PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS

# LA DERIVADA SCHWARZIANA EN VARIAS VARIABLES COMPLEJAS

Por

Rodrigo A. Hernández Reyes

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al
grado de Doctor en Ciencias Exactas mención Matemática.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Profesor Guía | : | Martin Chuaqui F. | - | Pontificia Universidad Católica de Chile. |
| Comisión Informante | : | Manuel Elgueta | - | Pontificia Universidad Católica de Chile. |
| | | Julian Gevirtz | - | Ball State University. |
| | | Gonzalo Riera | - | Pontificia Universidad Católica de Chile. |

2005
Santiago-Chile

## AGRADECIMIENTOS

Durante el desarrollo de este trabajo el apoyo de mi esposa María Elena e hija Consuelo han sido fundamentales, es por esto que a ellas se lo dedico.

Mi formación y logros no podrían ser tales sin el compromiso y ayuda de mis padres y hermanos, quienes han estado conmigo siempre dándome su amor infinito.

Quisiera agradecer a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile y en especial a mi tutor el Sr. Martin Chuaqui, quien me guío, enseño y apoyó en este proceso de descubrimiento de las Matemáticas. Su soporte ha sido importante y clave en este trabajo tanto en lo académico como en el plano personal.

El apoyo económico otorgado por Conicyt con su beca de doctorado, Dipuc con su beca de término de tesis, Proyecto Mecesup brindándome la posibilidad de una estadía en la Universidad de Toronto y la Facultad de Matemáticas, han sido fundamental en esta Tesis.

A mis amigos, en especial a Osvaldo Venegas Torres, quienes con sus consejos y amistad han hecho de mi paso por este programa más que un lugar de formación académica sino más bien un grato y familiar ambiente de trabajo. Gracias a todos ellos.

# Índice general

CAPÍTULO 1

# Introducción

## 1.1. Motivación

La derivada Schwarziana ocupa un lugar importante en la teoría geométrica de funciones de una variable compleja, en problemas ligados a la univalencia y extensiones cuasiconformes, teoremas de distorsión, crecimiento, y familias linealmente invariantes, entre otras. El objetivo principal de este trabajo es generalizar parte de estos resultados al caso de varias variables complejas usando la definición hecha por T. Oda [**19**] para derivadas Schwarzianas. Cabe señalar que existen varias definiciones de derivadas Schwarzianas en $\mathbb{C}^n$, ver [**8**], [**15**], pero la relación que existe entre las derivadas Schwarzianas dadas por T.Oda y un sistema en derivadas parciales de orden 2 y su regla de la cadena, en directa analogía al caso unidimensional, han hecho que usemos esta definición para estudiar y tratar de generalizar los resultados obtenidos en una variable compleja.

En una variable compleja, uno de los aportes más significativos fué hecho por Z. Nehari en 1949 [**16**] quién usando teoría de ecuaciones diferenciales asociada con la derivada Schwarziana, esto es $f = u/v$ donde $u$ y $v$ son soluciones linealmente independientes de $u'' + pu = 0$ con $2p = Sf$, encontró condiciones suficientes para la univalencia y redescubrió condiciones necesarias las cuales habrían sido demostradas con anterioridad por Kraus [**13**]. Posteriormente Z. Nehari [**17**] probó un criterio de univalencia más general. Otros han hechos aportes importantes en el desarrollo de criterios de univalencia tales como C. Epstein [**6**] quién generalizó los resultados anteriores usando la geometría diferencial 3-dimensional del espacio hiperbólico, luego Anderson y Hinkkanen, con una mejora del resultado de Epstein, y finalmente, Osgood y Stowe con una versión muy general de un criterio de univalencia entre variedades riemannianas basado en una generalización de derivada Schwarziana a ese contexto, ver [**11**],[**20**].

En el Capítulo 2 del presente trabajo, introducimos un operador que denominamos *Schwarziano* que presenta importantes propiedades.

Una de ellas, la regla de la cadena, lo hace invariante bajo composiciones por la izquierda con transformaciones de Möbius, lo cual permite normalizar adecuadamente en distintas situaciones, de manera similar a lo que ocurre en una variable compleja.

En el Capítulo 3 demostramos que la norma del operador Schwarziano inducida en la bola unitaria por la métrica de Bergman es invariante bajo los automorfismos de $\mathbb{B}^n$. Esto da origen a una Familia Linealmente Invariante, concepto introduido por Ch. Pommerenke [**25**],[**26**] y estudiado por diferentes autores en $\mathbb{C}^n$. Mostramos que si la norma de Bergman del operador Schwarziano esta acotada, entonces la familia es normal, lo que tiene consecuencias sobre su *orden* y *norma orden*, concepto recientemente introducido por J.A. Pfaltzgraff y T. Suffridge en [**23**].

En el Capítulo 4 probamos que cotas uniformes apropiadas sobre las derivadas Schwarzianas son condiciones suficientes para la univalencia de funciones holomorfas localmente univalentes definidas en dominio convexo acotado de $\mathbb{C}^n$. Además demostramos que ciertas cotas puntuales sobre el operador Schwarziano implican la univalencia global de funciones definidas en la bola unitaria $\mathbb{B}^n$. Como consecuencia, probamos que para la familia linealmente invariante definida en el capítulo 3 existe un radio uniforme en la métrica de Bergman tal que toda función de la familia es univalente en cualquier bola de dicho radio. Las técnicas desarrolladas utilizan la relación entre las derivadas Schwarzianas definidas por T. Oda y un sistema lineal de ecuaciones diferenciales parciales. Adecuamos las técnicas de comparación de Sturm para controlar la frecuencia de los ceros simultáneos de $n$ soluciones linealmente independientes de este sistema. Al igual que en el caso de una variable compleja, resulta muy importante poder prescribir las condiciones iniciales de dichas soluciones. Para poder aplicar los métodos de comparación de Sturm, hubo que reducir el sistema antes mencionado a una ecuación no homogénea de segundo orden, que resultó intrínsicamente distinta al caso clásico de una variable compleja al exhibir un término de orden uno. Los resultados obtenidos pueden ser generalizados para funciones definidas sobre el polidisco, donde el grupo de automorfismos sigue constituído por transformaciones de Möbius e isometrías en la métrica de Bergman.

El Capítulo 5 trata un aspecto geométrico de la derivada Schwarziana. Para facilitar la presentación, se trabaja en dos dimensiones complejas. Se demuestra que la norma del operador Schwarziano de una función holomorfa $F = (f, g)$ proporciona una cota sobre la segunda forma fundamental de las superficies de ceros $\{f = 0\}, \{g = 0\}$ de sus funciones componentes, lo cual permite controlar la curvatura de estas superficies. En el desarrollo de esta tesis, los criterios de univalencia obtenidos se demostraron usando un lema fundamental, de acuerdo con el cual una función holomorfa y localmente univalente será univalente si y solo si las soluciones del sistema lineal asociado no tienen más de un cero en común. Es por esto que en un principio se creyó que al controlar la norma del operador Schwarziano, y por consiguiente la curvatura de estas superficies, se podría controlar el número de sus intersecciones. La dificultad principal, aún no resuleto, reside en que estas supericies en general tendrán más de una componente, generándose en principio multiplicidad de intersecciones no controlables por vía de curvatura.

## 1.2. Preliminares

En esta sección daremos algunas definiciones y resultados clásicos de la teoría sin demostración.

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ función analítica localmente univalente. Se define la derivada Schwarziana de $f$ por

$$Sf = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2, \tag{1.1}$$

donde se tiene que $Sf \equiv 0$ si y sólo si $f = T$ es una transformación de Möbius dada por

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Si $h = f \circ g$ se demuestra que

$$S(f \circ g) = (Sf \circ g)(g')^2 + Sg\,, \tag{1.2}$$

por consiguiente es claro que si $h = f \circ T$, entonces $Sh = (Sf \circ T)(T')^2$ y si $h = T \circ g$, entonces $Sh = Sg$.

Por otro lado una función analítica $f$ con $Sf = 2p$ tiene la forma

$$f = \frac{u}{v}, \tag{1.3}$$

donde $u$ y $v$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$u'' + pu = 0\,. \tag{1.4}$$

Observemos que $u = (f')^{-1/2}$ es solución de la ecuación, de donde cotas sobre las soluciones de la ecuación implicarán cotas sobre $f'$, obteniendose teoremas de crecimiento y distorsión.

Muchos de los criterios de univalencia mencionados en la Introducción se han basado en el siguiente lema, ver [**5**].

**Lema** 1.2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ dominio simlpemente conexo y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica y localmente univalente. Entonces $f$ es globalmente univalente si y sólo si no hay soluciones no triviales de $u'' + pu = 0$ con más de un cero en $\Omega$.*

**Demostración:** Supongamos que $f$ es globalmente univalente. Como $f = \frac{u}{v}$ donde $u$ y $v$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $u'' + pu = 0$, entonces $u$ no podría tener más de un cero.

Recíprocamente, supongamos que existen $z_1$ y $z_2$ tales que $f(z_1) = f(z_2) = \alpha$. Igual que antes, $f = \frac{u}{v}$, luego $y = u - \alpha v$ es solución de $u'' + pu = 0$ con $y(z_1) = 0 = y(z_2)$, una contradicción.

□

Para estudiar los ceros de las soluciones de la ecuación (1.4) en $\mathbb{D}$, se estudian los ceros de la función real $v = |u|$, que de aucerdo con un lema fundamental, satisface la ecuación

$$v'' + |p|\, v \geq 0\,, \tag{1.5}$$

a lo largo de rectas. De esto, y mediante los teoremas clásicos de Sturm y a partir de cotas apropiadas de $|p|$, es posible controlar la frecuencia de los ceros de $v$, luego de $u$.

Sea $\mathcal{S}$ la familia de las funciones analíticas univalentes definidas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$ tales que $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$. Z. Nehari [**16**] probó el siguiente resultado.

**Teorema** 1.2.1. *Si $f \in \mathcal{S}$ entonces*

$$|Sf(z)| \leq \frac{6}{(1-|z|^2)^2}\,.$$

*La constante 6 es óptima.*

*Recíprocamente, si $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica y localmente univalente tal que*

$$|Sf(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}\,, \tag{1.6}$$

*entonces $f \in \mathcal{S}$.*

Una demostración de este teorema usando cadenas de Loewner se puede encontrar en [**9**] (pág 133). Es importante señalar que la optimalidad de $|Sf(z)| \leq \dfrac{6}{(1-|z|^2)^2}$, ocurre cuando $f$ es la función de

Koebe, dada por

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2},$$

la cual mapea $\mathbb{D}$ a todo el plano complejo salvo el segmento del eje real comprendido entre $-\infty$ a $-1/4$. El criterio de univalencia (1.6) también es óptimo. El siguiente resultado corresponde a una formulación general de otro criterio de univalencia de Nehari, y puede ser encontrado en [**20**].

**Teorema** 1.2.2. *Si $f$ es analítica definida en un dominio convexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y*

$$|Sf(z)| \leq 2\left(\frac{\pi}{\operatorname{diam}(\Omega)}\right)^2,$$

*entonces $f$ es univalente en $\Omega$.*

Nuevamente la constante $2\pi^2/\operatorname{diam}^2(\Omega)$ es óptima para la univalencia. En el cado del disco unitario, este criterio da el resultado original de Nehari, $|Sf| \leq \pi^2/2$. Aun cuando en [**20**] el Teorema 1.2.2 aparece como consecuencia del teorema general de univalencia, también se puede demostrar directamente usando técnicas de comparación y el análisis de la función $v$ antes descrita. El siguiente es el resultado más general Z. Nehari [**17**] en cuanto a univalencia, cuya demostración incluimos.

**Teorema** 1.2.3. ***(p-criterio)***
*La función $f$ será univalente en $\mathbb{D}$ si*

$$|Sf(z)| \leq 2p(|z|) \tag{1.7}$$

*donde $p(x)$ es una función con las siguientes propiedades*

*(i)* $p(x)$ *es continua y positiva en* $-1 < x < 1$;

*(ii)* $p(x) = p(-x)$;

*(iii)* $(1-x^2)^2 p(x)$ *es no-creciente si* $x$ *varía de* $0$ *a* $1$;

*(iv)* *la equación diferencial* $y'' + py = 0$ *tiene una solución que no se anula en* $-1 < x < 1$;

**Demostración:** Sea $f$ con $Sf = 2q$, $|q(z)| \leq p(|z|)$. Supongamos que $f$ no es univalente en $\mathbb{D}$, esto es, existen dos puntos $z_1$ y $z_2$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Si $z_1, z_2$ están en un mismo diámetro del disco, podemos rotar $f$ y suponer que $z_1, z_2$ son reales. Entonces habría una solución no trivial de $u'' + qu = 0$ con dos ceros en $(-1, 1)$, lo cual es imposible por (1.5) y (iv). Si $z_1, z_2$ no están en un mismo diámetro, entonces después de una rotación podemos suponer que la geodésica hiperbólica $C$ que los une es simétrica con respecto al eje imaginario y lo corta en el punto $i\rho, \rho > 0$. La transformación de Möbius

$$z = T(w) = \frac{w + i\rho}{1 - i\rho w}, \quad 0 \le \rho < 1 \tag{1.8}$$

lleva $(-1, 1)$ en $C$. Entonces $g = f \circ T$ satisface $g(x_1) = g(x_2)$ para $x_1 = T^{-1}(z_1)$ y $x_2 = T^{-1}(z_2)$, y por consiguiente hay una solución no trivial de

$$u''(w) + \frac{1}{2} Sg(w)u(w) = 0,$$

con ceros en $x_1, x_2$. Esto daría una contradicción si se prueba que $|Sg(w)| \le 2p(w)$ para $-1 < w < 1$. En efecto, como $g(w) = f(\frac{w+\zeta}{1+\bar{\zeta}w})$ y por (1.2) se tiene que

$$Sg(w) = \left(\frac{dz}{dw}\right)^2 Sf(z)$$

y como

$$\left|\frac{dz}{dw}\right| = \frac{1 - |z|^2}{1 - |w|^2}$$

se deduce que

$$(1 - |w|^2)^2 |Sg(w)| = (1 - |z|^2)^2 |Sf(z)|.$$

Así por (1.7) tenemos

$$(1 - |w|^2)^2 |Sg(w)| \le 2(1 - |z|^2)^2 p(|z|).$$

Un cálculo directo muestra que $|z| > |w|$ si $-1 < w < 1$, entonces por $(iii)$

$$(1 - |z|^2)^2 p(|z|) \le (1 - w^2)^2 p(w), \quad -1 < w < 1,$$

y por lo tanto

$$|Sg(w)| \le 2p(w), \quad -1 < w < 1.$$

□

Los Teoremas 1.2.1 y 1.2.2 al igual que el criterio establecido por V.V.Pokornyi [**24**] son casos particulares de este teorema. Sin embargo existen otros criterios de univalencia involucrando a la derivada Schwarziana que no pueden ser obtenidos como un p-criterio, por ejemplo ver [**6**].

En un trabajo no relacionado con univalencia per se, M. Chuaqui y B. Osgood [**4**] mostraron cómo obtener cotas superiores e inferiores para $|f|$ y $|f'|$ a partir de cotas sobre $|Sf|$, bajo las importantes normalizaciones $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $f''(0) = 0$. Cualquier función localmente univalente puede ser normalizada de esta manera sin variar su Schwarziana componiendo adecuadamente por la izquierda con una transformación de Möbius. El resultado es el siguiente teorema.

**Teorema** 1.2.4. *Sea $f$ analítica en $\mathbb{D}$ con las normalizaciones antes descritas. Si $f$ satisface*

$$|Sf(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2},$$

*entonces*

$$n(|z|) \leq |f(z)| \leq N(|z|),$$
$$n'(|z|) \leq |f'(z)| \leq N'(|z|).$$

*Si*

$$|Sf(z)| \leq \frac{2t}{(1-|z|^2)^2} \quad 0 < t < 1,$$

*entonces*

$$A(|z|,-t) \leq |f(z)| \leq A(|z|,t),$$
$$A'(|z|,-t) \leq |f'(z)| \leq A'(|z|,t).$$

*Si la desigualdad se alcanza para algun punto distinto del origen entonces $f$ salvo rotación, es una de las funciones $n(z)$, $N(z)$, $A(z,t)$ o $A(z,-t)$, donde*

$$n(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1+z)^{\sqrt{2}} - (1-z)^{\sqrt{2}}}{(1+z)^{\sqrt{2}} + (1-z)^{\sqrt{2}}}, \quad N(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z},$$

*y para $0 \leq t < 1$*

$$A(z,t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \frac{(1+z)^{\sqrt{1-t}} - (1-z)^{\sqrt{1-t}}}{(1+z)^{\sqrt{1-t}} + (1-z)^{\sqrt{1-t}}}.$$

Se deduce de este teorema que si $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ satisface (1.6) entonces $a_2^{-1}$ no pertence a $f(\mathbb{D})$. En efecto, $g = f/(1+a_2 f)$ tiene $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ y $g''(0) = 0$ y tiene la misma derivada Schwarziana que $f$. por el teorema anterior, la función $g$ será analítica, por lo que $f$ debe omitir el valor $a_2^{-1}$. Una formulación invariante de este hecho mostró tener importantes consecuencias geométricas para la clase de Nehari, [?]. Muchos autores han usado de manera sistemática este tipo de normalizaciones con importantes progresos, ver especialmente [**7**].

