Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Programa de Doctorado en Matemáticas

ALGEBRIZABILIDAD DEBILITANDO ESTRUCTURALIDAD

Por: SERGIO ROBERTO MUÑOZ VENEGAS

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile para optar al grado académico de Doctor en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesora Guía:	Irene Mikenberg
Comisión examinadora:	Irene Mikenberg
	Marta Sagastume
	Renato Lewin
	Martin Chuaqui

Enero 2002
Santiago, Chile

Agradecimientos.

A mis padres, a quienes debo 29 años de amor, cuidados, y sacrificios.

A Irene Mikenberg, por su apoyo y amistad desde mi primer día en la universidad hasta hoy; a Herminia Ochsenuis, por su confianza en mí, y la cordura y amistad que me otorga en cada conversación; a Renato Lewin, por compartir su intuición y experiencia; a M. Victoria Marshall, M. Gloria Schwarze, y Rubén Preiss, que me dieron su mano en momentos confusos; y a Claudio Fernández, por su generosidad.

A la Facultad de Matemáticas, "de capitán a paje", por el apoyo, generosidad, y por crear el ambiente en el cual se desarrolló mi tesis.

A los "compañeros de trinchera" del postgrado.

A Javiera, compañera de mi vida, y a Andrea, mi "jefa chica", que sobrevivieron a mi tesis, y a quienes amo sin medida.

Índice general

Resumen

El objetivo de esta tesis es establecer una noción de algebrizabilidad de una lógica sin requerir su estructuralidad. Para ello se extienden las nociones habituales de Lógica Algebraica Abstracta a generalizaciones de lógicas y matrices, en sentido de estructuralidad, de multi-dimensionalidad, de deducción infinitaria, y de sistemas de clausura. Se obtuvo una generalización del proceso de algebrización cercana a lo habitual, y como consecuencia adicional se tiene una unificación de distintas versiones de Lógica Algebraica Abstracta.

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis se extienden los conceptos básicos de *Lógica Algebraica Abstracta* (AAL) debilitando la condición de estructuralidad que ella impone a una lógica para considerar su algebrizabilidad. Lógicas no estructurales como las Lógicas Anotadas (ver [17]) no pueden ser directamente estudiadas por AAL, aunque fueron estudiadas indirectamente por R. Lewin, I. Mikenberg, y M. G. Schwarze en [19] por medio de lógicas estructurales deductivamente equivalentes a las Lógicas Anotadas originales. No es claro el rango de aplicación de ese método.

El concepto de lógica proposicional usado aquí extiende al de *sistema* **k**-*deductivo* ($1 \leq k < \omega$) presentado en [4] por W. Blok y D. Pigozzi, al eliminar estructuralidad y finitud de su definición. Para evitar confusión con la nomenclatura tradicional tales extensiones son llamadas *sistemas proposicionales*.

Los objetos básicos usados son triples formados por un álgebra $\mathbf{A}$, un sistema de clausura de conjuntos de k-tuplas de elementos de $|\mathbf{A}|$, y un subconjunto de los homomorfismos del álgebra de fórmulas del sistema proposicional en $\mathbf{A}$. Tales triples, llamados HR^k-lógicas abstractas, permiten considerar al sistema proposicional como uno de ellos, de manera análoga al caso $k = 1$ estructural y finitario estudiado por J. M. Font y R. Jansana en [14]. Pero además las HR^k-lógicas abstractas determinan, de manera natural, una semántica que bajo ciertas restricciones es análoga a la de los modelos sobre *lógicas abstractas* de Font y Jansana; en particular todo sistema proposicional es completo respecto de tal semántica. Más aún, al considerar sistemas proposicionales estructurales, finitos, y con $k = 1$, los modelos llenos reducidos de Font y Jansana para él son esencialmente modelos restringidos en el sentido aquí propuesto, y el sistema es completo respecto de sus modelos llenos reducidos.

Una consecuencia de ello es que considerando sistemas estructurales y finitarios se obtiene una semántica basada en sistemas de clausura para todo sistema k-deductivo de [4]; en ese trabajo, y en [2], Blok y Pigozzi usan matrices para su semántica.

