N \trianglelefteq G$, se tiene que $G/N = \langle g_1N, g_2N, \dots, g_rN \rangle$ es el grupo de Galois del cubrimiento Galois $\pi^N : \mathcal{Z}_N \rightarrow \mathcal{X}$. Es decir $(g_1N, g_2N, \dots, g_rN)$ es un vector generador de G .*

DEMOSTRACIÓN.

En [Roj02], se probó que si \mathcal{Z} es una curva con acción de G y signatura geométrica $\Gamma := (\gamma; [m_1, C_1], \dots, [m_s, C_s])$. Sobre un punto rama $b_i \in \mathcal{Z}_G$ de tipo C_i (para el cubrimiento total $\pi_G : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_G$, $C_i \in \Gamma$, la estructura cíclica de $\pi^N : \mathcal{Z}_N \rightarrow \mathcal{X}$ está dada por una tupla de tamaño

$$r_i := \sum_{k=1}^{\nu_i} |L_k^i| \left(\frac{|N_G(G_i) : G_i| |G_i^{l_k^{-1}} \cap N|}{|N|} \right)$$

y forma:

$$\left(\underbrace{\dots, \frac{|G_i|}{|G_i^{l_k^{-1}} \cap N|}, \dots, \frac{|G_i|}{|G_i^{l_k^{-1}} \cap N|}, \dots}_{|L_k^i| \left(\frac{|N_G(G_i) : G_i| |G_i^{l_k^{-1}} \cap N|}{|N|} \right) \text{-veces}} \right),$$

donde $\Omega_{G_i} = \{ \text{transversal izquierdo de } N_G(G_i) \text{ en } G \}$, cuyos elementos están distribuidos en los conjuntos $L_k^i = \{l_j \in \Omega_{G_i} : |G_i^{l_j^{-1}} \cap N| = |G_i^{l_k^{-1}} \cap N|\}$, de modo que si hay ν_i de estos conjuntos, $\sum_{k=1}^{\nu_i} |L_k^i| = |G : N_G(G_i)|$.

Si $N \trianglelefteq G$, entonces para todo $j \in \Omega_{G_i}$, se tiene que $|G_i^{l_j^{-1}} \cap N| = |G_i \cap N|$, luego $\nu_i = 1$ y $r_i = \frac{|G : G_i||G_i \cap N|}{|N|}$, además todos los elementos de la r_i tupla son iguales a $\frac{|G_i|}{|G_i \cap N|}$.

Así, si consideramos la signatura $(\gamma; m_1, m_2, \dots, m_r)$, de la acción de G en la superficie \mathcal{Z} , tenemos que $G = \langle g_i : g_i^{m_i} = 1 \ \prod_{i=1}^r g_i = 1, \mathcal{R} \rangle$, donde \mathcal{R} representa las relaciones apropiadas entre los generadores del grupo. Coloquemos $G_i = \langle g_i \rangle$. Si $N \trianglelefteq G$, entonces la signatura del cubrimiento $\pi^N : \mathcal{Z}_N \rightarrow \mathcal{Z}_G$ es

$$\left(\frac{|G_1|}{|G_1 \cap N|}, \frac{|G_2|}{|G_2 \cap N|}, \dots, \frac{|G_r|}{|G_r \cap N|} \right).$$

■

Observación 3.1.3. En la signatura $\left(\frac{|G_1|}{|G_1 \cap N|}, \frac{|G_2|}{|G_2 \cap N|}, \dots, \frac{|G_r|}{|G_r \cap N|} \right)$ algunas de las entradas podrían ser 1, en cuyo caso la signatura del cociente será la correspondiente a haber eliminado dichas entradas, esto sólo ocurre cuando $G_i \leq N$.

En nuestra situación, se tiene que $|g_i N| = \frac{|G_i|}{|G_i \cap N|}$. Luego

$$(0; |g_1 N|, |g_2 N|, \dots, |g_r N|),$$

corresponde también a la signatura del cubrimiento $\pi^N : \mathcal{Z}_N \rightarrow \mathbb{P}^1$, bajo la acción de G/N .

Aplicando lo anterior a cubrimientos factorizados como los mencionados en esta sección tenemos que

Observación 3.1.4. Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\psi \circ \varphi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$, donde $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es simple y $\varphi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ Galois no ramificado. Sea \mathcal{Z} la correspondiente superficie de Riemann para el grupo \mathfrak{G} . Entonces \mathfrak{G} actúa sobre \mathcal{Z} con signatura $(0; \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{r\text{-veces}})$, esto es, existen elementos $g_i \in \mathfrak{G}$, de orden 2 tales que

$$\mathfrak{G} = \left\langle g_1, g_2, \dots, g_r : g_i^2 = 1, \prod_{i=1}^r g_i = 1, \mathcal{R} \right\rangle,$$

donde \mathcal{R} representa las relaciones apropiadas entre los generadores de grupo. Además por la proposición 3.1.4 $g_i \notin K = H_G$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$. Luego $|g_i K| = 2$ para

todo $i = 1, 2, \dots, r$. De este modo la signatura del cubrimiento Galois $\pi^K : \mathcal{Z}_K \rightarrow \mathbb{P}^1$ es $(0; \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{r\text{-veces}})$, donde $H \leq G$ tal que $\mathcal{Y} \cong \mathcal{Z}_H$

Observación 3.1.5. Consideremos las representaciones de monodromía $\rho_{\psi \circ \varphi}$ y ρ_φ de los cubrimientos $\psi \circ \varphi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$ y $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$, respectivamente. Sabemos que $\mathfrak{G} \leq \mathbf{S}_{mn}$ y $\mathfrak{G}/K \cong \mathbf{S}_m$ y los elementos generadores corresponden a la siguiente estructura cíclica:

$$g_i = \underbrace{(\cdot \cdot) \cdots (\cdot \cdot)}_{n\text{-veces}} \quad y \quad g_i K = (\cdot \cdot)$$

Observación 3.1.6. Consideremos un cubrimiento simple $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grado m y sea $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$ su cubrimiento de Galois con G su grupo de Galois. Entonces,

$$G = \left\langle g_1, g_2, \dots, g_r : g_i^2 = 1, \prod_{i=1}^r g_i = 1, \mathcal{R} \right\rangle,$$

donde \mathcal{R} representa las relaciones apropiadas entre los generadores del grupo y $G \leq \mathbf{S}_m$. Además por la proposición 2.2.2, $\mathcal{Z} \cong \mathcal{Z}_H$, donde $H = G \cap \mathbf{S}_{m-1}$ y $H_G = \{1\}$. Por otro lado, dado que f es un cubrimiento simple, g_i es una transposición, luego $C^G(g_i) \cap H \neq \emptyset$, $\forall i = 1, 2, \dots, r$.

Volviendo a la situación geométrica estudiada en esta sección tenemos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 3.1.1. Sean $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento no ramificado y $\widehat{\varphi} : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$ el cubrimiento de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$.

Si $\mathfrak{G} = \left\langle g_1, g_2, \dots, g_r : g_i^2 = 1, \prod_{i=1}^r g_i = 1, \mathcal{R} \right\rangle$ es el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$, H y N subgrupos de \mathfrak{G} tales que $\mathcal{Y} \cong \mathcal{Z}_N$, $\mathcal{X} \cong \mathcal{Z}_H$ y $N \leq H \leq G$, entonces

$$H^g \cap C^\mathfrak{G}(g_i) \neq \emptyset, \quad \forall g \in \mathfrak{G}.$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $|H^g \cap C^\mathfrak{G}(g_i)| = |H \cap C^\mathfrak{G}(g_i)|$, $\forall g \in \mathfrak{G}$, luego es suficiente probar que $H \cap C^\mathfrak{G}(g_i) \neq \emptyset$.

Sea $K = H_\mathfrak{G}$, por la observación 3.1.6, y dado que \mathfrak{G}/K es el grupo de Galois del cubrimiento de Galois de $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$, se tiene que $H/K \cap C^{\mathfrak{G}/K}(g_i K) \neq \emptyset$, luego existe $x_i K \in \mathfrak{G}/K$ tal que:

$$(x_i K)(g_i K)(x_i K)^{-1} = (h K), \quad h K \in H/K,$$

luego $x_i g_i x_i^{-1} = h k_i$, para algún $k_i \in K$, y se tiene que $x_i g_i x_i^{-1} \in H \cap C^\mathfrak{G}(g_i)$. ■

Observación 3.1.7. Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$, donde $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento simple y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es un cubrimiento Galois no ramificado. Por el lema 3.1.1 se tiene que $C^{\mathfrak{G}}(g_i) \subseteq \bigcup_{g \in \mathfrak{G}} H^g$. Además por la proposición de 3.1.4 se tiene que:

$$K \cap \langle g_i \rangle = \{1\} \text{ y } H \cap C^{\mathfrak{G}}(g_i) = N \cap C^{\mathfrak{G}}(g_i),$$

luego $C^{\mathfrak{G}}(g_i) \subseteq \bigcup_{g \in \mathfrak{G}} N^g$.

3.2. Representación del grupo de Galois

Sabemos que \mathfrak{G} , el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$, donde $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , es un subgrupo transitivo de \mathbf{S}_{mn} . Sean N y H subgrupos de \mathfrak{G} tales que $\mathcal{Z}_N \cong \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}_H \cong \mathcal{X}$. En esta sección realizaremos \mathfrak{G} como subgrupo de \mathbf{S}_{mn} , mediante su acción en el conjunto de clases laterales de N . Recordemos que en esta situación $N_{\mathfrak{G}} = \{1\}$.

Sean $1 = x_1, x_2, \dots, x_m$ representantes de clases laterales derechas de H en \mathfrak{G} , y sean $1 = h_1, h_2, \dots, h_n$ representantes de clases laterales de N en H , entonces:

$$\{h_i x_j\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

forman una clase completa de representantes de clases laterales de N en \mathfrak{G} .

Sea $\Omega = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_m$, donde:

$$\begin{array}{cccc} N & Nx_2 & \cdots & Nx_m \\ Nh_2 & Nh_2x_2 & \cdots & Nh_2x_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \underbrace{Nh_n}_{\Delta_1} & \underbrace{Nh_nx_2}_{\Delta_2} & \cdots & \underbrace{Nh_nx_m}_{\Delta_m} \end{array}$$

Entonces \mathfrak{G} actúa transitivamente en Ω , el conjunto de clases laterales de N en \mathfrak{G} ,

$$\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}/N_{\mathfrak{G}} \hookrightarrow \mathbf{S}_{nm}.$$

Denotaremos con las mismas letras a \mathfrak{G} , H y N y sus respectivas imágenes en \mathbf{S}_{nm} . Además se tiene que

- $N^i = x_i^{-1}Nx_i$ estabiliza Δ_i punto a punto.
- $H^i = x_i^{-1}Hx_i$ estabiliza Δ_i , como conjunto.

- $K = (H^i)_{\mathfrak{G}} = \bigcap_{i=1}^m H^i = \bigcap_{i=1}^{m-1} H^i$ estabiliza todas las columnas.

Observación 3.2.1. De acuerdo la observación 3.1.5, los elementos g_i que generan a \mathfrak{G} , como grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\psi \circ \varphi$ tienen estructura cíclica $\underbrace{(\cdot \cdot) \cdots (\cdot \cdot)}_{n\text{-veces}}$.

En esta representación permutacional se observa que para todo $i = 1, 2, \dots, r$, el elemento g_i estabiliza $mn - 2n$ puntos.

Así, si $m \geq 3$,

$$g_i \in N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{m-2},$$

donde $N_j = x_j N x_j^{-1}$, $j = 1, 2, \dots, m - 2$, son $m - 2$ conjugados distintos de N en \mathfrak{G} .

Si $m = 2$, entonces g_i permuta todos los puntos de Ω . De este modo g_i no pertenece a ningún conjugado de N en \mathfrak{G} .

Proposición 3.2.1. Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois del cubrimiento de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$, donde $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es simple de grado m . Entonces \mathfrak{G} contiene un subgrupo isomorfo a \mathcal{S}_m

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la acción por la derecha de \mathfrak{G} en las clases laterales de N ,

$$\begin{array}{cccc} N & Nx_2 & \cdots & Nx_m \\ Nh_2 & Nh_2x_2 & \cdots & Nh_2x_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \underbrace{Nh_n}_{\Delta_1} & \underbrace{Nh_nx_2}_{\Delta_2} & \cdots & \underbrace{Nh_nx_m}_{\Delta_m} \end{array},$$

Sean N_1, N_2, \dots, N_m los m conjugados de N en \mathfrak{G} y $K = (H^i)_{\mathfrak{G}}$. Consideremos los elementos:

$$\begin{aligned} g_1 &\in (N_3 \cap N_4 \cap \cdots \cap N_m) \setminus K \\ g_2 &\in (N_1 \cap N_4 \cap \cdots \cap N_m) \setminus K \\ &\vdots \\ g_{m-1} &\in (N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{m-3} \cap N_{m-2}) \setminus K. \end{aligned}$$

Notemos que $(\Delta_i)g_i = \Delta_{i+1}$, luego reenumerando si fuese necesario los elementos g_i se pueden escribir de la forma:

$$g_i = (N \ Nx_i)(Nh_i \ Nh_2x_i) \cdots (Nh_n \ Nh_nx_i); \quad i = 1, \dots, m - 1.$$

Haciendo la correspondencia entre Ω y el conjunto ordenado:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & \cdots & m-1 & m \\
 m+1 & m+2 & m+3 & \cdots & 2m-1 & 2m \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (n-1)m+1 & (n-1)m+2 & (n-1)m+3 & \cdots & nm-1 & nm
 \end{array}$$

tenemos que:

$$g_i = (i \ i+1)(m+i \ m+i+1)(2m+i \ 2m+i+1) \cdots ((n-1)m+i \ (n-1)m+i+1) \in \mathfrak{G}$$

para $1 \leq i \leq m-1$

Además,

- $g_i^2 = 1$, para todo $i = 1, \dots, m-1$.
- $(g_i g_{i+1})^3 = 1$, , para todo $i = 1, \dots, m-2$.
- $g_i g_j = g_j g_i$, cuando $(i-j) \geq 2$, o $(i-j) \leq -2$.

De este modo

$$\langle g_1, g_2, \dots, g_{m-1} : g_i^2 = (g_i g_{i+1})^3 = [g_i, g_j] = 1 \ |i-j| \geq 2 \rangle \cong \mathbf{S}_m,$$

debido a que esta es la presentación de Coxeter para el grupo simétrico \mathbf{S}_m , ver [Cox36]. ■

Observación 3.2.2. Notemos que:

$$|g_1 g_2 \cdots g_{m-1}| = m,$$

y $g_1 g_2 \cdots g_{m-1}$ no fija puntos. De hecho

$$g_1 g_2 \cdots g_{m-1} = (1, 2, \dots, m)(m+1, m+2, \dots, 2m) \cdots ((n-1)m+1, (n-1)m+2, \dots, nm)$$

Observación 3.2.3.

Notemos que en la proposición 3.2.1 $g_i \notin (H_i \cup H_{i+1})$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$ y $g_1 \in N_3 \cap N_4 \cap \cdots \cap N_m$, $g_2 \in N_1 \cap N_4 \cap \cdots \cap N_m$, \dots , $g_{m-1} \in N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{m-2}$. De este modo si conjugamos por x_i , $i = 2, 3, \dots, m$, el sistema de generadores para \mathbf{S}_m exhibidos en la proposición 3.2.1, obtenemos un sistema de generadores para $\mathbf{S}_m^{x_i}$ que no está contenido en ninguno de los conjugados de H . Así, $\langle g_1, g_2, \dots, g_{m-1} \rangle$ tiene al menos m conjugados en \mathfrak{G} .

Capítulo 4

Grupo de Galois del Cubrimiento

En este capítulo estudiamos aspectos importantes relacionados con nuestro interés en determinar el grupo de monodromía o grupo de Galois \mathfrak{G} de la Clausura de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$, donde $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois abeliano $A \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r}$.

El objetivo de este capítulo es mostrar que para el grupo de Galois \mathfrak{G} se tiene

$$\mathfrak{G} \cong A^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m.$$

4.1. Aspectos Generales

En esta sección presentaremos aspectos generales sobre la estructura del grupo de Galois de \mathfrak{G} de la Clausura de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Comenzaremos con una proposición grupo-teórica:

Proposición 4.1.1. *Sea G un grupo finito, $H \leq G$ con $|G : H| = m$ y núcleo $K = H_G$ abeliano. Supongamos que existe $L \leq G$ con $L \cong \mathbf{S}_m$ y tal que $L^g \not\leq H$, para todo $g \in G$. Entonces*

$$G = K \rtimes L.$$

DEMOSTRACIÓN. Representando G sobre las clases laterales de H en G tenemos que $G/K \lesssim \mathbf{S}_m$. Si $K \cap L = \{1\}$, entonces $KL/K \cong \mathbf{S}_m$ y así

$$m! = |KL/K| \leq |G/K| \leq |\mathbf{S}_m| = m!.$$

Así $G/K \cong KL/L \cong \mathbf{S}_m$. De este modo $G = KL$, es decir $G = K \rtimes L$.

Veamos entonces que $K \cap L = \{1\}$. Sea $U = K \cap L$, entonces $U \leq K$ implica que U es abeliano y además $K \trianglelefteq G$ implica $U \trianglelefteq L \cong \mathbf{S}_m$, así es inmediato que $U = \{1\}$, a menos que $2 \leq m \leq 4$, casos que consideraremos a continuación.

Si $m = 2$. Como $\mathbf{S}_2 \cong L \not\leq H$, se sigue que $U = \{1\}$.

Sea $m = 3$. Entonces $L \cong \mathbf{S}_3$ y $|U| = 3$, tenemos que $|KL/K| = |L/U| = 2$. Como $|G : H| = 3$ y $|KL/K| = 2$, se sigue que $G/K \cong \mathbf{S}_3$. Además H/K y KL/K son 2-subgrupos de Sylow de G/K . De esta forma $H/K = (KL/K)^g = KL^g/K$ para algún $g \in G$. Se sigue que $H = KL^g$. Luego $L^g \leq H$, lo cual es una contradicción.

Sea $m = 4$. Entonces $L \cong \mathbf{S}_4$ y $|U| = 4$, tenemos que $|KL/K| = |L/U| = 6$. Como $|G : H| = 4$ y $|KL/K| = 6$, se sigue que $G/K \cong \mathbf{S}_4$. Además H/K , KL/K son normalizadores de 3-subgrupos de Sylow de G/K . De esta forma $H/K = (KL/K)^g = KL^g/K$ para algún $g \in G$. Luego, $H = KL^g$. De modo que $L^g \leq H$, lo cual es una contradicción.

En conclusión para todo m , $K \cap L = \{1\}$ y por tanto $G = K \rtimes L$. ■

La siguiente propiedad muestra que el grupo de Galois del cubrimiento factorizado que estamos considerando satisface las condiciones de la proposición anterior (4.1.1):

Proposición 4.1.2. *Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$, donde $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento simple de grado m y $\varphi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con N y H subgrupos de \mathfrak{G} tales que $\mathcal{Z}_N \cong \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}_H \cong \mathcal{X}$. Entonces valen las siguientes afirmaciones*

i) $\mathfrak{G} \cong K \rtimes \mathbf{S}_m$, donde $K = H_{\mathfrak{G}}$.

ii) $H = NK$

iii) $N \cap K \neq 1$.

DEMOSTRACIÓN.

i) Sabemos que representando \mathfrak{G} permutacionalmente en las clases laterales de N , como en la proposición 3.2.1, se tiene que \mathfrak{G} contiene un subgrupo isomorfo a \mathbf{S}_m generado por los elementos

$$g_i = (i \ i+1)(m+i \ m+i+1)(2m+i \ 2m+i+1) \cdots ((n-1)m+i \ (n-1)m+i+1),$$

con $1 \leq i < m$. Los cuales satisfacen

- $g_i^2 = 1$, $i = 1, \dots, m-1$.
- $(g_i g_{i+1})^3 = 1$, $i = 1, \dots, m-2$.
- $g_i g_j = g_j g_i$, $|i - j| \geq 2$.

Por otra parte, como H estabiliza una columna de Ω , se tiene que para todo $g \in \mathfrak{G}$ existe un i tal que $g_i^g \notin H$, luego $\mathbf{S}_m^g \not\leq H$, para todo $g \in \mathfrak{G}$.

Entonces, por la proposición 4.1.1, se tiene que $\mathfrak{G} \cong K \rtimes \mathbf{S}_m$.

ii) Tenemos que $\mathfrak{G}/K \cong \mathbf{S}_m$, luego, existe $V \trianglelefteq \mathfrak{G}$, tal que $V/K \cong \mathbf{A}_m$. Además $H/K \cong \mathbf{S}_{m-1}$, luego $|H : NK| \leq 2$. Si $|H : NK| = 2$, entonces $NK \leq V$, particularmente $N^g \in V$ para todo $g \in \mathfrak{G}$.

Como $\mathfrak{G} = \left\langle g_1, g_2, \dots, g_r : g_i^2 = 1, \prod_{i=1}^r g_i = 1, \mathcal{R} \right\rangle$ con $g_i \in N^j$, para algún conjugado de N , obtenemos la contradicción $g_i \in V$, para todo $i = 1, \dots, r$. En consecuencia $H = NK$.

iii) Si $N \cap K = \{1\}$, puesto que $N \trianglelefteq H$ y $K \trianglelefteq H$, se tiene que $nkkn^{-1}k^{-1} \in N \cap K$, luego $nkkn^{-1}k^{-1} = 1$, esto es N y K conmutan elemento a elemento, del mismo modo K conmuta con todo conjugado de N . Por el item (i), $G = K\mathbf{S}_m$, con \mathbf{S}_m generado por elementos que pertenecen a N y a sus conjugados. Además dado que K conmuta con N y sus conjugados, tenemos que $\mathbf{S}_m \trianglelefteq G$, en contradicción con la observación 3.2.3.

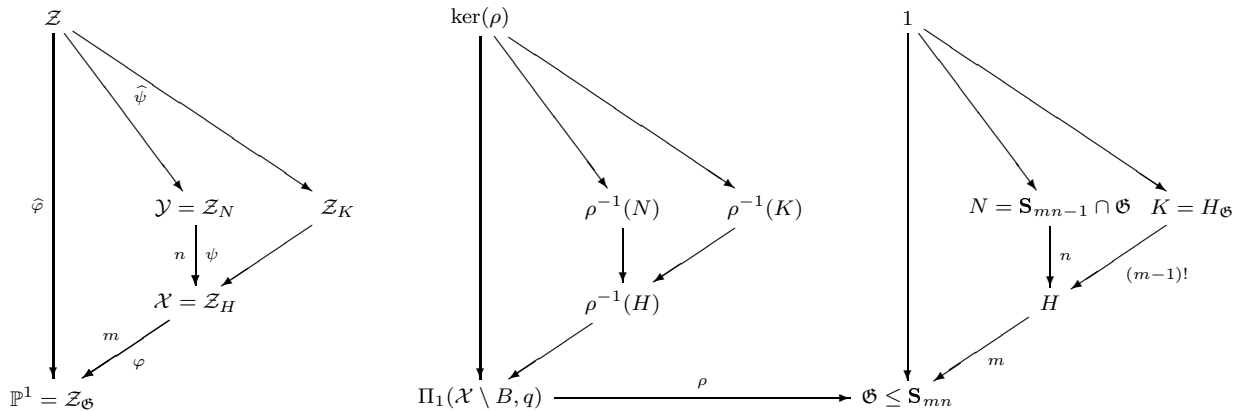
■

De la proposición anterior (proposición 4.1.2 i)) y la observación 3.1.1 podemos concluir que $\mathfrak{G} \cong K \rtimes \mathbf{S}_m$, con $K \underset{m\text{-veces}}{\lesssim} \underbrace{H/N \times H/N \times \dots \times H/N}_{m\text{-veces}}$. De este modo $|\mathfrak{G}| \leq n^m m!$.

Nuestro interés es ahora determinar el orden de K . Comenzaremos con el caso en el que $H/N \cong \mathbb{Z}_n$, el grupo cíclico de orden n . Este caso fue estudiado previamente por Biggers y Fried en [BF86] usando los cuerpos de funciones meromorfas de los factores del cubrimiento. Nosotros presentaremos un estudio desde el punto de vista grupo-teórico.