CAPÍTULO 2

# Schwaziana en $\mathbb{C}^n$

## 2.1. Introducción

En este Capítulo introduciremos un operador que llamaremos operador *Schwarziano* el cual juega un rol importante en el estudio de univalencia sobre funciones holomorfas localmente univalentes en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Aunque en el curso de la última década han sido propuestas definiciones de derivada Schwarziana en en este contexto, nos parece que aquélla dada por T. Oda [**19**] comparte mayores razgos carasterísticos con el operador en una variable compleja. Esta definición se introduce en este Capítulo.

Las derivadas Schwarzianas en varias variables complejas de T. Oda son los coeficientes de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, que detallamos a continuación.

Sea $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ holomorfa y localmente univalente. Consideremos el sistema de ecuaciones en derivadas parciales,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} = \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial z_k} + P_{ij}^0 u \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

**Definición** 2.1.1. *El sistema (2.1) se dice completamente integrable, si tiene (como máximo) $n+1$ soluciones linealmente independientes.*

**Definición** 2.1.2. *El sistema (2.1)se dice de forma canónica, si los coeficientes satisfacen*

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij}^j = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Se define la derivada Schwarziana de una función holomorfa localmente univalente $F = (f_1, \ldots, f_n)$ como

$$S_{ij}^k F = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 f_l}{\partial z_i \partial z_j} \frac{\partial z_k}{\partial f_l} - \frac{1}{n+1} (\delta_i^k \frac{\partial}{\partial z_j} + \delta_j^k \frac{\partial}{\partial z_i}) \log \Delta \quad i, j, k = 1, \ldots, n,$$

donde $\delta_i^k$ son los simbolos de Kronecker y $\Delta = det(\frac{\partial F}{\partial z})$.

Se puede demostrar que $S_{ij}^k F \equiv 0$ para todo $i, j, k = 1, \ldots, n$ si y solo si $F = T$ donde $T$ es una transformación de Möbius dada por

$$T(z) = \left(\frac{l_1(z)}{l_0(z)}, \ldots, \frac{l_n(z)}{l_0(z)}\right), \tag{2.2}$$

donde $l_i(z) = a_{i0} + a_{i1}z_1 + \cdots + a_{in}z_n$ con $\det(a_{ij}) \neq 0$. Ver [**19**]. Además se tiene por composición que

$$S_{ij}^k(G \circ F(z)) = S_{ij}^k F(z) + \sum_{l,m,r=1}^{n} S_{lm}^r G(w) \frac{\partial w_l}{\partial z_i} \frac{\partial w_m}{\partial z_j} \frac{\partial z_k}{\partial w_r}, \tag{2.3}$$

donde $F(z) = w$. Así, si $G$ es una transformación de Möbius se deduce que $S_{ij}^k(G \circ F) = S_{ij}^k F$.

Se define $S_{ij}^0 F$ como

$$S_{ij}^0 F = \Delta^{1/(n+1)} \left( \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \Delta^{-1/(n+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} \Delta^{-1/(n+1)} S_{ij}^k F \right).$$

El siguiente resultado establece la relación entre el sistema (2.1) y las derivadas Schwarzianas dadas por T. Oda [**19**].

**Proposición** 2.1.1. *Sea (2.1) completamente integrable en su forma canónica y $u_1, \ldots, u_n, u_0$ cualquier conjunto de soluciones linealmente independiente del sistema (2.1). Entonces,*

$$P_{ij}^k = S_{ij}^k F, \quad i, j, k = 1, \ldots, n,$$

*donde $F = (\frac{u_1}{u_0}, \ldots, \frac{u_n}{u_0})$.*

## 2.2. Operador Schwarziano

Sea $F : \Omega \to \mathbb{C}^n$, $F(z_1, \ldots, z_n) = (w_1, \ldots, w_n)$ holomorfa y localmente inyectiva en $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ y sea $\Delta = \det(\frac{\partial F}{\partial z})$, donde $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

**Definición** 2.2.1. *Para cada $k = 1, \ldots, n$ sea $\mathbb{S}^k F$ la matriz de $n \times n$,*

$$\mathbb{S}^k F = (S_{ij}^k F), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

**Proposición** 2.2.1. *Sea $F$ una función holomorfa localmente inyectiva y sea $w = T(z)$ una transformación de Möbius. Entonces para cada $k = 1, \ldots, n$,*

$$\mathbb{S}^k(F \circ T) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial z_k}{\partial w_r} DT^t[(\mathbb{S}^r F) \circ T]\, DT\,.$$

**Demostración:** A partir de (2.3) tenemos que

$$\begin{aligned} S^k_{ij}(F \circ T)(z) &= \sum_{l,m,r=1}^{n} S^r_{lm}F(w)\frac{\partial w_l}{\partial z_i}\frac{\partial w_m}{\partial z_j}\frac{\partial z_k}{\partial w_r} + S^k_{ij}T(z)\,, \\ &= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial z_k}{\partial w_r} \sum_{m,l=1}^{n} \frac{\partial w_l}{\partial z_i}\, S^r_{lm}F(w)\,\frac{\partial w_m}{\partial z_j} + S^k_{ij}T(z)\,, \\ &= \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial z_k}{\partial w_r} \sum_{m,l=1}^{n} \frac{\partial w_l}{\partial z_i}\, S^r_{lm}F(w)\,\frac{\partial w_m}{\partial z_j}\,, \quad w = F(z), \end{aligned}$$

ya que $T$ es una transformación de Möbius. La proposición queda demostrada si reescribimos esto en términos de las matrices.

□

**Proposición** 2.2.2. *Sean $F$ y $T$ funciones holomorfas localmente univalentes. Entonces para $G = F \circ T$ se tiene que*

$$S^0_{ij}G = (\frac{\partial T}{\partial z_i})^t\,[(\mathbb{S}^0F)\circ T](\frac{\partial T}{\partial z_j}) - \Delta^{1/n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} S^k_{ij}G \cdot \frac{\partial \Delta^{-1/n+1}}{\partial z_k} + \frac{\partial^2 \Delta^{-1/n+1}}{\partial z_i \partial z_j}\right)\,,$$

*donde $\Delta = \det(\frac{\partial T}{\partial z})$.*

**Demostración:** Sabemos que $G = (\frac{v_1}{v_0}, \ldots, \frac{v_n}{v_0})$ donde $v_k$ son soluciones linealmente independientes de 2.1 con $P^k_{ij} = S^k_{ij}G$. Por otro lado tenemos que $G = F \circ T = (\frac{u_1}{u_0} \circ T, \ldots, \frac{u_n}{u_0} \circ T)$ donde $u_k$ son soluciones linealmente independientes de 2.1 con $P^k_{ij} = S^k_{ij}F$. Pero $det(\frac{\partial G}{\partial z}) = \det(\frac{\partial F}{\partial z}) \cdot \det(\frac{\partial T}{\partial z})$ por consiguiente

$$v_0 = u_0 \cdot \det(\frac{\partial T}{\partial z})^{-1/n+1} = u_0 w\,,$$

donde $w = \det(\frac{\partial T}{\partial z})^{-1/n+1}$. Entonces es evidente que $v_k = u_k w$. Derivando con respecto a $z_i$ y luego con respecto a $z_j$, se tiene que

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial z_i \partial z_j} = \sum_{l,m=1}^{n} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z_m \partial z_l}\frac{\partial T_m}{\partial z_i}\frac{\partial T_l}{\partial z_j} w + u_k \frac{\partial^2 w}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial z_l}\left(\frac{\partial T_l}{\partial z_i}\frac{\partial w}{\partial z_j} + \frac{\partial T_l}{\partial z_j}\frac{\partial w}{\partial z_i} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial z_i \partial z_j} w\right),$$

por lo tanto

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial z_i \partial z_j} = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial z_i}\right)^t \mathbb{S}^l F \left(\frac{\partial T}{\partial z_i}\right) \frac{\partial u_k}{\partial z_l} w + \left(\frac{\partial T}{\partial z_i}\right)^t \mathbb{S}^0 F \left(\frac{\partial T}{\partial z_i}\right) u_k w + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u_k}{\partial z_l}\left(\frac{\partial T_l}{\partial z_i}\frac{\partial w}{\partial z_j} + \frac{\partial T_l}{\partial z_j}\frac{\partial w}{\partial z_i} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial z_i \partial z_j} w\right) + u_k \frac{\partial^2 w}{\partial z_i \partial z_j}.$$

Por otro lado $v_k$ satisface el sistema (2.1), de donde se observa que

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial z_i \partial z_j} = \sum_{l=1}^{n} \left(S_{ij}^l G \nabla u_k \frac{\partial T}{\partial z_l} + u_k \frac{\partial w}{\partial z_l}\right) + S_{ij}^0 G\, u_k w,$$

y como $\{u_k\}$ son soluciones linealmente independientes se tiene que

$$\left(\frac{\partial T}{\partial z_i}\right)^t \mathbb{S}^0 F \left(\frac{\partial T}{\partial z_i}\right) w + \frac{\partial^2 w}{\partial z_i \partial z_j} = S_{ij}^0 G\, w + \sum_{l=1}^{n} S_{ij}^l G \frac{\partial w}{\partial z_l},$$

de donde dividiendo por $w = \Delta^{-1/n+1}$, la proposición queda establecida.

□

**Corolario** 2.2.1. *Sea $F$ una función holomorfa y localmente univalente y sea $T$ una transformación de Möbius. Entonces para $G = F \circ T$ se tiene que*

$$S_{ij}^0 G = (\frac{\partial T}{\partial z_i})^t [(\mathbb{S}^0 F) \circ T](\frac{\partial T}{\partial z_j}) - \Delta^{1/n+1} \sum_{k=1}^{n} S_{ij}^k G \cdot a_k\,,$$

*donde* $\Delta = \det(\frac{\partial T}{\partial z})$ *y* $a_k = \dfrac{\partial \Delta^{-1/n+1}}{\partial z_k}$.

**Corolario** 2.2.2. *Sea $F$ holomorfa localmente univalente y sea $G = F \circ R$ donde $R$ es una rotación, entonces*

$$S_{ij}^0 G(z) = \vec{a_i}^t \mathbb{S}^0 F(T(z))\, \vec{a_j},$$

*donde* $\vec{a_k} = \frac{\partial R}{\partial z_k}$.

**Definición** 2.2.2. *Definimos el operador Schwarziano al operador* $\mathcal{S}F(z) : T_z\Omega \to T_{F(z)}\Omega$ *como*

$$\mathcal{S}F(z)(\vec{v}) = \left(\vec{v}^t\mathbb{S}^1F(z)\vec{v},\, \vec{v}^t\mathbb{S}^2F(z)\vec{v},\, \ldots, \vec{v}^t\mathbb{S}^nF(z)\vec{v}\right)\,, \tag{2.4}$$

*donde* $\vec{v} \in T_z\Omega$.

La métrica de Bergman en $\mathbb{B}^n$ esta definida como el producto hermitiano dado por

$$g_{ij}(z) = \frac{n+1}{(1-|z|^2)^2}\left[(1-|z|^2)\delta_{ij} + \bar{z}_iz_j\right]. \tag{2.5}$$

Es bien conocido que el grupo de automorfismos de la bola unitaria en $\mathbb{C}^n$ son las transformaciones lineales dadas por

$$\sigma(z) = \frac{Az+B}{Cz+D},$$

donde $A$ es matriz de $n \times n$, $B$ es $n \times 1$, $C$ es $1 \times n$ y $D$ es $1 \times 1$ con

$$\begin{array}{rcl} A^t\overline{A} - C^t\overline{C} & = & \mathrm{Id}\,, \\ |D|^2 - B^t\overline{B} & = & 1\,, \\ A^t\overline{B} - C^t\overline{D} & = & 0\,, \end{array}$$

las cuales son transformaciones de Möbius de la forma dada en (2.2). Tales automorfismos son isometrías en la métrica de Bergman. Definimos la norma del operador *Schwarziano* como

$$\|\mathcal{S}F(z)\| = \sup_{\|\vec{v}\|=1} \|\mathcal{S}F(z)(\vec{v})\|\,,$$

donde $\|\,\vec{v}\,\| = \left[\sum g_{ij}v_i\overline{v_j}\,\right]^{1/2}$ es la norma de Bergman de $\vec{v} \in T_z\mathbb{B}^n$.

**Teorema** 2.2.1. *Sea* $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ *holomorfa localmente inyectiva y sea* $\sigma : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ *automorfismo de* $\mathbb{B}^n$. *Entonces*

$$\|\mathcal{S}(F \circ \sigma)(z)\| = \|\mathcal{S}F(\sigma(z))\|\,.$$

Es decir, el teorema afirma que la norma del operador Schwarziana es invariante bajo automorfismos de la bola, cosa que también ocurre en una variable compleja. ver [**25**].

**Demostración:** Sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}^k(F\circ\sigma) &= \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial z_k}{\partial w_l}(D\sigma)^t\mathbb{S}^l F\circ\sigma(D\sigma) \\
&= \left(\frac{\partial z_k}{\partial w_1},\dots,\frac{\partial z_k}{\partial w_n}\right)\begin{pmatrix}(D\sigma)^t\mathbb{S}^1F\circ\sigma(D\sigma)\\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (D\sigma)^t\mathbb{S}^nF\circ\sigma(D\sigma)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$(SF\circ\sigma)(z)(\vec{v}) = D\sigma^{-1}\begin{pmatrix}\vec{v}^t(D\sigma)^t\mathbb{S}^1F(\sigma(z))(D\sigma)\vec{v}\\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}^t(D\sigma)^t\mathbb{S}^nF(\sigma(z))(D\sigma)\vec{v}\end{pmatrix} = D\sigma^{-1}\begin{pmatrix}\vec{u}^t\mathbb{S}^1F(\sigma(z))\vec{u}\\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{u}^t\mathbb{S}^nF(\sigma(z))\vec{u}\end{pmatrix},$$

donde $\vec{u} = D\sigma(z)(\vec{v})$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{S}(F\circ\sigma)(z)(\vec{v})\| &= \|DG\sigma^{-1}\mathcal{S}F(\sigma(z))(\vec{u})\| \\
&= \|\mathcal{S}F(\sigma(z))(\vec{u})\|
\end{aligned}, \tag{2.6}$$

y como $\sigma$ es una isometría en la métrica de Bergman, el teorema se demuestra tomando supremos sobre todos los vectores unitarios $\vec{v}$.

□

Para la definición de la norma del operador $\mathcal{S}F$ se puede considerar cualquier métrica Hermitiana o incluso de Finsler. Dado que en la bola la métrica de Bergman coincide, salvo constantes, con la métrica de Kobayashi o de Caratheodory, la resultante norma de $\mathcal{S}F$ es igual. Este no será el caso en cualquier dominio. Además el Teorema 2.6 no será cierto en cualquier dominio ya que se requiere que sus automorfismos sean transformaciones de Möbius. Cabe señalar que el calcular la norma del operador Schwarziano en general no es una tarea fácil ya que la mtrica de Bergman no es conforme a la Euclideana, ni siquiera es diagonal para cualquier punto $z\in\mathbb{B}^n$. Presentamos un ejemplo que muestra la dificultad de calcular la norma del operador Schwarziano.