La definición que se da de equivalencia entre sistemas proposicionales cualesquiera (sobre el mismo lenguaje) presenta consecuencias análogas a las obtenidas por Blok y Pigozzi en [2], que se extienden a los modelos restringidos de ambos sistemas. En particular si un sistema proposicional $\mathcal{S}$ es equivalente con un sistema proposicional de congruencias, es decir, un sistema proposicional sobre pares ordenados cuyas *teorías* (elementos del sistema de clausura) son congruencias del álgebra de fórmulas. entonces todo modelo restringido del sistema de congruencias tiene como sistema de clausura a las *congruencias de Leibnitz* de un modelo restringido de $\mathcal{S}$ sobre la misma álgebra y con el mismo conjunto de homomorfismos asociado. En ese caso el operador de Leibnitz en cada modelo restringido de $\mathcal{S}$ es *inyectivo*, *continuo por intersecciones arbitrarias*, y *conmuta por preimagen* con un subconjunto de los endomorfismos del álgebra del modelo, determinado por los homomorfismos asociados al modelo.

Considerando lo anterior, el desarrollo de la tesis preserva como concepto básico de algebrizabilidad la equivalencia entre un sistema proposicional $\mathcal{S}$ y un *sistema proposicional de congruencias*, situación en la que $\mathcal{S}$ se dice *HR-algebrizable*. Las consecuencias de HR-algebrizabilidad son análogas a las consecuencias de algebrizabilidad, y todo sistema estructural, reinterpretado como lógica proposicional (en nomenclatura tradicional), es HR-algebrizable si y sólo si es algebrizable, y si $k = 1$ y el sistema es además finitario, entonces sus modelos restringidos son reinterpretables como los modelos llenos (reducidos) de Font y Jansana en [14]. Lo anterior permite establecer la noción de HR-algebrizabilidad como una generalización de algebrizabilidad, tanto en lo que toca a estructuralidad como en lo que toca a finitud.

Finalmente, las Lógicas Anotadas son HR-algebrizables básicamente del mismo modo en que lo son las versiones estructurales estudiadas en [19] y, al igual que en ese trabajo, las Lógicas Anotadas finitarias reúnen las mejores características para su estudio "algebraico".

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Operadores de clausura y sistemas de clausura.

Un *operador de clausura* sobre un conjunto no vacío A es una aplicación $C_A : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, que si no hay ambiguedad se denota por C, tal que para todos B y D subconjuntos de A se cumple:

1. $B \subseteq C(B)$
2. $D \subseteq B$ implica $C(D) \subseteq (B)$
3. $C(\,C(B)\,) \subseteq C(B)$
4. El operador es *algebraico* (o también *finitario*) si además cumple: $C(B) = \bigcup\{C(B_f) : B_f \subseteq B \text{ con } B_f \text{ finito }\}$

Para A conjunto no vacío, una familia $\mathcal{C}_A$ de subconjuntos de A es un *sistema de clausura* sobre A, y si no hay ambiguedad se denota por $\mathcal{C}$, si $|A| \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias. Una familia $(T_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de A es *dirigida* si para todos $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $T_i \cup T_j \subseteq T_k$. Entonces, un sistema de clausura es *inductivo* si $\bigcup_{i\in I} T_i \subseteq \mathcal{C}$ para toda familia dirigida $(T_i)_{i\in I}$.

Si $\{\mathcal{C}_i \;:\; i \in I\}$ es una familia de sistemas de clausura sobre el mismo conjunto, se dice que $\mathcal{C}$ es el sistema de clausura generado por tal familia si es el menor sistema de clausura tal que $\bigcup_{\,i\,\in\,I} \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}$. En tal caso, se cumple que $\Gamma \in \mathcal{C}$ si y sólo si existe $\{\Gamma_i \in \mathcal{C}_i \;:\; i \in I\}$ tal que $\Gamma = \bigcap_{\,i\,\in\,I} \Gamma_i$.

1. Si $\mathcal{C}$ es un sistema de clausura (inductivo) sobre A, entonces el operador C definido por $C(B) = \bigcap\{D \in \mathcal{C} : B \subseteq D\}$, $B \subseteq A$, es un operador de clausura (algebraico) sobre A.

2. Si C es un operador de clausura (algebraico) sobre A, entonces la familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de A definida por $T \in \mathcal{C}$ si y sólo si $C(B) = B$, $B \subseteq A$, es un sistema de clausura sobre A (resp. inductivo).

2.2. Lógicas, matrices y lógicas abstractas.

Un *lenguaje proposicional* $\mathfrak{Fm}$ es un álgebra totalmente libre con infinitos generadores, llamados *átomos* o también *variables*. El conjunto de los átomos de $\mathfrak{Fm}$ se denota por $\underline{At}$, a las operaciones se les denomina *conectivos*, y los elementos de $\mathfrak{Fm}$ son llamados *fórmulas*.