Fijaremos, para todo este capítulo, \mathcal{Z} la superficie de Riemann asociada al cubrimiento de Galois del cubrimiento de Galois $\varphi \circ \psi$, con \mathfrak{G} su grupo de Galois. N y H subgrupos de \mathfrak{G} tales que $\mathcal{Z}_N \cong \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}_H \cong \mathcal{X}$ y $K = H_{\mathfrak{G}}$ el núcleo de H en G .

El problema estudiado se puede representar en el siguiente diagrama, usando la proposición 2.2.2:



Comenzaremos considerando el caso en el que $m = 2$.

Proposición 4.1.3. *Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ con $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado 2 y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois abeliano. Entonces*

$$K \cong H/N.$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que

$$\mathfrak{G} = \left\langle g_1, g_2, \dots, g_r : g_i^2 = 1, \prod_{i=1}^r g_i = 1, \mathcal{R} \right\rangle,$$

con $g_i \notin K$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$ y \mathcal{R} representa las relaciones apropiadas entre los generadores de grupo.

Como $m = 2$, se sigue que $K = H = H_{\mathfrak{G}}$ y $\mathfrak{G} = H\langle g_i \rangle$.

Sea $g = g_1$. Como $|\mathfrak{G} : H| = 2$ y $H = \mathbf{N}_{\mathfrak{G}}(N)$ tenemos que $N \cap N^g = \{1\}$.

Además $K \cong K/(N \cap N^g) \lesssim H/N \times H/N^g$ (abeliano).

Como $\mathfrak{G} = H\langle g \rangle$ podemos escribir $g_j = h_j g$ para $j = 2, \dots, r$. Con esto

$$\mathfrak{G} = \langle h_2, h_3, \dots, h_r, g \rangle$$

Como $g_j^2 = 1$, se sigue $1 = h_j g h_j g$ es decir $g h_j g = (h_j)^{-1}$. De esta forma $\langle h_2, h_3, \dots, h_r \rangle \trianglelefteq \mathfrak{G}$ y $\mathfrak{G} = \langle h_2, h_3, \dots, h_r \rangle \langle g \rangle$.

Así $H = H \cap \mathfrak{G} = H \cap \langle h_2, h_3, \dots, h_r \rangle \langle g \rangle = \langle h_2, h_3, \dots, h_r \rangle (H \cap \langle g \rangle) = \langle h_2, h_3, \dots, h_r \rangle$

Como H es abeliano, tenemos que para todo $u \in H$

$$u = h_2^{l_2} h_3^{l_3} \dots h_r^{l_r} \text{ y } gug = g h_2^{l_2} h_3^{l_3} \dots h_r^{l_r} g = h_2^{-l_2} h_3^{-l_3} \dots h_r^{-l_r} = u^{-1}$$

Luego, todo subgrupo R de H es normalizado por g y dado que H es abeliano $R \trianglelefteq \mathfrak{G}$. De esta forma $N = \{1\}$. Finalmente $K = H \cong H/N$. \blacksquare

4.2. Caso Cíclico

En esta sección mostraremos que para el grupo de Galois \mathfrak{G} del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$, donde $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois cíclico isomorfo a \mathbb{Z}_n , se tiene que $\mathfrak{G} \cong \mathbb{Z}_n^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$.

Proposición 4.2.1. *Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ con $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado $m > 2$ y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois isomorfo al grupo cíclico \mathbb{Z}_n . Entonces*

$$K \cong (\mathbb{Z}_n)^{m-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición 4.1.1, tenemos que $\mathfrak{G} = K\mathbf{S}_m$. De esta forma $\mathfrak{G} = H\mathbf{S}_m$ y $|\mathfrak{G} : H| = |\mathbf{S}_m : H \cap \mathbf{S}_m| = m$. Es decir $L = H \cap \mathbf{S}_m \cong \mathbf{S}_{m-1}$. Además todo elemento $g \in \mathfrak{G}$ se escribe $g = hy$ con $h \in H$ y $y \in \mathbf{S}_m$, de esta forma

$$H^g = H^{hy} = H^y \quad \text{y} \quad N^g = N^{hy} = N^y.$$

También $H = K(H \cap \mathbf{S}_m) = KL$ y $N = N \cap H = N \cap LK = (N \cap K)L$. Además $N^y = (N^y \cap K)L^y$ note que $L^y \leq \mathbf{S}_m$.

Tenemos que $K/(N \cap K) \trianglelefteq H/(N \cap K)$ y como $H = NK$ por la proposición 4.1.2, $H/N \cong K/(N \cap K)$ es cíclico y luego todo subgrupo de $K/(N \cap K)$ es característico, particularmente normal en $H/(N \cap K)$.

Sean $R_1 = N \cap K$ y $R_2 = N^y \cap K$. Tenemos que $R_1R_2/R_1 \trianglelefteq H/R_1$ es decir $R_1R_2 \trianglelefteq H$, del mismo modo $R_1R_2 \trianglelefteq H^y$. Luego $R_1R_2 \trianglelefteq \mathfrak{G}$. De esta forma, para todo $g \in \mathfrak{G}$, $(N \cap K)^g \leq R_1R_2$.

Consideremos $V = (R_1R_2)\mathbf{S}_m$. Tenemos que $N = R_1L \leq V$, $N_2 = R_2L^y \leq V$, en general $N^z = (N^z \cap K)L^z \leq V$ para todo $z \in \mathbf{S}_m$, es decir

$$\langle N^g \mid g \in \mathfrak{G} \rangle \leq V$$

particularmente

$$\langle (N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{m-2})^g \mid g \in \mathfrak{G} \rangle \leq V,$$

donde N_1, N_2, \dots, N_{m-2} son $m - 2$ conjugados distintos de N .

Luego $V = \mathfrak{G}$. Con esto

$$K = \mathfrak{G} \cap K = (R_1R_2)\mathbf{S}_m \cap K = R_1R_2(\mathbf{S}_m \cap K) = R_1R_2. \quad (4.1)$$

Ahora

$$H/N \cong K/R_1 = R_1R_2/R_1$$

es cíclico de orden n , luego $K = R_1 \langle x \rangle$ con $x \in R_2$ de orden n . Además $H = NK = NR_1 \langle x \rangle = N \langle x \rangle$. Como H actúa transitivamente en las clases laterales de N el elemento x se escribe permutacionalmente (reenumerando si es necesario)

$$x = (1, m + 1, 2m + 1, 3m + 1, \dots, (n - 1)m + 1)C_3 \dots C_m$$

donde C_j es una permutación de la columna j . Sea

$$P_k = (k, m+k, 2m+k, 3m+1, \dots, (n-1)m+k).$$

Para el elemento $g_1 = (1, 2)(m+1, m+2)\dots((n-1)m+1, (n-1)m+2)$ se tiene que $(g_1 x g_1)^{-1} = (2, (n-1)m+2, (n-2)m+2, \dots, m+2)(C_3)^{-1}\dots(C_m)^{-1} = P_2^{-1}(C_3)^{-1}\dots(C_m)^{-1}$.

De esta forma

$$\begin{aligned} a &= x(g_1 x g_1)^{-1} \\ &= (1, m+1, 2m+1, 3m+1, \dots, (n-1)m+1)(2, (n-1)m+2, (n-2)m+2, \dots, m+2) \\ &= P_1 P_2^{-1} \end{aligned}$$

es un elemento de K .

Ahora consideremos la permutación

$$T = (g_1 g_2 g_3 g_4 g_5 \dots g_{m-1})^{-1} = (1, 2, 3, 4, \dots, m)(m+1, m+2, \dots, 2m)\dots((n-1)m+1, \dots, nm)$$

y los elementos

$$\begin{aligned} b_1 &= T^{-1} a T \\ &= (2, m+2, 2m+2, \dots, (n-1)m+2)(3, (n-1)m+3, (n-2)m+3, \dots, m+3) \\ &= P_2 P_3^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= T^{-2} a T^2 \\ &= (3, m+3, 2m+3, \dots, (n-1)m+3)(4, (n-1)m+4, (n-2)m+4, \dots, m+4) \\ &= P_3 P_4^{-1} \end{aligned}$$

hasta

$$\begin{aligned} b_{m-1} &= T^{-(m-1)} a T^{(m-1)} \\ &= (m, 2m, 3m, \dots, nm)(1, (n-1)m, (n-2)m, \dots, m+1) = P_m P_1^{-1} \end{aligned}$$

Tenemos que $a(b_1)(b_2)(b_3)\dots(b_{m-1}) = 1$.

De esta forma $\mathcal{P} = \langle a, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{m-1} \rangle$ tiene orden $n^{(m-1)}$. Además $\mathcal{P} \leq K$ y $\mathcal{P} \trianglelefteq \mathfrak{G}$.

Considere el homomorfismo

$$\phi : K \rightarrow K/R_1 \times K/R_2 \times \dots \times K/R_m \quad \text{dado por } \phi(k) = (kR_1, kR_2, \dots, kR_m)$$

Sabemos que

$$\ker(\phi) = R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_m = (K \cap N_1) \cap (K \cap N_2) \cap \dots \cap (K \cap N_m) = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_m = \{1\}.$$

Luego $K \cong \text{Im}(\phi)$.

Supongamos que

$$(aR_1, R_2, R_3, \dots, R_m) = \phi(k) = (kR_1, kR_2, kR_3, \dots, kR_m).$$

Entonces $k \in R_2 \cap R_3 \cap \dots \cap R_m$. Es decir $k = C_1$ una permutación de la primera columna. Además $aR_1 = P_1 P_2^{-1} R_1 = C_1 R_1$, luego $C_1 = P_1$ y $P_2 \in R_1$.

De esta forma $K = \langle P_1, P_2, \dots, P_m \rangle$. Además $N_2 \cap N_3 \cap \dots \cap N_m = \langle P_1 \rangle$.

También $U = N_3 \cap N_4 \cap \dots \cap N_m = \langle P_1, P_2 \rangle \rtimes \langle g_1 \rangle$ con $|U| = 2n^2$, $\mathbf{Z}(U) = \langle P_1 P_2 \rangle$ y $K \cap U = \langle P_1, P_2 \rangle$.

Tenemos que

$$g_1 P_1 P_2^{-1} g_1 = P_1^{-1} P_2$$

Es decir

$$\langle P_1 P_2^{-1}, g_1 \rangle \cong \mathbf{D}_n$$

además $P_1^{-r} g_1 P_1^r = P_1^{-r} P_2^r g_1 \in \langle P_1 P_2^{-1}, g_1 \rangle$ luego $\langle P_1 P_2^{-1}, g_1 \rangle \trianglelefteq U$.

Así los elementos de orden 2 de U que no están en K son los n elementos

$$\{P_1^{-v} g_1 P_1^v \mid v = 1, \dots, n\} \subseteq \mathcal{P}\langle g_1 \rangle.$$

debido a que $\mathbf{N}_U(\langle g_1 \rangle) = \langle P_1 P_2 \rangle \times \langle g_1 \rangle$ y $\langle P_1 P_2^{-1}, g_1 \rangle \trianglelefteq U$.

Para $g \in \mathfrak{G}$ escriba $xg = kz$ con $k \in K$ y $z \in \mathbf{S}_m$. Como $K = \mathcal{P}\langle P_1 \rangle$, tenemos que $k = P_1^r s$ con $s \in \mathcal{P}$ de esta forma

$$\begin{aligned} \{P_1^{-v} g_1 P_1^v \mid v = 1, \dots, n\}^{P_1^r s z} &= \{P_1^{-v} g_1 P_1^v \mid v = 1, \dots, n\}^{s z} \\ &= \{(P_1 P_2^{-1})^{-u} g_1 (P_1 P_2^{-1})^u \mid u = 1, \dots, n\}^{s z} \subseteq \mathcal{P}\mathbf{S}_m \end{aligned}$$

Finalmente

$$\langle \{P_1^{-v} g_1 P_1^v \mid v = 1, \dots, n\}^{\mathfrak{G}} \rangle \leq \mathcal{P}\mathbf{S}_m,$$

un absurdo. Luego $(aR_1, R_2, R_3, \dots, R_m)$ no pertenece a $\text{Im}(\phi)$ es decir $|K| = |\text{Im}(\phi)| = n^{m-1} = |\mathcal{P}|$. Además $\mathcal{P} = K$ y $|K| = n^{m-1}$. ■

En consecuencia tenemos el siguiente teorema,

Teorema 4.2.1. *Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ con $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois isomorfo al grupo cíclico \mathbf{Z}_n . Entonces*

$$\mathfrak{G} = (\mathbf{Z}_n)^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m.$$

Corolario 4.2.2. Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ con $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois isomorfo al grupo cíclico \mathbb{Z}_n . Entonces la representación permutacional de \mathfrak{G} tiene los siguientes generadores

$$g_i = (i \ i+1)(m+i \ m+i+1)(2m+i \ 2m+i+1) \cdots ((n-1)m+i \ (n-1)m+i+1),$$

con $1 \leq i \leq m-1$

$g_m = x^{-1}g_1x$, donde

$$x = (1, m+1, 2m+1, \dots, (n-1)m+1)(3, (n-1)m+3, (n-2)m+3, \dots, 2m+3, m+3).$$

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que g_i permuta las columnas i e $i+1$ y deja fijas las columnas restantes. Consideramos $J = N_1 \cap N_4 \cap \cdots \cap N_m$, donde N_j representa el conjugado de N que a Δ_j en la representación permutacional dada en 3.2. Notemos que $g_2 \in J$ y que dado que $J \cap K \cong \mathbb{Z}_n$, existe $x \in J \cap K$ tal que $J = \langle g_2 \rangle \langle x \rangle$. Además, reordenando si fuese necesario,

$$x = (1, m+1, 2m+1, \dots, (n-1)m+1)(3, (n-1)m+3, (n-2)m+3, \dots, 2m+3, m+3),$$

si tomamos

$$P_k = (k, m+k, 2m+k, 3m+1, \dots, (n-1)m+k),$$

entonces $x = P_1P_3^{-1}$ También,

$$g_m = x^{-1}g_1x = (1, 2m+2)(m+1, 3m+2) \cdots ((n-2)m+1, (n-1)m+2)((n-1)m+1, 2).$$

Consideremos ahora

$$a = g_m g_1 = (1, (n-1)m+1, \dots, 2m+1, m+1)(2, m+2, 2m+2, \dots, (n-1)m+2) = P_1^{-1}P_2,$$

$a \in K$ y

$$T = (g_1g_2g_3g_4g_5 \cdots g_{m-1})^{-1} = (1, 2, 3, 4 \dots m)(m+1, m+2, \dots, 2m) \cdots ((n-1)m+1, \dots, nm).$$

Entonces

$$\begin{aligned} b_1 &= TaT^{-1} = P_2^{-1}P_3, \\ b_2 &= T^2aT^{-2} = P_3^{-1}P_4, \\ &\vdots \\ b_{m-1} &= T^{(m-1)}aT^{-(m-1)} = P_{m-1}^{-1}P_1, \end{aligned}$$

son elementos de K y además dado que $ab_1b_2 \cdots b_{m-1} = 1$, se tiene que $K = \langle b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \rangle$ y en consecuencia

$$\mathfrak{G} = \langle g_i : i = 1, 2, \dots, m \rangle$$

.

■

Observación 4.2.1. De la ecuación de Riemann-Hurwitz se obtiene que el género de la superficie de Riemann \mathcal{Z} con acción del grupo de Galois \mathfrak{G} , del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ es

$$g(\mathcal{Z}) = \frac{n^{m-1}m!}{2}(g(\mathcal{X}) + m - 3) + 1.$$

Observación 4.2.2. Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$. Entonces a partir del conjunto generador para \mathfrak{G} , presentado en el corolario 4.2.2, formamos un sistema de generadores geométrico que satisface la ecuación de Riemman-Hurwitz.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, si $g(\mathcal{X}) > 0$, el vector

$$(g_1, g_1^{-1}, g_2, g_2^{-1}, \dots, g_m, g_m^{-1}, \underbrace{g_j, g_j^{-1}, \dots, g_j, g_j^{-1}}_{2g(\mathcal{X})-2}),$$

es un vector generador geométrico para \mathfrak{G} . ■

Observación 4.2.3. Sea $N = \mathfrak{G} \cap \mathbf{S}_{mn-1}^{(m)}$. Dado que $N = (N \cap K)L$, con $L = H \cap \mathbf{S}_m \cong \mathbf{S}_{m-1}$ y considerando los elementos generadores dados en la observación 5.3.2, se tiene que $N = \langle g_2, \dots, g_{m-2}, g_{m-1}, g_m \rangle$.

Además, no es difícil probar que N satisface las mismas propiedades que \mathfrak{G} . Esto es, existen una superficie de Riemann compacta \mathcal{W} , con acción de N y $N \cap H'$ y $N \cap N'$ subgrupos de N , con $N' \leq H'$ y H' un conjugado de H , tales que el cubrimiento $\mathcal{W}_{N \cap H'} \xrightarrow{f} \mathcal{W}_N = \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento simple de grado $m - 1$ y el cubrimiento $\mathcal{W}_{N \cap N'} \xrightarrow{g} \mathcal{W}_{N \cap H'}$ es no ramificado de grado n , con grupo de Galois abeliano y dado que $(N \cap N')_N = 1$, se tiene que N el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $g \circ f$.

4.3. Caso Abeliano

En esta sección extenderemos el resultado de la sección anterior, al caso en el que el grupo de Galois del cubrimiento no ramificado $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ es un grupo abeliano, digamos de tipo (n_1, n_2, \dots, n_r) , con $n_i | n_{i+1}$, según el teorema de clasificación de grupos abelianos finitamente generados.

Teorema 4.3.1.

Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ con $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois abeliano, de tipo (n_1, n_2, \dots, n_r) , con $n_i | n_{i+1}$. Entonces

$$\mathfrak{G} = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m.$$

DEMOSTRACIÓN. Con la misma notación anterior, sea \mathcal{Z} la superficie de Riemann con acción de \mathfrak{G} , denotamos por N y H los respectivos subgrupos de \mathfrak{G} tales que $\mathcal{Z}_N \cong \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}_H \cong \mathcal{X}$.

Sea el grupo de Galois del cubrimiento $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ abeliano de tipo (n_1, n_2, \dots, n_r) , esto es

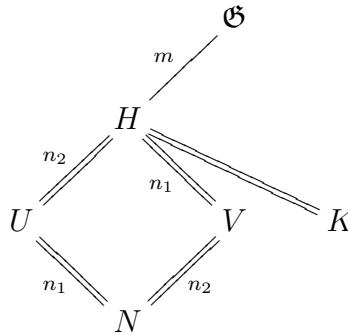
$$H/N \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_r},$$

donde n_i divide a n_{i+1} .

Para $r = 1$, tenemos $H/N \cong \mathbb{Z}_{n_1}$, que corresponde al caso cíclico.

Ilustraremos la demostración con $r = 2$, pues el caso general es una reiteración del mismo argumento. Coloquemos $H/N \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$. Sean U y V subgrupos de H tales que $H/N \cong U/N \times V/N$, con $U/N \cong \mathbb{Z}_{n_1}$ y $V/N \cong \mathbb{Z}_{n_2}$.

La situación que tenemos es la del diagrama:



donde $K = H_{\mathfrak{G}}$ y \parallel indica normalidad. Tenemos que $U = H \cap U = NK \cap U = N(K \cap U)$, de igual forma $V = N(V \cap K)$. Además $U(V \cap K) = UN(V \cap K) = UV = H$ y $V(U \cap K) = H$. También

$$K = H \cap K = V(U \cap K) \cap K = (U \cap K)(V \cap K).$$

Como $K/(V \cap K) \cong H/V \cong H/N/V/N \cong U/N \cong \mathbb{Z}_{n_1}$, es un grupo cíclico de orden n_1 , se tiene $K = (V \cap K) \langle x \rangle$ con $x \in U \cap K$ de orden n_1 . Además $H = VK = V(V \cap K) \langle x \rangle = V \langle x \rangle$. En forma análoga $H = UK = U(U \cap K) \langle y \rangle = U \langle y \rangle$ con $y \in V \cap K$ de orden n_2 .

El siguiente argumento es una simple modificación al utilizado en el caso cíclico y como tal lo ilustraremos solamente para el factor $U \cap K$.

Comenzaremos por escribir $x \in U \cap K$ permutacionalmente, para esto realizaremos a \mathfrak{G} como subgrupo de $\mathbf{S}_{mn_1n_2}$, mediante su acción en el conjunto de clases laterales de N . Recordemos que $N_{\mathfrak{G}} = 1$.

Sean $1 = x_1, x_2, \dots, x_m$ representantes de clases laterales de H en \mathfrak{G} , $1 = h_1, h_2, \dots, h_{n_2}$ representantes de clases laterales de U en H y $1 = u_1, u_2, \dots, u_{n_1}$ representantes de clases laterales de N en U . Entonces

$$\{u_i h_j x_k\}, \quad i = 1, \dots, n_2, \quad j = 1, \dots, n_1, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

es un sistema completo de representantes de clases laterales de N en \mathfrak{G} .

Con la misma notación del caso cíclico, sea $\Omega = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_m$, escrito de la siguiente forma ordenada

$$\begin{array}{cccc}
 N & Nx_2 & \cdots & Nx_m \\
 Nh_2 & Nh_2x_2 & \cdots & Nh_2x_m \\
 \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 Nh_{n_1} & Nh_{n_1}x_2 & \cdots & Nh_{n_1}x_m \\
 \hline
 Nu_1 & Nu_1x_2 & \cdots & Nu_1x_m \\
 Nu_1h_2 & Nu_1h_2x_2 & \cdots & Nu_1h_2x_m \\
 \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 Nu_1h_{n_1} & Nu_1h_{n_1}x_2 & \cdots & Nu_1h_{n_1}x_m \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 \hline
 Nu_{n_2} & Nu_{n_2}x_2 & \cdots & Nu_{n_2}x_m \\
 Nu_{n_2}h_2 & Nu_{n_2}h_2x_2 & \cdots & Nu_{n_2}h_2x_m \\
 \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 \underbrace{Nu_{n_2}h_{n_1}}_{\Delta_1} & \underbrace{Nu_{n_2}h_{n_1}x_2}_{\Delta_2} & \cdots & \underbrace{Nu_{n_2}h_{n_1}x_m}_{\Delta_3}
 \end{array}$$

Denotaremos con las mismas letras a \mathfrak{G} , H y N y sus respectivas imágenes en \mathbf{S}_{nm} . Como H actúa transitivamente en las clases laterales de N el elemento x se escribe permutacionalmente (reenumerando si es necesario)

$$\begin{aligned}
 x = & (1, m + 1, 2m + 1, \dots, (n_1 - 1)m + 1)(n_1m + 1, (n_1 + 1)m + 1, \dots, (2n_1 - 1)m + 1) \cdots \\
 & ((n_2 - n_1 + 1)n_1m + 1, ((n_2 - n_1 + 2)n_1 + 1)m + 1, \dots, ((n_2 - 1)n_1 - 1)m + 1)C_3 \dots C_m,
 \end{aligned}$$

donde C_j es una permutación de la columna j de orden dividiendo n_1 , $j = 3, 4, \dots, m$ y para algún j la permutación C_j tiene orden n_1 . Notemos que $x \in U_{\mathfrak{G}}$.

Sea

$$P_k = (k, m+k, 2m+k, \dots, (n_1-1)m+k)(n_1m+k, (n_1+1)m+k, \dots, (2n_1-1)m+k) \cdots \\ ((n_2-1)n_1m+k, (n_2-1)n_1+1)m+k, \dots, (n_2n_1-1)m+k).$$

Para el elemento $g_1 = (1, 2)(m+1, m+2) \dots ((n-1)m+1, (n-1)m+2)$ se tiene que

$$(g_1 x g_1)^{-1} = (2, (n_1-1)m+2, (n_1-2)m+2, \dots, 2m+2, m+2) \\ (n_1m+2, (2n_1-1)m+2, (2n_1-2)m+2, \dots, (n_1+1)m+2) \cdots \\ ((n_2-1)n_1m+2, (n_2n_1-1)m+2, (n_2n_1-2)m+2, \dots, ((n_2-1)n_1+1)m+2) \\ (C_3)^{-1} \dots (C_m)^{-1} = P_2^{-1}(C_3)^{-1} \dots (C_m)^{-1}.$$

De esta forma

$$a = x(g_1 x g_1)^{-1} \\ = (1, m+1, 2m+1, 3m+1, \dots, (n_1-1)m+1) \cdots \\ ((n_2-1)n_1-1)+1, ((n_2-n_1+2)n_1+1)m+1, \dots, ((n_2-1)n_1-1)m+1) \\ (2, (n_1-1)m+2, (n_1-2)m+2, \dots, m+2) \cdots \\ ((n_2-1)n_1m+2, (n_2n_1-1)m+2, (n_2n_1-2)m+2, \dots, ((n_2-1)n_1+1)m+2) \\ = P_1 P_2^{-1},$$

es un elemento de $U_{\mathfrak{G}}$.