**Ejemplo** 2.2.1.

Sea

$$F_\delta(z_1,z_2) = (f(z_1),\frac{z_2}{1-z_1}),$$

donde

$$f(z_1) = \frac{1}{2\delta}\left[\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right)^\delta - 1\right],$$

de donde la función $F_\delta$ es holomorfa y localmente univalente en $\mathbb{B}^2$. Un cálculo directo muestra que

$$\mathbb{S}^1 F_\delta(z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\frac{\delta-1}{1-z_1^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S}^2 F_\delta(z) = \begin{pmatrix} \frac{2z_2(1-\delta)}{(1-z_1)^2(1+z_1)} & -\frac{2}{3}\frac{\delta-1}{1-z_1^2} \\ -\frac{2}{3}\frac{\delta-1}{1-z_1^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathcal{S}F_\delta(z)(\vec{v}) = \frac{2}{3}\frac{\delta-1}{1-z_1^2}(v_1^2, \frac{-3z_2}{1-z_1}v_1^2 - 2v_1v_2)\,.$$

Luego la norma de este operador viene dada por

$$\|\mathcal{S}F_\delta(z)\| = \sup_{\|(\vec{v})\|=1}\left|\frac{2}{3}\frac{\delta-1}{1-z_1^2}\right| \|(v_1^2, \frac{-3z_2}{1-z_1}v_1^2 - 2v_1v_2)\|\,,$$

es decir debemos encontrar el supremo de

$$\frac{3}{1-|z_1|^2+|z_2|^2}\Bigg((1-|z_2|^2)|v_1|^4 + 2Re\{z_1\overline{v_1}(\frac{-3z_2}{1-z_1}v_1^2 - 2v_1v_2)\overline{z_2}\}$$
$$+(1-|z_1|^2)\left|\frac{-3z_2}{1-z_1}v_1^2 - 2v_1v_2\right|^2\Bigg)$$

sobre los vectores $(v_1, v_2)$ tales que

$$\frac{3}{1+|z_1|^2+|z_2|^2}\left((1-|z_2|^2)|v_1|^2 + 2Re\{z_1\overline{v_1}v_2\overline{z_2}\} + (1-|z_1|^2)|v_2|^2\right) = 1\,.$$

En general no será una tarea sencilla calcular la norma de Bergman de $\mathcal{S}F$ en cualquier punto, es por esto que estudiamos la norma en algunos puntos. Así para $z_2 = 0$ y tomando $\delta > 1$ fácilmente tenemos que

$$\sup_{z\in\mathbb{B}^2}\|\mathcal{S}F_\delta(z_1,0)\| = \frac{4}{9}(\delta-1)\,.$$

Por otro lado si $z_1 = 0$ el cálculo no es tan sencillo como el anterior, sin embargo se puede probar que

$$\sup_{z\in\mathbb{B}^2}\|\mathcal{S}F_\delta(0,z_2)\| = \frac{2}{\sqrt{3}}(\delta-1)\,.$$

Para cualquier punto $z \in \mathbb{B}^n$ podemos calcular la norma de Bergman del operador $\mathcal{S}F_\delta$ numéricamente, con ayuda de computadora y AMPL (A Modeling Language for Mathematical Programming). Se obtienen resultados rápidos y eficientes los cuales muestran que

$$\sup_{z\in\mathbb{B}^2}\|\mathcal{S}F_\delta(z)\| = \frac{2}{\sqrt{3}}(\delta-1)\,.$$

## 2.3. Operador de Ropper-Suffridge

Sea $z\in\mathbb{B}^2$. Consideremos $f$ función localmente univalente en $\mathbb{D}$ de la forma $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$. Se define el operador de extensión de Ropper-Suffridge por

$$\Phi(f)(z_1,z_2)=F(z_1,z_2)=(f(z),\sqrt{f'(z_1)}z_2). \tag{2.7}$$

Escogemos la rama de la raíz cuadrada tal que $\sqrt{f'(0)}=1$. Note que si $f$ es univalente en $\mathbb{D}$ entonces $\Phi(f)$ es univalente en $\mathbb{B}^2$. Este operador fue introducido en **[27]** a modo de contruir un mapeo convexo en la bola Euclideana en $\mathbb{C}^n$ dada una función arbitraria convexa en el disco unitario. Es decir, este operador tiene la propiedad que si $f$ es una función convexa en el disco unitario entonces $F$ es mapeo convexo en $\mathbb{B}$.

Sea $F$ definida por la ecuación (2.7), entonces

$$DF(z_1,z_2)=\begin{pmatrix} f' & 0 \\ \frac{1}{2}z_2\frac{f''(z_1)}{\sqrt{f'(z_1)}} & \sqrt{f'(z_1)}\end{pmatrix}.$$

Un cálculo directo evidencia el rol que tiene el operador Schwarziano en varias variables complejas y cual es la semejanza de la derivada Schwarziana en una variable compleja con los coeficientes $\mathcal{S}^0_{ij}F$. En efecto,

$$\mathbb{S}^1F(z_1,z_2)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ y } \mathbb{S}^2F(z_1,z_2)=\begin{pmatrix}\frac{z_2}{2}Sf(z_1) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Por otro lado $F(z_1,z_2)=(\frac{u}{u_0},\frac{v}{u_0})$ donde $u_0=det(\frac{dF}{dz})^{-1/3}=f'^{-1/2}$, así que

$$\mathcal{S}^0_{11}F(z_1,z_2)=Sf(z_1)\,.$$

Entonces podemos afirmar que

$$\mathcal{S}F(z)(\vec{v})=(0,\frac{z_2}{2}Sf(z_1)v_1^2)\,,$$

de modo que

$$\|\mathcal{S}F(z)\|^2=\frac{1}{12}\frac{(1-|z_1|^2-|z_2|^2)^2(1-|z_1|^2)|z_2|^2|Sf(z_1)|^2}{(1-|z_2|^2)^2}\,,$$

luego si $f$ es univalente y tomando límites cuando $|z_1| \to 1$ y $|z_2| \to 1$ es fácil ver que

$$\|\mathcal{S}F(z)\| \leq \sqrt{3}\,.$$

Nótese que si $f$ es un automorfismo del disco unitario, entonces $\|\mathcal{S}F\| = 0$.

Ian Graham and Gabriela Khor **[10]**, introdujeron los operadores

$$\Phi_{n,\alpha}(f)(z) = F_\alpha(z) = (f(z_1), f'(z_1)^\alpha\, z') \qquad z \in \mathbb{B}^n\,, \tag{2.8}$$

donde $\alpha \in [0, 1/2]$ y $f$ es una función localmente univalente en $\mathbb{D}$. El operador $\Phi_{n,1/2}$ es análogo al operador de Roper-Suffridge definido por (2.7). Para $n = 2$, tenemos que

$$DF_\alpha(z) = \begin{pmatrix} f' & 0 \\ \alpha\, z_2 f''(f')^{\alpha-1} & (f')^\alpha \end{pmatrix}$$

de donde se tiene que $JF_\alpha(z) = (f'(z_1))^{\alpha+1}$, por lo cual

Estimaciones sobre la norma de Bergman de este operador las hemos omitido dada su dificultad.

CAPÍTULO 3

# Familia linealmente invariante(LIF)

## 3.1. Introducción

Ch. Pommerenke en sus celebrados articulos **[25]**,**[26]** introdujo la noción de familia linealmente invariante para funciones analíticas localmente univalentes de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots, z \in \mathbb{D}. \tag{3.1}$$

Si $f$ es una función analítica localmente univalente normalizada como (3.1) se define la transformación de Koebe de $f$ a la función $g$ dada por

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z_0 + z}{1 + \overline{z_0} z}\right) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2) f'(z_0)}, \quad z_0 \in \mathbb{D}. \tag{3.2}$$

De otro modo, sea $\phi$ un automorfismo de $\mathbb{D}$. La transformacón de Koebe dada por (3.2) se puede expresar como

$$g(z) = \Lambda_\phi(f)(z) = \frac{f \circ \phi(z) - f \circ \phi(0)}{(f \circ \phi)'(0)}.$$

**Definición** 3.1.1. *La familia $\mathcal{F}$ de funciones definidas en $\mathbb{D}$ es llamada familia linealmente invariante si para toda $f \in \mathcal{F}$*

(i) *$f$ es analítica localmente univalente de la forma (3.1),*
(ii) *$\Lambda_\phi(f) \in \mathcal{F}$ para todo $\phi \in Aut(\mathbb{D})$.*

Importantes propiedades de la familia $\mathcal{F}$ tales como teoremas de cubrimientos, crecimiento y distorsión son determinados por su orden, el cual es una noción básica en esta teoría, dado por

$$ord\,\mathcal{F} = \sup_{f \in \mathcal{F}} a_2(f).$$

**Ejemplo** 3.1.1.

Sea $\mathcal{S}$ la familia de funciones univalentes en $\mathbb{D}$ normalizadas como en (3.1), entonces $\mathcal{S}$ es una familia linealmente invariante. Además Bieberbach **[3]** probó que si $f \in \mathcal{S}$ entonces $|a_2| \leq 2$, ocurriendo la igualdad si y sólo si para una rotación de la función de Koebe $k(z) = z/(1-z)^2$. Es decir el orden de $\mathcal{S}$ es 2.

**Ejemplo** 3.1.2.

Sea $\mathcal{K}$ la familia de funciones convexas en $\mathbb{D}$, es decir aquellas funciones cuya imagen es un dominio convexo, normalizadas como en (3.1). Esta resulta ser una familia linealmente invariante cuyo orden es igual a 1.

Pommerenke mostró (ver [**25**]) que la familia de funciones localmente univalentes definidas en $\mathbb{D}$

$$\mathcal{F}_\alpha = \{f : f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ \|Sf\| \leq \alpha\},$$

donde

$$\|Sf\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |Sf(z)|(1-|z|^2)^2$$

resulta ser una familia linealmente invariante cuyo orden se puede determinar por un método variacional y está dado por

$$ord\,\mathcal{F}_\alpha = \sqrt{1+\frac{\alpha}{2}}.$$

Del Teorema de Nehari 1.2.1 se tiene que $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{F}_6$. Además se puede establecer el siguiente teorema sobre radio de univalencia de la familia $\mathcal{F}_\alpha$ para cualquier $\alpha > 2$.

**Teorema** 3.1.1. *Si $f \in \mathcal{F}_\alpha$ con $\alpha > 2$ entonces $f$ es univalente en cada disco centrado en $z$ y de radio hiperbólico $\rho$ dado por*

$$\rho = \frac{\pi/2}{\sqrt{\frac{1}{2}\,\alpha - 1}}.$$

**Demostración:** De (1.5) se tiene que basta con estimar el primer cero la función $u(x)$ la cual es solución de la ecuación (1.4) con $u(0) = 1$ y $u'(0) = 0$. Ya que se puede obtener de manera explícita la función $u$ (ver [**12**]) se tiene que su primer cero es en $x_0$ dado por

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{1}{2}\,\alpha-1}},$$

por lo tanto $f$ es univalente en $|z| < x_0$ y debido a la invarianza de $\mathcal{F}_\alpha$ tenemos que $f$ es univalente en cada disco centrado en $z$ y de radio hiperbólico $\rho = \frac{\pi/2}{\sqrt{\frac{1}{2}\,\alpha-1}}$.

□

Consecuentemente si $f \in \mathcal{F}_\alpha$ entonces $f$ es univalente en $\mathbb{D}_r$ con $r$ dado por

$$r = \frac{e^s-1}{e^s+1},$$

donde $s = \frac{\pi/2}{\sqrt{\frac{1}{2}\alpha - 1}}$.

Consideremos las funciones normalizadas y localmente biholomorfas en $\mathbb{B}^n$,

$$\mathcal{LS} = \{F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n \text{ tal que } F(0) = 0, \ \ DF(0) = \mathrm{Id.}\}$$

Sea la transformación de Koebe $\Lambda_\phi(F)$ dada por

$$\Lambda_\phi(F)(z) = [D\phi(0)]^{-1}[DF(\phi(0))]^{-1}(F(\phi(z)) - F(\phi(0)))$$

para $F \in \mathcal{LS}$ y $\phi \in Aut(B^n)$.

**Definición** 3.1.2. *La familia $\mathcal{F}$ de funciones biholomorfas es llamada linealmente invariante(L.I.F.) si*

(i) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{LS}(B^n)$.
(ii) $\Lambda_\phi(F)(z) \in \mathcal{F}$ *para todo* $F \in \mathcal{F}$ *y* $\phi \in Aut(B^n)$.

**Definición** 3.1.3. *Para una familia linealmente invariante $\mathcal{F}$, sea*

$$ord\,\mathcal{F} = \sup_{F \in \mathcal{F}} \sup_{|\vec{v}|=1} \left| tr\left\{\frac{1}{2}D^2 f(0)(\vec{v}, \cdot)\right\}\right|.$$

Es sabido que el orden de una L.I.F. $\mathcal{F}$ se puede reescribir como

$$ord\,\mathcal{F} = \sup\left\{\frac{1}{2}\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_j}{\partial z_j \partial z_1}(0)\right| : F \in \mathcal{F}\right\}.$$

(ver [**22**]).

Pfaltzgraff y Suffridge [**23**] recientemente han introducido la noción de *norma orden*, la cual tiene implicaciones importantes en el estudio de propiedades geométricas de mapeos localmente inyectivos tales como convexidad, univalencia, etc. Consideremos la expansión de Taylor

$$\begin{aligned} F(z) &= z + \frac{D^2F(0)}{2}(z, z) + \dots \\ &= z + A_2(z, z) + A_3(z, z, z) + \cdots, \end{aligned}$$

donde $A_m(\cdot, \dots, \cdot) = (1/m!)D^m F(0)$, $m = 1, 2, \dots$, es una forma $m$-lineal simétrica. Entonces

$$\|A_m\| = \sup_{|\lambda| \le 1} |A_m(\lambda, \dots, \lambda)|.$$

**Definición** 3.1.4. *Se define la norma orden de una familia linealmente invariante $\mathcal{F}$ como*

$$\|Ord\|\mathcal{F} = \sup_{f\in\mathcal{F}} \left\{ \frac{1}{2}\|D^2 f(0)\| \right\}.$$

Pflatzgraff y Suffridge [23], demostraron que $\|Ord\|\mathcal{F} \geq 1$ para cualquier L.I.F. $\mathcal{F}$ y si la norma orden de una familia es finita entonces esta resulta ser normal.

### 3.2. La Familia de funciones $\mathcal{F}_\alpha$

Como hemos mencionado anteriormente, en este capítulo demostraremos que la familia de funciones holomorfas localmente univalentes definidas en $\mathbb{B}^n$ normalizadas a $F(0) = 0$, $DF(0) = \mathrm{Id}$ y tales que $\|\mathcal{S}F\| \leq \alpha$ es una *familia linealmente invariante* en $\mathbb{C}^n$. Además mostraremos que esta familia $\mathcal{F}_\alpha$ es normal para $\alpha < \infty$ y estimaremos su *norma orden*. Para esto necesitaremos algunos lemas.

Sea $\mathcal{F}_\alpha$ la familia de funciones holomorfas localmente univalentes definidas definida como

$$\mathcal{F}_\alpha = \{F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n \mid F(0) = 0,\quad DF(0) = \mathrm{Id},\quad \|\mathcal{S}F(z)\| \leq \alpha\}.$$

Por Teorema 2.2.1 esta familia es una L.I.F. y nuestro principal objetivo será probar que es normal. Para esto necesitaremos los siguientes lemas.

**Lema** 3.2.1. *Sea $F \in \mathcal{F}_\alpha$ un mapeo holomorfo localmente inyectivo en y sea $z = (z_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{B}^n$. Entonces*

(i)
$$|S^1_{11}F(z)| \leq \frac{\sqrt{n+1}\,\alpha}{1-|z|^2},$$

(ii)
$$|S^1_{ii}F(z)| \leq \sqrt{n+1}\,\alpha, \qquad i = 2, 3, \ldots, n.$$

(iii)
$$|S^k_{11}F(z)| \leq \frac{\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z|^2)^{3/2}}, \qquad k = 2, 3, \ldots, n.$$

(iv)
$$|S^k_{1j}F(z)| \leq \frac{2\sqrt{n+1}\,\alpha}{1-|z|^2}, \qquad k, j = 2, 3, \ldots, n.$$

(v)
$$|S^1_{1j}F(z)| \leq \frac{2\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z|^2)^{1/2}}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

(vi)

$$|S^1_{ij}F(z)| \leq 2\sqrt{n+1}\,\alpha, \qquad i \neq j \neq 1.$$

(vii)

$$|S^k_{ii}F(z)| \leq \frac{\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z|^2)^{1/2}}, \qquad k, i = 2, 3, \ldots, n.$$

(viii)

$$|S^k_{ij}F(z)| \leq \frac{2\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z|^2)^{1/2}}, \qquad k \neq 1,\ i \neq j \neq 1.$$

**Demostración:** Sabemos de la definición de la métrica de Bergman que

$$g_{ij}(z_1, 0, 0, \ldots, 0) = \frac{n+1}{(1-|z_1|^2)},$$

para todo $i, j \neq 1$, y

$$g_{11}(z_1, 0, 0, \ldots, 0) = \frac{n+1}{(1-|z_1|^2)^2}.$$

Sea $\vec{v}$ un vector unitario en esta métrica, con esto $\|\mathcal{S}F(z)(\vec{v})\| \leq \alpha$, luego tomando $\vec{v} = (\lambda, 0, \ldots, 0)$ con $\lambda = (1-|z_1|^2)/\sqrt{n+1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}F(z)(\vec{v})\|^2 &= (n+1)\left(\frac{|S^1_{11}\lambda^2|^2}{(1-|z_1|^2)^2} + \frac{|S^2_{11}\lambda^2|^2}{1-|z_1|^2} + \cdots + \frac{|S^n_{11}\lambda^2|^2}{1-|z_1|^2}\right) \\ &\leq \alpha^2 \end{aligned},$$

de donde se demuestran $(i)$ y $(iii)$. Ahora consideremos el vector unitario $\vec{v} = (0, 0, \ldots \lambda_k, 0, \ldots, 0)$ con $\lambda_k^2 = (1-|z_1|^2)/(n+1)$. Análogamente a lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}F(z)(\vec{v})\|^2 &= (n+1)\left(\frac{|S^1_{kk}\lambda_k^2|^2}{(1-|z_1|^2)^2} + \frac{|S^2_{kk}\lambda_k^2|^2}{1-|z_1|^2} + \cdots + \frac{|S^n_{kk}\lambda_k^2|^2}{1-|z_1|^2}\right) \\ &\leq \alpha^2, \end{aligned}$$

entonces $(ii)$ y $(vii)$ quedan demostradas. Obtenemos $(vi)$ y $(vii)$ de igual manera considerando $\vec{v} = (0, \ldots, \lambda_i, 0, \ldots, \lambda_j, 0, \ldots, 0)$ donde $\lambda_i = \lambda_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1-|z_1|^2)^{1/2}}{\sqrt{n+1}}$. Finalmente, tomando $\vec{v} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_j, 0, \ldots, 0)$ con $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1-|z_1|^2)}{\sqrt{n+1}}$ y $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1-|z_1|^2)^{1/2}}{\sqrt{n+1}}$ establecemos $(iv)$ y $(v)$.