Una *sustitución* es un homomorfismo $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$, y es únivocamente determinada por su restricción a $\underline{At}$.

Una relación $\vdash_{\mathfrak{Fm}} \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{Fm}) \times \mathfrak{Fm}$ es una *relación de consecuencia en* $\mathfrak{Fm}$ si para todo $\Gamma \cup \Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$:

1. Si $\varphi \in \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathfrak{Fm}} \varphi$.
2. $\Gamma \vdash_{\mathfrak{Fm}} \varphi$ y $\Gamma \subseteq \Sigma$ implican $\Sigma \vdash_{\mathfrak{Fm}} \varphi$.
3. $\Gamma \vdash_{\mathfrak{Fm}} \varphi$ y $\Sigma \vdash_{\mathfrak{Fm}} \gamma$ para todo $\gamma \in \Gamma$ implican $\Sigma \vdash_{\mathfrak{Fm}} \varphi$.
4. La relación es *finitaria* si cumple: $\Gamma \vdash_{\mathfrak{Fm}} \varphi$ implica que existe un conjunto finito $\Sigma \subseteq \Gamma$ tal que $\Sigma \vdash_{\mathfrak{Fm}} \varphi$.
5. Una sustitución σ es *compatible* con la relación si cumple: $\Gamma \vdash_{\mathfrak{Fm}} \varphi$ implica $\sigma[\Gamma] \vdash_{\mathfrak{Fm}} \sigma(\varphi)$.
6. La relación de consecuencia es *estructural* si toda sustitución es compatible con ella.

Si $\mathfrak{Fm}$ es claro según el contexto, $\vdash_{\mathfrak{Fm}}$ se denota simplemente por $\vdash$.

Sea C un operador de clausura sobre $\mathfrak{Fm}$

1. Una sustitución σ es *compatible* con C si para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathfrak{Fm}$ se tiene: $\varphi \in C(\Gamma)$ implica $\sigma(\varphi) \in C(\sigma[\Gamma])$.
2. C es *estructural* si toda sustitución es compatible con él.

Sea $\mathcal{C}$ un sistema de clausura sobre $|\mathfrak{Fm}|$.

1. Una sustitución σ de $\mathfrak{Fm}$ es *compatible* con $\mathcal{C}$ si para todo $T \in \mathcal{C}$ se tiene que $\sigma^{-1}[T] \in \mathcal{C}$.
2. $\mathcal{C}$ es *estructural* si toda sustitución es compatible con él.

Se tienen las siguientes relaciones entre las relaciones de consecuencia, operadores de clausura y sistemas de clausura:

1. Si $\vdash$ es una relación de consecuencia sobre $\mathfrak{Fm}$ (resp. con la que una sustitución σ es compatible, estructural, finitaria) entonces el operador C definido por $\varphi \in C(\Gamma)$ si y sólo si $\Gamma \vdash \varphi$ es un operador de clausura sobre $\mathfrak{Fm}$ (resp. con el que σ es compatible, estructural, algebraico).

2. Si C es un operador de clausura sobre $\mathfrak{Fm}$ (resp. con el que una sustitución σ es compatible, estructural, algebraico), entonces la relación $\vdash$ definida por $\Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si $\varphi \in C(\Gamma)$ es una relación de consecuencia sobre $\mathfrak{Fm}$ (resp. con la que σ es compatible, estructural, finitaria).

3. Si $\mathcal{C}$ es un sistema de clausura sobre $\mathfrak{Fm}$ (resp. con el que una sustitución σ es compatible, estructural, inductivo), entonces el operador C definido por $C(\Gamma) = \bigcap\{\Sigma \in \mathcal{C} : \Gamma \subseteq \Sigma\}$ es un operador de clausura sobre $\mathfrak{Fm}$ (resp. con el que σ es compatible, estructural, algebraico).

4. Si C es un operador de clausura sobre $\mathfrak{Fm}$ (resp. con el que una sustitución σ es compatible, estructural, algebraico), entonces la familia de subconjuntos de $\mathfrak{Fm}$: $\mathcal{C}$, definida por $T \in \mathcal{C}$ si y sólo si $C(T) = T$, es un sistema de clausura sobre $\mathfrak{Fm}$ (resp. con el que σ es compatible, estructural, inductivo).

5. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son sistemas de clausura sobre $\mathfrak{Fm}$, y denotamos por C y C' los respectivos operadores de clausura, y por $\vdash$ y $\vdash'$ las respectivas relaciones de consecuencia entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ si y sólo si para todo $\Gamma \subseteq |\mathfrak{Fm}|$ $C'(\Gamma) \subseteq C(\Gamma)$ si y sólo si para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq |\mathfrak{Fm}|$, $\Gamma \vdash' \varphi$ implica $\Gamma \vdash \varphi$.

De modo directo se obtienen las relaciones entre relaciones se consecuencia y sistemas de clausura.

Una *lógica proposicional* $\mathcal{S}$ es un par $\langle\, \mathfrak{Fm}, \mathbf{Th}_{\mathcal{S}} \,\rangle$ donde $\mathfrak{Fm}$ es un lenguaje proposicional y $\mathbf{Th}_{\mathcal{S}}$ es un sistema de clausura estructural sobre $\mathfrak{Fm}$. Por lo dicho arriba, $\mathcal{S}$ puede equivalentemente ser considerado como un par $\langle\, \mathfrak{Fm}, \mathrm{Th}_{\mathcal{S}} \,\rangle$ o también como un par $\langle\, \mathfrak{Fm}, \vdash \rangle$, con $\mathrm{Th}_{\mathcal{S}}$ operador de clausura estructural y $\mathcal{C}$ relación de consecuencia estructural. De hecho se usarán las tres formas indistintamente. Las fórmulas que pertenecen a $Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$ se llaman *teoremas*, y los conjuntos de fórmulas $T \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}}$ se llaman teorías.

Un *sistema deductivo* es una lógica proposicional finitaria.

Una *matriz lógica* (o simplemente una matriz) del tipo de un lenguaje proposicional $\mathfrak{Fm}$ es un par $\langle\, \mathbf{A}, F \,\rangle$, donde $\mathbf{A}$ es un álgebra del mismo tipo algebraico de $\mathfrak{Fm}$ y $F \subseteq |\mathbf{A}|$, llamado el *filtro* de la matriz.

Dada una lógica proposicional, una *matriz de Lindembaum-Tarski* es una matriz lógica sobre $\mathfrak{Fm}$ tal que su filtro es una teoría de tal lógica.

Una *matriz generalizada* del tipo de un lenguaje proposicional $\mathfrak{Fm}$ es un par $\langle\, \mathbf{A}, \mathcal{C} \rangle$, donde $\mathbf{A}$ es un $\mathcal{L}$-álgebra y $\mathcal{C}$ es un sistema de subconjuntos de $|\mathbf{A}|$, o sistema de filtros.

Una *lógica abstracta* del tipo de un lenguaje proposicional $\mathfrak{Fm}$ es una matriz generalizada $\mathbb{L} = \langle\, \mathbf{A}, \mathcal{C} \,\rangle$ tal que $\mathcal{C}$ es un sistema de clausura sobre $|\mathbf{A}|$.

Un *morfismo lógico* f entre las lógicas abstractas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ es un homomorfismo entre las respectivas álgebras tal que toda preimagen de un filtro de $\mathbb{L}_2$ es un filtro de $\mathbb{L}_1$.

Un *morfismo bilógico* entre las lógicas abstractas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ es un morfismo lógico, f sobreyectivo y tal que todo filtro de $\mathbb{L}_1$ es preimagen de un filtro de $\mathbb{L}_2$.

Los morfismos lógicos (o bilógicos) son cerrados bajo composición.

Una de las herramientas clave en Lógica Algebraica Abstracta es la *congruencia de Leibnitz* de una matriz lógica, denotada $\Omega_{\mathbf{A}}(F)$ o $\Omega(\mathbf{M})$, si $\mathbf{M} = \langle\, \mathbf{A}, F \,\rangle$ es la matriz lógica, y que se caracteriza en general por ser la mayor congruencia *compatible* con el filtro, es decir, éste es unión de clases de equivalencia por la congruencia. Directamente relacionada con ella está la *congruencia de Tarski* de una matriz generalizada, denotada $\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L})$ o $\widetilde{\Omega}_{\mathbf{A}}\,(\mathcal{C})$ si $\mathbb{L} = \langle\, \mathbf{A}, \mathcal{C} \,\rangle$ es matriz generalizada, definida como la mayor congruencia compatible con todos los elementos del sistema de filtros de la matriz generalizada, o también como la intersección de las congruencias de Leibnitz de cada elemento del sistema de clausura asociado.