Ahora consideremos la permutación

$$T = (g_1 g_2 g_3 g_4 \dots g_{m-1})^{-1} = (1, 2, 3, 4, \dots, m)(m+1, m+2, \dots, 2m) \dots ((n-1)m+1, \dots, nm)$$

y los elementos

$$b_1 = T a T^{-1} \\ = (2, m+2, 2m+2, \dots, (n_1-1)m+2) \cdots \\ ((n_2-1)n_1-1)m+2, ((n_2-n_1+2)n_1+1)m+2, \dots, ((n_2-1)n_1-1)m+2) \\ (3, (n_1-1)m+3, (n_1-2)m+3, \dots, m+3) \cdots \\ ((n_2-1)n_1m+3, (n_2n_1-1)m+3, (n_2n_1-2)m+3, \dots, ((n_2-1)n_1+1)m+3) \\ = P_2 P_3^{-1}$$

$$b_2 = T a T^{-2} \\ = (3, m+3, 2m+3, \dots, (n_1-1)m+3) \cdots \\ ((n_2-1)n_1-1)m+3, ((n_2-n_1+2)n_1+1)m+3, \dots, ((n_2-1)n_1-1)m+3) \\ (4, (n_1-1)m+4, (n_1-2)m+4, \dots, m+4) \cdots \\ ((n_2-1)n_1m+4, (n_2n_1-1)m+4, (n_2n_1-2)m+4, \dots, ((n_2-1)n_1+1)m+4) \\ = P_3 P_4^{-1}$$

hasta

$$\begin{aligned} b_{m-1} &= T^{(m-1)} a T^{-(m-1)} \\ &= P_m P_1^{-1} \end{aligned}$$

Luego $a(b_1)(b_2)(b_3)\dots(b_{m-1}) = 1$.

De esta forma $\mathcal{P} = \langle a, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{m-1} \rangle$ tiene orden $n_1^{(m-1)}$. Además $\mathcal{P} \leq U_{\mathfrak{G}}$ y $\mathcal{P} \trianglelefteq \mathfrak{G}$.

Análogamente, si consideramos

$$\begin{aligned} y &= (1, n_1 m + 1, 2n_1 m + 1, \dots, (n_2 - 1)n_1 m + 1) \\ &\quad (m + 1, (n_1 + 1)m + 1, (2n_1 + 1)m + 1, \dots, ((n_2 - 1)n_1 + 1)m + 1) \cdots \\ &\quad ((n_1 - 1)m + 1, (2n_1 - 1)m + 1, \dots, (n_2 n_1 - 1)m + 1) L_3 L_4 \cdots L_m, \end{aligned}$$

donde L_j es una permutación de la columna j de orden dividiendo n_2 , $j = 3, 4, \dots, m$ y para algún j la permutación L_j tiene orden n_2 . Notamos que $y \in V_{\mathfrak{G}}$.

Sea

$$\begin{aligned} Q_k &= (k, n_1 m + k, 2n_1 m + k, \dots, (n_2 - 1)n_1 m + k) \\ &\quad (m + k, (n_1 + 1)m + k, (2n_1 + 1)m + k, \dots, ((n_2 - 1)n_1 + 1)m + k) \cdots \\ &\quad ((n_1 - 1)m + k, (2n_1 - 1)m + k, \dots, (n_2 n_1 - 1)m + k), \end{aligned}$$

Para el elemento $g_1 = (1, 2)(m + 1, m + 2)\dots((n - 1)m + 1, (n - 1)m + 2)$ se tiene que

$$(g_1 y g_1)^{-1} = Q_2^{-1} (L_3)^{-1} \dots (L_m)^{-1}.$$

De esta forma el elemento

$$c = y (g_1 y g_1)^{-1} = Q_1 Q_2^{-1},$$

es un elemento de $V_{\mathfrak{G}}$.

Hagamos

$$d_1 = T c T^{-1} = Q_2 Q_3^{-1},$$

$$d_2 = T c T^{-2} = Q_3 Q_4^{-1}$$

hasta

$$d_{m-1} = T^{(m-1)} c T^{-(m-1)} = Q_m Q_1^{-1}$$

Luego $c(d_1)(d_2)(d_3)\dots(d_{m-1}) = 1$.

De esta forma $\mathcal{Q} = \langle c, d_1, d_2, d_3, \dots, d_{m-1} \rangle$ tiene orden $n_2^{(m-1)}$. Además $\mathcal{Q} \leq V_{\mathfrak{G}}$ y $\mathcal{Q} \trianglelefteq \mathfrak{G}$.

En forma análoga al caso cíclico podemos probar que $\mathcal{P} = U_{\mathfrak{G}}$ y $\mathcal{Q} = V_{\mathfrak{G}}$. Además $K = U_{\mathfrak{G}}V_{\mathfrak{G}}$. Como $U_{\mathfrak{G}} \cap V_{\mathfrak{G}} = \{1\}$ sigue que $|K| = (n_1n_2)^{m-1}$. ■

Capítulo 5

Grupos Tipo Weyl

En este capítulo probaremos que los cubrimientos factorizados estudiados en este trabajo tienen grupo de Galois con presentación geométrica similar a la del grupo de Weyl WD_n . Exhibiremos generadores geométricos naturales, que en el caso $n = 2$ coinciden con los generadores estándar del grupo de Weyl en su representación permutacional de grado $2m$ [Suz82, p.369].

5.1. Geometría del grupo $\mathfrak{G}_m := \mathbb{Z}_n^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$

Recordemos que cuando $n = 2$, los elementos:

$$\begin{aligned} s_i &= (i, i+1)(m+i, m+i+1); \quad 1 \leq i < m \\ s_m &= (m-1, 2m)(2m-1, m) \end{aligned}$$

forman un conjunto generador para el grupo de Weyl de tipo $WD_n \cong \mathbb{Z}_2^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, ver [Suz82, p.369]. Estas permutaciones son obtenidas considerando un subgrupo del grupo de permutaciones del conjunto $\{-m, -m+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, m\}$, formado por los elementos α tales que $\alpha(-i) = -\alpha(i)$ para todo i y además tienen un número par de cambios de signo. En esta sección extenderemos esa idea para n un entero positivo arbitrario y probaremos que las permutaciones asociadas naturalmente, generan un grupo que en el sentido geométrico es equivalente al grupo de Weyl WD_n .

Para enunciar la siguiente proposición que nos da un acercamiento a nuestro objetivo, requerimos precisar algunas nociones:

Sean $\omega = e^{2i\pi/n}$ una raíz n -ésima primitiva de la unidad y \mathcal{Z}_n el grupo multiplicativo generado por ω .

Definición 5.1.1. Una matriz de permutación con signo, es una matriz cuadrada tal que en cada fila y en cada columna hay un único coeficiente no nulo que toma valores en \mathcal{Z}_n .

Denotaremos por $MP(m, \mathcal{Z}_n)$ al conjunto de matrices de permutación con signo, de tamaño $m \times m$ con coeficientes en \mathcal{Z}_n .

Es claro que $MP(m, \mathcal{Z}_n)$ es un grupo con la multiplicación usual de matrices.

Un elemento típico de $MP(m, \mathcal{Z}_n)$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^r & \cdots & 0 \\ \omega^s & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega^t \end{pmatrix}, \text{ con } r, s, t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Además, dado que existen $m!$ matrices de permutación de tamaño $m \times m$ y n posibilidades para escoger un coeficiente en \mathcal{Z}_n , se tiene que $|MP(m, \mathcal{Z}_n)| = n^m m!$.

Proposición 5.1.1. $MP(m, \mathcal{Z}_n)$ es isomorfo a $\mathfrak{S}_m = \mathbb{Z}_n^m \rtimes \mathfrak{S}_m$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que \mathfrak{S}_m actúa de manera natural en \mathbb{Z}_n^m permutando las coordenadas, es decir dados $\tau \in \mathfrak{S}_m$, $v = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}_n^m$, definimos:

$$\tau((x_1, x_2, \dots, x_m)) = (x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(m)}).$$

Definamos los homomorfismos:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathfrak{S}_m &\rightarrow GL_m(\mathbb{Q}(\omega)) \\ \tau &\mapsto M_\tau \end{aligned},$$

donde ω es una raíz primitiva n -ésima de la unidad y $M_\tau = (m_{i,j})$, es la representación matricial de τ , esto es la matriz tal que en la columna i , la entrada que vale 1, es la correspondiente a la fila $\tau(i)$ y las entradas restantes son cero.

Sean

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{Q}(\omega) & \psi: \mathbb{Z}_n^m &\rightarrow GL_m(\mathbb{Q}(\omega)) \\ [i] &\mapsto \omega^i & v &\mapsto M_v \end{aligned},$$

donde

$$M_v = \begin{pmatrix} \phi(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi(x_2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi(x_m) \end{pmatrix}$$

Estos homomorfismos son inyectivos y se puede ver que φ y ψ respetan la acción de \mathfrak{S}_m en \mathbb{Z}_n^m , esto es que dados $\tau \in \mathfrak{S}_m$ y $v = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}_n^m$, entonces:

$$\varphi^{-1}(\tau)\psi(v)\varphi(\tau) = \psi(\tau(v)),$$

en efecto: $(M_\tau^{-1}M_v)(M_\tau) = (M_{\tau^{-1}}M_v)M_\tau =$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & \tau(i) & \cdots & m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \phi(x_{\tau(i)}) & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \tau(i) \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \end{pmatrix} \end{matrix} = \\ & \begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \phi(x_{\tau(i)}) & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \phi(x_{\tau(1)}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi(x_{\tau(2)}) & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi(x_{\tau(m)}) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$M_{(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(m)})} = \psi(\tau((x_1, x_2, \dots, x_m))).$$

Así, por la propiedad universal del producto semidirecto, tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_n^m & \xrightarrow{i'} & \mathbb{Z}_n^m \rtimes \mathbf{S}_m & \xleftarrow{i} & \mathbf{S}_m \\ & \searrow \psi & \downarrow \rho & \swarrow \varphi & \\ & & GL_m(\mathbb{Q}(\omega)) & & \end{array}$$

esto es, existe un único homomorfismo:

$$\rho : \mathbb{Z}_n^m \rtimes \mathbf{S}_m \rightarrow GL_m(\mathbb{Q}(\omega)),$$

además, la imagen de ρ contiene al subgrupo de G generado por :

$$\{M_\tau : \tau \in \mathbf{S}_m\} \cup \{M_v : v \in \mathbb{Z}_n^m\},$$

el cual contiene a $MP(m, \mathcal{Z}_n)$, puesto que si multiplicamos por una matriz M_v a la izquierda, $M_v M_\tau$, el resultado es una matriz de permutación con coeficientes en \mathcal{Z}_n , determinados por M_v . Además, $|\mathbb{Z}_n^m \times \mathbf{S}_m| = n^m m!$, luego ρ es inyectiva y su imagen es $MP(m, \mathcal{Z}_n)$. Esto es $MP(m, \mathcal{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n^m \times \mathbf{S}_m$. ■

Ahora introduciremos el grupo de permutaciones \mathbf{W}_{nm} . Este grupo es el que queremos interpretar como los grupos de Weyl, para ello consideremos:

$$\Omega = \{\xi k : \xi \in \mathcal{Z}_n, k = 1, 2, \dots, m\};$$

en el caso $n = 2$, $\Omega = \{-m, -m + 1, \dots, -1, 1, 2, \dots, m\}$.

En el grupo de permutaciones en Ω , consideramos el subconjunto:

$$\mathbf{W}_{nm} = \{\sigma \in \mathbf{S}_\Omega : \sigma(\xi x) = \xi \sigma(x), x \in \Omega, \xi \in \mathcal{Z}_n\},$$

no es difícil probar que \mathbf{W}_{nm} es un grupo de orden $n^m m!$.

Notemos que en el caso $n = 2$, este es el subconjunto

$$\mathbf{W}_{2m} = \{\sigma \in \mathbf{S}_\Omega : \sigma(-k) = -\sigma(k), k = 1, 2, \dots, m\},$$

el cual es isomorfo al grupo de Weyl WB_n , ver [Suz82, p.337].

Observación 5.1.1.

Por la definición de \mathbf{W}_{nm} , para cada $\sigma \in \mathbf{W}_{nm}$ se tiene $\sigma(\xi x) = \xi \sigma(x)$. De esta forma σ es determinado completamente a partir de la acción de σ en $\{1, 2, \dots, m\}$. Denotemos por σ^* la permutación correspondiente a $\sigma|_{\{1, 2, \dots, m\}}$, entonces:

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \eta_1 a_1 & \eta_2 a_2 & \cdots & \eta_m a_m \end{pmatrix},$$

con $\eta_i \in \mathcal{Z}_n$ y $a_i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

La observación anterior nos permite introducir la definición de signo de una permutación en \mathbf{W}_{nm} como sigue:

Definición 5.1.2. Sea $\sigma \in \mathbf{W}_{nm}$ y σ^* la permutación asociada de acuerdo a la observación 5.1.1. Definimos

$$\text{sgn}(\sigma) = \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m.$$

Ejemplo 5.1.1. Sean $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\mathcal{Z}_3 = \langle \omega \rangle$, $\Omega = \{\xi k : \xi \in \mathcal{Z}_3, k = 1, 2, 3\}$. Entonces,

$$\mathbf{W}_{33} = \{\sigma \in S_\Omega : \sigma(\xi x) = \xi \sigma(x), x \in \Omega, \xi \in \mathcal{Z}_3\}, \text{ y}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \omega & 2\omega & 3\omega & \omega^2 & 2\omega^2 & 3\omega^2 \\ 2\omega & 3 & \omega^2 & 2\omega^2 & 3\omega & 1 & 2 & 3\omega^2 & \omega \end{pmatrix} \in \mathbf{W}_{33}.$$

Además, $\sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\omega & 3 & \omega^2 \end{pmatrix}$, luego $\text{sgn}(\sigma) = \omega \cdot 1 \cdot \omega^2 = 1$.

Observación 5.1.2. La función sgn define un epimorfismo de grupos, entre \mathbf{W}_{nm} y \mathcal{Z}_n . De esta forma $|\ker(\text{sgn})| = n^{m-1}m!$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, consideremos

$$\begin{aligned} \text{sgn} : \mathbf{W}_{nm} &\rightarrow \mathcal{Z}_n \\ \sigma &\mapsto \text{sgn}(\sigma) \end{aligned} . \text{ Entonces,}$$

si $\sigma, \tau \in \mathbf{W}_{nm}$, donde σ^* es como en la observación 5.1.1 y

$$\tau^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \mu_1 b_1 & \mu_2 b_2 & \cdots & \mu_m b_m \end{pmatrix},$$

con $\mu_i \in \mathcal{Z}_n$ y $b_i \in \{1, 2, \dots, m\}$, entonces,

$$\begin{aligned} \sigma\tau(i) &= \sigma(\tau(i)) \\ &= \sigma(\mu_i b_i), \quad \mu_i \in \mathcal{Z}_n, b_i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ &= \mu_i \sigma(b_i) \\ &= \mu_i \eta_{b_i} a_{b_i} \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma\tau) &= \mu_1 \eta_{b_1} \mu_2 \eta_{b_2} \cdots \mu_m \eta_{b_m} \\ &= (\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m)(\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \end{aligned}$$

de modo que sgn es un homomorfismo. Además dado $\xi \in \mathcal{Z}_n$ existe $\sigma \in \mathbf{W}_{nm}$ tal que:

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \xi & 2 & \cdots & m \end{pmatrix},$$

y $\text{sgn}(\sigma) = \xi$. Luego sgn es un homomorfismo sobreyectivo.

y $\mathbf{W}_{nm}/\ker(\text{sgn}) \cong \mathcal{Z}_n$, esto es

$$|\ker(\text{sgn})| = n^{m-1}m!.$$

■

Además,

$$\ker(\text{sgn}) = \{\sigma \in \mathbf{W}_{nm} : \text{sgn}(\sigma) = 1\},$$

luego \mathbf{W}_{nm} tiene un subgrupo normal, $\ker(\text{sgn})$, formado por todas las permutaciones de \mathbf{W}_{nm} , tales que $\text{sgn}(\sigma) = 1$. El siguiente lema junto con la proposición 5.1.1 establecen que $\ker(\text{sgn})$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{Z}_n^m \rtimes \mathbf{S}_m$.

Lema 5.1.1. $\mathbf{W}_{nm} \cong MP(m, \mathbb{Z}_n)$.

DEMOSTRACIÓN.

Consideremos,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{W}_{nm} &\rightarrow MP(m, \mathbb{Z}_n) \\ \sigma &\mapsto M_\sigma \end{aligned},$$

donde M_σ , es la matriz de tamaño $m \times m$ tal que si $\sigma(i) = \xi_i k_i$, en la posición (k_i, i) , la entrada vale ξ_i y 0 en las demás entradas. Mostraremos que Φ es un isomorfismo de grupos. En efecto,

Sean $\sigma, \tau \in \mathbf{W}_{nm}$ tales que:

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \eta_1 a_1 & \eta_2 a_2 & \cdots & \eta_m a_m \end{pmatrix},$$

con $\eta_i \in \mathbb{Z}_n$ y $a_i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y

$$\tau^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \mu_1 b_1 & \mu_2 b_2 & \cdots & \mu_m b_m \end{pmatrix},$$

con $\mu_i \in \mathbb{Z}_n$ y $b_i \in \{1, 2, \dots, m\}$, entonces

$$(\sigma\tau)^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \mu_1 \eta_{b_1} a_{b_1} & \mu_1 \eta_{b_2} a_{b_2} & \cdots & \mu_1 \eta_{b_m} a_{b_m} \end{pmatrix},$$

Luego, la entrada (a_{b_i}, i) de la matriz de la permutación es $\mu_i \eta_{b_i}$. Así,

$$M_{\sigma\tau} = \begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ a_{b_i} \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_i \eta_{b_i} & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & 0 & & \end{pmatrix} & , y \end{matrix}$$

$$M_\sigma \cdot M_\tau = \begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & b_i & \cdots & m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ a_{b_i} \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & 0 & \cdots & \\ & & & 0 & \cdots & \\ & & & \vdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \eta_{b_i} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & 0 & \cdots & \\ & & & 0 & \cdots & \\ & & & \vdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_i & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = M_{\sigma\tau},$$

entonces Φ es un homomorfismo de grupos. Además,

$$\ker(\Phi) = \{\sigma \in \mathbf{W}_{nm} : \Phi(\sigma) = I_{m \times m}\} = 1_{\mathbf{W}_{nm}},$$

luego Φ es un monomorfismo.

Finalmente, dada $P \in MP(m, \mathcal{Z}_n)$,

$$P = \begin{matrix} & 1 & \cdots & i & \cdots & m \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ m \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & 0 & \cdots & \\ & & & \vdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & \eta_i & \cdots & 0 & \\ & & \vdots & \cdots & & \\ & & 0 & \cdots & & \end{pmatrix} \end{matrix}, \eta_i \in \mathcal{Z}_n, a_i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Luego existe $\sigma \in \mathbf{W}_{nm}$, tal que

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ \eta_1 a_1 & \eta_2 a_2 & \cdots & \eta_m a_m \end{pmatrix},$$

Es claro que

$$\Phi(\sigma) = P,$$

luego Φ es sobreyectiva y en consecuencia un isomorfismo de grupos. \blacksquare

De acuerdo a la proposición 5.1.1 y al lema 5.1.1, $\mathbf{W}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n^m \rtimes \mathbf{S}_m$, y en consecuencia

$$\ker(\text{sgn}) \lesssim \mathbb{Z}_n^m \rtimes \mathbf{S}_m.$$

En lo que sigue, determinaremos a qué subgrupo de $\mathbb{Z}_n^m \rtimes \mathbf{S}_m$ es isomorfo $\ker(\text{sgn})$.

Observación 5.1.3.

$\widehat{G} = \{P \in MP(m, \mathcal{Z}_n) : \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m = 1, \text{ donde } \eta_i \text{ es la entrada no nula de la fila } i\}$
es un subgrupo de $MP(m, \mathcal{Z}_n)$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $I_{m \times m} \in \widehat{G}$, además, si $P \in \widehat{G}$, $P^{-1} \in \widehat{G}$ y dadas $P_1, P_2 \in \widehat{G}$, $P_1 P_2$ es tal que el producto de sus entradas no nulas corresponde al producto de las entradas no nulas de P_1 por las entradas no nulas de P_2 . Luego \widehat{G} es un subgrupo de $MP(m, \mathbb{Z}_n)$. ■

Lema 5.1.2. $\ker(\text{sgn}) \cong \widehat{G}$.

DEMOSTRACIÓN.

$$\Phi(\ker(\text{sgn})) = \{P \in MP(m, \mathbb{Z}_n) : P = M_\sigma \text{ para algún } \sigma \in \ker(\text{sgn})\} = \widehat{G}.$$

Luego nos resta ver a qué subgrupo de $\mathbb{Z}_n^m \rtimes \mathbf{S}_m$ corresponde \widehat{G} . Notemos que

$$M_\sigma = PM_v,$$

donde P es una matriz de permutación y M_v es la matriz:

$$\begin{pmatrix} \phi(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi(x_2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi(x_m) \end{pmatrix}$$

con $\phi(x_1) = \omega^{t_1}$, $\phi(x_2) = \omega^{t_2}$, ..., $\phi(x_m) = \omega^{t_m}$, tales que $\omega^{t_1} \omega^{t_2} \cdots \omega^{t_m} = 1$. Recordemos que

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{Q}(\omega_n) \\ [i] &\mapsto \omega^i \end{aligned},$$

luego $t_1 + t_2 + \cdots + t_m = 0 \in \mathbb{Z}_n$, esto es $v = (t_1, t_2, \cdots, t_m) : t_1 + t_2 + \cdots + t_m = 0$.

Sea

$$\overline{G} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_m, \sigma) : x_i \in \mathbb{Z}_n, i = 1, \cdots, m, \sigma \in \mathbf{S}_m \text{ y } x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0\}.$$

Entonces $\overline{G} \trianglelefteq \mathbb{Z}_n^m \rtimes \mathbf{S}_m$ y $\overline{G} \cong \mathbb{Z}_n^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$.

Por el lema 5.1.2 $\ker(\text{sgn})$ está contenido, salvo isomorfismo, en \overline{G} . Además, dado que $\overline{G} \cong \mathbb{Z}_n^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, se tiene que $|\ker(\text{sgn})| = |\overline{G}|$, compare con [BF86]. En consecuencia se ha mostrado que:

Corolario 5.1.1. $\ker(\text{sgn}) \cong \mathfrak{G}_m = \mathbb{Z}_n^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$.

■

Consideremos ahora el subgrupo T de \mathbf{W}_{nm} , generado por los elementos:

$$t_i = (i, i+1)(\omega i, \omega(i+1))(\omega^2 i, \omega^2(i+1)) \cdots (\omega^{(n-1)} i, \omega^{(n-1)}(i+1));$$

$$1 \leq i < m$$

$$t_m = (m-1, m\omega)((m-1)\omega, m\omega^2) \cdots ((m-1)\omega^{(n-2)}, m\omega^{(n-1)}((m-1)\omega^{(n-1)}, m))$$

Como $\text{sgn}(t_i) = 1$, para todo i , se tiene que $T \leq \ker(\text{sgn})$.