□

**Lema** 3.2.2. *Si $F \in \mathcal{F}_\alpha$, entonces*

(i)
$$|S^0_{11}F(z_1,0,\ldots,0)| \leq \frac{C(n,\alpha)}{(1-|z_1|^2)^2},$$
(ii)
$$|S^0_{1j}F(z_1,0,\ldots,0)| \leq \frac{K(n,\alpha)}{(1-|z_1|^2)^{3/2}},$$
*donde*
$$C(n,\alpha) = (4n^2+2n-2+\frac{n+1}{n-1})\,\alpha^2 + (4\sqrt{n+1}+8\frac{\sqrt{n+1}}{n-1})\,\alpha$$
*y*
$$K(n,\alpha) = (16+3\sqrt{2})\sqrt{n+1}\,\alpha + 6(n^2-1)\,\alpha\,.$$

**Demostración:** Derivando (2.1) obtenemos
$$\begin{aligned} S^0_{ii}F(z) &= -\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_k}S^k_{ii}F(z) + \frac{1}{n-1}\sum_{j,k=1}^{n} S^k_{ij}F(z)S^j_{ki}F(z)\,,\\ S^0_{ij}F(z) &= \frac{\partial}{\partial z_j}S^i_{ii}F(z) - \frac{\partial}{\partial z_i}S^i_{ij}F(z) + \sum_{k=1}^{n} S^k_{ii}F(z)S^i_{kj}F(z)\\ &\quad -\sum_{k=1}^{n} S^k_{ij}F(z)S^i_{ki}F(z)\,, \quad i\neq j\,. \end{aligned}$$
Así, los coeficintes $S^0_{ij}$ dependen de los coeficintes $S^k_{ij}$. Sea $F(z_1) = F(z_1,0,0,\ldots,0)$, entonces para todo mapeo en $\mathcal{F}_\alpha$ se tiene que
$$|S^0_{11}F(z_1)| \;\leq\; \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial z_k}S^k_{11}F(z_1)\right| + \frac{1}{n-1}\sum_{j,k=1}^{n}|S^k_{1j}F(z_1)||S^j_{k1}F(z_1)|,$$
$$\begin{aligned} |S^0_{11}F(z_1)| \;\leq\;& \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial z_k}S^k_{11}F(z_1)\right| + \frac{1}{n-1}\sum_{j,k=2}^{n}|S^k_{1j}F(z_1)||S^j_{k1}F(z_1)|\\ &+\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}\left|S^k_{11}F(z_1)\right||S^1_{k1}F(z_1)| + \frac{1}{n-1}\left|S^1_{11}F(z_1)\right|^2, \end{aligned}$$
luego por Lema 3.2.1 se deduce que
$$\begin{aligned} |S^0_{11}F(z_1,0,\ldots,0)| \;\leq\;& \frac{4(n+1)(n-1)\alpha^2}{(1-|z_1|^2)^2} + \frac{2(n+1)\alpha^2}{(1-|z_1|^2)^2} + \frac{(\frac{n+1}{n-1})\,\alpha^2}{(1-|z_1|^2)^2}\\ &+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial z_k}S^k_{11}F(z_1)\right|. \end{aligned}$$
Pero $F \in \mathcal{F}_\alpha$, así que tomando el vector unitario en la métrica de Bergman $\vec{v} = (\lambda,0,\ldots,0)$ donde $|\lambda|^2 = \frac{(1-|z_1|^2-|z_k|^2)^2}{(n+1)(1-|z_k|^2)}$, muestra que

$$(3.3)\quad \left|S_{11}^k F(z_1,0,\ldots 0,z_k,0,\ldots,0)\right| \leq \frac{\sqrt{n+1}\,\alpha(1-|z_k|^2)}{(1-|z_1|^2-|z_k|^2)^{3/2}}\,, \quad k\neq 1\,.$$

Considerando a $S_{11}^k F(z_1,0,\ldots 0,z_k,0,\ldots,0)$ como una función holomorfa de la variable $z_k$, mediante la fórmula integral de Cauchy concluimos que

$$(3.4)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial z_k} S_{11}^k F(z_1,0,\ldots,0)\right| \leq \frac{4\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z_1|^2)^2}\,, \quad k\neq 1.$$

Similarmente,

$$(3.5)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial z_1} S_{11}^1 F(z_1,0,\ldots,0)\right| \leq \frac{8\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z_1|^2)^2}\,.$$

Así, usando (3.4) y (3.5) se tiene que

$$\begin{aligned}|S_{11}^0 F(z_1,0,\ldots,0)| \;&\leq\; \frac{(4n^2+2n-2)\alpha^2}{(1-|z_1|^2)^2}+\frac{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\alpha^2}{(1-|z_1|^2)^2}+\frac{4\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z_1|^2)^2}\\ &\quad +\frac{1}{n-1}\frac{8\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z_1|^2)^2}\,.\end{aligned}$$

Por otro lado, para $j\neq 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\left|S_{1j}^0 F(z_1)\right| \;&\leq\; \sum_{k=1}^{n}\left|S_{11}^k F(z_1)\right|\left|S_{kj}^1 F(z_1)\right|+\left|S_{1j}^k F(z_1)\right|\left|S_{k1}^1 F(z_1)\right|\\ &\quad +\left|\frac{\partial}{\partial z_j} S_{11}^1 F(z_1)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial z_1} S_{1j}^1 F(z_1)\right|\\ &\leq\; \frac{6\alpha(n^2-1)}{(1-|z_1|^2)^{3/2}}+\left|\frac{\partial}{\partial z_j} S_{11}^1 F(z_1)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial z_1} S_{1j}^1 F(z_1)\right|\,.\end{aligned}$$

Luego, nuevamente por la fórmula integral de Cauchy, obtenemos que

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_1} S_{1j}^1 F(z_1)\right| \leq \frac{16\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z_1|^2)^{3/2}}\,,$$

y análogamente podemos probar que

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_j} S_{11}^1 F(z_1)\right| \leq \frac{3\sqrt{2}\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z_1|^2)^{3/2}}\,.$$

Con esto podemos concluir que

$$|S^0_{1j}F(z_1)| \leq \frac{6\alpha(n^2-1)}{(1-|z_1|^2)^{3/2}} + \frac{16\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z_1|^2)^{3/2}} + \frac{3\sqrt{2}\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|z_1|^2)^{3/2}},$$

con lo cual el teorema que demostrado.

□

Es claro que si $u(z_1,\ldots,z_n)$ es una solución del sistema (2.1), entonces $u(z_1) = u(z_1, 0, \ldots, 0)$ satisface

$$\begin{aligned} u'' &= S^1_{11}u' + \sum_{j=2}^{n} S^j_{11}\varphi_j + S^0_{11}u\,, \\ \varphi'_k &= S^1_{1k}u' + \sum_{j=2}^{n} S^j_{1k}\varphi_j + S^0_{1k}u\,, \quad k = 2,3,\ldots,n\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde $\varphi_k(z) = \dfrac{\partial u}{\partial z_k}$.

**Lema** 3.2.3. *Sean $P = P(x)$ y $Q = Q(x)$ funciones continuas definidas en $[0,1)$, con $Q(x) \geq 0$. Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ tales que*

$$u'' + Pu + Q \geq 0\,,\ u(0) = 1\,,\ u'(0) = 0\,,$$

$$v'' + Pv + Q = 0\,,\ v(0) = 1\,,\ v'(0) = 0\,.$$

*Entonces $u \geq v$, en $[0, x_0)$ donde $x_0$ es el primer cero de $v$.*

**Demostración:** Para $\varepsilon > 0$ sea $u_\varepsilon = u + \varepsilon y$ donde $y$ es solución de

$$y'' + Py = 0\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1.$$

Entonces $w = u'_\varepsilon v - v' u_\varepsilon$ satisface $w(0) = \varepsilon > 0$ y $w' \geq Q(u_\varepsilon - v)$. Por las condiciones iniciales de $u_\varepsilon$ y $v$, la función $w$ tiene $w' > 0$ en un intervalo $(0, r)$. Pero entonces $w > 0$ (en efecto, $\geq \varepsilon$) en este intervalo, lo cual implica que $u'_\varepsilon/u_\varepsilon > v'/v$ si $v > 0$, así $u_\varepsilon > v$. Se sigue de este argumento que el primer cero de $u_\varepsilon$ no puede ocurrir antes que el primer cero de $v$, y el lema se obtiene tomando $\varepsilon \to 0$.

□

**Lema** 3.2.4. *Sea $u$ una solución (2.1) con $u(0) = 1$, $\nabla u(0) = 0$ y $P^k_{ij} = S^k_{ij}F$ donde $F \in \mathcal{F}_\alpha$. Entonces existen constantes $r > 0$ y $\delta > 0$ tales que $|u| > \delta > 0$ para $|z| < r$.*

**Demostración:** Sea $z_0 \in \mathbb{B}^n$ un cero de $u$ de norma Euclideana mínima, esto es, $u(z_0) = 0$ y $u(z) \neq 0$ para todo $|z| < |z_0| = r_0$. Ya que $\mathcal{F}_\alpha$ es una familia linealmente invariante podemos asumir que $z_0 = (x_0, 0, \ldots, 0)$. Luego, es suficiente estudiar los ceros de la unción $u(x) =$

$u(x,0,\ldots,0)$ en $0 < x < 1$. Consideremos $F(x) = F(x,0,\ldots,0)$, entonces $u(x)$ y $\varphi_k(x) = \frac{\partial u}{\partial z_k}(x,0,\ldots,0)$ satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} u''(x) &= S^1_{11}F(x)u'(x) + \sum_{k=2}^{n} S^k_{11}F(x)\varphi_k(x) + S^0_{11}F(x)u(x)\,, \\ \varphi_j'(x) &= S^1_{1j}F(x)u'(x) + \sum_{k=2}^{n} S^k_{1j}F(x)\varphi_k(x) + S^0_{1j}F(x)u(x)\,, \end{aligned} \tag{3.7}$$

con $j = 2,\ldots,n$, y condiciones iniciales $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ y $\varphi_k(0) = 0$. Llamando a la función vectorial $\varphi(x)$ definida como

$$\varphi(x) = (u'(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), u(x))\,, \tag{3.8}$$

podemos reescribir el sistema (3.7) como,

$$\varphi'(x) = A(x)\varphi(x)\,, \quad \varphi(0) = (0,0,\ldots,1)\,,$$

donde $A(x)$ es la matriz de coeficientes del sistema la cual es de $(n+1)\times(n+1)$. Sea $f^2(x) = \|\varphi(x)\|^2$ la función real definida por la norma Euclideana de $\varphi(x)$. Luego, usando $\cdot$ para representar el producto interno Euclideano usual de vectore en $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$ tenemos que

$$f'(x)f(x) = \varphi'(x)\cdot\varphi(x) = A(x)\varphi(x)\cdot\varphi(x)\,,$$

por consiguiente,

$$f'(x)f(x) \le \|A(x)\|\|\varphi(x)\|^2 = \|A(x)\|f^2(x),$$

así

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \le \|A(x)\|\,.$$

Como $f(0) = 1$ concluimos que $f(x) \le e^{\int_0^x p(s)ds}$ donde $p$ es de la forma $p(x) = M/(1-x^2)^2$, donde $M$ es una constante. Esta cota para $\|A(x)\|$ es obtenida a partir de los Lemas 3.2.2 y 3.2.1. Entonces en particular

$$|u(x)| \le e^{\int_0^x p(s)\,ds}\,, \quad |u'(x)| \le e^{\int_0^x p(s)\,ds}. \tag{3.9}$$

Definiendo $U^2(x) = |u(x)|^2$, donde $U(x_0) = 0$, obtenemos que $2UU' = 2Re\{u'\bar{u}\}$, por lo tanto

$$(U')^2 + UU'' = Re\{u''\bar{u}\} + |u'|^2, \quad U(0) = 1\,, U'(0) = 0\,.$$

Pero $|U'| \le |u'|$, entonces

$$UU'' \ge Re\{u''\bar{u}\}\,, \tag{3.10}$$

usando esto en (3.7) se sigue que

$$UU'' \geq Re\{S_{11}^0 F(x)\}U^2 + Re\{q(x)\bar{u}\}, \tag{3.11}$$

donde $q(x) = S_{11}^1 F(x)u'(x) + \sum_{k=2}^{n} S_{11}^k F(x)\varphi_k(x)$, luego

$$U'' \geq -\left|S_{11}^0 F(x)\right| U - |q(x)|,$$

o

$$U'' + P(x)U + Q(x) \geq 0, \tag{3.12}$$

donde $P$ y $Q$ son cotas para $|S_{11}^0 F(x, 0, \ldots, 0)|$ and $|q(x)|$, respectivamente, obtenidas de los Lemas 3.2.1 y 3.2.2. Ahora, por Lema 3.2.3 se tiene que $U \geq v$ en $[0, x_0')$ con $v$ solución de $v'' + Pv + Q = 0$, $v(0) = 1$, $v'(0) = 0$ y $x_0'$ su primer cero. Luego $x_0' < x_0$ Entonces, tomando $r < x_0'$ se tiene lo deseado.

□

**Observación:** Es deseable estimar el primer cero de la función $v$. En efecto, probamos que $|S_{11}^0 F(x, 0, \ldots, 0)| \leq c(n, \alpha)(1 - x^2)^{-2}$, donde $c = c(n, \alpha)$ es una constante. También uno puede obtener de los Lemas 3.2.1 y 3.2.2 que existe una constante $k > 0$ que depende de $n$ y $\alpha$, tal que una cota para $|q(x)|$ de la forma

$$|q(x)| \leq \frac{M(1+x)^k}{(1-x^2)^{1+k/2}},$$

donde $M = \sqrt{n(n+1)}\,\alpha$ (ver sección 3.3). Entonces $v$ es solución de

$$v'' + \frac{c}{(1-x^2)^2} v + \frac{M(1+x)^k}{(1-x^2)^{1+k/2}} = 0, \; v(0) = 1, \; v'(0) = 0,$$

lo cual en general, no podrá ser resuelto analíticamente. Sin embargo, con la ayuda de métodos numéricos se puede dar una respueta satisfactoria para constantes $c$, $M$ y $\delta$ dadas. Pero si $k < 2$, por técnicas de comparación podemos demostrar que el primer cero de $v$ no ocurre antes que el primer cero de $w$, donde

$$w'' + \frac{c}{(1-x^2)^2} w + \frac{4M}{(1-x^2)^2} = 0, \; w(0) = 1, \; w'(0) = 0,$$

la cual puede ser determinada de manera explícita. En efecto, la solución $y_c$ de

$$y'' + \frac{c}{(1-x^2)^2} y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0,$$

es bien conocida por E. Kamke [12] y viene dada por

$$y_c(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{2}\left[\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-(\sqrt{1-c})/2} + \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{(\sqrt{1-c})/2}\right], & c \le 1 \\ \sqrt{1-x^2}\cos\left(\dfrac{\sqrt{c-1}}{2}\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right), & c > 1 \end{cases}$$

y la solución $w$ esta dada por

$$w = (4M+1)\, y_c - 4M\,,$$

la cual tiene el primer cero cuando $y_c(x) = \dfrac{4M}{1+4M}$.