Una matriz (generalizada) es *reducida* si la congruencia de Leibnitz (resp. Tarski) es la diagonal (o identidad). Tradicionalmente, al formar el cuociente de una matriz (resp. generalizada) por la congruencia de Leibnitz (resp. Tarski), donde el filtro (resp. sistema de filtros) del cuociente se obtiene por imagen del filtro (de cada elemento del sistema de filtros) por el morfismo canónico asociado a la congruencia de Leibnitz (Tarski). Tal cuociente se denomina el *reducto* de la matriz (generalizada), y se denota con el superíndice " * " a derecha, es decir, si nombramos $\mathbf{X}$ a una matriz (generalizada), su reducto se denota por $\mathbf{X}^*$. Es de notar que el reducto de una matriz (generalizada) es siempre reducido.

Lema 2.2.1. *1. Si $f \in Hom(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, con $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ $\mathcal{L}$-álgebras, entonces para toda $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathbf{B}$ la relación*

$$f^{-1}[\theta] := \{\langle x, y \rangle \in |\mathbf{A}| \times |\mathbf{A}| \ : \langle f(x), f(y) \rangle \in \theta\}$$

es una congruencia de $\mathbf{A}$. Además, si f es morfismo bilógico de $\langle\, \mathbf{A}, \mathcal{C} \,\rangle$ sobre $\langle\, \mathbf{B}, \mathcal{C}' \,\rangle$, y $\theta \leq \widetilde{\Omega}_{\mathbf{B}}\,(\mathcal{C}')$, entonces $f^{-1}[\theta] \leq \widetilde{\Omega}_{\mathbf{A}}\,(\mathcal{C})$.

2. Si $f \in Hom(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ es sobreyectivo, entonces para toda $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathbf{A}$ la relación $f[\theta] := \{\langle f(x), f(y) \rangle \ : \langle x, y \rangle \in \theta\}$ es una congruencia de $\mathbf{B}$. Además, si f es morfismo lógico[1] *de $\langle\, \mathbf{A}, \mathcal{C} \,\rangle$ sobre $\langle\, \mathbf{B}, \mathcal{C}' \,\rangle$, y $\theta \leq \widetilde{\Omega}_{\mathbf{A}}\,(\mathcal{C})$, entonces $f[\theta] \leq \widetilde{\Omega}_{\mathbf{B}}\,(\mathcal{C}')$.*

3. [2] *Si f es un morfismo bilógico de la lógica abstracta $\mathbb{L}$ sobre la lógica abstracta $\mathbb{L}'$, entonces $\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}) = f^{-1}[\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}')]$.*

[1] Es decir, la preimagen de un elemento de $\mathcal{C}$ es un elemento de $\mathcal{C}'$.

[2] Esta es una demostración de la Proposición 1.7 de [14], pero aquí se evita el uso de la caracterización (1.3) que ahí aparece.

4. *Si f es morfismo bilógico de la lógica abstracta $\mathbb{L}$ sobre la lógica abstracta $\mathbb{L}'$, y $\mathbb{L}$ es reducida, entonces $\mathbb{L}'$ es reducida.*

5. [3] *Si h es morfismo bilógico de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{L}_1$, entonces existe un isomorfismo bilógico de $\mathbb{L}^*$ sobre $\mathbb{L}_1^*$.*[4]

6. *Si h es morfismo bilógico de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{L}_1$, y ambas lógicas abstractas son reducidas, entonces h es isomorfismo bilógico.*

Demostración. 1. Sean f y $f^{-1}[\theta]$ para cada $\theta \in \mathrm{Con}\, \mathbf{B}$ como en el enunciado. Entonces