Por otra parte, para todo índice i y todo l , $0 \leq l \leq n-1$, la aplicación

$$lm + i \leftrightarrow i \omega^l,$$

establece una biyección entre el conjunto generador de T y el conjunto:

$$s_i = (i, i+1)(m+i, m+i+1)(2m+i, 2m+i+1) \cdots ((n-1)m+i, (n-1)m+i+1);$$

$$1 \leq i < m$$

$$s_m = (m-1, 2m)(2m-1, 3m)(3m-1, 4m) \cdots ((n-1)(m-1), nm)(nm-1, m)$$

En consecuencia T y $G_m = \langle s_i : i = 1, \dots, m \rangle$ son subgrupos isomorfos y de esta forma

$$G_m \lesssim \mathfrak{G}_m = \mathbb{Z}_n^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m.$$

Finalmente, G_{m-1} es el grupo generado por:

$$s_i^{(m-1)} = (i, i+1)(m-1+i, m+i) \cdots ((n-1)(m-1)+i, (n-1)(m-1)+i+1);$$

$$1 \leq i < m-1$$

$$s_{m-1}^{(m-1)} = (m-2, 2m-2)(2m-3, 3m-3) \cdots ((n-1)(m-2), n(m-1))(n(m-1)-1, (m-1))$$

Aquí usamos la notación $s_i^{(m-1)}$, para diferenciar los generadores de G_m de los de G_{m-1} . Entonces tenemos:

Proposición 5.1.2. $\mathbf{S}_{mn-1} \cap G_m \cong G_{m-1}$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos a $\mathbf{S}_{mn-1}^{(1)}$ el grupo simétrico de grado $mn-1$, donde fijamos el 1. Entonces, los elementos $s_2, s_3, \dots, s_{m-1}, s_m \in G_m$, están en $\mathbf{S}_{mn-1}^{(1)} \cap G_m$ y estos elementos generan un subgrupo de G_m isomorfo a G_{m-1} , puesto que del conjunto generador de $\mathbf{S}_{mn-1}^{(1)} \cap G_m$, se puede pasar al conjunto generador de G_{m-1} sustituyendo i por $i-1$ y m por $m-1$. ■

Observación 5.1.4.

$$|\mathbf{S}_{mn} : \mathbf{S}_{mn-1}| = |\mathbf{S}_{mn} \cap G_m : \mathbf{S}_{mn-1} \cap G_m| = |G_m : \mathbf{S}_{mn-1} \cap G_m| = mn,$$

luego $|G_m : G_{m-1}| = mn$ y $|G_{m-1} : G_{m-2}| = (m-1)n$, recursivamente podemos continuar hasta obtener que $|G_{m-(m-3)} : G_{m-(m-2)}| = |G_3 : G_2| = 3n$ y dado que:

$$G_{m-(m-2)} = G_2 = \langle s_1, s_2 : s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^n = 1 \rangle \cong D_n,$$

entonces $|G_2| = 2n$ y $|G_m| = n^{m-1}m!$.

De donde concluimos que:

$$G_m \cong \mathfrak{G}_m = \mathbb{Z}_n^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m, \text{ en el sentido de la proposición 5.1.1,}$$

con un sistema de generadores:

$$s_i = (i, i+1)(m+i, m+i+1)(2m+i, 2m+i+1) \cdots ((n-1)m+i, (n-1)m+i+1);$$

$$1 \leq i < m$$

$$s_m = (m-1, 2m)(2m-1, 3m)(3m-1, 4m) \cdots ((n-1)(m-1), nm)(nm-1, m),$$

que coincide con el sistema de generadores exhibido en el corolario 4.2.2.

En las dos secciones siguientes, extenderemos la idea de la sección anterior, para el caso abeliano no cíclico.

5.2. Geometría del grupo $\mathfrak{G}_m := (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$

En esta sección ilustraremos que el método descrito en la sección anterior se puede aplicar al caso del producto semidirecto de $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, con este fin se extenderán las definiciones de $MP(m, \mathcal{Z}_n)$ y la proposición 5.1.1.

Sea $\omega_{n_i} = e^{2i\pi/n_i}$ una raíz n_i -ésima primitiva de la unidad y $\mathcal{Z}_{n_i} = \langle \omega_{n_i} \rangle$.

Denotaremos por $MP(2m, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2})$ al conjunto de matrices de tamaño $2m \times 2m$, diagonales por bloques, donde cada bloque es una matriz de permutación con signo de tamaño $m \times m$ con coeficientes en \mathcal{Z}_{n_1} para el primer bloque y \mathcal{Z}_{n_2} para el segundo bloque.

Un elemento típico de $MP(2m, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2})$ es:

$$\left(\begin{array}{c|c} M_{v_1} M_\tau & 0 \\ \hline 0 & M_{v_2} M_\tau \end{array} \right),$$

donde M_τ es la matriz de la permutación $\tau \in \mathbf{S}_m$ y M_{v_i} es una matriz diagonal con entradas en \mathcal{Z}_{n_i} .

Además, dado que existen $m!$ matrices de permutación de tamaño $m \times m$ y n_1^m, n_2^m posibilidades para escoger los elementos de la diagonal de M_{v_1} y M_{v_2} respectivamente, se tiene que $|MP(2m, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2})| = n_1^m n_2^m m!$.

Proposición 5.2.1. $MP(2m, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2})$ es isomorfo a $\mathfrak{G}_m = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^m \rtimes \mathbf{S}_m$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de esta proposición es similar a la de la proposición 5.1.1 y es el caso particular $r = 2$ de la prueba que se presenta en el apéndice C. ■

Ahora, consideremos:

$$\begin{aligned}\Omega_i &= \{\xi k : \xi \in \mathcal{Z}_{n_i}, k = 1, 2, \dots, m\}, \\ \mathbf{W}_{n_i m} &= \{\sigma \in \mathbf{S}_{\Omega_i} : \sigma(\xi x) = \xi \sigma(x), x \in \Omega_i, \xi \in \mathcal{Z}_{n_i}\}.\end{aligned}$$

sabemos que $\mathbf{W}_{n_i m}$ es un grupo y que $|\mathbf{W}_{n_i m}| = n_i^m m!$. Sea

$$\Omega = \{(\xi k, \eta k) : \xi \in \mathcal{Z}_{n_1}, \eta \in \mathcal{Z}_{n_2}, k = 1, \dots, m\}$$

entonces $|\Omega| = mn_1 n_2$ y $\mathbf{S}_\Omega \cong \mathbf{S}_{mn_1 n_2}$.

Sea

$$\mathbf{W}_{n_1 n_2 m} = \{\sigma \in \mathbf{S}_\Omega : \sigma((\xi k, \eta k)) = (\sigma_1(\xi k), \sigma_2(\eta k)), \sigma_i \in \mathbf{W}_{n_i m}, i = 1, 2 \text{ y } M_{\sigma_1^*} = M_{\sigma_2^*}\},$$

donde σ_i^* es como en la observación 5.1.1 y $M_{\sigma_i^*}$ es la matriz de tamaño $m \times m$ tal que si $\sigma_i^*(j) = \xi_j k_j$, en la posición (k_j, j) la entrada vale ξ_j , y 0 en las demás entradas.

Entonces $\mathbf{W}_{n_1 n_2 m}$ es un subgrupo de \mathbf{S}_Ω y además $|\mathbf{W}_{n_1 n_2 m}| = n_1^m n_2^m m!$.

Observación 5.2.1.

Dado que para $\sigma \in \mathbf{W}_{n_1 n_2 m}$, se tiene que $\sigma((\xi k, \eta k)) = (\sigma_1(\xi k), \sigma_2(\eta k))$, con $\sigma_1 \in \mathbf{W}_{n_1 m}$, $\sigma_2 \in \mathbf{W}_{n_2 m}$, se puede conocer a σ completamente, a partir de su definición para $\{(1, 1), (2, 2), \dots, (m, m)\}$. Sea σ^* la permutación correspondiente a $\sigma|_{\{(1,1), (2,2), \dots, (m,m)\}}$, entonces:

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} (1, 1) & (2, 2) & \cdots & (m, m) \\ (\xi_1 a_1, \eta_1 a_1) & (\xi_2 a_2, \eta_2 a_2) & \cdots & (\xi_m a_m, \eta_m a_m) \end{pmatrix},$$

con $\xi_i \in \mathcal{Z}_{n_1}$, $\eta_i \in \mathcal{Z}_{n_2}$ y $a_i \in \{1, 2, \dots, m\}$. con $\xi_i^j \in \mathcal{Z}_{n_j}$, $i := 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, r$ y $a_i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

La observación anterior nos permite definir el signo de una permutación $\sigma \in \mathbf{W}_{n_1 n_2 m}$ así:

Definición 5.2.1. Sea $\sigma \in \mathbf{W}_{n_1 n_2 m}$ y σ^* la permutación asociada de acuerdo a la observación 5.2.1 definimos

$$\begin{aligned}\text{sgn} : \mathbf{W}_{n_1 n_2 m} &\rightarrow \mathcal{Z}_{n_1} \times \mathcal{Z}_{n_2} \\ \sigma &\mapsto (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_m, \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m)\end{aligned}$$

Observación 5.2.2.

La función sgn es un epimorfismo de grupos. De este modo $|\ker(\text{sgn})| = n_1^{m-1} n_2^{m-1} m$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\sigma, \tau \in \mathbf{W}_{n_1 n_2 m}$, donde σ_m es como arriba y

$$\tau^* = \begin{pmatrix} (1, 1) & (2, 2) & \cdots & (m, m) \\ (\mu_1 b_1, \nu_1 b_1) & (\mu_2 b_2, \nu_2 b_2) & \cdots & (\mu_m b_m, \nu_m b_m) \end{pmatrix},$$

con $\mu_i \in \mathcal{Z}_{n_1}$, $\nu_i \in \mathcal{Z}_{n_2}$ y $b_i \in \{1, 2, \dots, m\}$, entonces,

$$\begin{aligned} \sigma\tau((i, i)) &= \sigma(\tau((i, i))) \\ &= \sigma((\mu_i b_i, \nu_i b_i)), \quad \mu_i \in \mathcal{Z}_{n_1}, \nu_i \in \mathcal{Z}_{n_2}, b_i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ &= (\sigma_1(\mu_i(b_i)), \sigma_2(\nu_i(b_i))) \\ &= (\mu_i \sigma_1(b_i), \nu_i \sigma_2(b_i)) \\ &= (\mu_i \xi_{b_i} a_{b_i}, \nu_i \eta_{b_i} a_{b_i}), \quad \xi_{b_i} \in \mathcal{Z}_{n_1}, \eta_{b_i} \in \mathcal{Z}_{n_2}, a_{b_i} \in \{1, 2, \dots, m\} \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma\tau) &= (\mu_1 \xi_{b_1} \mu_2 \xi_{b_2} \cdots \mu_m \xi_{b_m}, \nu_1 \eta_{b_1} \nu_2 \eta_{b_2} \cdots \nu_m \eta_{b_m}) \\ &= (\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_m, \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m) \\ &= (\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m, \eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m) (\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_m, \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m) \\ &= \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \end{aligned}$$

de modo que sgn es un homomorfismo.

Además dado $(\eta, \xi) \in \mathcal{Z}_{n_1} \times \mathcal{Z}_{n_2}$, existe $\sigma \in \mathbf{W}_{n_1 n_2 m}$, tal que:

$$\sigma_m = \begin{pmatrix} (1, 1) & (2, 2) & \cdots & (m, m) \\ (\eta, \xi) & (2, 2) & \cdots & (m, m) \end{pmatrix},$$

y $\text{sgn}(\sigma) = (\eta, \xi)$. Luego sgn es un homomorfismo sobreyectivo. ■

Además,

$$\ker(\text{sgn}) = \{\sigma \in \mathbf{W}_{n_1 n_2 m} : \text{sgn}(\sigma) = (1, 1)\},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{n_1 n_2 m} / \ker(\text{sgn}) &\cong \mathcal{Z}_{n_1} \times \mathcal{Z}_{n_2}, \quad \text{y} \\ |\ker(\text{sgn})| &= n_1^{m-1} n_2^{m-1} m!. \end{aligned}$$

El siguiente lema y la proposición 5.2.1 nos permiten establecer el núcleo del homomorfismo sgn como subgrupo de $\mathfrak{G}_m = (\mathcal{Z}_{n_1} \times \mathcal{Z}_{n_2})^m \rtimes \mathbf{S}_m$.

Lema 5.2.1. $\mathbf{W}_{n_1 n_2 m} \cong MP(2m, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2})$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto,

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{W}_{n_1 n_2 m} &\rightarrow MP(2m, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2}) \\ \sigma &\mapsto \mathcal{M}_\sigma = \left(\begin{array}{c|c} M_{\sigma_1} & 0 \\ \hline 0 & M_{\sigma_2} \end{array} \right), \end{aligned}$$

donde M_{σ_i} , $i = 1, 2$ es la matriz de tamaño $m \times m$ tal que si $\sigma_i^*(j) = \xi_j k_j$, en la posición (k_j, j) , la entrada vale ξ_j y 0 en las demás entradas. Es un epimorfismo de grupos. ■

Luego, se tiene que

$$\ker(\text{sgn}) \lesssim (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^m \rtimes \mathbf{S}_m.$$

En lo que sigue, determinaremos a qué subgrupo de $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^m \rtimes \mathbf{S}_m$ es isomorfo $\ker(\text{sgn})$.

Observación 5.2.3.

$\widehat{G} = \{P \in MP(2m, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2}) : s_1 s_2 \cdots s_m t_1 t_2 \cdots t_m = 1, \text{ donde } s_i, t_i, \text{ son las entradas no nulas de las filas } i, \text{ y } m+i, \text{ respectivamente}\}$

es un subgrupo de $MP(2m, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2})$.

Lema 5.2.2.

$$\ker(\text{sgn}) \cong \widehat{G}.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\Phi(\ker(\text{sgn})) = \{P \in MP_{2m}^{n_1, n_2 - \text{sgn}} : P = \mathcal{M}_\sigma \text{ para algún } \sigma \in \ker(\text{sgn})\} = \widehat{G}$$

■

Luego debemos determinar a qué subgrupo de $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^m \rtimes \mathbf{S}_m$ corresponde \widehat{G} . Notemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\sigma &= \mathcal{P}M_v, \text{ con} \\ \mathcal{P} &= \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & P \end{array} \right), \end{aligned}$$

donde P es una matriz de permutación y M_v es la matriz:

$$M_v = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \phi_1(x_1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \phi_1(x_m) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \phi_2(y_1) & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \phi_2(y_m) \end{array} \right)$$

con $\phi_1(x_1) = \omega_{n_1}^{l_1}$, $\phi_1(x_2) = \omega_{n_1}^{l_2}$, ..., $\phi_1(x_m) = \omega_{n_1}^{l_m}$, tales que $\omega_{n_1}^{l_1} \omega_{n_1}^{l_2} \cdots \omega_{n_1}^{l_m} = 1$ y $\phi_2(y_1) = \omega_{n_2}^{h_1}$, $\phi_2(y_2) = \omega_{n_2}^{h_2}$, ..., $\phi_2(y_m) = \omega_{n_2}^{h_m}$, tales que $\omega_{n_2}^{h_1} \omega_{n_2}^{h_2} \cdots \omega_{n_2}^{h_m} = 1$. Recordemos que:

$$\begin{aligned} \phi_j : \mathbb{Z}_{n_j} &\rightarrow \mathbb{Q}(\omega_{n_j}) \\ [i] &\mapsto \omega_{n_j}^i \end{aligned},$$

luego $l_1 + l_2 + \cdots + l_m = 0 \in \mathbb{Z}_{n_1}$ y $h_1 + h_2 + \cdots + h_m = 0 \in \mathbb{Z}_{n_2}$, de donde se tiene, $v = ((l_1, h_1), (l_2, h_2), \dots, (l_m, h_m))$, con $l_1 + l_2 + \cdots + l_m = 0$, $h_1 + h_2 + \cdots + h_m = 0$.

Sea

$$\begin{aligned} \overline{G} = \{ &((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m), \sigma) : x_i \in \mathbb{Z}_{n_1}, y_i \in \mathbb{Z}_{n_2} i = 1, \dots, m, \\ &\sigma \in \mathbf{S}_m \text{ y } x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 0, y_1 + y_2 + \cdots + y_m = 0 \} \end{aligned}$$

$\overline{G} \trianglelefteq (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^m \rtimes \mathbf{S}_m$ y por lo anterior $\ker(\text{sgn})$ está contenido, salvo isomorfismo, en \overline{G} . Además, dado que $\overline{G} \cong (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, se tiene que $|\ker(\text{sgn})| = |\overline{G}|$ y en consecuencia se ha mostrado que:

Corolario 5.2.1. $\ker(\text{sgn}) \cong \mathfrak{G}_m = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$.

■

Este isomorfismo es muy importante pues nos permite exhibir un conjunto de generadores del grupo $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, visto como subgrupo del grupo simétrico $\mathbf{S}_{mn_1n_2}$, como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 5.2.2. Sea $\mathbf{S}_{mn_1n_2}$, el grupo simétrico de grado n_1n_2m . En $\mathbf{S}_{mn_1n_2}$, el grupo

$(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, $n_1|n_2$, está generado por los elementos:

$$s_i = (i, i+1) (m+i, m+i+1) (2m+i, 2m+i+1) (3m+i, 3m+i+1) \cdots \\ ((n_1 n_2 - 2)m+i, (n_1 n_2 - 2)m+i+1) ((n_1 n_2 - 1)m+i, (n_1 n_2 - 1)m+i+1); \\ 1 \leq i < m$$

$$s_m = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{n_2}$$

$$s_{m+1} = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{n_1},$$

donde

$$\gamma_j = (((j-1)n_1 + 1)m - 1, ((j-1)n_1 + 2)m) (((j-1)n_1 + 2)m - 1, ((j-1)n_1 + 3)m) \cdots \\ (((j-1)n_1 + n_1 - 1)m - 1, ((j-1)n_1 + n_1)m) (((j-1)n_1 + n_1)m - 1, ((j-1)n_1 + 1)m) \\ 1 \leq j \leq n_2, y$$

$$\delta_j = (jm - 1, (n_1 + j)m) ((n_1 + j)m - 1, (2n_1 + j)m) ((2n_1 + j)m - 1, (3n_1 + j)m) \cdots \\ (((n_2 - 2)n_1 + j)m - 1, ((n_2 - 1)n_1 + j)m) (((n_2 - 1)n_1 + j)m - 1, jm) \\ 1 \leq j \leq n_1$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que:

$$\mathbf{W}_{n_1 n_2 m} = \{ \sigma \in \mathbf{S}_\Omega : \sigma((\xi k, \eta k)) = (\sigma_1(\xi k), \sigma_2(\eta k)), \sigma_i \in \mathbf{W}_{n_i m}, i = 1, 2 \text{ y } M_{\sigma_1^*} = M_{\sigma_2^*} \},$$

donde σ_i^* es como en la observación 5.1.1 y $M_{\sigma_i^*}$ es la matriz de tamaño $m \times m$ tal que si $\sigma_i^*(j) = \xi_j k_j$, en la posición (k_j, j) , la entrada vale ξ_j y 0 en las demás entradas, con:

$$\Omega = \{ (\xi k, \eta k) : \xi \in \mathcal{Z}_{n_1}, \eta \in \mathcal{Z}_{n_2}, k = 1, \dots, m \}, \text{ y}$$

$$\mathcal{Z}_{n_i} = \{ \omega_{n_i}^j : j = 0, 1, \dots, n_i - 1 \}, i = 1, 2, \\ \Omega_i = \{ \xi_i k : \xi \in \mathcal{Z}_{n_i}, k = 1, 2, \dots, m \}, \\ \mathbf{W}_{n_i m} = \{ \sigma \in \mathbf{S}_{\Omega_i} : \sigma(\xi x) = \xi \sigma(x), x \in \Omega_i, \xi \in \mathcal{Z}_{n_i} \}.$$

Consideremos el subgrupo T , de $\mathbf{W}_{n_1 n_2 m}$, generado por los elementos:

$$\begin{aligned}
 t_i = & \left((\omega_{n_1}^0 i, \omega_{n_2}^0 i), (\omega_{n_1}^0(i+1), \omega_{n_2}^0(i+1)) \right) \left((\omega_{n_1}^1 i, \omega_{n_2}^0 i), (\omega_{n_1}^1(i+1), \omega_{n_2}^0(i+1)) \right) \\
 & \left((\omega_{n_1}^2 i, \omega_{n_2}^0 i), (\omega_{n_1}^2(i+1), \omega_{n_2}^0(i+1)) \right) \left((\omega_{n_1}^3 i, \omega_{n_2}^0 i), (\omega_{n_1}^3(i+1), \omega_{n_2}^0(i+1)) \right) \\
 & \vdots \\
 & \left((\omega_{n_1}^{n_1-2} i, \omega_{n_2}^{n_2-1} i), (\omega_{n_1}^{n_1-2}(i+1), \omega_{n_2}^{n_2-1}(i+1)) \right) \\
 & \left((\omega_{n_1}^{n_1-1} i, \omega_{n_2}^{n_2-1} i), (\omega_{n_1}^{n_1-1}(i+1), \omega_{n_2}^{n_2-1}(i+1)) \right) \\
 & 1 \leq i < m
 \end{aligned}$$

$$t_m = \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2 \cdots \tilde{\gamma}_{n_2}$$

$$t_{m+1} = \tilde{\delta}_1 \tilde{\delta}_2 \cdots \tilde{\delta}_{n_1},$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma}_j = & \left((\omega_{n_1}^0(m-1), \omega_{n_2}^{n_1(j-1)}(m-1)), (\omega_{n_1}^1 m, \omega_{n_2}^{n_1(j-1)} m) \right) \\
 & \left((\omega_{n_1}^1(m-1), \omega_{n_2}^{n_1(j-1)}(m-1)), (\omega_{n_1}^2 m, \omega_{n_2}^{n_1(j-1)} m) \right) \cdots \\
 & \left((\omega_{n_1}^{n_1-2}(m-1), \omega_{n_2}^{n_1(j-1)}(m-1)), (\omega_{n_1}^{n_1-1} m, \omega_{n_2}^{n_1(j-1)} m) \right) \\
 & \left((\omega_{n_1}^{n_1-1}(m-1), \omega_{n_2}^{n_1(j-1)}(m-1)), (\omega_{n_1}^0 m, \omega_{n_2}^{n_1(j-1)} m) \right) \\
 & 1 \leq j \leq n_2, \quad y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\delta}_j = & \left((\omega_{n_1}^{(j-1)}(m-1), \omega_{n_2}^0(m-1)), (\omega_{n_1}^{(j-1)} m, \omega_{n_2}^1 m) \right) \\
 & \left((\omega_{n_1}^{(j-1)}(m-1), \omega_{n_2}^1(m-1)), (\omega_{n_1}^{(j-1)} m, \omega_{n_2}^2 m) \right) \cdots \\
 & \left((\omega_{n_1}^{(j-1)}(m-1), \omega_{n_2}^{n_2-2}(m-1)), (\omega_{n_1}^{(j-1)} m, \omega_{n_2}^{n_2-1} m) \right) \\
 & \left((\omega_{n_1}^{(j-1)}(m-1), \omega_{n_2}^{n_2-1}(m-1)), (\omega_{n_1}^{(j-1)} m, \omega_{n_2}^0 m) \right) \\
 & 1 \leq j \leq n_1
 \end{aligned}$$

$t_i \in \mathbf{W}_{n_1 n_2 m}$, para $i = 1, 2, \dots, m+1$, luego $T \leq \mathbf{W}_{n_1 n_2 m}$, de hecho $\text{sgn}(t_i) = (1_{\mathbb{Z}_{n_1}}, 1_{\mathbb{Z}_{n_2}})$, para $i = 1, 2, \dots, m+1$, luego $T \leq \ker(\text{sgn})$.