**Teorema** 3.2.1. *La familia $\mathcal{F}_\alpha$ es normal para $\alpha < \infty$.*

**Demostración:** Sea $F \in \mathcal{F}_\alpha$. Por la proposición 2.1.1 se tiene que

$$F = (\frac{u_1}{u_0}, \ldots, \frac{u_n}{u_0}) = (f_1, \ldots, f_n),$$

donde $u_i$ y $u_0$ son soluciones linealmente independientes del sistema (2.1) tal que $DF(0) = \mathrm{Id}$, es decir $\dfrac{\partial u_i}{\partial z_k}(0) = 0$, para todo $k \neq i$ y $\dfrac{\partial u_i}{\partial z_i}(0) = 1$ para $i = 1, \ldots, n$. Además $u_0(0) = 1$, donde

$$u_0 = (detDF(z))^{-1/(n+1)}.$$

Ver Yoshida [**29**].

Por otro lado

$$A_2(z,z) = A_2(z_1, \ldots, z_n) = \begin{pmatrix} Hessf_1(0)(z_1, \ldots, z_n) \\ Hessf_2(0)(z_1, \ldots, z_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Hessf_n(0)(z_1, \ldots, z_n) \end{pmatrix}$$

donde un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial z_i \partial z_j}(0) = \frac{\partial^2 u_k}{\partial z_i \partial z_j}(0) - \delta_{ki}\frac{\partial u_0}{\partial z_j}(0) - \delta_{kj}\frac{\partial u_0}{\partial z_i}(0)\,.$$

Dado que $u_i$ y $u_0$, son soluciones del sistema (2.1) con $P_{ij}^k = \mathbb{S}_{ij}^k F$ y por las condiciones iniciales establecidas anteriormente, tenemos que

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial z_i \partial z_j}(0) = S_{ij}^k F(0)\,, \quad k = 1, \ldots, n,$$

por lo tanto

$$Hess f_k(0) = \mathbb{S}^k F(0) - (\delta_i^k \frac{\partial u_0}{\partial z_j}(0))_{ij} - (\delta_j^k \frac{\partial u_0}{\partial z_i}(0))_{ji} \,. \tag{3.13}$$

Así, claramente si $\left|\frac{\partial u_0}{\partial z_j}(0)\right|$ con $j = 1, \ldots, n$, son uniformemente acotados para la familia $\mathcal{F}_\alpha$, con $\alpha < \infty$, se tiene que $|A_2(z)| < \infty$.

Consideremos la composición $G = T \circ F$, donde $T$ es la transformación de Möbius dada por

$$T(z) = (\frac{z_1}{1 + a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n}, \ldots, \frac{z_n}{1 + a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n}) = \frac{z}{1+ < z, \overline{a} >},$$

donde $< z, w >= z_1\overline{w_1} + \cdots + z_n\overline{w_n}$. Entonces por Proposición 2.1.1 tenemos que

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{F(z)}{1+ < F(z), \overline{a} >}, \\ G(z) &= (\frac{f_1}{1 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n}, \ldots, \frac{f_n}{1 + a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n}), \\ G(z) &= (\frac{u_1}{u_0 + a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n}, \ldots, \frac{u_n}{u_0 + a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n}) = (\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_n), \\ G(z) &= (\frac{\widetilde{u}_1}{\widetilde{u}_0}, \ldots, \frac{\widetilde{u}_n}{\widetilde{u}_0}), \end{aligned}$$

por consiguiente $\widetilde{u_0} = u_0 + a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$ y $\widetilde{u_i} = u_i$, de donde derivando y escogiendo $a_k = \frac{\partial u_0}{\partial z_k}(0)$ con $k = 1, \ldots, n$, obtenemos que $\nabla(\widetilde{u}_0)(0) = 0$. Aun cuando esta normalización puede introducir singularidades en $G$, se demostrará que existe una subbola de radio fijo donde $G$ es holomorfa. Para esto se demostará que $\widetilde{u}_0$, no tiene ceros en dicha subbola. Se tiene que $\widetilde{u}_0$, satisface el sistema con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widetilde{u}_0}{\partial z_i \partial z_j}(z) &= \sum_{k=1}^{2} \mathbb{S}_{ij}^k F(z) \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial z_k} + S_{ij}^0 F(z) \widetilde{u}_0(z) \\ \widetilde{u}_0(0) &= 1 \\ \nabla \widetilde{u}_0(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Luego, por el Lema 3.2.4, $\widetilde{u}_0$ no tiene ceros en $B_r$ para $r > 0$ independiente de $F$. Por otro lado, ya que para $i = 1, \ldots, n$ cada $\widetilde{u}_i$ satisface que $\widetilde{u}_i(0) = 0$, $|\nabla \widetilde{u}_i(0)| = 1$, de (2.1) y las cotas de los lemas 3.2.1 y 3.2.2 es fácil ver que las funciones $\widetilde{u}_i$ serán uniformemente acotadas sobre subconjuntos compactos. Por lo tanto, la clase de funciones $G$ obtenidas con estas normalizaciones es normal en $|z| < r_0$ con $r_0 < r$, entonces existe $s_0 > 0$ tal que $G(\mathbb{B}^n_{r_0}) \supset \mathbb{B}^n_{s_0}$. Como

$$F = \left(\frac{\widetilde{f}_1}{1 - a_1\widetilde{f}_1 - \cdots - a_n\widetilde{f}_n}, \ldots, \frac{\widetilde{f}_n}{1 - a_1\widetilde{f}_1 - \cdots - a_n\widetilde{f}_n}\right),$$

es holomorfa y además $G = (\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_n)$ cubre una bola de radio $s_0$, se sigue que $|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 \leq \frac{1}{s_0^2}$. Esto muestra que $|\nabla u_0(0)| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}$ esta acotado uniformemente, con lo que el teorema queda establecido.

□

**Teorema** 3.2.2.

$$\|Ord\|\mathcal{F}_\alpha \leq \frac{\sqrt{n+1}}{2}\alpha + \lambda_\alpha,$$

*donde* $\lambda_\alpha = \sup_{F \in \mathcal{F}_\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial u_0}{\partial z_k}(0)\right|$.

**Observación:** Al igual que en una variable compleja, este teorema establece una relación entre la norma orden de la familia $\mathcal{F}_\alpha$ y la norma del operador Schwarziana, no concluyendo una relación entre la norma orden de cualquier familia linealmente invariante y la Schwarziana.

**Demostración:** Sea $F$ una función holomorfa localmente univalente en $\mathcal{F}_\alpha$, de la ecuación (3.13) se tiene que

$$D^2F(0)(\cdot,\cdot) = \mathcal{S}F(0)(\cdot,\cdot) - \Lambda(0)(\cdot,\cdot),$$

donde $\Lambda(0) = (\delta_i^k \frac{\partial u_0}{\partial z_j}(0))_{ij} - (\delta_j^k \frac{\partial u_0}{\partial z_i}(0))_{ji}$. Así, también tenemos que

$$|A_2(F)| \leq \frac{\sqrt{n+1}}{2}\|\mathcal{S}F(0)\| + \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial u_0}{\partial z_k}(0)\right|, \tag{3.14}$$

por consiguiente obtenemos,

$$\|Ord\|F_\alpha \leq \frac{\sqrt{n+1}}{2}\alpha + \lambda_\alpha.$$

□

**Observación:** Como vimos en el Capítulo 2, podemos calcular para $n = 2$, numéricamente que $\|\mathcal{S}F_\delta\| = \frac{2}{\sqrt{3}}(\delta - 1)$. Pfaltzgraff y Suffridge **[23]** mostraron que la norma orden de la familia linealmente invariante generada por $F_\delta$ es igual a $\delta$. Entonces escogiendo $\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + 1$ se tiene que

$$\|SF_\delta\| = \alpha\,,$$

de donde $F_\delta \in \mathcal{F}_\alpha$ y por lo tanto

$$\|Ord\|\mathcal{F}_\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + 1\,.$$

Z. Nehari [**16**], probó que si $f$ pertenecía a la familia $\mathcal{S}$ de funciones univalentes en $\mathbb{D}$, entonces la norma de $Sf$ estaba acotada por 6(ver Teorema 1.6). El siguiente corolario muestra que este hecho no es cierto en varias variables complejas.

**Corolario** 3.2.1. *Para la familia $\mathcal{S}$ de funciones univalentes en $\mathbb{B}^n$, no existe $\alpha < \infty$ tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_\alpha$.*

**Demostración:** Si no, aplicando el teorema anterior se tiene que $ord\,\mathcal{S} < \infty$, lo cual es falso.

□

Este hecho nos muestra la naturaleza distinta de la familia de funciones univalentes en la bola unitaria en una y varias variables complejas. En efecto, la familia de funciones $\mathcal{S}$ en una variable compleja es una familia compacta, lo que no ocurre en más dimensiones complejas.

**Corolario** 3.2.2. *Sea $F$ una función convexa normalizada en $\mathbb{B}^2$. Entonces para todo $z \in \mathbb{B}^2$*

$$\|SF(z)\| \leq \alpha_K\,,$$

*donde* $\alpha_K = 3{,}0717$.

**Demostración:** Barnard, FitzGerald y Gong [**1**], dieron una estimación para el orden de la familia de funciones convexas normalizadas $K(\mathbb{B}^2)$, la cual viene dada por

$$\frac{3}{2} \leq ordK(\mathbb{B}^2) \leq 1{,}761.$$

Sabemos de la demostración del teorema (3.14) y tomando norma Euclideana de estos operadores, que denotaremos $|\ |$, tenemos que

$$|SF(0)(\vec{v})| \leq |D^2F(0)(\vec{v})| + |\Lambda(0)(\vec{v})|.$$

Así tomando supremo sobre todos los vectores $\vec{v}$ de largo Euclideano 1, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|SF(0)| &\leq \|Ord\|K(\mathbb{B}^2) + \frac{2\sqrt{2}}{3} ordK(\mathbb{B}^2)\\ \frac{1}{2}|SF(0)| &\leq 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 1{,}761,\end{aligned}$$

como la métrica de Bergman en el origen satisface que $|SF(0)| = \sqrt{3}\,\|SF(0)\|$, podemos concluir que

$$\|SF(0)\| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\cdot 1{,}761. = 3{,}0717.$$

Sea $F \in K(\mathbb{B}^2)$, entonces existe un automorfismo de la bola $\sigma$ tal que

$$\|SF(z)\| = \|SF(\sigma(0))\| = \|SF\circ\sigma(0)\|,$$

llamemos $G = F\circ\sigma$, luego $G \in K(\mathbb{B}^2)$ y usando el argumento anterior se tiene lo deseado.

□

Cabe señalar que el orden de $K(\mathbb{B}^n)$ para $n \geq 2$ es desconocido, sin embargo Liu [**14**] mostró una cota superior para el orden en cualquier dimensión. Más aun Barnard, FitzGerald y Gong conjeturaron que para $n \geq 2$, $ordK(\mathbb{B}^n) = \dfrac{n+1}{2}$. Sin embargo, esta conjetura es falsa, lo cual fue mostrado por Pfaltzgraff y Suffridge [**23**].

**Conjetura** 3.2.1. $\|Ord\|\,\mathcal{F}_\alpha = \frac{\sqrt{n+1}}{2}\,\alpha + 1.$

**Definición** 3.2.1. *Sea $F \in \mathcal{F}_\alpha$ diremos que $F$ es de orden extremal para $\mathcal{F}_\alpha$ si su orden es igual al orden de la familia $\mathcal{F}_\alpha$.*

La función de Koebe es de orden extremal para la familia de funciones univalentes en el disco unitario. El que esta función no sea acotada es un hecho interesante que establecemos a continuación para varias variables.

**Teorema** 3.2.3. *Sea $F$ de orden extremal en la familia $\mathcal{F}_\alpha$, entonces existe $\{z_n\} \in \mathbb{B}$ con $|z_n| \to 1$ cuando $n \to \infty$, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} |F(z_n)| = \infty.$$

**Demostración:** Sea $F = (f_1, \ldots, f_n) = (\dfrac{u_1}{u_0}, \ldots, \dfrac{u_n}{u_0})$ función de orden extremal y consideremos la función $G = T\circ F$ donde $T$ es una transformación de Möbius, dada por

$$G = (\frac{f_1}{1+\varepsilon f_1}, \ldots, \frac{f_n}{1+\varepsilon f_1}).$$

Notemos que $SF(z) = SG(z)$, $G(0) = 0$, $DG(0) = \mathrm{Id}$ y podemos escribir que

$$G = \left(\frac{u_1}{\widetilde{u_0}}, \dots, \frac{u_n}{\widetilde{u_0}}\right),$$

donde $\widetilde{u_0} = u_0 + \varepsilon u$. Derivando con respecto a $z_1$ y evaluando en el origen, obtenemos que

$$\frac{\partial \widetilde{u_0}}{\partial z_1}(0) = \frac{\partial u_0}{\partial z_1}(0) + \varepsilon.$$

Por otro lado, no es difícil ver que

$$\frac{\partial u_0}{\partial z_1}(0) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_j}{\partial z_1 \partial z_j}(0) = \frac{2}{n+1}\, ord\, \mathcal{F}_\alpha .$$

Si $G$ fuera una función holomorfa en la bola, entonces $G \in \mathcal{F}_\alpha$, lo cual por lo anterior contradice el hecho de que $F$ es función de orden extremal. Luego, debe existir puntos $z_\varepsilon$ tal que $1+\varepsilon f_1(z_\varepsilon) = 0$, esto es, $f_1(z_\varepsilon) = -1/\varepsilon$. Es claro que $|z_\varepsilon| \to 1$ cuando $\varepsilon \to 0$, lo que termina la demostración.

□

## 3.3. Una estimación para $\lambda_\alpha$

Como hemos mencionado, la norma orden de una L.I.F. tiene importantes implicancias geométricas sobre la familia, tales como teoremas de crecimiento y distorsión. Es por esto que estamos interesados en encontrar cotas sobre $\lambda_\alpha$ en términos de $\alpha$ y por consiguiente obteniendo cotas sobre la norma orden de la familia $\mathcal{F}_\alpha$. A partir de la demostración del Teorema 3.2.1 nos damos cuenta que debemos estimar el radio $s_0$ de la bola cubierta por la función $G$ considerada allí para estimar $\lambda_\alpha$. Recordemos que la función $G(x) = (\frac{u_1}{u_0}(x), \dots, \frac{u_n}{u_0}(x))$ donde $u_k(x)$ son un conjunto de soluciones linealmente independientes de (3.7) con las condiciones iniciales $u_0(0) = 1, \nabla u_0(0) = 0$ y $u_i(0) = 0, |\nabla u_i(0)| = 1$, para $i = 1, \dots, n$, la cual esta en $\mathcal{F}_\alpha$. Entonces la función $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), u(x))$ definida como en (3.8), satisface $\varphi' = A \cdot \varphi$. Además la matriz $A = (a_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$ esta dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} S^j_{1i}F & i,j \le n \\ S^0_{1i}F & i \le n, j = n+1 \\ 1 & i = n+1, j = 1 \\ 0 & i = n+1, 1 < j \le n+1 \end{cases}$$

Sea $\phi_k = \psi_k(1-x^2)^{-1/2}$, para todo $2 < k \leq n$, $\phi_1 = \psi_1$ y $v = u(1-x^2)^{-1}$ de donde para $1 < k \leq n$

(3.15)
$$\begin{aligned}
\phi_1' &= S_{11}^1 G\phi_1 + S_{11}^2 G(1-x^2)^{1/2}\phi_2 + \cdots + S_{11}^n G(1-x^2)^{1/2}\phi_n + S_{11}^0 G(1-x^2)^{1/2} v\,, \\
\phi_k' &= \frac{S_{1k}^1 G}{(1-x^2)^{1/2}}\phi_1 + S_{1k}^2 G\phi_2 + \cdots + (S_{1k}^k G + \frac{x}{(1-x^2)})\phi_k + \cdots + S_{1k}^n G\phi_n + S_{1k}^0 G v\,, \\
v' &= \frac{1}{(1-x^2)}\,\phi_1 + \frac{2x}{(1-x^2)}\,v\,.
\end{aligned}$$

Tomando $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n, v)$, lo cual satisface la ecuación lineal

$$\phi' = B\cdot\phi,$$

donde $B$ es la matriz de los coeficientes del sistema anterior. Del Lema 3.2.1, podemos concluir que la norma Euclideana de la matriz $B$ viene dada por

$$\|B(x)\| \leq \frac{k}{1-x^2}\,,$$

donde $k = \delta(n,\alpha) + 2$, para el cual $\delta(n,\alpha) \to 0$ cuando $\alpha \to 0$. Como en la demostración del Lema 3.2.4 obtenemos que la norma Euclideana de $\phi$ es

$$\|\phi(x)\| \leq \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2}. \tag{3.16}$$

En particular

$$|u_0(x)| \leq (1-x^2)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2}$$

y como $u_0 = \det\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)$ se sigue que

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \geq \frac{(1-x)^{\frac{k/2-1}{n+1}}}{(1+x)^{\frac{k/2+1}{n+1}}}\,.$$

Para $U(x) = |u(x)|$, es claro que $U$ satisface

$$U'' + \frac{c}{(1-x^2)^2}U \geq -\frac{\sqrt{n(n+1)}\,\alpha}{1-x^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2}, \quad U(0) = 0,\, U'(0) = 1,$$

por lo tanto $U \geq w$ para todo $x < x_0$, donde $x_0$ es el primer cero de $w$ quien es solución de

$$w'' + \frac{c}{(1-x^2)^2}w = -\frac{\sqrt{n(n+1)}\,\alpha}{1-x^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2}, \quad w(0) = 0,\, w'(0) = 1\,.$$

Entonces el primer cero de $U$ ocurre después que $x_0$ y

$$|G(x)| \geq \frac{w(x)}{1-x^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k/2}, \quad x < x_0.$$

Evidentemente no es fácil obtener explícitamente la función $w(x)$, sin embargo para $\alpha$ dado, uno puede ser calculada numéricamente y encontrar una cota inferior para la función $G$. Con el objetivo de encontrar cotas explícitas mostraremos una manera sencilla para obtener algunas cotas de manera analítica.