- Si $a \in |\mathbf{A}|$, entonces $f(a) \in |\mathbf{B}|$, y por lo tanto $\langle f(a), f(a) \rangle \in \theta$, es decir, $\langle a, a \rangle \in f^{-1}[\theta]$.
- Si $\langle a, b \rangle \in f^{-1}[\theta]$, entonces $\langle f(a), f(b) \rangle \in \theta$, y por lo tanto $\langle f(b), f(a) \rangle \in \theta$. Luego, $\langle b, a \rangle \in f^{-1}[\theta]$.
- Si $\langle a, b \rangle \in f^{-1}[\theta]$ y $\langle b, c \rangle \in f^{-1}[\theta]$, entonces $\langle f(a), f(b) \rangle \in \theta$ y $\langle f(b), f(c) \rangle \in \theta$, y por lo tanto $\langle f(a), f(c) \rangle \in \theta$, es decir, $\langle a, c \rangle \in f^{-1}[\theta]$.
- Sean $\langle a_i, b_i \rangle \in f^{-1}[\theta]$ para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $t \in \mathcal{L}$ operación n-aria. Entonces $\langle f(a_i), f(b_i) \rangle \in \theta$ para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, y por lo tanto $\langle h(t(a_0, \ldots, a_{n-1})), h(t(b_0, \ldots, b_{n-1})) \rangle \in \theta$, es decir, $\langle t(a_0, \ldots, a_{n-1}), t(b_0, \ldots, b_{n-1}) \rangle \in f^{-1}[\theta]$.

Luego, $f^{-1}[\theta] \in \mathrm{Con}\, \mathbf{A}$. Si suponemos que f es morfismo bilógico de $\langle \mathbf{A}, \mathcal{C} \rangle$ sobre $\langle \mathbf{B}, \mathcal{C}' \rangle$ y $\theta \leq \widetilde{\Omega}_{\mathbf{B}}\, (\mathcal{C}')$, entonces para todo $\Gamma \in \mathcal{C}$, si $\langle a, b \rangle \in f^{-1}[\theta]$ y $a \in \Gamma$, como $\langle f(a), f(b) \rangle \in \theta$ y $f(a) \in f[\Gamma] \in \mathcal{C}'$, necesariamente $f(b) \in f[\Gamma]$, es decir, $b \in \Gamma$. Luego, $\theta \leq \widetilde{\Omega}_{\mathbf{A}}\, (\mathcal{C})$.

2. Sean f y $f[\theta]$ para cada $\theta \in \mathrm{Con}\, \mathbf{A}$ como en el enunciado. Entonces

- Si $a \in |\mathbf{B}|$, existe $x \in |\mathbf{A}|$ tal que $a = f(x)$, y como $\langle x, x \rangle \in \theta$, entonces $\langle a, a \rangle \in f^{-1}[\theta]$.
- Si $\langle a, b \rangle \in f[\theta]$, existen $x, y \in |\mathbf{A}|$ tal que $a = f(x)$ y $b = f(y)$ con $\langle x, y \rangle \in \theta$, y entonces $\langle y, x \rangle \in \theta$, es decir, $\langle b, a \rangle \in f[\theta]$.
- Si $\langle a, b \rangle \in f[\theta]$ y $\langle b, c \rangle \in f[\theta]$, existen $x, y, z \in |\mathbf{A}|$ con $f(x) = a$, $f(y) = b$, $f(z) = c$, y $\langle x, y \rangle \in \theta$ y $\langle y, z \rangle \in \theta$. Luego $\langle x, z \rangle \in \theta$, y entonces $\langle a, c \rangle \in f[\theta]$.
- Sean $\langle a_i, b_i \rangle \in f[\theta]$ para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $t \in \mathcal{L}$ operación n-aria. Entonces para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ existen $x_i, y_i \in |\mathbf{A}|$ tales que $a_i = f(x_i)$ y $b_i = f(y_i)$, con $\langle x_i, y_i \rangle \in \theta$.
  Entonces $\langle t(x_0, \ldots, x_{n-1}), t(y_0, \ldots, y_{n-1}) \rangle \in \theta$, y por lo tanto $\langle t(a_0, \ldots, a_{n-1}), t(b_0, \ldots, b_{n-1}) \rangle \in \theta$.

[3] Proposición 1.14 de [14]. La demostración es esencialmente igual.

[4] $\mathbb{L}^*$ es la imagen de $\mathbb{L}$ por el morfismo canónico de $\widetilde{\Omega}\, (\mathbb{L})$.