La aplicación:

$$\begin{aligned}
 f: \quad C_1 & \rightarrow C_2 \\
 (\omega_{n_1}^s i, \omega_{n_2}^t i) & \mapsto (s + n_1 t)m + i,
 \end{aligned}$$

transforma de forma ordenada el conjunto C_1 , dado por:

$$\begin{array}{cccccc}
 (w_{n_1}^0, w_{n_2}^0)1 & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^0)2 & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^0)3 & \cdots & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^0)(m-1) & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^0)m \\
 (w_{n_1}^1, w_{n_2}^0)1 & (w_{n_1}^1, w_{n_2}^0)2 & (w_{n_1}^1, w_{n_2}^0)3 & \cdots & (w_{n_1}^1, w_{n_2}^0)(m-1) & (w_{n_1}^1, w_{n_2}^0)m \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^0)1 & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^0)2 & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^0)3 & \cdots & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^0)(m-1) & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^0)m \\
 (w_{n_1}^0, w_{n_2}^1)1 & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^1)2 & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^1)3 & \cdots & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^1)(m-1) & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^1)m \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^1)1 & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^1)2 & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^1)3 & \cdots & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^1)(m-1) & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^1)m \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (w_{n_1}^0, w_{n_2}^{n_2-1})1 & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^{n_2-1})2 & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^{n_2-1})3 & \cdots & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^{n_2-1})(m-1) & (w_{n_1}^0, w_{n_2}^{n_2-1})m \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^{n_2-1})1 & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^{n_2-1})2 & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^{n_2-1})3 & \cdots & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^{n_2-1})(m-1) & (w_{n_1}^{n_1-1}, w_{n_2}^{n_2-1})m
 \end{array}$$

en el conjunto C_2 , dado por:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & \cdots & m-1 & m \\
 m+1 & m+2 & m+3 & \cdots & 2m-1 & 2m \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (n_1-1)m+1 & (n_1-1)m+2 & (n_1-1)m+3 & \cdots & n_1m-1 & n_1m \\
 n_1m+1 & n_1m+2 & n_1m+3 & \cdots & (n_1+1)m-1 & (n_1+1)m \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (2n_1-1)m+1 & (2n_1-1)m+2 & (2n_1-1)m+3 & \cdots & 2n_1m-1 & 2n_1m \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 n_1(n_2-1)m+1 & n_1(n_2-1)m+2 & n_1(n_2-1)m+3 & \cdots & (n_1n_2-n_1+1)m-1 & (n_1n_2-n_1+1)m \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 (n-1)m+1 & (n-1)m+2 & (n-1)m+3 & \cdots & nm-1 & nm
 \end{array}$$

Luego establece una biyección entre los conjuntos $\tilde{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_{m+1}\}$ y $\tilde{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_{m+1}\}$. Así $T \cong \langle s_i : i = 1, 2, \dots, m+1 \rangle$. Sea $G_m = \langle s_i : i = 1, 2, \dots, m+1 \rangle$, entonces $G_m \lesssim (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$.

Ahora, G_{m-1} es el grupo generado por:

$$\begin{aligned}
 s_i = & (i, \quad i+1) \mathbf{((m-1)+i, \quad (m-1)+i+1)} \mathbf{(2(m-1)m+i, \quad 2(m-1)+i+1)} \cdots \\
 & \mathbf{((n_1n_2-2)(m-1)+i, \quad (n_1n_2-2)(m-1)+i+1)} \\
 & \mathbf{((n_1n_2-1)(m-1)+i, \quad (n_1n_2-1)(m-1)+i+1)} \\
 & 1 \leq i < (m-1)
 \end{aligned}$$

$$s_{m-1} = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{n_2}$$

$$s_{(m-1)+1} = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{n_1},$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_j = & \left(((j-1)n_1 + 1)(m-1) - 1, ((j-1)n_1 + 2)(m-1) \right) \\ & \left(((j-1)n_1 + 2)(m-1) - 1, ((j-1)n_1 + 3)(m-1) \right) \cdots \\ & \left(((j-1)n_1 + n_1 - 1)(m-1) - 1, ((j-1)n_1 + n_1)(m-1) \right) \\ & \left(((j-1)n_1 + n_1)(m-1) - 1, ((j-1)n_1 + 1)(m-1) \right) \\ & 1 \leq j \leq n_2, \text{ y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_j = & \left(j(m-1) - 1, (n_1 + j)(m-1) \right) \left((n_1 + j)(m-1) - 1, (2n_1 + j)(m-1) \right) \\ & \left((2n_1 + j)(m-1) - 1, (3n_1 + j)(m-1) \right) \cdots \\ & \left(((n_2 - 2)n_1 + j)(m-1) - 1, ((n_2 - 1)n_1 + j)(m-1) \right) \\ & \left(((n_2 - 1)n_1 + j)(m-1) - 1, j(m-1) \right) \\ & 1 \leq j \leq n_1 \end{aligned}$$

Por argumentos similares a los mencionados en la demostración de la proposición 5.1.2, tenemos

Proposición 5.2.3. $S_{mn-1} \cap G_m \cong G_{m-1}$

■

Por tanto,

$$|S_{mn_1n_2} : S_{mn_1n_2-1}| = |S_{mn_1n_2} \cap G_m : S_{mn_1n_2-1} \cap G_m| = |G_m : S_{mn_1n_2-1} \cap G_m| = mn_1n_2,$$

luego $|G_m : G_{m-1}| = mn_1n_2$ y $|G_{m-1} : G_{m-2}| = (m-1)n_1n_2$, recursivamente podemos continuar hasta obtener que $|G_{m-(m-3)} : G_{m-(m-2)}| = 3n_1n_2$, luego

$$|G_m| = mn_1n_2(m-1)n_1n_2 \cdots (m-(m-3))n_1n_2 |G_{n_2}| = \frac{m!}{2} (n_1n_2)^{m-2} |G_{n_2}|,$$

y dado que:

$$G_{m-(m-2)} = G_2 = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle,$$

donde

$$\begin{aligned}
 s_1 &= (1, 2)(3, 4)(5, 6) \cdots (2(n_1 - 1) + 1, 2(n_1 - 1) + 2)(2n_1 + 1, 2n_1 + 2) \\
 &\quad (2(n_1 + 1) + 1, 2(n_1 + 1) + 2) \cdots (2(2n_1 - 1) + 1, 2(2n_1 - 1) + 2) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad (2n_1(n_2 - 1) + 1, 2n_1(n_2 - 1) + 2) \cdots (2(n_1 n_2 - 1) + 1, 2(n_1 n_2 - 1) + 2) \\
 s_2 &= (1, 4)(3, 6) \cdots (2(n_1 - 1) - 1, 2n_1)(2n_1 - 1, 2)(2(n_1 + 1) - 1, 2(n_1 + 2)) \\
 &\quad (2(n_1 + 2) - 1, 2(n_1 + 3)) \cdots (2(2n_1 - 1) - 1, 4n_1)(4n_1 - 1, 2(n_1 + 1)) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad (2((n_2 - 1)n_1 + 1) - 1, 2((n_2 - 1) + 2))(2((n_2 - 1)n_1 + 2) - 1, 2((n_2 - 1) + 3)) \cdots \\
 &\quad (2((n_2 - 1)n_1 + n_1 - 1) - 1, 2n_1 n_2)(2n_1 n_2 - 1, 2((n_2 - 1)n_1 + 1)) \\
 s_3 &= (1, 2(n_1 + 1))(2(n_1 + 1) - 1, 2(2n_1 + 1)) \cdots (2((n_2 - 2)n_1 + 1) - 1, 2((n_2 - 1)n_1 + 1)) \\
 &\quad (2((n_2 - 1)n_1 + 1) - 1, 2)(3, 2(n_1 + 2))(2(n_1 + 2) - 1, 2(2n_1 + 2)) \cdots \\
 &\quad (2((n_2 - 2)n_1 + 2) - 1, 2((n_2 - 1)n_1 + 2))(2((n_2 - 1)n_1 + 2) - 1, 4) \cdots \\
 &\quad (2n_1 - 1, 4n_1)(4n_1 - 1, 6n_1) \cdots (2n_1(n_2 - 1) - 1, 2n_1 n_2)(2n_1 n_2 - 1, 2n_1)
 \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 s_1 s_2 &= (1, 3, 5, \dots, 2n_1 - 1)(2, 2n_1, 2n_1 - 2, 2n_1 - 4, \dots, 6, 4) \\
 &\quad (2n_1 + 1, 2n_1 + 3, 2n_1 + 5, \dots, 4n_1 - 1)(2n_1 + 2, 4n_1, 4n_1 - 2, \dots, 2n_1 + 6, 2n_1 + 4) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad (2n_1(n_2 - 2) + 1, 2n_1(n_2 - 2) + 3, \dots, 2n_1(n_2 - 1) - 1) \\
 &\quad (2n_1(n_2 - 2) + 2, 2n_1(n_2 - 1), 2n_1(n_2 - 1) - 2, \dots, 2n_1(n_2 - 2) + 6, 2n_1(n_2 - 2) + 4) \\
 &\quad (2n_1(n_2 - 1) + 1, 2n_1(n_2 - 1) + 3, \dots, 2n_1 n_2 - 1) \\
 &\quad (2n_1(n_2 - 1) + 2, 2n_1 n_2, 2n_1 n_2 - 2, \dots, 2n_1(n_2 - 1) + 6, 2n_1(n_2 - 1) + 4)
 \end{aligned}$$

luego $|s_1 s_2| = n_1$,

$$\begin{aligned}
 s_1 s_3 &= (1, 2n_1 + 1, 4n_1 + 1, \dots, 2n_1(n_2 - 1) + 1)(2, 2n_1(n_2 - 1) + 2, 2n_1(n_2 - 2) + 2, \dots, 2n_1 + 2) \\
 &\quad (3, 2n_1 + 3, 4n_1 + 3, \dots, 2n_1(n_2 - 1) + 3)(4, 2n_1(n_2 - 1) + 4, 2n_1(n_2 - 2) + 4, \dots, 2n_1 + 4) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad (2n_1 - 1, 2n_1 + 2n_1 - 1, \dots, 2n_1(n_2 - 1) + 2n_1 - 1)(2n_1, 2n_1 n_2, 2n_1(n_2 - 1), \dots, 4n_1)
 \end{aligned}$$

luego $|s_1 s_3| = n_2$. Así mismo $|s_2 s_3| = n_2$ y $(s_1 s_2)(s_2 s_3) = (s_2 s_3)(s_1 s_2)$. Así tenemos:

$$H = \langle s_1 s_2, s_2 s_3 \rangle = \langle s_1 s_2 \rangle \langle s_2 s_3 \rangle \trianglelefteq G,$$

y $|H| = n_1 n_2$. Además, $g_1 \notin H$. De modo que

$$G_2 = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle = \langle s_1, s_1 s_2, s_2 s_3 \rangle = \langle s_1 \rangle H,$$

luego $|G_2| = 2n_1 n_2$ y en consecuencia $|G_m| = n^{m-1} m!$.

Por tanto:

$$G_m \cong \mathfrak{G}_m = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m.$$

■

5.3. Geometría del grupo $\mathfrak{G}_m := (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$

En esta sección mostraremos que el método descrito en la sección 5.1, que se extendió al caso del producto semidirecto de $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$ en 5.2, se puede generalizar al producto semidirecto $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$. Con este fin se extenderán las definiciones de $MP(m, \mathcal{Z}_n)$ y la proposición 5.1.1.

Sea $\omega_{n_i} = e^{2i\pi/n}$ una raíz n_i -ésima primitiva de la unidad y $\mathcal{Z}_{n_i} = \langle \omega_{n_i} \rangle$.

Denotaremos por $MP(rm, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2}, \dots, \mathcal{Z}_{n_r})$ al conjunto de matrices de tamaño $rm \times rm$, diagonales por bloques, donde cada bloque es una matriz de permutación con signo de tamaño $m \times m$, tal que el bloque i tiene sus coeficientes en \mathcal{Z}_{n_i} .

Un elemento típico de $MP(rm, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2}, \dots, \mathcal{Z}_{n_r})$ es:

$$\begin{pmatrix} M_{v_1} M_\tau & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{v_2} M_\tau & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & M_{v_r} M_\tau \end{pmatrix},$$

donde M_τ es la matriz de la permutación $\tau \in \mathbf{S}_m$ y M_{v_i} es una matriz diagonal con entradas en \mathcal{Z}_{n_i} , y $\mathbf{0}$ representa la matriz nula de tamaño $m \times m$.

Además, dado que existen $m!$ matrices de permutación de tamaño $m \times m$ y $n_1^m, n_2^m, \dots, n_r^m$ posibilidades para escoger los elementos de la diagonal de $M_{v_1}, M_{v_2}, \dots, M_{v_r}$ respectivamente, se tiene que $|MP(rm, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2}, \dots, \mathcal{Z}_{n_r})| = n_1^m n_2^m \cdots n_r^m m!$.

Proposición 5.3.1.

$MP(rm, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2}, \dots, \mathcal{Z}_{n_r})$ es isomorfo a $\mathfrak{G}_m = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m \rtimes \mathbf{S}_m$.

DEMOSTRACIÓN.

La demostración de esta proposición es similar a la de la proposición 5.1.1 y se puede ver en el apéndice C. ■

En lo que sigue extenderemos de manera natural las ideas presentadas en las secciones anteriores. Consideremos

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \{\xi k : \xi \in \mathcal{Z}_{n_i}, k = 1, 2, \dots, m\}, \\ \mathbf{W}_{n_i m} &= \{\sigma \in \mathbf{S}_{\Omega_i} : \sigma(\xi x) = \xi \sigma(x), x \in \Omega_i, \xi \in \mathcal{Z}_{n_i}\}. \end{aligned}$$

Se sabe que $\mathbf{W}_{n_i m}$ es un grupo y que $|\mathbf{W}_{n_i m}| = n_i^m m!$. Sea

$$\Omega = \{(\xi_1 k, \xi_2 k, \dots, \xi_r k) : \xi_i \in \mathcal{Z}_{n_i}, i = 1, 2, \dots, r, k = 1, \dots, m\}$$

entonces $|\Omega| = mn_1n_2 \cdots n_r$ y $\mathbf{S}_\Omega \cong \mathbf{S}_{mn_1n_2 \cdots n_r}$.

Sea

$$\mathbf{W}_{n_1 \cdots n_r m} = \left\{ \sigma \in \mathbf{S}_\Omega : \sigma((\xi_1 k, \xi_2 k, \cdots, \xi_r k)) = (\sigma_1(\xi_1 k), \sigma_2(\xi_2 k), \cdots, \sigma_r(\xi_r k)), \sigma_i \in W_{n_i m}, \right. \\ \left. i = 1, 2, \cdots, r, \text{ y } M_{\sigma_1^*} = M_{\sigma_2^*} = \cdots = M_{\sigma_r^*} \right\}$$

donde σ_i^* es como en la observación 5.1.1 y $M_{\sigma_i^*}$ es la matriz de tamaño $m \times m$ tal que si $\sigma_i^*(j) = \xi_j k_j$, en la posición (k_j, j) , la entrada vale ξ_j y 0 en las demás entradas.

Entonces $\mathbf{W}_{n_1 \cdots n_r m}$ es un subgrupo de \mathbf{S}_Ω y además, $|\mathbf{W}_{n_1 \cdots n_r m}| = n_1^m n_2^m \cdots n_r^m m!$.

Observación 5.3.1.

Dado que para $\sigma \in \mathbf{W}_{n_1 \cdots n_r m}$, se tiene que $\sigma((\xi_1 k, \xi_2 k, \cdots, \xi_r k)) = (\sigma_1(\xi_1 k), \sigma_2(\xi_2 k), \cdots, \sigma_r(\xi_r k))$, con $\sigma_i \in W_{n_i m}$, para $i := 1, 2, \cdots, r$, se puede conocer a σ completamente a partir de su definición para $\{(1, 1, \cdots, 1), (2, 2, \cdots, 2), \cdots, (m, m, \cdots, m)\}$. Sea σ_m la permutación correspondiente a $\sigma|_{\{(1,1,\dots,1),(2,2,\dots,2),\dots,(m,m,\dots,m)\}}$, entonces:

$$\sigma_m = \begin{pmatrix} (1, 1, \cdots, 1) & (2, 2, \cdots, 2) & \cdots & (m, m, \cdots, m) \\ (\xi_1^{(1)} a_1, \xi_1^{(2)} a_1, \cdots, \xi_r^{(r)} a_1) & (\xi_2^{(1)} a_2, \xi_2^{(2)} a_2, \cdots, \xi_2^{(r)} a_m) & \cdots & (\xi_m^{(1)} a_m, \xi_m^{(2)} a_m, \cdots, \xi_m^{(r)} a_m) \end{pmatrix},$$

con $\xi_i^{(j)} \in \mathbb{Z}_{n_j}$, $i := 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, r$ y $a_i \in \{1, 2, \cdots, m\}$.

La observación anterior y la definición 5.1.2 nos permite establecer el siguiente epimorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \text{sgn} : \mathbf{W}_{n_1 \cdots n_r m} &\rightarrow \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r} \\ \sigma &\mapsto (\xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \cdots \xi_m^{(1)}, \xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \cdots \xi_m^{(2)}, \cdots, \xi_1^{(r)} \xi_2^{(r)} \cdots \xi_m^{(r)}) \end{aligned}$$

Veamos que sgn es un epimorfismo. Si $\sigma, \tau \in \mathbf{W}_{n_1 \cdots n_r m}$, donde σ_m es como arriba y

$$\tau_m = \begin{pmatrix} (1, 1, \cdots, 1) & (2, 2, \cdots, 2) & \cdots & (m, m, \cdots, m) \\ (\mu_1^{(1)} b_1, \mu_1^{(2)} b_1, \cdots, \mu_r^{(r)} b_1) & (\mu_2^{(1)} b_2, \mu_2^{(2)} b_2, \cdots, \mu_2^{(r)} b_m) & \cdots & (\mu_m^{(1)} b_m, \mu_m^{(2)} b_m, \cdots, \mu_m^{(r)} b_m) \end{pmatrix},$$

con $\mu_i^{(j)} \in \mathbb{Z}_{n_j}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $j = 1, 2, \cdots, r$ y $b_i \in \{1, 2, \cdots, m\}$, entonces,

$$\begin{aligned} \sigma\tau((i, i, \cdots, i)) &= \sigma(\tau((i, i, \cdots, i))) \\ &= \sigma((\mu_i^{(1)} b_i, \mu_i^{(2)} b_i, \cdots, \mu_i^{(r)} b_i)), \mu_i^{(j)} \in \mathbb{Z}_{n_j}, i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, r, b_i \in \{1, 2, \cdots, m\} \\ &= (\sigma_1(\mu_i^{(1)}(b_i)), \sigma_2(\mu_i^{(2)}(b_i)), \cdots, \sigma_r(\mu_i^{(r)}(b_i))) \\ &= (\mu_i^{(1)} \sigma_1(b_i), \mu_i^{(2)} \sigma_2(b_i), \cdots, \mu_i^{(r)} \sigma_r(b_i)) \\ &= (\mu_i^{(1)} \xi_{b_i}^{(1)} a_{b_i}, \mu_i^{(2)} \xi_{b_i}^{(2)} a_{b_i}, \cdots, \mu_i^{(r)} \xi_{b_i}^{(r)} a_{b_i}), \xi_{b_i}^{(j)} \in \mathbb{Z}_{n_j}, j = 1, \cdots, r, a_{b_i} \in \{1, 2, \cdots, m\} \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sgn}(\sigma\tau) &= \left(\mu_1^{(1)} \xi_{b_1}^{(1)} \mu_2^{(1)} \xi_{b_2}^{(1)} \cdots \mu_m^{(1)} \xi_{b_m}^{(1)}, \mu_1^{(2)} \xi_{b_1}^{(2)} \mu_2^{(2)} \xi_{b_2}^{(2)} \cdots \mu_m^{(2)} \xi_{b_m}^{(2)}, \dots, \mu_1^{(r)} \xi_{b_1}^{(r)} \mu_2^{(r)} \xi_{b_2}^{(r)} \cdots \mu_m^{(r)} \xi_{b_m}^{(r)} \right) \\
 &= \left(\mu_1^{(1)} \mu_2^{(1)} \cdots \mu_m^{(1)} \xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \cdots \xi_m^{(1)}, \mu_1^{(2)} \mu_2^{(2)} \cdots \mu_m^{(2)} \xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \cdots \xi_m^{(2)}, \dots, \mu_1^{(r)} \mu_2^{(r)} \cdots \mu_m^{(r)} \xi_1^{(r)} \xi_2^{(r)} \cdots \xi_m^{(r)} \right) \\
 &= \left(\mu_1^{(1)} \mu_2^{(1)} \cdots \mu_m^{(1)}, \mu_1^{(2)} \mu_2^{(2)} \cdots \mu_m^{(2)}, \dots, \mu_1^{(r)} \mu_2^{(r)} \cdots \mu_m^{(r)} \right) (\xi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} \cdots \xi_m^{(1)}, \xi_1^{(2)} \xi_2^{(2)} \cdots \xi_m^{(2)}, \dots, \xi_1^{(r)} \xi_2^{(r)} \cdots \xi_m^{(r)}) \\
 &= \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau)
 \end{aligned}$$

de modo que sgn es un homomorfismo.

Además dado $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(r)}) \in \mathcal{Z}_{n_1} \times \mathcal{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathcal{Z}_{n_r}$, existe $\sigma \in \mathbf{W}_{n_1 \cdots n_r m}$, tal que:

$$\sigma_m = \begin{pmatrix} (1, 1, \dots, 1) & (2, 2, \dots, 2) & \cdots & (m, m, \dots, m) \\ (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(r)}) & (2, 2, \dots, 2) & \cdots & (m, m, \dots, m) \end{pmatrix},$$

y $\operatorname{sgn}(\sigma) = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(r)})$. Luego sgn es un homomorfismo sobreyectivo. Ahora,

$$\ker(\operatorname{sgn}) = \{ \sigma \in \mathbf{W}_{n_1 \cdots n_r m} : \operatorname{sgn}(\sigma) = (1, 1, \dots, 1) \},$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{W}_{n_1 \cdots n_r m} / \ker(\operatorname{sgn}) &\cong \mathcal{Z}_{n_1} \times \mathcal{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathcal{Z}_{n_r}, \text{ y} \\
 |\ker(\operatorname{sgn})| &= n_1^{m-1} n_2^{m-1} \cdots n_r^{m-1} m!.
 \end{aligned}$$

Lema 5.3.1. $\mathbf{W}_{n_1 \cdots n_r m} \cong MP(rm, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2}, \dots, \mathcal{Z}_{n_r})$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \Phi : \mathbf{W}_{n_1 \cdots n_r m} &\rightarrow MP_{rm}^{n_1, n_2, \dots, n_r - \operatorname{sgn}} \\
 \sigma &\mapsto \mathcal{M}_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} M_{\sigma_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{\sigma_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & M_{\sigma_r} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

donde M_{σ_i} , $i = 1, 2, \dots, r$ es la matriz de tamaño $m \times m$ tal que si $\sigma_i^*(j) = \xi_j k_j$, en la posición (k_j, j) , la entrada vale ξ_j y 0 en las demás entradas. Es un epimorfismo de grupos. ■

de donde:

$$\ker(\operatorname{sgn}) \lesssim (\mathcal{Z}_{n_1} \times \mathcal{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathcal{Z}_{n_r})^m \rtimes \mathbf{S}_m.$$

En lo que sigue veremos a qué subgrupo de $(\mathcal{Z}_{n_1} \times \mathcal{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathcal{Z}_{n_r})^m \rtimes \mathbf{S}_m$ es isomorfo $\ker(\operatorname{sgn})$.

Observación 5.3.2.

$$\widehat{G} = \left\{ P \in MP(rm, \mathbb{Z}_{n_1}, \mathbb{Z}_{n_2}, \dots, \mathbb{Z}_{n_r}) : \prod_{j=1}^r s_1^{(j)} s_2^{(j)} \cdots s_m^{(j)} = 1, \text{ donde } s_i^{(j)}, \text{ es la entrada no nula de la fila } (j-1)m + i \right\}$$

es un subgrupo de $MP(rm, \mathbb{Z}_{n_1}, \mathbb{Z}_{n_2}, \dots, \mathbb{Z}_{n_r})$ y,

$$\ker(\text{sgn}) \cong \widehat{G}.$$

Ahora veremos a qué subgrupo de $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m \rtimes \mathbf{S}_m$ corresponde \widehat{G} . Notemos que

$$\mathcal{M}_\sigma^{-1} = \mathcal{P}M_v, \text{ con}$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & P \end{pmatrix},$$

donde P es una matriz de permutación de tamaño $m \times m$ y M_v es la matriz:

$$M_v = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Phi_r \end{pmatrix},$$

donde,

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} \phi_j(x_1^{(j)}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_j(x_2^{(j)}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_j(x_m^{(j)}) \end{pmatrix},$$

$j = 1, 2, \dots, r$.

Recordemos que:

$$\begin{aligned} \phi_j : \mathbb{Z}_{n_j} &\rightarrow \mathbb{Q}(\omega_{n_j}) \\ [i] &\mapsto \omega_{n_j}^i \end{aligned},$$

luego $\phi_j(x_i^{(j)}) = \omega_{n_j}^{l_{ij}}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, r$ con $\omega_{n_j}^{l_{1j}} \omega_{n_j}^{l_{2j}} \cdots \omega_{n_j}^{l_{mj}} = 1$, para todo j .

En consecuencia $v = ((l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1r}), (l_{21}, l_{22}, \dots, l_{2r}), \dots, (l_{m1}, l_{m2}, \dots, l_{mr}))$, con $l_{1j} + l_{2j} + \dots + l_{mj} = 0 \in \mathbb{Z}_{n_j}$, para todo j .