A partir de la ecuación (3.10) tenemos que $U$ satisface

$$U'' \geq -|S^1_{11}\varphi_1 + \cdots + S^n_{11}\varphi_n + S^0_{11}u_k|$$

y usando (3.16) se obtiene

$$U'' \geq -\frac{M}{1-x^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2}, \quad U(0)=0,\, U'(0)=1, \tag{3.17}$$

donde $M = \sqrt{n(n+1)\,\alpha^2 + c^2}$ lo cual tiende a cero cuano $\alpha$ tiende a cero. Entonces $U \geq y$ donde $y$ es solución de

$$y'' = -\frac{M}{1-x^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2}, \quad y(0)=0,\, y'(0)=1.$$

Integrando obtenemos que

$$y'(x) = \frac{M}{k} + 1 - \frac{M}{k}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2}, \tag{3.18}$$

entonces $y' = 0$ para $x_\alpha$ tal que

$$\left(\frac{1+x_\alpha}{1-x_\alpha}\right)^{k/2} = 1 + \frac{k}{M},$$

por lo que $y(x_\alpha)$ es el valor máximo de $y$. De (3.18) tenemos que

$$y' \geq \frac{M}{k} + 1 - \frac{M}{k}\frac{2^{k/2}}{(1-x)^{k/2}},$$

y nuevamente integrando se sigue que

$$y(x) \geq \frac{\varphi(x)}{(1-x)^{k/2-1}},$$

donde

$$\varphi(x) = (\frac{M}{k}+1)x(1-x)^{k/2-1} + \frac{M}{k}\frac{2^{k/2+1}}{(k-1)}(1-x)^{k/2-1} - \frac{M}{k}\frac{2^{k/2+1}}{(k-1)}$$

y usando (3.16) se tiene que

$$|G(x)| \geq \frac{\varphi(x)}{(1+x)^{k/2+1}}\,. \tag{3.19}$$

Por lo tanto $G(\mathbb{B}^n_{x_\alpha})$ cubre una bola de radio $s_0 \geq s_\alpha > 0$, donde $s_\alpha$ esta dado por

$$s_\alpha = \frac{\varphi(x_\alpha)}{(1+x_\alpha)^{k/2+1}}\,.$$

Ahora, consideremos una función holomorfa $F \in \mathcal{F}_\alpha$ asociada a la función $G$ como en la demostración del Teorema 3.2.1. De (3.19) podemos concluir que

$$\lambda_\alpha \leq \frac{1}{s_\alpha}\,.$$

CAPÍTULO 4

# Criterios de univalencia en $\mathbb{C}^n$

## 4.1. Introducción

Es bien conocido que la derivada Schwarziana en una variable compleja ha jugado un rol importante en el desarrollo de criterios de univalencia para funciones localmente inyectivas. Criterios clásicos son [**6**], [**16**], [**17**],[**18**],[**24**] y otros. Algunos de estos han usado la fuerte relación que existe entre las funciones $f$ con $Sf = 2p$ y la ecuación $u'' + pu = 0$ de la cual se obtiene que $f = u/v$ donde $u$ y $v$ son dos soluciones linealmente independientes y donde $(f')^{-1/2}$ es siempre solución. A esto se agrega que una función $f = u/v$ definida en $\Omega$ un dominio simplemente conexo será globalmente univalente si y sólo si toda solución de la ecuación $u'' + pu = 0$ no tiene más de un cero en $\Omega$, aún cuanto las técnicas usadas para demostrar los criterios de univalencia en una variable compleja son variadas.

Hay muchos resultados en la teoría de funciones univalentes en una variable compleja que no se han podido extender a $\mathbb{C}^n$ de manera satisfactoria tales como criterios de univalencia, extensiones quasiconformes, entre otros. Los coeficientes $\mathbb{S}^{k\ k}_{ij\,ij}$ del sistema lineal asociado al operador Schwarziano aparecen junto a la derivada de primer orden de las soluciones $u$. Esto marca una diferencia estructural comparado con el caso de una variable compleja y la ecuación $u'' + pu = 0$.

En este capítulo probaremos que ciertas cotas sobre los coeficientes $S^k_{ij}F$ y $S^0_{ij}F$ son condiciones suficientes para la univalencia de funciones holomorfas localmente univalentes en $\mathbb{B}^n$. Cabe señalar que las cotas antes mencionadas varían según el punto $z \in \mathbb{B}^n$. Por otro lado probaremos que cotas uniformes apropiadas sobre los coeficientes $S^0_{ij}F$ y $S^0_{ij}F$ son condiciones suficientes para la univalencia de funciones definida sobre cualquier dominio convexo en $\mathbb{C}^n$, donde las cotas dependen del diametro de dicho dominio en directa analogía con el criterio obtenido por Z. Nehari [**16**]. Las técnicas usadas se basan en la relación directa que existe entre las derivadas Schwarzianas de $F$ y el sistema (2.1) donde el teorema de comparación de Sturm juega un papel preponderante.

Consideremos $F$ una función holomorfa y localmente univalente en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ y estamos interesados en encontrar condiciones suficientes para garantizar la univalencia de funciones localmente inyectivas. Existen algunos resultados sobre criterios de univalenca en $\mathbb{C}^n$, [8],[15] además de la generalización del criterio de Becker [2] al caso de varias variables complejas, el cual fue obtenido por Pfaltzgraff [21]. Presentamos este criterio de univalencia sin demostración

**Teorema** 4.1.1. *Sea $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ una función localmente biholomorfa normalizada tal que*

$$(1-|z|^2)\|[DF(z)]^{-1}D^2F(z)(z,\cdot)\| \leq 1\,, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

*Entonces $F$ es univalente en $\mathbb{B}^n$.*

La demostración de este Teorema esta basado en la contrucción de una cadena de Loewner en la cual $F$ es el elemento inicial resultando ser univalente.

Nos enfocarémos a estudiar la univalencia de funciones definidas sobre $\mathbb{B}^n$, aun cuando ciertos criterios se podrían extender al polidisco $P^n$ ya que del hecho de que los automorfismos de $\mathbb{B}^n$ resultan ser las transformaciones de Möbius. Estos resultados pueden no ser ciertos en otros dominios de $\mathbb{C}^n$ para los cuales su grupo de automorfismos no sean las transformaciones de Möbius. Para esto necesitaremos algunas definiciones y resultados clásicos de la teoría de funciones holomorfas en $\mathbb{C}^n$, los que detallamos a continuación.

Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de transformaciones unitarias de $\mathbb{C}^n$. Si $\Omega$ es un dominio en $\mathbb{C}^n$ sea

$$Aut(\Omega) = \{\sigma : \Omega \to \Omega : \sigma \text{ biholomorfa de } \Omega \text{ en sí mismo}\}$$

denotando el grupo de automorfismos de $\Omega$. Si $\Omega = \mathbb{B}^n$ es bien conocido que $Aut(\mathbb{B}^n)$ es un grupo transitivo, esto es para todo $z$ y $w$ en $\mathbb{B}^n$ existe un automorfismo $\sigma$ tal que $\sigma(z) = w$.

**Teorema** 4.1.2. *Salvo multiplicación por una transformación unitaria, $Aut(\mathbb{B}^n)$ consiste de mapeos*

$$\phi_a(z) = T_a\left(\frac{z-a}{1-\langle z, a\rangle}\right), \quad z \in \mathbb{B}^n,\ a \in \mathbb{B}^n, \tag{4.1}$$

*donde* $T_0 = Id$ *y para* $a \neq 0$, $T_a$ *es el operador lineal dado por*

$$T_a(z) = \frac{\langle z, a \rangle}{1 + s_a} a + s_a z, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

*y* $s_a = \sqrt{1 - |a|^2}$. *Esto es,*

$$Aut(\mathbb{B}^n) = \{V\phi_a : a \in \mathbb{B}^n,\, V \in \mathcal{U}\} = \{\phi_b W : b \in \mathbb{B}^n,\, W \in \mathcal{U}\}.$$

Algunas propiedades básicas de mapeos en $Aut(\mathbb{B}^n)$, estan descritas a continuación. Ver **[9]**,[?],**[28]**.

**Lema** 4.1.1. *Sea* $a \in \mathbb{B}^n$ *y sea* $\phi_a$ *dada por la ecuación (4.1). Entonces*

(i) $\phi_a(a) = 0$.

(ii) $1 - |\phi_a(z)|^2 = \dfrac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \langle z, a \rangle|^2}\, , z \in \mathbb{B}^n$.

(iii) $\phi_a^{-1}(z) = \phi_{-a}(z)\, , z \in \mathbb{B}^n$.

(iv) $\phi_a$ *se extiende a un homeomorfismo de* $\overline{\mathbb{B}^n}$ *sobre* $\overline{\mathbb{B}^n}$.

(v) *si* $\psi \in Aut(\mathbb{B}^n)$ *y* $a = \psi^{-1}(0)$, *entonces*

$$|J_\psi(z)| = \left[\frac{s_a}{|1 - \langle z, a \rangle|}\right]^{n+1}, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

*Más aun,*

$$|J_\psi(z)| = \left[\frac{1 - |\psi(z)|^2}{1 - |z|^2}\right]^{\frac{n+1}{2}}, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

## 4.2. Criterios de univalencia

Con el objetivo de lograr criterios de univalencia usando comparación de soluciones de ecuaciones diferenciales, establecemos el siguiente lema, el cual es de fácil demostración pero de gran ayuda.

**Lema** 4.2.1. *Sea* $F : \Omega \to \mathbb{C}^n$ *holomorfa, localmente univalente en* $\Omega$, *entonces* $F$ *es globalmente univalente en* $\Omega$ *si y solo si el sistema 2.1 con* $S_{ij}^k F = P_{ij}^k$ *no admite* $n$ *soluciones linealmente independientes con más de un cero común en* $\Omega$.

**Demostración:** Supongamos que $F$ no es globalmente univalente en $\Omega$, por consiguiente existen $z, w \in \Omega$ tales que $F(z) = F(w) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Sabemos que $F = (\frac{u_1}{u_0}, \ldots, \frac{u_n}{u_0})$, donde $u_i$ con $i = 0, 1, \ldots, n$ son soluciones linealmente independientes de (2.1). Consideremos $v_i = u_i - \alpha_i u_0$ con $i = 1, \ldots, n$ soluciones de (2.1) tales que para cada $i$ se tiene que $v_i(z) = 0 = v_i(w)$, obteniendose una contradicción.

Reciprocamente, supongamos que $F$ es univalente y existen $u_i$ con $i = 1, \ldots, n$ soluciones linealmente independientes de (2.1) tales que para cada $i$ se tiene que $u_i(z) = u_i(w) = 0$ donde $z, w \in \Omega$. Sea $u_0$ solución de (2.1) tal que $u_0, u_1, \ldots, u_n$ son linealmente independientes. Consideremos $G = (\frac{u_1}{u_0}, \ldots, \frac{u_n}{u_0})$, donde $G(z) = G(w) = 0$, pero $S_{ij}^k G = S_{ij}^k F$ y por lo tanto $F = T \circ G$ para alguna transformación de Möbius $T$. Luego $F$ no es univalente en $\Omega$ lo cual contradice la hipótesis.

$\square$

**Teorema** 4.2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ dominio convexo de diametro $\rho$ y $F : \Omega \to \mathbb{C}^n$ una función holomorfa localmente univalente tal que $|S_{ij}^k F(z)| \leq k$ and $|S_{ij}^0 F(z)| \leq \delta$. Entonces si $\delta \leq (\frac{\pi - 2\phi}{\rho})^2$, $F$ es univalente en $\Omega$, donde $sen\,\phi = \dfrac{kne^C}{\sqrt{k^2n^2e^{2C} + \delta}}$ y $C = \rho\,[n^3k^2 + n^2\delta^2 + 1]^{1/2}$.*

**Demostración:** Debido al Lema 4.2.1 probaremos que el sistema 2.1 con $P_{ij}^k = S_{ij}^k F$ no admite $n$ soluciones linealmente independientes con más de un cero común. Sean $u_1, \ldots, u_n$ soluciones linealmente independientes del sistema con $u_1(z_1) = \cdots = u_n(z_1) = 0$. Probaremos que no hay otro cero común. Sea $z_2$ otro punto cualquiera en $\Omega$. Después de rotar el dominio, podemos suponer sin pérdidad de generalidad, que el segmento lineal que une $z_1$ con $z_2$ es un múltiplo real del vector $(1, 0, \ldots, 0)$. Debido a que $u_1, \ldots, u_n$ son linealmente independientes, pero con un cero común en $z_1$, por unicidad de soluciones sus gradientes en $z_1$ deben ser linealmente independientes. Por ende, una combinación adecuada de ellas produce una solución $u$ del sistema con $u(z_1) = 0$ y $\nabla u(z_1) = (1, 0, \ldots, 0)$. Sea $z(s)$ la arcoparametrización del segmento $[z_1, z_2]$ con $z(0) = z_1$. Consideremos $u(s) = u(z(s))$, obteniendose $u' = \nabla u \cdot z'$ y un cálculo directo muestra que

$$u'' = S^1F(z')\frac{\partial u}{\partial z_1} + \cdots + S^nF(z')\frac{\partial u}{\partial z_n} + S^0F(z')u\,.$$

Sea $U^2(s) = |u(s)|^2$, de donde se tiene que $UU' = Re\{u'\overline{u}\}$ por lo tanto $U''U \geq Re\{u''\overline{u}\}$, entonces

$$U'' \geq -\left|S^1 F(z')\frac{\partial u}{\partial z_1} + \cdots + S^n F(z')\frac{\partial u}{\partial z_n}\right| - \left|S^0 F(z')\right| v\,.$$

Ahora estudiaremos $\dfrac{\partial u}{\partial z_i}(z(s))$. Sea $\theta(s) = (\frac{\partial u}{\partial z_1}(z(s)), \ldots, \frac{\partial u}{\partial z_n}(z(s)), u(s)) = (\theta_1, \ldots, \theta_n, u)$, entonces

$$\begin{aligned}
\theta_i' &= \nabla\theta_i \cdot z' \\
&= \sum_{j=1}^{n} (S_{ij}^1 F\,\theta_1 + \cdots + S_{ij}^n F\,\theta_n + \mathbb{S}_{ij}^0 F\,u)a_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^1 F\,a_j\,\theta_1 + \cdots + \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^n F\,a_j\,\theta_n + \sum_{j=1}^{n} S_{ij}^0 F\,a_j\,u
\end{aligned}$$

donde $z' = (a_1, \ldots, a_n)$. Luego reescribiendo este sistema en términos matriciales, se obtiene $\theta' = A \cdot \theta$ donde $A = (a_{ik})$ es la matriz de los coeficientes dada por

$$a_{ik} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^k F\,a_j & i, k \leq n \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} S_{ij}^0 F\,a_j & i \leq n, k = n+1 \\ a_k & i = n+1, k \leq n \\ 0 & i = k = n+1 \end{cases}.$$

Así, claramente se muestra que su norma Euclideana satisface

$$\|A\| \leq (n^3k^2 + n^2\delta^2 + 1)^{1/2}.$$

Consideremos la función real $f$ definida por $f^2 = \|\theta\|^2$, de lo cual, derivando se tiene que $ff' = \theta \cdot \theta' = \theta \cdot A(\theta)$, entonces $ff' \leq \|A\|\|\theta\|^2$. Esto es $\dfrac{f'}{f} \leq \|A\|$, ya que $f(0) = 1$ e integrando tenemos que

$$f \leq \int_0^x e^{\|A\|} ds$$

luego $|\theta| \leq e^C$, donde $C = \rho\,[n^3k^2 + n^2\delta^2 + 1]^{1/2}$. De lo que se deduce que

$$(|\frac{\partial u}{\partial z_1}|^2) + \cdots + |\frac{\partial u}{\partial z_n}|^2 + |u|^2)^{1/2} \leq e^C.$$

Así,

$$U'' \geq -kne^C - \delta U\,,$$

pero por Lema 3.2.3 se prueba que $U \geq y$ la cual es solución de

$$y'' + \delta\, y = -kne^C \quad y(0) = 0\,, y'(0) = v'(0)\,,$$

por lo que estudiaremos los ceros de ésta función. Sabemos que la solución $y$ viene dada por

$$y = \frac{kne^C}{\delta}\cos(\sqrt{\delta}x) + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\sin(\sqrt{\delta}x) - \frac{kne^C}{\delta}.$$

Haciendo $\sin\phi = \dfrac{kne^C}{\sqrt{k^2n^2e^{2C}+\delta}}$ tenemos que

$$y(x) = \frac{\sqrt{k^2n^2e^{2C}+\delta}}{\delta}\,\sin(\sqrt{\delta}x + \phi) - \frac{kne^C}{\delta},$$

la cual se anula en $x = 0$ y cuando $\sqrt{\delta}\,x + \phi = \pi - \phi$, es decir $x = \dfrac{\pi - 2\phi}{\sqrt{\delta}}$. Luego

$$\rho \leq \frac{\pi - 2\phi}{\sqrt{\delta}}$$

de lo cual el teorema queda demostrado.