Luego, $f[\theta] \in \text{Con}\,\mathbf{B}$. Si suponemos que f es morfismo lógico de $\langle\, \mathbf{A}, \mathcal{C} \,\rangle$ sobre $\langle\, \mathbf{B}, \mathcal{C}' \,\rangle$, es decir, $\forall \Gamma' \in \mathcal{C}' \quad f^{-1}[\Gamma'] \in \mathcal{C}$, y $\theta \leq \widetilde{\Omega}_{\mathbf{A}}\,(\mathcal{C})$, entonces para todo $\Gamma' \in \mathcal{C}'$, si $\langle\, a, b \,\rangle \in f[\theta]$ y $a \in \Gamma'$, existen $x, y \in |\,\mathbf{A}|$ con $a = f(x)$ y $b = f(y)$ tales que $\langle\, x, y \,\rangle \in \theta$. Pero entonces $x \in f^{-1}[\Gamma'] \in \mathcal{C}$ y entonces $y \in f^{-1}[\Gamma']$, es decir, $b \in \Gamma'$. Luego, $f[\theta] \leq \widetilde{\Omega}_{\mathbf{B}}\,(\mathcal{C}')$.

3. Sea f morfismo bilógico de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{L}'$. Entonces $f^{-1}[\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}')] \leq \widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L})$ por lo anterior. Pero como también $f[\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L})] \leq \widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}')$, si $\langle\, x, y \,\rangle \in \widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L})$, entonces $\langle\, f(x), f(y) \,\rangle \in f[\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L})]$, y por lo tanto $\langle\, f(x), f(y) \,\rangle \in \widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}')$, es decir, $\langle\, x, y \,\rangle \in f^{-1}[\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}')]$. Luego, $f^{-1}[\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}')] = \widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L})$.

4. Es evidente si se considera que para f morfismo bilógico de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{L}'$ el kernel de f es la identidad, ya que $\ker f \subseteq \widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L})$ y $\mathbb{L}$ es reducida. Luego, f es isomorfismo bilógico, y por lo tanto $\mathbb{L}'$ es reducida.

5. Sea h como en el enunciado. Usaremos la notación $()^*$ para cuociente de álgebras, conjuntos, y elementos individuales respecto de $\widetilde{\Omega}\,()$, sin indicar explícitamente en qué lógica abstracta se encuentran si es claro por contexto. Entonces a cada elemento de $|\,\mathbf{A}^*|$, digamos a^* con $a \in |\,\mathbf{A}|$, se le asigna el elemento $g(a^*) := h(a)^* \in |\,\mathbf{B}^*|$. Claramente, $a^* = b^*$ si y sólo si $\langle\, a, b \,\rangle \in \widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L})$ si y sólo si $\langle\, a, b \,\rangle \in h^{-1}[\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}')]$ si y sólo si $\langle\, h(a), h(b) \,\rangle \in \widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}')$ si y sólo si $g(a^*) = h(a)^* = h(b)^* = g(b^*)$. Luego, g está bien definida y es inyectiva. Si además $x \in |\,\mathbf{B}^*|$, existe $b \in |\,\mathbf{B}|$ con $x = b^*$, y por lo tanto existe $a \in |\,\mathbf{A}|$ con $b = h(a)$. Luego, $x = h(a)^* = g(a^*)$, es decir, g es sobreyectiva, y por tanto g es biyección. Por otra parte, si $a_0, \ldots, a_{n-1} \in |\,\mathbf{A}|$, es decir, si ${a^*}_0, \ldots, {a^*}_{n-1} \in |\,\mathbf{A}^*|$, y $t \in \mathcal{L}$ operación n-aria, entonces $g(t({a^*}_0, \ldots, {a^*}_{n-1})) = g(t(a_0, \ldots, a_{n-1})^*) = h(t(a_0, \ldots, a_{n-1}))^* = t(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))^* =$
$t(h(a_0)^*, \ldots, h(a_{n-1})^*) = t(g(a_0^*), \ldots, g(a_{n-1}^*))$. Luego, g es isomorfismo. Finalmente, sea $\Sigma_1 := \Sigma^* \in \mathcal{C}.\mathbb{L}_1^*$. Entonces $\Sigma \in \mathcal{C}.\mathbb{L}_1$, es decir, existe $\Gamma \in \mathcal{C}$ tal que $\Sigma = h[\Gamma]$, y por lo tanto $\Sigma_1 = h[\Gamma]^* = g[\Gamma^*]$, y claramente $\Gamma^* \in \mathcal{C}^*$. Luego, como g es inyectiva, resulta ser isomorfismo bilógico.