Sea

$$\overline{G} = \left\{ \left(\left((x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(r)}), (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(r)}), \dots, (x_m^{(1)}, x_m^{(2)}, \dots, x_m^{(r)}) \right), \sigma \right) : x_i^{(j)} \in \mathbb{Z}_{n_j}, \right. \\ \left. i = 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r, \sigma \in \mathbf{S}_m \text{ y } x_1^{(j)} + x_2^{(j)} + \dots + x_m^{(j)} = 0, \forall j \right\}$$

$\overline{G} \trianglelefteq (\mathbb{Z}_{n_1} \rtimes \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m \rtimes \mathbf{S}_m$ y por lo anterior $\ker(\text{sgn})$ está contenido, salvo isomorfismo, en \overline{G} . Además, dado que $\overline{G} \cong (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, se tiene que $|\ker(\text{sgn})| = |\overline{G}|$ y en consecuencia se ha mostrado que:

Corolario 5.3.1. $\ker(\text{sgn}) \cong \mathfrak{G}_m = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$.

De la misma forma que en las secciones anteriores, este isomorfismo nos permite exhibir un conjunto de generadores del grupo $\mathfrak{G}_m \cong (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, visto como subgrupo del grupo simétrico $\mathbf{S}_{mn_1n_2 \cdots n_r}$, como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 5.3.2. Sea $\mathbf{S}_{mn_1n_2 \cdots n_r}$, el grupo simétrico de grado $mn_1n_2 \cdots n_r$. En $\mathbf{S}_{mn_1n_2 \cdots n_r}$, el grupo $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, $n_1|n_2| \cdots |n_r$, $r \geq 3$ está generado por los elementos:

$$s_i = (i, \quad i+1) (m+i, \quad m+i+1) (2m+i, \quad 2m+i+1) (3m+i, \quad 3m+i+1) \cdots \\ ((n_1n_2 \cdots n_r - 2)m+i, \quad (n_1n_2 \cdots n_r - 2)m+i+1) \\ ((n_1n_2 \cdots n_r - 1)m+i, \quad (n_1n_2 \cdots n_r - 1)m+i+1); \\ 1 \leq i < m$$

$$s_m = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{n_2n_3 \cdots n_r}$$

$$s_{m+k} = \eta_1^{(k)} \eta_2^{(k)} \cdots \eta_{n_{k+2} \cdots n_r}^{(k)}, \quad k = 1, \dots, r-2$$

$$s_{m+r-1} = \vartheta_1 \vartheta_2 \cdots \vartheta_{n_1n_2 \cdots n_{r-1}}$$

donde

$$\gamma_j = (((j-1)n_1 + 1)m - 1, \quad ((j-1)n_1 + 2)m) \quad (((j-1)n_1 + 2)m - 1, \quad ((j-1)n_1 + 3)m) \cdots \\ (((j-1)n_1 + n_1 - 1)m - 1, \quad ((j-1)n_1 + n_1)m) \quad (((j-1)n_1 + n_1)m - 1, \quad ((j-1)n_1 + 1)m) \\ 1 \leq j \leq n_2n_3 \cdots n_r,$$

$$\begin{aligned}
 \eta_l^{(k)} &= \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{n_1 n_2 \cdots n_k}, \quad l = 1, 2, \dots, n_{k+2} \cdots n_r \\
 \delta_{(j)} &= \left((l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + jm - 1, \quad (l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (n_1 n_2 \cdots n_k + j)m \right) \\
 &\quad \left((l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (n_1 n_2 \cdots n_k + j)m - 1, \quad (l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (2n_1 n_2 \cdots n_k + j)m \right) \\
 &\quad \left((l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (2n_1 n_2 \cdots n_k + j)m - 1, \quad (l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (3n_1 n_2 \cdots n_k + j)m \right) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \left((l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + ((n_{k+1} - 2)n_1 n_2 \cdots n_k + j)m - 1, \right. \\
 &\quad \quad \left. (l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + ((n_{k+1} - 1)n_1 n_2 \cdots n_k + j)m \right) \\
 &\quad \left((l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + ((n_{k+1} - 1)n_1 n_2 \cdots n_k + j)m - 1, \quad (l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + jm \right) \\
 &\quad 1 \leq j \leq n_1 n_2 \cdots n_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vartheta_j &= (jm - 1, \quad (n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j)m) \left((n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j)m - 1, \quad (2n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j)m \right) \\
 &\quad \left((2n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j)m - 1, \quad (3n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j)m \right) \cdots \\
 &\quad \left(((n_r - 2)n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j)m - 1, \quad ((n_r - 1)n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j)m \right) \\
 &\quad \left(((n_r - 1)n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j)m - 1, \quad jm \right) \\
 &\quad 1 \leq j \leq n_1 n_2 \cdots n_{r-1}
 \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN.

La prueba de la proposición es similar a la realizada en la sección anterior y se basa en que este conjunto generador lo podemos llevar a un conjunto generador del $\ker(\text{sgn})$, realizando para todo i , $1 \leq i \leq (m + r - 1)$, para todo s_j , $1 \leq j \leq r$,

$$(\omega_{n_1}^{s_1} i, \omega_{n_2}^{s_2} i, \dots, \omega_{n_r}^{s_r} i) \leftrightarrow (s_1 + n_1 s_2 + \cdots + n_1 n_2 \cdots n_{r-1} s_r)m + i.$$

■

Los generadores para el grupo \mathfrak{G}_m que presentados en este capítulo fueron motivados por el estudio de un problema geométrico, por lo que en la sección siguiente miraremos la correspondencia de estos generadores con la signatura geométrica.

5.4. Correspondencia Geométrica de los generadores

Dedicamos el capítulo 3 a determinar el grupo de Galois de la Clausura de Galois del cubrimiento factorizado, $\varphi \circ \psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$, donde $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento simple de grado m , y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois abeliano de orden n y tipo (n_1, n_2, \dots, n_r) .

Probamos que el grupo de Galois, \mathfrak{G} , del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ es isomorfo a $\mathfrak{G}_m = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$.

Ahora probaremos que los generadores encontrados en las secciones anteriores de este capítulo satisfacen la signatura del cubrimiento correspondiente a la clausura de Galois

de $\varphi \circ \psi$, que como mencionamos en 3.1.4, es $(0; \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{t-\text{veces}})$, donde $t = 2g(\mathcal{X}) + 2m - 2$.

Como aquí hemos exhibido un conjunto de $m + r - 1$ generadores, queremos ver si los podemos usar para satisfacer la signatura.

En el caso cíclico, esto es cuando $r = 1$, si $g(\mathcal{X}) \geq 1$, tenemos $t = 2(m + g(\mathcal{X}) - 1)$ y dado que tenemos m generadores, s_1, \dots, s_m , podemos tomar como vector generador, el vector:

$$(s_1, s_1^{-1}, s_2, s_2^{-1}, \dots, s_m, s_m^{-1}, \underbrace{s_1, s_1^{-1}, \dots, s_1, s_1^{-1}}_{2g(\mathcal{X})-2}),$$

En el caso en el que $r > 1$, como en el caso cíclico, si $g(\mathcal{X}) \geq r$ podemos exhibir un vector generador con los elementos que tenemos:

$$(s_1, s_1^{-1}, s_2, s_2^{-1}, \dots, s_{m+r-1}, s_{m+r-1}^{-1}, \underbrace{s_1, s_1^{-1}, \dots, s_1, s_1^{-1}}_{2g(\mathcal{X})-2}),$$

Entonces tenemos la siguiente proposición:

Proposición 5.4.1. *Para cada $m \geq 2$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n = n_1 n_2 \cdots n_r$, $n_i | n_{i+1}$, existe una superficie de Riemann \mathcal{Z} , admitiendo la acción de $\mathfrak{G}_m = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathfrak{S}_m$, con signatura*

$$(0; \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{2(m+r-1)}),$$

y vector generador

$$(s_1, s_1^{-1}, s_2, s_2^{-1}, \dots, s_{m+r-1}, s_{m+r-1}^{-1}),$$

donde s_i son los elementos dados en 5.3.2.

DEMOSTRACIÓN. Este es un corolario de la proposición 5.3.2 y del teorema de existencia de Riemann. ■

Observación 5.4.1. El género de \mathcal{Z} , la superficie en la que actúa \mathfrak{G}_m , con signatura $(0; \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{2(m+r-1)})$, está dado por la ecuación de Riemann Hurwitz:

$$g(\mathcal{Z}) = \frac{n^{m-1} m!}{2} (m + r - 3) + 1$$

Observación 5.4.2. Sea $\mathfrak{G}_m = \mathbb{Z}_n^{m-1} \rtimes \mathfrak{S}_m$, el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ con $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$

un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois isomorfo a \mathbb{Z}_n . Entonces $\mathfrak{G}_m = \langle s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, s_m \rangle$ y por la proposición 5.1.2, tenemos:

$$N = \mathfrak{G}_{m-1} = \mathfrak{G}_m \cap \mathbf{S}_{mn-1}^{(1)} = \langle s_2, s_3, \dots, s_{m-2}, s_{m-1}, s_m \rangle,$$

donde $\mathbf{S}_{mn-1}^{(1)}$ es el subgrupo de \mathbf{S}_{mn} que fija el 1.

Consideremos el elemento

$$g = (1, m+2)(m+1, 2m+2), \dots, ((n-2)m+1, (n-1)m+2)((n-1)m+1, 2),$$

$g \in \mathfrak{G}_m$, puesto que $\mathfrak{G}_m \cong \ker(\text{sgn})$. Entonces,

$$gs_1 = (1, m+1, \dots, (n-2)m+1, (n-1)m+1)(2, (n-1)m+2, \dots, 2m+2, m+2), \text{ y } |gs_1| = n.$$

Sea $H = \langle s_2, s_3, \dots, s_{m-2}, s_{m-1}, s_m, gs_1 \rangle$, $H \leq \mathfrak{G}_m$ y $N \leq H$. Notemos que $s_j gs_1 = gs_1 s_j$, para todo $j = 3, 4, \dots, m$. Además, $gs_1 s_2 s_1 g^{-1} \in N$, luego $N \trianglelefteq H$.

Y $|H : N| = n$, luego $|\mathfrak{G}_m : H| = m$.

Observación 5.4.3. Sea $\mathfrak{G}_m = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ con $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple de grado m y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado de grado n , con grupo de Galois abeliano, de tipo (n_1, n_2, \dots, n_r) , con $n_i | n_{i+1}$. Entonces $\mathfrak{G}_m = \langle s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, s_m, s_{m+1}, \dots, s_{m+r-1} \rangle$ y por la proposición 5.2.3, tenemos:

$$N = \mathfrak{G}_{m-1} = \mathfrak{G}_m \cap \mathbf{S}_{mn-1}^{(1)} = \langle s_2, s_3, \dots, s_{m-2}, s_{m-1}, s_m, s_{m+1}, \dots, s_{m+r-1} \rangle,$$

donde $\mathbf{S}_{mn-1}^{(1)}$ es el subgrupo de \mathbf{S}_{mn} que fija el 1.

Consideremos los elementos:

$$\begin{aligned} g_m &= \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{n_2 n_3 \cdots n_r} \\ g_{m+k} &= \eta_1^{(k)} \eta_2^{(k)} \cdots \eta_{n_{k+2} \cdots n_r}^{(k)}, \quad k = 1, \dots, r-2 \\ g_{m+r-1} &= \vartheta_1 \vartheta_2 \cdots \vartheta_{n_1 n_2 \cdots n_{r-1}} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_j &= (((j-1)n_1)m+1, ((j-1)n_1+1)m+2) \\ & \quad (((j-1)n_1+1)m+1, ((j-1)n_1+2)m+2) \cdots \\ & \quad (((j-1)n_1+n_1-2)m+1, ((j-1)n_1+n_1-1)m+2) \\ & \quad (((j-1)n_1+n_1-1)m+1, ((j-1)n_1)m+2) \\ & \quad 1 \leq j \leq n_2 n_3 \cdots n_r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_l^{(k)} &= \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{n_1 n_2 \cdots n_k}, \quad l = 1, 2, \dots, n_{k+2} \cdots n_r \\
 \delta_{(j)} &= ((l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (j-1)m + 1, \\
 &\quad (l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (n_1 n_2 \cdots n_k + j - 1)m + 2) \\
 &\quad ((l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (n_1 n_2 \cdots n_k + j - 1)m + 1, \\
 &\quad (l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (2n_1 n_2 \cdots n_k + j - 1)m + 2) \\
 &\quad ((l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (2n_1 n_2 \cdots n_k + j - 1)m + 1, \\
 &\quad (l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (3n_1 n_2 \cdots n_k + j - 1)m + 2) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad (((l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + ((n_{k+1} - 2)n_1 n_2 \cdots n_k + j - 1)m + 1, \\
 &\quad (l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + ((n_{k+1} - 1)n_1 n_2 \cdots n_k + j - 1)m + 2) \\
 &\quad ((l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + ((n_{k+1} - 1)n_1 n_2 \cdots n_k + j - 1)m + 1, \\
 &\quad (l-1)(n_1 n_2 \cdots n_{k+1})m + (j-1)m + 2) \\
 &\quad 1 \leq j \leq n_1 n_2 \cdots n_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vartheta_j &= ((j-1)m + 1, \quad (n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j - 1)m + 2) \\
 &\quad ((n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j - 1)m + 1, \quad (2n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j - 1)m + 2) \\
 &\quad ((2n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j - 1)m + 1, \quad (3n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j - 1)m + 2) \cdots \\
 &\quad (((n_r - 2)n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j - 1)m + 1, \quad ((n_r - 1)n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j - 1)m + 2) \\
 &\quad (((n_r - 1)n_1 n_2 \cdots n_{r-1} + j - 1)m + 1, \quad (j-1)m) \\
 &\quad 1 \leq j \leq n_1 n_2 \cdots n_{r-1}
 \end{aligned}$$

Entonces $g_m, g_{m+1}, \dots, g_{m+r-1} \in \mathfrak{G}_m$ y además,

$$|g_m s_1| = n_1, \quad |g_{m+1} s_1| = n_2, \quad \dots \quad |g_{m+r-1} s_1| = n_r.$$

Sea $H = \langle s_2, s_3, \dots, s_{m-2}, s_{m-1}, s_m, s_{m+1}, \dots, s_{m+r-1}, g_m s_1, g_{m+1} s_1, \dots, g_{m+r} s_1 \rangle$. Entonces $H \leq \mathfrak{G}_m$ y $N \leq H$. Notemos que $s_j g_l s_1 = g_l s_1 s_j$, para todo $j = 3, 4, \dots, m$, para todo $l = m, m+1, \dots, m+r-1$. Además, $g_l s_1 s_2 s_1 g_l^{-1} \in N$, para todo $l = m, m+1, \dots, m+r-1$ luego $N \leq H$.

Y $|H : N| = n$, luego $|\mathfrak{G}_m : H| = m$.

Entonces, por las observaciones 5.4.2 y 5.4.3, existen subgrupos N y H , de \mathfrak{G}_m , con $N \trianglelefteq H$ y H subgrupo maximal de \mathfrak{G}_m tales que:

$$\mathcal{Y} \cong \mathcal{Z}/N, \quad \mathcal{X} \cong \mathcal{Z}/H, \quad \mathbb{P}^1 \cong \mathcal{Z}/\mathfrak{G}_m$$

El siguiente diagrama describe la situación:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{Z} & & \\
 \downarrow \widehat{\varphi} & \searrow \widehat{\psi} & \\
 & & Y = \mathcal{Z}_N \\
 & & \downarrow \psi \\
 & & X = \mathcal{Z}_H \\
 & \swarrow \varphi & \\
 \mathbb{P}^1 = \mathcal{Z}_{\mathfrak{G}_m} & &
 \end{array}$$

$n^{m-2}(m-1)!$ (label for $\widehat{\psi}$)
 $n^{m-1}(m)!$ (label for $\widehat{\varphi}$)
 n (label for ψ)
 m (label for φ)

donde

$$\mathfrak{G}_m = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$$

$$H = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_{m-1}$$

$$N = \mathbf{S}_{mn-1} \cap G = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-2} \rtimes \mathbf{S}_{m-1}$$

Observación 5.4.4. Es claro que $g(\mathcal{X}) = r$, puesto que el número de puntos marcados del cubrimiento φ es $2m + 2(g(\mathcal{X}) - 2)$ y dado que $g(\mathcal{Y}) = |H : N|(g(\mathcal{X}) - 1) + 1$, se tiene que $g(\mathcal{Y}) = nr - n + 1$.

Sin embargo estamos interesados en determinar el género de las superficies cocientes \mathcal{Z}_H y \mathcal{Z}_N , usando 1.3.2, considerando que la signatura del cubrimiento de Galois es $(0; \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{2(m+r-1)})$.

$$\begin{aligned}
 g(\mathcal{Z}_H) &= |\mathfrak{G}_m : H|(g(\mathcal{Z}_{\mathfrak{G}_m}) - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{G_i \in \Gamma} (|\mathfrak{G}_m : H| - |H \backslash \mathfrak{G}_m / G_i|) \\
 &= -m + 1 + \frac{1}{2} \sum_{G_i \in \Gamma} (m - |H \backslash \mathfrak{G}_m / G_i|),
 \end{aligned}$$

Calcularemos $|H \backslash \mathfrak{G}_m / G_i|$, usando 1.3. Así, si C denota una transversal de las clases de conjugación de elementos de \mathfrak{G}_m , tenemos que:

$$\begin{aligned}
 |H \backslash \mathfrak{G}_m / G_i| &= \frac{|\mathfrak{G}_m|}{|H||G_i|} \sum_{g \in C} \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap H| |C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap G_i|}{|C^{\mathfrak{G}_m}(g)|} \\
 &= \frac{m}{2} \left(1 + \sum_{\substack{g \in \Gamma \\ g \neq 1}} \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap H| |C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap G_i|}{|C^{\mathfrak{G}_m}(g)|} \right) \\
 &= \frac{m}{2} \left(1 + \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap H| |C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap G_i|}{|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i)|} \right), \text{ puesto que } G_i = \{1, g_i\} \\
 &= \frac{m}{2} \left(1 + \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap H|}{|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i)|} \right) \\
 &= \frac{m}{2} \left(1 + \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap N|}{|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i)|} \right)
 \end{aligned}$$

Ahora, si $m = 2$ sabemos que $|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap N| = 0$ luego $|H \backslash \mathfrak{G}_m / G_i| = 1 = 2 - 1$. Si $m \geq 3$, tenemos:

$$C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap \mathfrak{G}_2 = \{gg_i g^{-1} \in \mathfrak{G}_2 : g \in \mathfrak{G}_m\},$$

y como $g_i \in N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{m-2} \cong \mathfrak{G}_2$, donde N_j es conjugado de N en \mathfrak{G}_m . Y $\mathfrak{G}_2 = \langle g_i \rangle K$, se tiene que $gg_i g^{-1} = g_i k, k \in K$, luego $|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap \mathfrak{G}_2| = n$, puesto que $|\mathfrak{G}_2| = 2n$ y $|\mathfrak{G}_2 : K| = 2$.

Por otro lado, N aparece en $\binom{m-1}{m-3}$ subconjuntos de la forma $N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{m-2}$, luego

$$|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap N| = \frac{n(m-2)(m-1)}{2},$$

Además hay $\binom{m}{m-2}$ subconjuntos de la forma $N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{m-2}$, de modo que:

$$|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i)| = \frac{n(m-1)m}{2},$$

luego

$$|H \backslash \mathfrak{G}_m / G_i| = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{m-2}{m} \right) = m - 1,$$

Así:

$$g(\mathcal{Z}_H) = -m + 1 + \frac{1}{2}(2m + 2r - 2)(m - m + 1) = -m + 1 + m + r - 1 = r.$$

Para el caso de la superficie cociente Z_N , se tiene que

$$\begin{aligned} g(Z_N) &= |\mathfrak{G}_m : N|(g(Z_{\mathfrak{G}_m}) - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{G_i \in \Gamma} (|\mathfrak{G}_m : N| - |N \setminus \mathfrak{G}_m / G_i|) \\ &= -mn + 1 + \frac{1}{2} \sum_{G_i \in \Gamma} (mn - |N \setminus \mathfrak{G}_m / G_i|), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |N \setminus \mathfrak{G}_m / G_i| &= \frac{|\mathfrak{G}_m|}{|N||G_i|} \sum_{g \in C} \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap N| |C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap G_i|}{C^G(g)} \\ &= \frac{mn}{2} \left(1 + \sum_{\substack{g \in \Gamma \\ g \neq 1}} \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap N| |C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap G_i|}{C^{\mathfrak{G}_m}(g)} \right) \\ &= \frac{mn}{2} \left(1 + \frac{|C^{G\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap N| |C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap G_i|}{C^{\mathfrak{G}_m}(g_i)} \right), \text{ puesto que } G_i = \{1, g_i\} \\ &= \frac{mn}{2} \left(1 + \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap N|}{C^{\mathfrak{G}_m}(g_i)} \right) \end{aligned}$$

luego si $m = 2$, $|N \setminus \mathfrak{G}_m / G_i| = n = n(2 - 1)$ y si $m \geq 3$,

$$|N \setminus \mathfrak{G}_m / G_i| = \frac{mn}{2} \left(1 + \frac{m-2}{m} \right) = n(m-1),$$

Así:

$$g(Z_N) = -mn + 1 + \frac{1}{2}(2m + 2r - 2)(mn - mn + n) = -mn + 1 + (m + r - 1)n = nr - n + 1.$$

Observación 5.4.5. Recordemos que $H_{\mathfrak{G}_m} = K \cong (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1}$ es subgrupo normal de \mathfrak{G}_m y es el grupo de Galois del cubrimiento $\mathcal{Z}_H \rightarrow \mathcal{Z}_{\mathfrak{G}_m}$, entonces podemos determinar también el género de la superficie cociente \mathcal{Z}_K , como lo hicimos antes:

$$\begin{aligned} g(\mathcal{Z}_K) &= |\mathcal{G}_m : K|(g(\mathcal{Z}_{\mathfrak{G}_m}) - 1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{G_i \in \Gamma} (|\mathcal{G}_m : K| - |K \setminus \mathfrak{G}_m / G_i|) \\ &= -m! + 1 + \frac{1}{2} \sum_{G_i \in \Gamma} (m! - |K \setminus \mathfrak{G}_m / G_i|), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 |K \backslash \mathfrak{G}_m / G_i| &= \frac{|\mathfrak{G}_m|}{|H||G_i|} \sum_{g \in C} \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap K| |C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap G_i|}{C^{\mathfrak{G}_m}(g)} \\
 &= \frac{m!}{2} \left(1 + \sum_{\substack{g \in \Gamma \\ g \neq 1}} \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap K| |C^{\mathfrak{G}_m}(g) \cap G_i|}{C^G(g)} \right) \\
 &= \frac{m!}{2} \left(1 + \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap K| |C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap G_i|}{C^{\mathfrak{G}_m}(g_i)} \right), \text{ puesto que } G_i = \{1, g_i\} \\
 &= \frac{m!}{2} \left(1 + \frac{|C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap K|}{C^{\mathfrak{G}_m}(g_i)} \right) \\
 &= \frac{m!}{2}, \text{ puesto que } |C^{\mathfrak{G}_m}(g_i) \cap K| = 0
 \end{aligned}$$

Así,

$$g(\mathcal{Z}_K) = -m! + 1 + \frac{1}{2} + (m+r-1)\left(m! - \frac{m!}{2}\right) = \frac{m!}{2}(m+r-3) + 1.$$

Además, el cubrimiento $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_K$ es Galois y no ramificado, pues si consideramos la fórmula de Riemann Hurwitz, 1.1, tenemos:

$$2g(\mathcal{Z}) - 2 = |K|(2g(\mathcal{Z}_K) - 2 + \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i})),$$

luego,

$$n^{m-1}m!(m+r-3) + 2 - 2 = n^{m-1}(m!(m+r-3) + 2 - 2) + \sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i}),$$

por tanto,

$$\sum_{i=1}^k (1 - \frac{1}{r_i}) = 0$$

Terminaremos esta sección con un ejemplo que ilustra la información que tenemos sobre la acción del grupo $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$ en una superficie \mathcal{Z} de género $\frac{n^{m-1}m!}{2}(m+r-3) + 1$.