□

**Corolario** 4.2.1. *Sea $F : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^n$ una función holomorfa y localmente univalente tal que $|S^k_{ij}F| \leq k$ y $|S^0_{ij}F| \leq \delta$. Si $\delta \leq (\frac{\pi}{2} - \phi)^2$ entonces $F$ es univalente en $\mathbb{B}^n$. Donde sen$\phi = \dfrac{kne^C}{\sqrt{k^2n^2e^{2C}+\delta}}$ y $C =$ $2\,[n^3k^2 + n^2\delta^2 + 1]^{1/2}$.*

**Teorema** 4.2.2. *Sea $F \in \mathcal{F}_\alpha$ tal que*

$$\sup_{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} |(\vec{a})^t \mathbb{S}^0 F(z)(\vec{b})| \leq \frac{k}{1 - \|z\|^2}. \tag{4.2}$$

*Si $2\sqrt{n(n+1)}\,(2+n+\sqrt{n})\,\alpha + (n+1)k < 1$, entonces $F$ es univalente en $\mathbb{B}^n$.*

**Demostración:** Sean $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{B}^n$ tales que $F(\nu_1) = F(\nu_2)$. Como las derivadas Schwarzianas son invariantes bajo composición por la izquierda por una transformación de Möbius, podemos asumir que el valor común es 0. Además sabemos que $\mathcal{F}_\alpha$ y (4.2) son invariantes bajo rotaciones, podemos asumir que $\nu_1 = (z_1, w_0, \ldots, 0)$ y $\nu_2 = (w_1, w_0, \ldots, 0)$. Consideremos la función de Möbius dada por

$$T(z) = \left( \frac{z_1\sqrt{1-|w_0|^2}}{1+\overline{w}_0 z_2}, \frac{z_2 + w_0}{1+\overline{w}_0 z_2}, \frac{z_3\sqrt{1-|w_0|^2}}{1+\overline{w}_0 z_2}, \ldots, \frac{z_n\sqrt{1-|w_0|^2}}{1+\overline{w}_0 z_2} \right).$$

Esta transformación lleva el plano $(\xi, 0, \ldots, 0)$ en los puntos de la forma $(z, w_0, 0, \ldots, 0)$, luego existen $\xi_1$ y $\xi_2$ tales que $T(\xi_1, 0, \ldots, 0) = \nu_1$ y $T(\xi_2, 0, \ldots, 0) = \nu_2$. Por otro lado existe una única curva geodésica $\gamma$ que une estos puntos y nuevamente por la inavrianza bajo rotaciones de la bola, podemos asumir que $\gamma$ es simétrica con respecto al eje imaginario del plano $(\xi, 0, \ldots, 0)$. Sea $\sigma$ un automorfismo de la bola de la forma

$$\sigma(z) = \left( \frac{z_1 + i\rho}{1 - i\rho z_1}, \frac{z'\sqrt{1-\rho^2}}{1 - i\rho z_1} \right),$$

donde $z' = (0, z_2, \ldots, z_n)$ y $\rho$ es la distancia Euclideana mínima entre el origen y $\gamma$. Esta transformación lleva el eje real $(x, 0, \ldots, 0)$ en $\gamma$, de lo cual existen $x_1 < 1$ y $x_2 < 1$ tales que $\sigma(x_1, 0, \ldots, 0) = (\xi_1, 0, \ldots, 0)$ y $\sigma(x_2, 0, \ldots, 0 = (\xi_2, 0, \ldots, 0)$. De acuerdo a esto consideremos la función holomorfa

$$G = F \circ T \circ R \circ \sigma\,,$$

donde $R$ es una rotación en el plano $(\xi, 0, \ldots, 0)$.

Usando Proposición 2.2.2 se tiene que

$$S^0_{11}G(x) = S^0_{11}F_1(\xi)(\sigma_1'(x))^2 + \frac{1}{2}S^1_{11}G(x)\frac{\sigma_1''}{\sigma_1'}(x)\,,$$

donde $F_1 = F \circ T \circ R$, $\sigma(x) = \xi$ y $\sigma_1(x) = \dfrac{x + i\rho}{1 - i\rho x}$. Luego

$$S^0_{11}F_1(\xi) = S^0_{11}F_2(y)(R'(\xi))^2\,,$$

donde $F_2 = F \circ T$ y $R(\xi) = y$. Así

$$S^0_{11}G(x) = \left[S^0_{11}F_2(y)(R'(\xi))^2\right](\sigma_1'(x))^2 + \frac{1}{2}S^1_{11}G(x)\frac{\sigma_1''}{\sigma_1'}(x)\,,$$

como $F_2 = F \circ T$ tenemos que

$$S^0_{11}G(x) = \left[S^0_{11}F(\nu)(1 - |w_0|^2) - \overline{w}_0 S^2_{11}F_2(y)\right](R'(\xi))^2(\sigma_1'(x))^2 + \frac{1}{2}S^1_{11}G(x)\frac{\sigma_1''}{\sigma_1'}(x)\,,$$

donde $T(y) = \nu$. Entonces

$$|S^0_{11}G(x)| \le \frac{k}{1-|\nu|^2}(1-|w_0|^2)|\sigma_1'|^2 + |w_0||S^2_{11}F_2(y)||\sigma_1'|^2 + \frac{1}{2}|S^1_{11}G(x)|\left|\frac{\sigma_1''}{\sigma_1'}(x)\right|.$$

Pero, por Lema 4.1.1. tenemos

$$1-|\nu|^2 = 1-|T(y)|^2 = (1-|w_0|^2)(1-|y|^2) = (1-|w_0|^2)(1-|\sigma(x)|^2),$$

y usando Lema 3.2.1 se tiene

$$|S^0_{11}G(x)| \le \frac{k\,(1-|w_0|^2)|\sigma_1'|^2}{(1-|w_0|^2)(1-|\sigma(x)|^2)} + |w_0|\frac{\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-|\sigma(x)|^2)^{3/2}}|\sigma_1'|^2 + \frac{\sqrt{n+1}\,\alpha}{1-x^2}|\frac{\sigma_1''}{\sigma_1'}|,$$

como $|\sigma'(x)| = \dfrac{1-|\sigma(x)|^2}{1-x^2}$ y usando que $\rho^2+|w_0|^2<1$ obtenemos

$$(4.3)\quad |S^0_{11}G(x)| \le \frac{k}{1-x^2} + \frac{\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{\sqrt{n+1}\,\alpha}{1-x^2} \le \frac{k+2\sqrt{n+1}\,\alpha}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

Análogamente, podemos mostar que

$$(4.4)\qquad |S^0_{1j}G(x)| \le \frac{k+4\sqrt{n(n+1)}\,\alpha}{1-x^2}.$$

En consecuencia y debido al Lema 4.2.1 basta estudiar los ceros de la función $u(x) = u(x,0,\ldots,0)$ con $x$ real la cual es solución del sistema (2.1) con $P^k_{ij} = \mathbb{S}^k_{ij}G$. Entonces

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} u'' &= S^1_{11}G\varphi_1 + \cdots + S^n_{11}G\varphi_n + S^0_{11}u\,,\\ \varphi_k' &= S^1_{1k}G\varphi_1 + \cdots + S^n_{1k}G\varphi_n + S^0_{1k}u\,, \quad k=1,\ldots,n, \end{aligned}$$

donde $\varphi_k(x) = \dfrac{\partial u}{\partial z_k}(x,0,\ldots,0)$. Igual que antes, consideremos el vector $\varphi$ como

$$\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n,u)$$

de donde obtenemos que el sistema antes descrito, se puede reescribir de la forma

$$\varphi' = A\cdot\varphi\,,$$

donde la matriz de los coeficientes $A=(a_{ij})$ viene dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} S^j_{1i}G & i,j\le n\\ S^0_{1i}G & i\le n, j=n+1\\ 1 & i=n+1, j=1\\ 0 & i=n+1, 1<j\le n+1 \end{cases}.$$

Llamaremos a $\psi_k = \varphi_k(1-x^2)^{-1/2}$, para todo $1<k\le n$, $\psi_1=\varphi_1$ y $v = u(1-x^2)^{-1/2}$ teniendose el sistema con $1<k\le n$

$$
\begin{aligned}
u'' &= S^1_{11}G\psi_1 + S^2_{11}G(1-x^2)^{1/2}\psi_2 + \cdots + S^n_{11}G(1-x^2)^{1/2}\psi_n \\
&\quad + S^0_{11}G(1-x^2)^{1/2}v\,, \\
\psi'_k &= \frac{S^1_{1k}G}{(1-x^2)^{1/2}}\psi_1 + S^2_{1k}G\psi_2 + \cdots + (S^k_{1k}G + \frac{x}{(1-x^2)})\psi_k \qquad (4.6)\\
&\quad + \cdots + S^n_{1k}G\psi_n + S^0_{1k}Gv\,, \\
v' &= \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\,\psi_1 + \frac{x}{(1-x^2)}\,v\,.
\end{aligned}
$$

Sea $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n, v)$, lo cual satisface la ecuación lineal

$$\psi' = B \cdot \psi,$$

donde $B$ es la matriz de los coeficientes del sistema anterior. Considere la función real $f(x)$ de modo que $f(x)^2 = \|\psi(x)\|^2$. Por lo que derivando con respecto a $x$, se tiene que $ff' = \psi \cdot B\psi$, entonces

$$ff' \leq \|B\|\|\psi\|^2 \leq \|B\|f^2\,,$$

se sigue que

$$\frac{f'}{f}(x) \leq \|B(x)\|\,.$$

Por Lema 3.2.1, ecuaciones (4.3) y (4.4) podemos concluir que

$$\|B(x)\| \leq \frac{2\delta}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

donde $\delta = (n/2)(k + 4\sqrt{n+1}\,)$. Por consiguiente

$$f(x) \leq f(0)\frac{(1+x)^{2\delta}}{(1-x^2)^{1/2+\delta}}\,. \qquad (4.7)$$

Ahora nuestro objetivo ahora será, estudiar los ceros de la función $u$, con $u(0) = 1$ y $\nabla u(0) = 0$, para lo cual estudiaremos los ceros de la función real $U(x)$ tal que $U^2 = |u|^2 = u\overline{u}$ y usando técnicas de comparación de Sturm con una ecuación homogenea adecuada probaremos que $U$ no puede tener más de un cero, obteniendose una contradicción.

Derivando obtenemos que $2UU' = 2Re\{u'\overline{u}\}$, entonces $(U')^2 + UU'' = Re\{u''\overline{u}\} + |u'|^2$, de esto se tiene que $U''U \geq Re\{u''\overline{u}\}$ por lo que

$$
\begin{aligned}
U'' &\geq Re\{(S^1_{11}G\varphi_1 + \cdots + S^n_{11}G\varphi_n + S^0_{11}Gu)\overline{u}\} \\
&\geq Re\{(S^1_{11}G\varphi_1 + \cdots + S^n_{11}G\varphi_n)\overline{u}\} + Re\{S^0_{11}G\}U^2 \qquad (4.8)\\
&\geq -|S^1_{11}G\varphi_1 + \cdots + S^n_{11}G\varphi_n|\,U - |S^0_{11}G|\,U^2.
\end{aligned}
$$

Además como $f(0) = 1$ y usando (4.3) y (4.7) establecemos que

$$U'' + \left(\frac{k}{1-x^2} + \frac{2\sqrt{n(n+1)}\,\alpha}{(1-x^2)^{3/2}}\right) U \geq -\frac{(1+x)^{2\delta}\sqrt{n(n+1)}\,\alpha}{(1-x^2)^{3/2+\delta}}.$$

Por Lema 3.2.3 $U \geq W$ hasta el primer cero de $W$, donde $W$ es solución de

$$W'' + \left(\frac{k}{1-x^2} + \frac{2\sqrt{n(n+1)}\,\alpha}{(1-x^2)^{3/2}}\right) W = -\frac{(1+x)^{2\delta}\sqrt{n(n+1)}\,\alpha}{(1-x^2)^{3/2+\delta}},$$

la cual tiene ceros después de $w$ solución de

$$w'' + \frac{t}{(1-x^2)^2} w = -\frac{(1+x)^{2\delta}\sqrt{n(n+1)}\,\alpha}{(1-x^2)^{3/2+\delta}}$$

donde $t = k + 2\sqrt{n(n+1)}\,\alpha$. Ya que $t < 1$ existe $t < t' < 1$, entonces sea $y$ solución de la ecuación homogenea

$$y'' + \frac{t'}{(1-x^2)^2} y = 0$$

con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, que esta dada por

$$y(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{1/2-\gamma}\left[(1+x)^{2\gamma} + (1-x)^{2\gamma}\right],$$

donde $\gamma = 1/2\sqrt{1-t'}$, Un cálculo directo muestra que $y$ satisface

$$y'' + \frac{t}{(1-x^2)^2} y = -\frac{\left(\frac{t'-t}{2}\right)\left[(1+x)^{2\gamma} + (1-x)^{2\gamma}\right]}{(1-x^2)^{3/2+\gamma}}.$$

Escogiendo $t'$ tal que

$$2\sqrt{n(n+1)}\,\alpha + t < t' < 1 - n(t + 2\sqrt{n+1}\,\alpha),$$

concluimos que $y \geq w$ y como $y$ no se anula en $0 < x < 1$ se tiene que $U$ no se anula en $0 < x < 1$. Además por Lema 3.2.3 cualquier otra solución linealmente independiente de $u$, por el mismo análisis se comparara con la solución $y$ respectiva la cual no tiene más de un cero por lo expuesto anteriormente. Concluyéndose que la función $F$ es univalente.