Ejemplo 5.4.1. Tomemos $n = 4$, $m = 3$ y consideremos el grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^2 \rtimes \mathbf{S}_3$. Por la proposición 5.4.1 y la observación 5.4.1, existe una superficie de Riemann compacta de género $g(\mathcal{Z}) = \frac{4^2 3!}{2}(3+2-3) + 1 = 97$, con acción de $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^2 \rtimes \mathbf{S}_3$, con signatura

$(0; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ y vector generador $(s_1, s_1, s_2, s_2, s_3, s_3, s_4, s_4)$, donde:

$$\begin{aligned} s_1 &= (1, 2)(4, 5)(7, 8)(10, 11), \\ s_2 &= (2, 3)(5, 6)(8, 9)(11, 12), \\ s_3 &= (1, 5)(2, 4)(7, 11)(8, 10), \\ s_4 &= (1, 8)(7, 2)(4, 11)(10, 5), \end{aligned}$$

y $\mathfrak{G}_m \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^2 \rtimes \mathbf{S}_3$ tiene subgrupos $H \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^2 \rtimes \mathbf{S}_2$, $N \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbf{S}_2$, que actúan en la superficie \mathcal{Z} , produciendo superficies cocientes \mathcal{Z}_N y \mathcal{Z}_H , de géneros $g(\mathcal{Z}_N) = 5$ y $g(\mathcal{Z}_H) = 2$. Además, por la fórmula de Riemann-Hurwitz, 1.1 las firmas de los cubrimientos $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_N$ y $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_H$ con $(5; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ y $(2; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ respectivamente.

Por otro lado $K \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^2$ actúa también en \mathcal{Z} y el género de la superficie cociente \mathcal{Z}_K es $g(\mathcal{Z}_K) = 7$ y como vimos en la observación 5.4.5, el cubrimiento $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}_K$ no ramifica. Y $\mathcal{Z}_K \rightarrow \mathcal{Z}_H$ tiene firma $(2; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

Apéndices

Apéndice A

Ejemplos

En el capítulo anterior mostramos que el grupo transitivo $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, se puede realizar como subgrupo de \mathbf{S}_{nm} , donde $n = n_1 n_2 \cdots n_r$, considerando la acción de \mathfrak{G} en las clases laterales de sus subgrupo N de índice nm . Para esto hemos considerado la acción de \mathfrak{G} en $\Omega = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_m$, donde:

$$\begin{array}{cccc}
 N & Nx_2 & \cdots & Nx_m \\
 Nh_2 & Nh_2x_2 & \cdots & Nh_2x_m \\
 \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 \underbrace{Nh_n} & \underbrace{Nh_nx_2} & \cdots & \underbrace{Nh_nx_m} \\
 \Delta_1 & \Delta_2 & & \Delta_m
 \end{array}$$

Entonces \mathfrak{G} actúa transitivamente en Ω , el conjunto de clases laterales de N en \mathfrak{G} y se puede representar como subgrupo del grupo simétrico de nm puntos:

$$\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}/N_{\mathfrak{G}} \hookrightarrow \mathbf{S}_{nm}.$$

y se tiene que:

- $N = \text{Stab}(x, \forall x \in \Delta_1)$
- $H = \text{Stab}(\Delta_1)$
- $K = H_{\mathfrak{G}} = \text{Stab}(\Delta_i, \forall i)$

Mostraremos algunos ejemplos para exhibir los generadores de los grupos en cada caso, y un mecanismo sencillo para recordar cómo se obtienen dichos generadores.

Comenzaremos considerando un ejemplo del caso abeliano más sencillo:

A.1. $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6)^4 \rtimes \mathbf{S}_5$

En este caso $m = 5$ y $n = 18$, $n_1 = 3$ y $n_2 = 6$, luego $|\Omega| = 90$ y queremos exhibir 6 generadores de \mathfrak{G} como subgrupo del grupo simétrico \mathbf{S}_{90} . Para ello, haremos la correspondencia de Ω , con el conjunto $\{1, 2, \dots, 90\}$, dispuesto en forma ordenada como se muestra a continuación:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30

31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45

46	47	48	49	50
51	52	53	54	55
56	57	58	59	60

61	62	63	64	65
66	67	68	69	70
71	72	73	74	75

76	77	78	79	80
81	82	83	84	85
86	87	88	89	90

- - - ↗ - - - ↗ - - - ↗ - - - ↗
figura 1.

Como se mencionó en el capítulo cinco, los primeros 4 generadores generan un subgrupo isomorfo a \mathbf{S}_5 . estos elementos se obtienen como resultado de enviar cada entrada de la columna i en la correspondiente entrada en la columna $i + 1$, como se ve en la figura 1, y conforman un conjunto generador de Coxeter para \mathbf{S}_5 , además de pertenecer a la intersección de 3 conjugados de N en \mathfrak{G} . Estos elementos son:

$$\begin{aligned}
 g_1 &= (1\ 2)(6\ 7)(11\ 12)(16\ 17)(21\ 22)(26\ 27)(31\ 32)(36\ 37)(41\ 42)(46\ 47)(51\ 52)(56\ 57)(61\ 62)(66\ 67)(71\ 72)(76\ 77)(81\ 82)(86\ 87) \\
 g_2 &= (2\ 3)(7\ 8)(12\ 13)(17\ 18)(22\ 23)(27\ 28)(32\ 33)(37\ 38)(42\ 43)(47\ 48)(52\ 53)(57\ 58)(62\ 63)(67\ 68)(72\ 73)(77\ 78)(82\ 83)(87\ 88) \\
 g_3 &= (3\ 4)(8\ 9)(13\ 14)(18\ 19)(23\ 24)(28\ 29)(33\ 34)(38\ 39)(43\ 44)(48\ 49)(53\ 54)(58\ 59)(63\ 64)(68\ 69)(73\ 74)(78\ 79)(83\ 84)(88\ 89) \\
 g_4 &= (4\ 5)(9\ 10)(14\ 15)(19\ 20)(24\ 25)(29\ 30)(34\ 35)(39\ 40)(44\ 45)(49\ 50)(54\ 55)(59\ 60)(64\ 65)(69\ 70)(74\ 75)(79\ 80)(84\ 85)(89\ 90);
 \end{aligned}$$

Nos resta encontrar dos generadores.

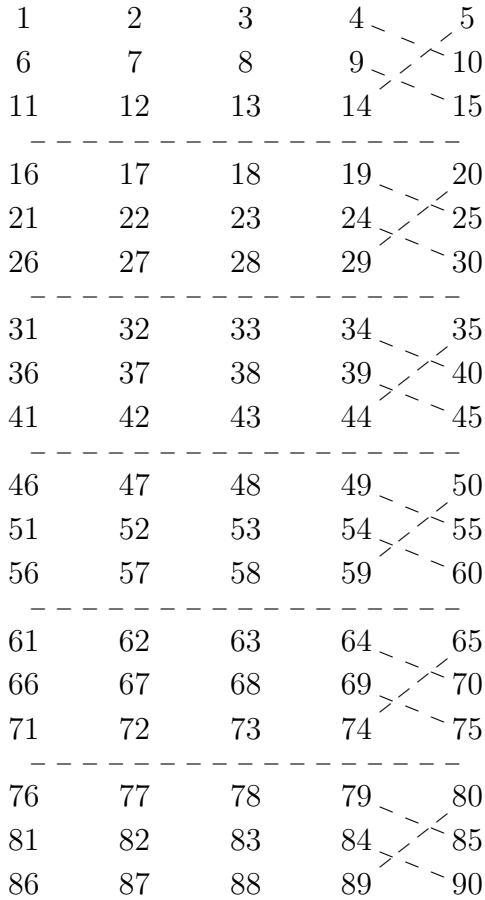


figura 2.

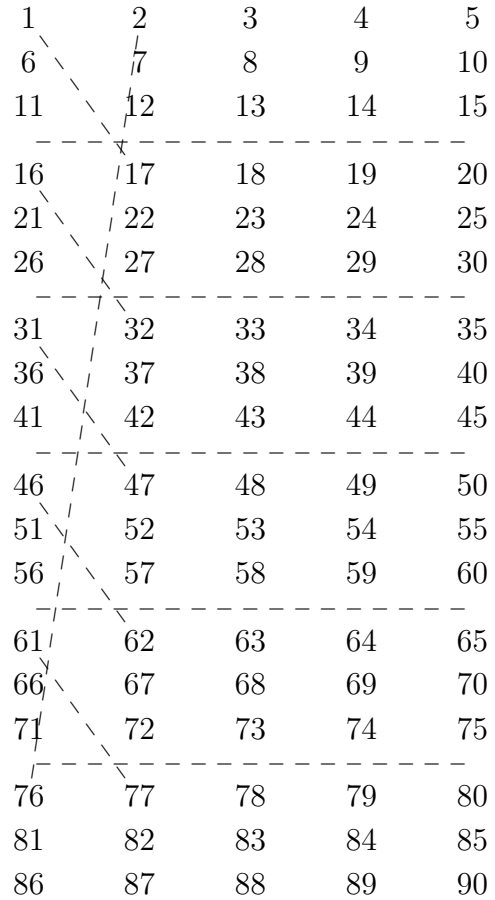


figura 3.

Para elegir el siguiente generador, procedemos como en el caso cíclico, descrito en 5.1. Consideramos el primer factor en $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6)^3$, como su cardinalidad es 3, dividimos el conjunto considerado en subconjuntos de 3 filas, como se ve en la figura 2 y en cada subconjunto consideramos el generador correspondiente al caso cíclico $\mathbb{Z}_3^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$. Ese generador en el primer subconjunto corresponde a:

$$(4\ 10)(9\ 15)(14\ 5),$$

y repetimos el proceso en cada uno de los subconjuntos restantes, para obtener:

$$(4\ 10)(9\ 15)(14\ 5)(19\ 25)(24\ 30)(29\ 20)(34\ 40)(39\ 45)(44\ 35)(49\ 55)(54\ 60)(59\ 50)(64\ 70)(69\ 75)(74\ 65)(79\ 85)(84\ 90)(89\ 80),$$

Este es el generador correspondiente de acuerdo a lo probado en 5.3, sin embargo para efectos de cálculos en GAP, usaremos el generador:

$$g_5 = (1\ 7)(6\ 12)(11\ 2)(16\ 22)(21\ 27)(26\ 17)(31\ 37)(36\ 42)(41\ 32)(46\ 52)(51\ 57)(56\ 47)(61\ 67)(66\ 72)(71\ 62)(76\ 82)(81\ 87)(86\ 77),$$

que se obtiene siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, pero considerando las dos primeras columnas en lugar de las dos últimas. Este es nuevamente un elemento que está en la intersección de 3 de los conjugados de N .

El último generador corresponde al segundo factor \mathbb{Z}_6 y lo elegimos también como en el caso cíclico, pero esta vez hay que considerar que existe un factor previo. Para esto procedemos a mezclar los elementos de cada subconjunto como se indica en la figura 3. Así obtenemos:

$$g_6 = (1\ 17)(16\ 32)(31\ 47)(46\ 62)(61\ 77)(76\ 2)(6\ 22)(21\ 37)(36\ 52)(51\ 67)(66\ 82)(81\ 7)(11\ 27)(26\ 42)(41\ 57)(56\ 72)(71\ 87)(86\ 12);$$

De este modo hemos obtenido los 6 generadores de orden 2 del grupo transitivo \mathfrak{G} , tales que cada uno de ellos pertenece a \mathbf{S}_{90} y a la intersección de 3 subgrupos conjugados de N y ninguno de ellos pertenece a K . $|\mathfrak{G}| = 12597120$ y $\mathfrak{G} \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6)^4 \rtimes \mathbf{S}_5$.

Sea $N = \mathfrak{G} \cap \mathbf{S}_{63}$, entonces $N = \langle g_1, g_2, g_3, g_5, g_6 \rangle$, dado que $g_1, g_2, g_3, g_5, g_6 \in N$, y este conjunto de generadores genera un grupo isomorfo a $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6)^3 \rtimes \mathbf{S}_4$, luego $|\mathfrak{G} : N| = 90$. Además $N_{\mathfrak{G}} = 1$

Sea $H = N_{\mathfrak{G}}(N)$, entonces $|\mathfrak{G} : H| = 5$, $H = \langle g_1, g_2, g_3, g_5, g_6, h_1, h_2 \rangle$, donde:

$$h_1 = (3\ 13\ 8)(5\ 10\ 15)(18\ 28\ 23)(20\ 25\ 30)(33\ 43\ 38)(35\ 40\ 45)(48\ 58\ 53)(50\ 55\ 60)(63\ 73\ 68)(65\ 70\ 75)(78\ 88\ 83)(80\ 85\ 90)$$

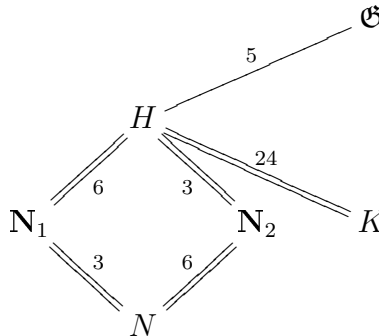
$$h_2 = (3\ 78\ 63\ 48\ 33\ 18)(5\ 20\ 35\ 50\ 65\ 80)(8\ 83\ 68\ 53\ 38\ 23)(10\ 25\ 40\ 55\ 70\ 85)(13\ 88\ 73\ 58\ 43\ 28)(15\ 30\ 45\ 60\ 75\ 90)$$

de hecho, $H \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6)^4 \rtimes \mathbf{S}_4$ Y $H/N \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$. Sea $K = Core_{\mathfrak{G}}H$, $K \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6)^4$ y ninguno de los generadores del grupo está en K . Además $H = NK$.

Por otro lado, dado que $H/N \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, existen $\mathbf{N}_1 = \langle g_1, g_2, g_3, g_5, g_6, h_1 \rangle$ y $\mathbf{N}_2 = \langle g_1, g_2, g_3, g_5, g_6, h_2 \rangle$ subgrupos de H tales que:

$$H/\mathbf{N}_1 \cong \mathbb{Z}_6, \quad H/\mathbf{N}_2 \cong \mathbb{Z}_3,$$

Así tenemos el siguiente diagrama:



Y tenemos que:

$$(\mathbf{N}_1)_{\mathfrak{G}} \cong (\mathbb{Z}_3)^4, \quad (\mathbf{N}_2)_{\mathfrak{G}} \cong (\mathbb{Z}_6)^4,$$

Además,

$$\mathfrak{G}/(\mathbf{N}_1)_{\mathfrak{G}} \cong \mathbb{Z}_6^4 \rtimes \mathbf{S}_5, \quad \mathfrak{G}/(\mathbf{N}_2)_{\mathfrak{G}} \cong \mathbb{Z}_3^4 \rtimes \mathbf{S}_5,$$

lo cual confirma lo que podíamos ver en el diagrama, pues los cubrimientos correspondientes a estos nuevos grupos corresponden al caso cíclico considerado en el capítulo 4.

A.2. $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)^3 \rtimes \mathbf{S}_4$

En este caso $m = 4$ y $n = 16$, $n_1 = n_2 = 2$ y $n_3 = 4$, luego $|\Omega| = 64$ y para exhibir los generadores de \mathfrak{G} como subgrupo del grupo simétrico \mathbf{S}_{64} , hacemos la correspondencia de Ω , con el conjunto $\{1, 2, \dots, 64\}$, como se hizo en el ejemplo anterior:

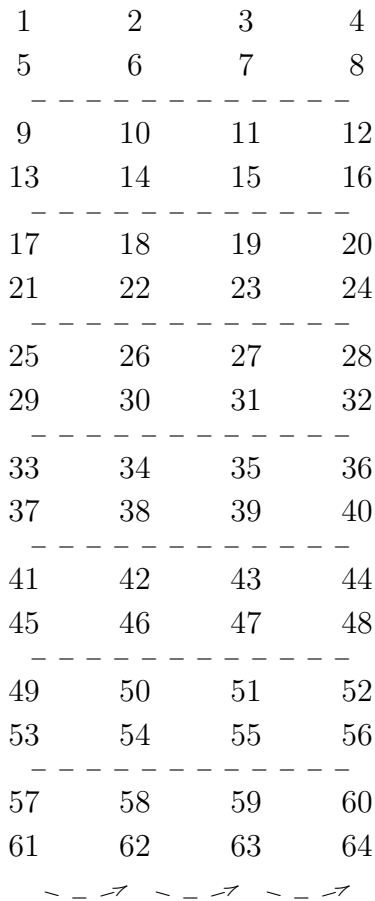


figura 1.

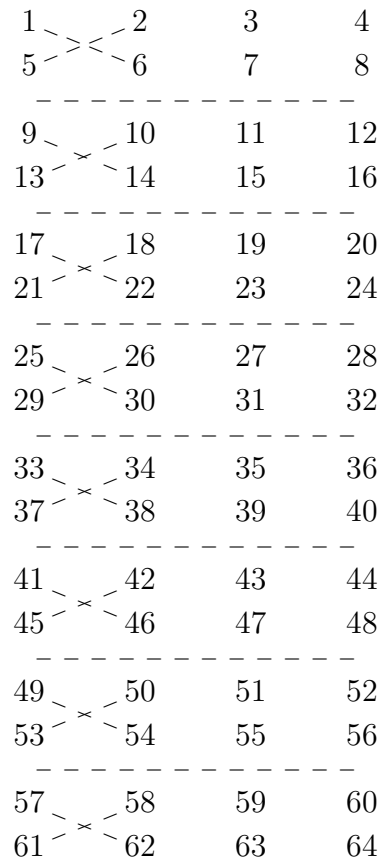


figura 2.

Como se mencionó antes, este grupo contiene un subgrupo isomorfo a \mathbf{S}_4 generado por los elementos:

$$\begin{aligned}
g_1 &= (1\ 2)(5\ 6)(9\ 10)(13\ 14)(17\ 18)(21\ 22)(25\ 26)(29\ 30)(33\ 34)(37\ 38)(41\ 42)(45\ 46)(49\ 50)(53\ 54)(57\ 58)(61\ 62) \\
g_2 &= (2\ 3)(6\ 7)(10\ 11)(14\ 15)(18\ 19)(22\ 23)(26\ 27)(30\ 31)(34\ 35)(38\ 39)(42\ 43)(46\ 47)(50\ 51)(54\ 55)(58\ 59)(62\ 63) \\
g_3 &= (3\ 4)(7\ 8)(11\ 12)(15\ 16)(19\ 20)(23\ 24)(27\ 28)(31\ 32)(35\ 36)(39\ 40)(43\ 44)(47\ 48)(51\ 52)(55\ 56)(59\ 60)(63\ 64)
\end{aligned}$$

estos elementos están en la intersección de 2 conjugados de N en \mathfrak{S} .

Nos resta encontrar tres generadores. Para elegir el siguiente generador, procedemos como en el caso cíclico. Consideramos el primer factor en $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)^3$; como su cardinalidad es 2, dividimos el conjunto considerado en subconjuntos de 2 filas, como se ve en la figura 2 y en cada subconjunto consideramos el generador correspondiente al caso cíclico $\mathbb{Z}_2^{m-1} \times \mathbf{S}_m$. De este modo obtenemos:

$$g_4 = (1\ 6)(5\ 2)(9\ 14)(13\ 10)(17\ 22)(21\ 18)(25\ 30)(29\ 26)(33\ 38)(37\ 34)(41\ 46)(45\ 42)(49\ 54)(53\ 50)(57\ 62)(61\ 58),$$

este generador pertenece también a la intersección de 2 de los conjugados de N .

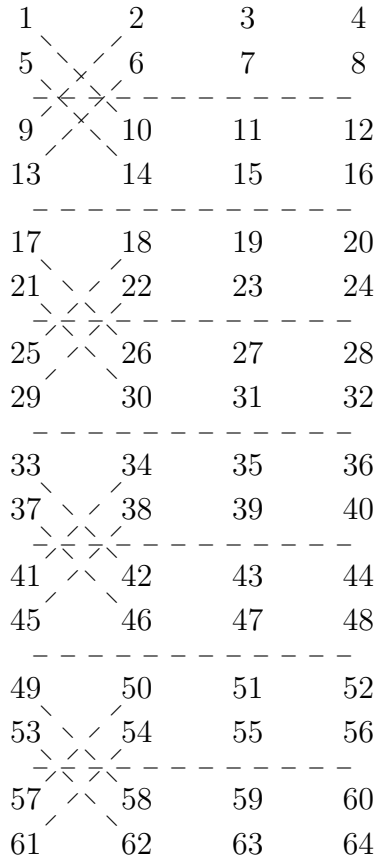


figura 3.

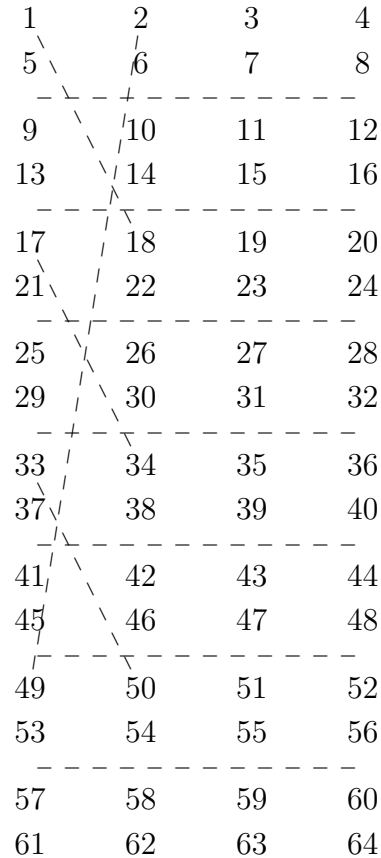


figura 4.

el siguiente generador corresponde al segundo factor \mathbb{Z}_2 y lo elegimos también como en el caso cíclico, pero esta vez hay que considerar que existe un factor previo. Para esto procedemos como se hizo en el ejemplo A.1, como si quisiéramos generar $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^3 \rtimes \mathbf{S}_4$, esto es como si ahora agrupáramos de a 4 filas y en cada grupo repitiéramos el mismo proceso, tomando en cuenta que para el caso de dos factores se deben mezclar los elementos en cada subgrupo como se indica la figura 3. Así:

$$g_5 = (1\ 10)(9\ 2)(5\ 14)(13\ 6)(17\ 26)(25\ 18)(21\ 30)(29\ 22)(33\ 42)(41\ 34)(37\ 46)(45\ 38)(49\ 58)(57\ 50)(53\ 62)(61\ 54);$$

el último generador, corresponde al último factor \mathbb{Z}_4 , como antes procedemos como en el caso cíclico, pero sin olvidar que ya se han considerado previamente los dos primeros factores, de modo que este elemento debe relacionar los nuevos grupos de 4 filas, como se muestra en la figura 4. Así obtenemos:

$$g_6 = (1\ 18)(17\ 34)(33\ 50)(49\ 2)(5\ 22)(21\ 38)(37\ 54)(53\ 6)(9\ 26)(25\ 42)(41\ 58)(57\ 10)(13\ 30)(29\ 46)(45\ 62)(61\ 14)$$

De este modo tenemos a los 6 generadores de orden 2 del grupo transitivo \mathfrak{G} , tales que cada uno de ellos pertenece a \mathbf{S}_{64} y a la intersección de 2 subgrupos conjugados de N y ninguno de ellos pertenece a K . $|\mathfrak{G}| = 98304$ y $\mathfrak{G} \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)^3 \rtimes \mathbf{S}_4$.

Sea $N = \mathfrak{G} \cap \mathbf{S}_{63}$, entonces $N = \langle g_1, g_2, g_4, g_5, g_6 \rangle$, dado que $g_1, g_2, g_4, g_5, g_6 \in N$, y este conjunto de generadores genera un grupo isomorfo a $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)^2 \rtimes \mathbf{S}_3$, luego $|\mathfrak{G} : N| = 64$. Además $N_{\mathfrak{G}} = 1$

Sea $H = N_{\mathfrak{G}}(N)$, entonces $|\mathfrak{G} : H| = 4$, $H = \langle g_1, g_2, g_4, g_5, g_6, h_1, h_2, h_3 \rangle$, donde:

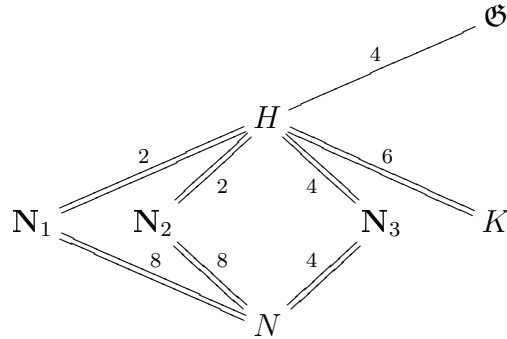
$$\begin{aligned} h_1 &= (2\ 6)(4\ 8)(10\ 14)(12\ 16)(18\ 22)(20\ 24)(26\ 30)(28\ 32)(34\ 38)(36\ 40)(42\ 46)(44\ 48)(50\ 54)(52\ 56)(58\ 62)(60\ 64) \\ h_2 &= (2\ 10)(4\ 12)(6\ 14)(8\ 16)(18\ 26)(20\ 28)(22\ 30)(24\ 32)(34\ 42)(36\ 44)(38\ 46)(40\ 48)(50\ 58)(52\ 60)(54\ 62)(56\ 64) \\ h_3 &= (2\ 18\ 34\ 50)(4\ 52\ 36\ 20)(6\ 22\ 38\ 54)(8\ 56\ 40\ 24)(10\ 26\ 42\ 58)(12\ 60\ 44\ 28)(14\ 30\ 46\ 62)(16\ 64\ 48\ 32) \end{aligned}$$

de hecho, $H \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)^3 \rtimes \mathbf{S}_3$ Y $H/N \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Sea $K = H_{\mathfrak{G}}$, $K \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)^3$ y ninguno de los generadores del grupo está en K . Además $H = NK$.

Por otro lado, dado que $H/N \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, existen $\mathbf{N}_1 = \langle g_1, g_2, g_4, g_5, g_6, h_2, h_3 \rangle$, $\mathbf{N}_2 = \langle g_1, g_2, g_4, g_5, g_6, h_1, h_3 \rangle$ y $\mathbf{N}_3 = \langle g_1, g_2, g_4, g_5, h_1, h_2 \rangle$ subgrupos de H tales que:

$$H/\mathbf{N}_1 \cong \mathbb{Z}_2, \quad H/\mathbf{N}_2 \cong \mathbb{Z}_2, \quad H/\mathbf{N}_3 \cong \mathbb{Z}_4,$$

Así tenemos el siguiente diagrama:



Y tenemos que:

$$(\mathbf{N}_1)_{\mathfrak{G}} \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)^3, \quad (\mathbf{N}_2)_{\mathfrak{G}} \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)^3, \quad (\mathbf{N}_3)_{\mathfrak{G}} \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^3,$$

Además,

$$\mathfrak{G}/(\mathbf{N}_1)_{\mathfrak{G}} \cong \mathbb{Z}_2^3 \rtimes \mathbf{S}_4, \quad \mathfrak{G}/(\mathbf{N}_2)_{\mathfrak{G}} \cong \mathbb{Z}_2^3 \rtimes \mathbf{S}_4, \quad \mathfrak{G}/(\mathbf{N}_3)_{\mathfrak{G}} \cong \mathbb{Z}_4^3 \rtimes \mathbf{S}_4,$$

lo cual confirma lo que podíamos ver en el diagrama, pues los cubrimientos correspondientes a estos nuevos grupos corresponden al caso cíclico considerado en el capítulo 4.

Apéndice B

N es como G

A continuación vamos a probar que el grupo de Galois \mathfrak{G} del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ contiene un subgrupo propio con propiedades equivalentes a las suyas. Recordemos que si \mathfrak{G} es el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$, entonces $\mathfrak{G} \leq \mathbf{S}_{mn}$, contiene subgrupos N y H tales que $N \trianglelefteq H$, $|\mathfrak{G} : H| = m$, $|H : N| = n$. Además el núcleo de N en \mathfrak{G} , $N_{\mathfrak{G}}$, es trivial, el cociente de H por N , H/N , es abeliano. También $H = NK$, el cociente $\mathfrak{G}/K \cong \mathbf{S}_m$ y el cociente $H/K \cong \mathbf{S}_{m-1}$ donde $K = H_{\mathfrak{G}}$. Además

$$\mathfrak{G} = \left\langle g_1, g_2, \dots, g_r : g_i^2 = 1, \prod_{i=1}^r g_i = 1, \mathcal{R} \right\rangle,$$

donde \mathcal{R} representa las relaciones apropiadas entre los generadores del grupo.

Proposición B.0.1.

Sea \mathfrak{G} el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\varphi \circ \psi$ con $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ un cubrimiento simple y $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un cubrimiento Galois no ramificado con grupo de Galois cíclico isomorfo a \mathbb{Z}_n . Sea \mathcal{Z} la superficie correspondiente a \mathfrak{G} y N, H subgrupos de \mathfrak{G} tales que $\mathcal{Z}_N \cong \mathcal{Y}$ y a $\mathcal{Z}_H \cong \mathcal{X}$. Entonces

- i) N es un subgrupo transitivo de $\mathbf{S}_{(m-1)n}$.
- ii) Existe una superficie \mathcal{W} con acción de N , tal que $\mathcal{W}_N \cong \mathbb{P}^1$.
- iii) Si H' un conjugado de H en \mathfrak{G} , entonces $\widehat{\varphi} : \mathcal{W}_{N \cap H'} \rightarrow \mathcal{W}_N \cong \mathbb{P}^1$ es un cubrimiento simple.
- iv) Si H' y N' son conjugado de H y N en \mathfrak{G} , respectivamente, entonces $\widehat{\psi} : \mathcal{W}_{N \cap N'} \rightarrow \mathcal{W}_{N \cap H'}$ es Galois no ramificado con grupo de Galois abeliano, isomorfo a H/N .
- v) N es el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\widehat{\varphi} \circ \widehat{\psi}$.

DEMOSTRACIÓN.

i) Sea H' un conjugado de H en \mathfrak{G} . Por la ecuación 4.1 en la proposición 4.2.1, se tiene que $K = (N \cap K)(N' \cap K)$, luego

$$N \cap H' = N \cap N'K = N \cap N'(N \cap K) = (N \cap K)(N \cap N'),$$

así

$$\begin{aligned} (N \cap H')/(N \cap N') &= (N \cap K)(N \cap N')/(N \cap N') \cong (N \cap K)/(N \cap K \cap N') \\ &\cong (N \cap K)/(N \cap K) \cap (N' \cap K) \cong (N \cap K)(N' \cap K)/(N' \cap K) \\ &\cong K/(N' \cap K) \cong H'/N. \end{aligned}$$

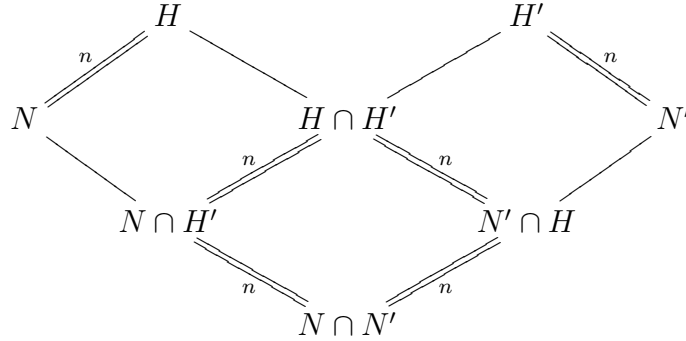
luego $|N \cap H' : N \cap N'| = n$.

Se ve fácilmente que $N \cap H' \trianglelefteq H \cap H'$, además dado que $K \leq H \cap H'$ y $NK = H$, se tiene que $N(H \cap H') = H$, luego

$$H/N \cong N(H \cap H')/N \cong (H \cap H')/N \cap (H \cap H') = (H \cap H')/(N \cap H'),$$

luego $|H \cap H' : N \cap H'| = n$. De igual forma $|H \cap H' : N' \cap H| = n$.

De este modo tenemos el siguiente diagrama de grupos:



Por otra parte, $(H \cap H')/K \cong \mathbf{S}_{m-2}$, ya que $G/K \cong \mathbf{S}_m$ y los conjugados de H/K son conjugados de $\mathbf{S}_{m-1}^{(1)}$ luego $|H : H \cap H'| = m - 1$, y $|H' : H \cap H'| = m - 1$. Además,

$$|H : N \cap H'| = |H : H \cap H'| |H \cap H' : N \cap H'| = (m - 1)n,$$

por otro lado

$$|H : N \cap H'| = |H : N| |N : N \cap H'| = n |N : N \cap H'|,$$

luego $|N : N \cap H'| = m - 1$, y de igual manera $|N' : N' \cap H| = m - 1$.

Ahora si consideremos la acción por la derecha de \mathfrak{G} en las clases laterales de N ,

$$\begin{array}{cccc} N & Nx_2 & \cdots & Nx_m \\ Nh_2 & Nh_2x_2 & \cdots & Nh_2x_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \underbrace{Nh_n}_{\Delta_1} & \underbrace{Nh_nx_2}_{\Delta_2} & \cdots & \underbrace{Nh_nx_m}_{\Delta_m} \end{array},$$

entonces G es transitivo en $\Omega = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_m$, además N estabiliza punto a punto a Δ_1 y $n = |N_G(N) : N| = |Fix(N)|$. Así que N actúa en $\Omega_1 = \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \cdots \cup \Delta_m$ sin puntos fijos, de hecho la acción es transitiva, puesto que dado $\beta \in \Delta_2$, $\beta \in \Omega_1$ y

$$|\beta^N| = |N : N_N(\beta)| = |N : N \cap H_2| |N \cap H_2 : N \cap N_2| = (m-1)n.$$

Por lo tanto N es un subgrupo transitivo de $\mathbf{S}_{(m-1)n}$.

ii) Por la observación 4.2.3, se tiene que

$$N = \langle g_2, g_3, \cdots, g_{m-1}, g_m, g_{m+1}, \cdots, g_{m+r-1} \rangle,$$

Luego si consideramos el vector

$$(g_2, g_2^{-1}, g_3, g_3^{-1}, \cdots, g_{m-1}, g_{m-1}^{-1}, g_m, g_m^{-1}, g_{m+1}, g_{m+1}^{-1}, \cdots, g_{m+r-1}, g_{m+r-1}^{-1}),$$

como vector generador para N , el teorema de existencia de Riemann, ver 1.2.2, garantiza la existencia de una superficie de Riemann \mathcal{W} con acción de N y tal que $\mathcal{W}_N \cong \mathbb{P}^1$.

iii) De $N/(N \cap K) \cong NK/K \cong H/K \cong \mathbf{S}_{m-1}$ y $|N/(N \cap K) : (N \cap H')/(N \cap K)| = m-1$ se tiene que $(N \cap H')/(N \cap K)$ es un subgrupo maximal de $N/(N \cap K)$ y dado que $N/(N \cap K)$ contiene una transposición, se tiene que el cubrimiento $f : \mathcal{W}_{(N \cap H')/(N \cap K)} \rightarrow \mathcal{W}_{N/(N \cap K)}$ es simple de grado $m-1$ y por lo tanto el cubrimiento $\pi^{N \cap H'} : \mathcal{W}_{N \cap H'} \rightarrow \mathcal{W}_N$ es también simple de grado $m-1$.

iv) $\hat{\psi} : \mathcal{W}_{N \cap N'} \rightarrow \mathcal{W}_{N \cap H'}$ es un cubrimiento Galois, con grupo de Galois isomorfo a H/N , puesto que $(N \cap N') \trianglelefteq (N \cap H')$ y

$$\begin{aligned} (N \cap H')/(N \cap N') &\cong (N \cap N'K)/(N \cap N') \cong N \cap N'(N \cap K)/(N \cap N') \\ &\cong (N \cap K)(N \cap N')/(N \cap N') \cong (N \cap K)/(N \cap K)(N' \cap K) \\ &\cong (N \cap K)(N' \cap K)/(N' \cap K) \cong K/(N' \cap K) \cong H'/N' \cong H/N \end{aligned}$$

Además dado que $G = \langle g_i \rangle$, y $g_i \notin K$, se tiene que $g_i \notin N \cap K$, luego por la proposición 3.1.5, se tiene que el cubrimiento es no ramificado.

- v) Ahora, $N \cap H'$ tiene $m - 1$ conjugados en N y además, $(N \cap H')^n = N \cap H'$, luego los $m - 1$ conjugados corresponden a $m - 1$ conjugados de H' , así $(N \cap H')_N = N \cap K$ abeliano por ser subgrupo de K .

Con las consideraciones anteriores, $\tilde{N} = N \cap N'$, y $|\tilde{G} : \tilde{N}| = (m - 1)n$ queremos probar que $\tilde{N}_{\tilde{G}} = 1$.

Como $N_N(\tilde{N}) = N \cap H'$ y $|N : N \cap H'| = m - 1$, entonces \tilde{N} tiene $m - 1$ conjugados en N , sean: $(N \cap N')^{y_i}, i = 1, \dots, m - 1$ dichos conjugados, $y_1 = 1$, entonces $(N \cap N')^{y_i} = N \cap (N')^{y_i}$, además $(N')^{y_i} = N'$ implica que $y_i \in N_G(N') = H'$, luego $y_i \in (N \cap H') = N_N(\tilde{N})$.

Por otra parte, si $(N')^{y_i} = (N')^{y_j}$, se tiene que $y_i(y_j)^{-1} \in N \cap H'$, de modo que $(N \cap H')^{y_i} = (N \cap H')^{y_j}$. De aquí se deduce que los conjugados de N' por y_i son todos diferentes y por tanto:

$$\tilde{N}_{\tilde{G}} = \bigcap_{i=1}^{m-1} (N \cap (N')^{y_i}) = 1.$$

En consecuencia, N es el grupo de Galois del cubrimiento factorizado $\hat{\varphi} \circ \hat{\psi}$, ver corolario 2.3.1.

■

Apéndice C

Extensión de la proposición 5.1.1

En 5.1.1 se probó que el producto semidirecto $(\mathbb{Z}_n)^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$ es isomorfo a $MP(m, \mathcal{Z}_n)$, el grupo de matrices de permutación de tamaño $m \times m$, con coeficientes en \mathcal{Z}_n , el conjunto de raíces n -ésimas de la unidad. Esta proposición puede ser extendida al caso de r factores, $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$, considerando $MP(rm, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2}, \cdots, \mathcal{Z}_{n_r})$ el conjunto de matrices de tamaño $rm \times rm$, diagonales por bloques, donde cada bloque es una matriz de permutación con signo de tamaño $m \times m$, tal que el bloque i tiene sus coeficientes en \mathcal{Z}_{n_i} .

Un elemento típico de $MP(rm, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2}, \cdots, \mathcal{Z}_{n_r})$ es:

$$\begin{pmatrix} M_{v_1} M_\tau & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{v_2} M_\tau & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & M_{v_r} M_\tau \end{pmatrix},$$

donde M_τ es la matriz de la permutación $\tau \in \mathbf{S}_m$ y M_{v_i} es una matriz diagonal con entradas en \mathcal{Z}_{n_i} , y $\mathbf{0}$ representa la matriz nula de tamaño $m \times m$.

Además, dado que existen $m!$ matrices de permutación de tamaño $m \times m$ y $n_1^m, n_2^m, \cdots, n_r^m$ posibilidades para escoger los elementos de la diagonal de $M_{v_1}, M_{v_2}, \cdots, M_{v_r}$ respectivamente, se tiene que $|MP(rm, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2}, \cdots, \mathcal{Z}_{n_r})| = n_1^m n_2^m \cdots n_r^m m!$.

Proposición C.0.2. *El producto semidirecto $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^{m-1} \rtimes \mathbf{S}_m$ es isomorfo a $MP(rm, \mathcal{Z}_{n_1}, \mathcal{Z}_{n_2}, \cdots, \mathcal{Z}_{n_r})$.*

DEMOSTRACIÓN.

\mathbf{S}_m actúa de manera natural en $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m$ permutando las coordenadas; es decir dados $\tau \in \mathbf{S}_m$ y $v = \left((x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \cdots, x_1^{(r)}), (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_2^{(r)}), \cdots, (x_m^{(1)}, x_m^{(2)}, \cdots, x_m^{(r)}) \right)$

en $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m$, definimos:

$$\tau(v) = \left((x_{\tau(1)}^{(1)}, x_{\tau(1)}^{(2)}, \cdots, x_{\tau(1)}^{(r)}), (x_{\tau(2)}^{(1)}, x_{\tau(2)}^{(2)}, \cdots, x_{\tau(2)}^{(r)}), \cdots, (x_{\tau(m)}^{(1)}, x_{\tau(m)}^{(2)}, \cdots, x_{\tau(m)}^{(r)}) \right).$$

Consideremos los homomorfismos:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbf{S}_m &\rightarrow GL_{rm}(\mathbb{Q}(\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \cdots, \omega_{n_r})) \\ \tau &\mapsto \mathcal{M}_\tau \end{aligned},$$

donde

$$\mathcal{M}_\tau = \begin{pmatrix} M_\tau & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_\tau & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & M_\tau \end{pmatrix},$$

ω_{n_j} es una raíz primitiva n_j -ésima de la unidad y $M_\tau = (m_{i,j})_{m \times m}$, es tal que en la columna i , la entrada que vale 1, es la correspondiente a la fila $\tau(i)$, y las entradas restantes son nulas.

Sea

$$\begin{aligned} \phi_j: \mathbb{Z}_{n_j} &\rightarrow \mathbb{Q}(\omega_{n_j}) \\ [i] &\mapsto \omega_{n_j}^i \end{aligned},$$

y sea

$$\begin{aligned} \psi: (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m &\rightarrow GL_{2m}(\mathbb{Q}(\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \cdots, \omega_{n_r})) \\ v &\mapsto M_v \end{aligned},$$

donde

$$M_v = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Phi_r \end{pmatrix},$$

donde

$$\Phi_j = \begin{pmatrix} \phi_j(x_1^{(j)}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_j(x_2^{(j)}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_j(x_m^{(j)}) \end{pmatrix},$$

$j = 1, 2, \cdots, r$.

Los homomorfismos definidos anteriormente son inyectivos.

Además, φ y ψ respetan la acción de \mathbf{S}_m en $(\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m$, esto es, dados $\tau \in \mathbf{S}_m$ y $v \in (\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m$, $v = \left((x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(r)}), (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(r)}), \dots, (x_m^{(1)}, x_m^{(2)}, \dots, x_m^{(r)}) \right)$, entonces:

$$\varphi^{-1}(\tau)\psi(v)\varphi(\tau) = \psi(\tau(v)),$$

en efecto:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_\tau^{-1}M_v)(\mathcal{M}_\tau) &= (\mathcal{M}_{\tau^{-1}}M_v)\mathcal{M}_\tau \\ &= M_{\left((x_{\tau(1)}^{(1)}, x_{\tau(1)}^{(2)}, \dots, x_{\tau(1)}^{(r)}), (x_{\tau(2)}^{(1)}, x_{\tau(2)}^{(2)}, \dots, x_{\tau(2)}^{(r)}), \dots, (x_{\tau(m)}^{(1)}, x_{\tau(m)}^{(2)}, \dots, x_{\tau(m)}^{(r)}) \right)} \\ &= \psi \left(\tau \left((x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(r)}), (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(r)}), \dots, (x_m^{(1)}, x_m^{(2)}, \dots, x_m^{(r)}) \right) \right). \end{aligned}$$

Así, por la propiedad universal del producto semidirecto, tenemos:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m & \xrightarrow{i'} & (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m \rtimes \mathbf{S}_m \xleftarrow{i} \mathbf{S}_m \\ & \searrow \psi & \downarrow \rho \swarrow \varphi \\ & & GL_{2m}(\mathbb{Q}(\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \dots, \omega_{n_r})) \end{array}$$

esto es, existe un único homomorfismo:

$$\rho : (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m \rtimes \mathbf{S}_m \rightarrow GL_{2m}(\mathbb{Q}(\omega_{n_1}, \omega_{n_2}, \dots, \omega_{n_r})),$$

además, la imagen de ρ contiene al subgrupo de G generado por :

$$\{\mathcal{M}_\tau : \tau \in \mathbf{S}_m\} \cup \{M_v : v \in (\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m\},$$

el cual contiene a las matrices de permutación con signo, puesto que si multiplicamos por una matriz M_v a la izquierda, $M_v\mathcal{M}_\tau$ da como resultado una matriz de permutación con signos según sea M_v . Además, $|(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m \rtimes \mathbf{S}_m| = n_1^m n_2^m \cdots n_r^m m!$.

Luego ρ es inyectiva y su imagen es $MP(rm, \mathbb{Z}_{n_1}, \mathbb{Z}_{n_2}, \dots, \mathbb{Z}_{n_r})$. Por lo tanto,

$$(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r})^m \rtimes \mathbf{S}_m \cong MP(rm, \mathbb{Z}_{n_1}, \mathbb{Z}_{n_2}, \dots, \mathbb{Z}_{n_r}).$$

■

Bibliografía

- [ACR10] Luis Arenas-Carmona and Anita M. Rojas. Unramified prime covers of hyperelliptic curves and pairs of p -gonal curves. In *In the tradition of Ahlfors-Bers. V*, volume 510 of *Contemp. Math.*, pages 35–47. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [AH10] Daniel Allcock and Chris Hall. Monodromy groups of Hurwitz-type problems. *Adv. Math.*, 225(1):69–80, 2010.
- [AP05] Michela Artebani and Gian Pietro Pirola. Algebraic functions with even monodromy. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(2):331–341 (electronic), 2005.
- [BF86] R. Biggers and M. Fried. Irreducibility of moduli spaces of cyclic unramified covers of genus g curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 295(1):59–70, 1986.
- [Cox36] H. S. M. Coxeter. The groups determined by the relations $S^l = T^m = (S^{-1}T^{-1}ST)^p = 1$. Part I. *Duke Math. J.*, 2(1):61–73, 1936.
- [DDH89] Steven Diaz, Ron Donagi, and David Harbater. Every curve is a Hurwitz space. *Duke Math. J.*, 59(3):737–746, 1989.
- [DM96] John D. Dixon and Brian Mortimer. *Permutation groups*, volume 163 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Fri89] Mike Fried. Combinatorial computation of moduli dimension of Nielsen classes of covers. In *Graphs and algorithms (Boulder, CO, 1987)*, volume 89 of *Contemp. Math.*, pages 61–79. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [GN95] Robert M. Guralnick and Michael G. Neubauer. Monodromy groups of branched coverings: the generic case. In *Recent developments in the inverse Galois problem (Seattle, WA, 1993)*, volume 186 of *Contemp. Math.*, pages 325–352. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [GS07] Robert M. Guralnick and John Shareshian. Symmetric and alternating groups as monodromy groups of Riemann surfaces. I. Generic covers and covers with

- many branch points. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 189(886):vi+128, 2007. With an appendix by Guralnick and R. Stafford.
- [Izq95] M. Izquierdo. On Klein surfaces and dihedral groups. *Math. Scand.*, 76(2):221–232, 1995.
- [Kan06] Vassil Kanev. Hurwitz spaces of Galois coverings of \mathbb{P}^1 , whose Galois groups are Weyl groups. *J. Algebra*, 305(1):442–456, 2006.
- [Mas91] William S. Massey. *A basic course in algebraic topology*, volume 127 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [Mun75] James R. Munkres. *Topology: a first course*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [MV04] Kay Magaard and Helmut Völklein. The monodromy group of a function on a general curve. *Israel J. Math.*, 141:355–368, 2004.
- [Rec94] Sevín Recillas. The Jacobian of the Galois extension of a trigonal curve. In *XX-Vith National Congress of the Mexican Mathematical Society (Spanish) (Morelia, 1993)*, volume 14 of *Aportaciones Mat. Comun.*, pages 159–167. Soc. Mat. Mexicana, México, 1994.
- [Roj02] Anita M. Rojas. Group actions on Jacobian varieties. Tesis de doctorado, Noviembre 2002.
- [Roj07] Anita M. Rojas. Group actions on Jacobian varieties. *Rev. Mat. Iberoam.*, 23(2):397–420, 2007.
- [Spr57] George Springer. *Introduction to Riemann surfaces*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1957.
- [Suz82] Michio Suzuki. *Group theory. I*, volume 247 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1982. Translated from the Japanese by the author.
- [Vet07] Francesca Vetro. Irreducibility of Hurwitz spaces of coverings with monodromy groups Weyl groups of type $W(B_d)$. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)*, 10(2):405–431, 2007.
- [Zar78] Oscar Zariski. *Collected papers. Vol. III*. The MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1978. Topology of curves and surfaces, and special topics in the theory of algebraic varieties, Edited and with an introduction by M. Artin and B. Mazur, Mathematicians of Our Time.