$\square$

**Proposición** 4.2.1. *Sea $F \in \mathcal{F}_\alpha$, entonces existe $r_\alpha > 0$ tal que $F$ es univalente en la bola de la métrica de Bergman $\mathbb{B}(z, r_\alpha)$, para todo $z \in \mathbb{B}^n$.*

**Demostración:** Sabemos que $F = (\frac{u_1}{u_0}, \ldots, \frac{u_n}{u_0})$, donde $u_k$ con $k = 0, 1, \ldots, n$ son soluciones linealmente independientes del sistema (2.1) con $P_{ij}^k = \mathbb{S}_{ij}^k$. Como $\mathcal{F}_\alpha$ es una familia linealmente invariante, basta demostrar que $F$ es univalente en la bola centrada en el origen y por Lema 4.2.1 estudiaremos los ceros de estas funciones sobre la recta $(x, 0, \ldots, 0)$ con $0 < x < 1$. Al igual que antes, consideraremos $u(x) = u(x, 0, \ldots, 0)$ solución del sistema (4.5) y como $F(0) = 0$ y $DF(0) = \mathrm{Id}$, se tiene que $u(0) = 0$ y $u'(0) = 1$. Por ecuación (4.6) tenemos que $U(x) = |u(x)|$ satisface

$$U'' + \frac{c}{(1-x^2)^2} U \geq -\frac{\sqrt{n(n+1)}\,\alpha}{1-x^2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2}, \quad U(0) = 0, U'(0) = 1,$$

donde $k/(1-x^2) = \|B\|$ con $B$ la matriz definida por los coeficientes del sistema (4.6). Usando el Lema 3.2.3 se tiene que $U(x) \geq y(x)$ hasta el primer cero $x_\alpha$ de $y(x)$ la cual es la solución de

$$y'' + \frac{c}{(1-x^2)^2} y = -\frac{\sqrt{n(n+1)}\,\alpha}{1-x^2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

De lo cual se obtiene que $u \neq 0$ en $0 < x < x_\alpha$ y consecuentemente $F$ es univalente en la bola de Bergman centrada en el origen y radio $r_\alpha$ dado por

$$r_\alpha = \frac{\sqrt{n+1}}{4} \log\left(\frac{1+x_\alpha}{1-x_\alpha}\right).$$

$\square$

**Observación:** Del sistema 4.6 y la ecuación (4.7) podemos concluir que la función real $U(x)$ antes definida satisface

$$U'' \geq -\frac{M}{1-x^2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2}, \quad U(0) = 0, U'(0) = 1,$$

donde $M = \sqrt{n(n+1)\,\alpha^2 + c^2}$. Luego $U \geq w$ hasta el primer cero de $w$ solución de

$$w'' = -\frac{M}{1-x^2} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2}, \quad w(0) = 0, w'(0) = 1.$$

Es claro que el primer cero de $w$ es antes que $x_\alpha$ e integrando se obtiene que

$$w'(x) = \frac{M}{k} + 1 - \frac{M}{k} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{k/2},$$

y $w'(x_0) = 0$ donde $x_0$ satisface

$$\left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\right)^{k/2} = 1 + \frac{k}{M},$$

el cual es punto máximo de $w$ y $U(x_0) \geq w(x_0) > 0$, luego

$$\frac{\sqrt{n+1}}{4} \log\left(\frac{1+x_0}{1-x_0}\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{2k} \log\left(1 + \frac{k}{M}\right),$$

por consiguiente

$$r_\alpha \geq \frac{\sqrt{n+1}}{2k} \log\left(1 + \frac{k}{M}\right),$$

lo cual tiende a infinito cuando $\alpha$ tiende a cero, ya que $k = 2 + d(n,\alpha)$ con $d(n,\alpha) \to 0$ y $M \to 0$ cuando $\alpha \to 0$.

Por otro lado, evidentemente el primer cero de $U$ es antes que el primer cero de $v$ solución de la ecuación homogenea

$$v'' + \frac{c}{(1-x^2)^2} v = 0, \quad v(0) = 0, v'(0) = 1,$$

que esta dada de manera explícita por, ver [12].

$$v(x) = \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{c-1}}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right), \quad c > 1$$

de donde se tiene que

$$r_\alpha \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{c-1}} \frac{\pi}{2}.$$

Pero si $c \leq 1$ es bien conocido que el primer cero de $v$ ocurre en $x = 1$.

## CAPÍTULO 5

# Superficies Mínimas.

Sea $F$ una función holomorfa localmente univalente en $\mathbb{B}^2$. Hemos visto que el estudio de la univalencia de la función $F$, se puede reducir a probar si existen dos puntos tales que $F = (f, g) = (0, 0)$. Es por esto que estudiaremos las superficies

$$\Sigma_f = \{(z, w) \in \mathbb{B} : f(z, w) = 0\}$$

y

$$\Sigma_g = \{(z, w) \in \mathbb{B} : g(z, w) = 0\}.$$

### 5.1. Superficies Mínimas y derivadas Schwarzianas

De capítulos anteriores sabemos que $F = (f, g)$ con $f = \dfrac{u}{u_0}$ y $g = \dfrac{v}{u_0}$, donde $u, v$ y $u_0$ son soluciones linealmente independientes de (2.1) con $P_{ij}^k = S_{ij}^k F$, por lo que

$$\Sigma_f = \Sigma_u \;\text{ y }\; \Sigma_g = \Sigma_v \,.$$

Haremos el análisis con una de ellas, digamos $\Sigma = \Sigma_u$. Al ser la superficie de nivel de una función holomorfa, $\Sigma_u$ es una superficie (mínima) de dimensión dos en $\mathbb{R}^4$. De hecho, en este caso, es regular, en el sentido de que en cualquiera de sus puntos el gradiente complejo $(u_z, u_w)$ no puede anularse, de lo contrario, $u \equiv 0$ por ser solución del sistema lineal. Esto permite describir $\Sigma_u$ localmente por funciones regulares $w = w(z)$ o $z = z(w)$.

Sean $\overline{\nabla}$ y $\nabla$ las respectivas derivadas covariantes euclidenas en $\mathbb{R}^4$ y $\Sigma_u$. Sean $X, Y$ vectores tangentes a $\Sigma$. La aplicación bilineal simétrica $B$ dada por

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

define a la segunda forma fundamental de $\Sigma$.

Sea $p \in \Sigma$ y $\vec{n} \in (T_p\Sigma_f)^{\perp}$, donde $T_p\Sigma_f$ y $(T_p\Sigma_f)^{\perp}$ denotan respectivamente el espacio tangente a $\Sigma$ en $p$ y su complemento ortogonal. El mapeo $H_n : T_p\Sigma_f \times T_p\Sigma_f \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$H_n(X,Y) = \langle B(X,Y), n\rangle \quad , X, Y \in T_p\Sigma\,,$$

es una forma bilineal simétrica.

**Definición** 5.1.1. *La forma cuadrática $II_n$ definida sobre $T_p\Sigma_f$ por*

$$II_n(X) = H_n(X,X)$$

*es llamada la segunda forma fundamental de $f$ en $p$ a lo largo del vector normal $\vec{n}$.*

Observe que el mapeo bilineal $H_n$ está asociado al operador lineal autoadjunto $S_n : T_p\Sigma \longrightarrow T_p\Sigma$ definido por

$$\langle S_n(X), Y\rangle = H_n(X,Y) = \langle B(X,Y), \vec{n}\rangle$$

para cada $\vec{n} \in (T_p\Sigma)^{\perp}$. Podemos escribir que

$$B(x,y) = \langle S_n(x), y\rangle\vec{n} + \langle S_m(x), y\rangle\vec{m}\,,$$

donde $\vec{n}, \vec{m}$ es una base ortonormal $de T_p\Sigma$. Además existe una base de vectores propios tal que $det(S_n) = \alpha_1\alpha_2$ donde $\alpha_1, \alpha_2$ son los valores propios respectivos. Análogamente $det(S_m) = \beta_1\beta_2$. Como $\Sigma$ es superficie mínima tenemos que para todo $\vec{n} \in (T_p\Sigma)^{\perp}$ la traza de $S_n$ es cero. Por lo tanto $det(S_n) = -\alpha_1^2$ y $det(S_m) = -\beta_1^2$.

Sea $x, y \in T_p\Sigma_f$, se tiene que $K_{\Sigma_f}(x,y) = K(x,y)$, la curvatura de la superficie $\Sigma_f$, de donde tenemos que

$$K(x,y) = \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2.$$

Supongamos que $f_w(0) \neq 0$ luego existe una función $\phi$ holomorfa tal que $\varphi(z) = (z, \phi(z))$ es una parametrización de $\Sigma_f$, cercana al origen. Así facilmente tenemos que

$$K_\Sigma = K_{\Sigma_f} = -\frac{2|\phi''|^2}{(1+|\phi'|^2)^4}. \tag{5.1}$$

Como $\Sigma_f$ es mínima

$$B(x,x) + B(y,y) = 0,$$

con lo que establecemos el siguiente resultado

$$-\frac{2|\phi''|^2}{(1+|\phi'|^2)^4} = -|B(x,x)|^2 - |B(x,y)|^2 \tag{5.2}$$

Sea $\gamma : [0, l] \to K_\Sigma$ una geodesica. Consideremos $T$ un campo vectorial tangente a la geodesica. Por lo tanto $\nabla_T T \equiv 0$, luego

$$\overline{\nabla}_T T = \nabla_T T + B(T, T)$$

de donde se tiene que

$$\overline{\nabla}_T T = B(T, T)$$

y por consiguiente

$$|k_e| = |B(T, T)|,$$

donde $k_e$ es la curvatura excéntrica de la geodésica $\gamma$.

**Lema** 5.1.1.

$$k_e(\gamma) \leq \alpha_1^2 + \beta_1^2.$$

**Demostración:**Por (5.2)tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{2|\phi''|^2}{(1+|\phi'|^2)^4} &= \langle B(x,x), B(y,y)\rangle - |B(x,y)|^2 \\ -\frac{2|\phi''|^2}{(1+|\phi'|^2)^4} &= det(S_n) + det(S_m) \\ -\frac{2|\phi''|^2}{(1+|\phi'|^2)^4} &= -\alpha_1^2 - \beta_1^2. \end{aligned}$$

□

Pero

$$B(T, T) = \langle S_n(T), T\rangle n + \langle S_m(T), T\rangle m,$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} |B(T,T)|^2 &= |\langle S_n(T), T\rangle|^2 + |\langle S_m(T), T\rangle|^2 \\ &\leq \alpha_1^2 + \beta_1^2 \\ |B(T,T)|^2 &\leq -K_\Sigma. \end{aligned}$$

**Teorema** 5.1.1. *Sea $\gamma$ un geodésica en $\Sigma_f$, entonces*

$$|k_e(\gamma)| \leq \sqrt{2}|SF(z)|.$$

**Demostración:**Ya que $\Sigma_f = \Sigma_u$, basta con estudiar ésta superficie. Supongamos que $u_z \neq 0$, entonces existe una función holomorfa $z = \phi(w)$ tal que parametriza a $\Sigma_u$. O sea $u(\phi(w), w) \equiv 0$. Luego derivando esta última expresión tenemos que

$$u_w + u_z\phi' = 0,$$

así que derivando nuevamente establecemos que

$$u_{ww} + 2u_{zw}\phi' + u_{zz}(\phi')^2 + u_z\phi'' = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} -u_z\phi'' &= u_{ww} + 2u_{zw}\phi' + u_{zz}(\phi')^2 \\ -\phi'' &= \frac{u_{ww} + 2u_{zw}\phi' + u_{zz}(\phi')^2}{u_z}, \end{aligned}$$

es decir

$$-\phi'' = \frac{\operatorname{Hess} u(\phi', 1)}{u_z} \tag{5.3}$$

Sea $\vec{v} = \dfrac{(\phi', 1)}{|(\phi', 1)|}$, de (5.1) y (5.3) podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \sqrt{-K_\Sigma} &= \sqrt{2}\frac{|\phi''|}{(1+|\phi'|^2)^2} &&= \sqrt{2}\frac{\operatorname{Hess} u(\vec{v})}{(1+|\phi'|^2)|u_z|} \\ &= \sqrt{2}\frac{v^\perp(\operatorname{Hess} u)v}{(\frac{|u_w|^2+|u_z|^2}{|u_z|^2})|u_z|} &&= \sqrt{2}\frac{\operatorname{Hess} u(\vec{v})}{\frac{|\nabla u|^2}{|u_z|}} \\ &= \sqrt{2}\frac{v^\perp(\operatorname{Hess} u)v}{|\nabla u||\frac{\nabla u}{u_z}|} &&\leq \sqrt{2}\frac{\operatorname{Hess} u(\vec{v})}{|\nabla u|}. \end{aligned}$$

Por otra parte $u$ es solución de (2.1), luego restringiendo $u$ a la geodésica $\gamma$ obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} = \sum_{k=1}^{2} S_{ij}^k F \frac{\partial u}{\partial z_k}$$

claramente se deduce que

$$\operatorname{Hess} u = \begin{pmatrix} S^1 F \\ S^2 F \end{pmatrix} \cdot \nabla u$$

de donde $v^\perp(Hessu)v = SF(v) \cdot \nabla u$, entonces

$$\frac{|\operatorname{Hess} u(\vec{v})|}{|\nabla u|} \leq |SF(v)|. \tag{5.4}$$

Luego del lema(5.1.1) concluimos que

$$|k_e(\gamma)| \leq \sqrt{2}|SF(v)|.$$

$\square$

# Bibliografía


[1] Fitzgerald C.H. Barnard, R.W. and S.A. Gong. A distorsion theorem for holomorphic mappings in $\mathbb{C}^2$. *Trans.Amer.Math.Soc.*, 344:907–924, 1994.

[2] J. Becker. Lownersche differentialgeichung und quasikonform fortsetzbare schlichte funktionen. *J. Reine Angew. Math*, 125:23–43, 1972.

[3] L. Bieberbach. Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des einheitskreiss vermitteln. *S.-B.Preuss.Akad.Wiss*, pages 940–955, 1916.

[4] M. Chuaqui and B. Osgood. The sharp distorsion theorems associated with the Schwarzian derivative. *J.London Math.Soc.(2)*, 48(2):289–298, 1993.

[5] M. Chuaqui and B. Osgood. Ahlfors-weill extensions of conformal mappings and critical points of the Poincaré metric. *Comment. Math. Helv*, 69:659–668, 1994.

[6] Peter Duren. *Univalent Functions.* Springer-Verlag, 1983.

[7] C. Epstein. The hyperbolic gauss map and quasiconformal reflections. *J. reineu. angew. Math*, 372:96–135, 1986.

[8] F.W. Gehring and Ch. Pommerenke. On the Nehari univalence criterion and quasicircle. *Comment.Math.Helv.*, 59:226–242, 1984.

[9] S. Gong and C. FitzGerald. The Schwarzian derivative in several complex variable. *Sci.China Ser.A*, 36(5):513–523, 1993.

[10] I. Graham and G. Khor. *Geometric function theory in one and higer dimensions*, volume Pure and Applied Math.255. Marcel Dekker, 2003.

[11] I. Graham and G. Kohr. Loewner Chains and Roper-Suffridge extension operator. *J.Math.Anal.Appl*, 247:448–465, 2000.

[12] Anderson J.M. and Hinkkanen A. Univalence criteria and quasiconformal extenions. *Trans.Amer.Math.Soc*, 324(2):823–842, 1991.

[13] E. Kamke. *Differentialgleichungen.* Chelsea, New York, 1948.

[14] S. Krantz. *Function Theory of several complex variable.* Pure and applied Math., 1982.

[15] W. Kraus. Uber den zusammenhang einiger charakteristiken eines einfach zusammenhangenden bereiches mit der kreisabbildung. *Mitt. Math. Sem. Geisen*, 21:1–28, 1932.

[16] Liu. The distorsion theorem for biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$. *Preprint*, 1989.

[17] R. Molzon and K.P. Mortensen. Univalence of holomorphic mappings. *Pacific J. Math.*, 180(1):125–133, 1997.

[18] Z. Nehari. The schwarzian derivative and schlicht functions. *Bull.Amer.Math.Soc.*, 55:545–551, 1949.

[19] Z. Nehari. Some criteria of univalent. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5(5):700–704, 1954.

[20] Z. Nehari. A property of convex conformal maps. *Jour.d'Analyse Math*, 30:390–393, 1976.

[21] T. Oda. On schwarzian derivatives in several variables(in japanese). *Kokyuroku of R.I.M., Kioto Univ.*, 226, 1974.

[22] B. Osgood and D. Stowe. A generalization of Nehari's univalence criterion. *Comment.Math.Helv.*, 65:234–242, 1990.

[23] J.A. Pfaltzgraff. Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$. *Math. Ann*, 210:55–68, 1974.

[24] J.A. Pfaltzgraff. Distorsion of locally biholomorphic maps of the n-ball. *Complex Variable*, 33:239–253, 1997.

[25] J.A. Pfaltzgraff and T.J. Suffridge. Norm order and geometric properties of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$. *J. Analyse Math.*, 82:285–313, 2000.

[26] V.V. Pokornyi. On some sufficient condition for univalence. *Doklady Akademii Nauk SSRR (N.S.)*, 79:743–746, 1951.

[27] Ch. Pommerenke. Linear-invarinte familien analytischer funktionen I. *Math. Ann*, 155:108–154, 1964.

[28] Ch. Pommerenke. Linear-invarinte familien analytischer funktionen II. *Math. Ann*, 156:226–262, 1964.

[29] K. Roper and T. Suffridge. Convex mappings on the unit ball in $\mathbb{C}^n$. *J.d'Anal.Math.*, 65:333–347, 1995.

[30] W. Rudin. *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag, New York, 1980.

[31] Masaaki Yoshida. Orbifold-uniformizing differential equations. *Math. Annalen.*, 267:125–142, 1984.