6. Sea g el isomorfismo de $\mathbb{L}^*$ sobre $\mathbb{L}_1^*$. Como las lógicas abstractas ya están reducidas, los morfismos canónicos asociados a $\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L})$ y a $\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}_1)$ son isomorfismos, expuestos aquí con la notación no ambigua $()^*$ en ambos casos. Como además para todo $a \in \mathbf{A}$ se tiene que $g(a^*) = h(a)^*$, entonces necesariamente h es isomorfismo, ya que puede escribirse como composición de isomorfismos (a $g(a^*)$ se le aplica el inverso del morfismo canónico asociado a $\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}_1)$ y resulta $h(a)$). Luego, h es isomorfismo bilógico.

□

2.3. Lógicas Anotadas.

Las Lógicas Anotadas, tal como fueron presentadas por Da Costa, Subrahamanian y Vago en [17], son el ejemplo del que parte esta tesis, ya que, como se indicó en la introducción, además de su valor intrínseco y sus aplicaciones, al no ser estructurales quedan fuera del ámbito de Lógica Algebraica Abstracta, y en rigor, no son lógicas proposicionales. Lewin, Mikenberg y Schwarze presentaron, en [19] y posteriores, una clase de lógicas estructurales deductivamente equivalente a las lógicas anotadas originales, por lo que pudieron ser estudiadas respecto de Lógica Algebraica Abstracta.

Lo que sigue es la presentación de las lógicas anotadas en su versión original, relativo a [17], más algunas propiedades necesarias posteriormente:

Definición 1. *Sea τ un retículo completo, llamado retículo de valores de verdad, con operaciones de supremo e ínfimo denotadas por $\sqcap$ y $\sqcup$ respectivamente, y con el orden denotado por $\sqsubseteq$. El supremo de τ se denota por $\top$, y el ínfimo por $\perp$. Además, se asocia a τ una función unaria arbitraria denotada por $\neg$, y llamada* negación de τ, *pero que debe especificarse cuando se presenta una lógica anotada.*

Consideremos los siguientes símbolos primitivos:

1. *Símbolos proposicionales p, q, ..., p_i, q_i, ... La cantidad de símbolos proposicionales, que serán llamados también letras proposicionales o simplemente letras, puede variar según se especifique, aunque por defecto se asume que es infinito numerable. El conjunto de letras proposicionales se denota por $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$, o simplemente por $\underline{le}$ si no hay ambiguedad.*

2. *Constantes, llamadas constantes anotadas o simplemente anotaciones, una por cada elemento de τ, y denotadas por λ, μ, ...*

3. *Conectivos binarios $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, y un conectivo unario $\neg$. Adicionalmente se usará el conectivo binario $\leftrightarrow$, pero no se considera símbolo primitivo, sino una abreviatura definida más adelante.*

4. *Paréntesis "(", ")", aunque también se usarán "[", "]", "{" y "}".*

Ahora podemos definir el lenguaje $\mathfrak{Fm}$ de $P\tau$ recursivamente por:

1. *Si p es una letra proposicional y μ es una constante anotada, entonces $(p:\mu)$ es una fórmula atómica de $\mathfrak{Fm}$, llamada átomo anotado. Nótese que p* no es fórmula *de $\mathfrak{Fm}$, sino que $(p:\mu)$ lo es, para cualquier $\mu \in \tau$.*

2. *Si φ es una fórmula de $\mathfrak{Fm}$, entonces $(\neg\varphi)$ es también una fórmula de $\mathfrak{Fm}$. Nótese que usamos el mismo símbolo $\neg$ que en la función unaria asociada a τ, lo que no debiera prestarse a confusión.*

3. *Si φ y ψ son fórmulas de $\mathfrak{Fm}$, entonces $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ y $(\varphi \rightarrow \psi)$ son también fórmulas de $\mathfrak{Fm}$. $\varphi \leftrightarrow \psi$ abrevia a $\big((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)\big)$.*

Las fórmulas de la forma:

$$\underbrace{\neg\ldots\neg}_{k veces}(p:\mu) \qquad k\in\omega,$$

son llamadas hiperliterales, y denotadas por $\neg^k(p:\mu)$. *Las fórmulas de* $\mathfrak{Fm}$ *que no son hiperliterales son llamadas fórmulas complejas*[5].

Finalmente, seguiremos las convenciones habituales para eliminar algunos paréntesis. Por ejemplo, una fórmula de la forma $((\varphi\vee\psi)\to(\neg\alpha))$ *se puede presentar como* $\varphi\vee\psi\to\neg\alpha$.

Se define $Th_{\mathcal{S}}()$, *con* $\mathcal{S}=P\mathcal{T}$, *como el operador de clausura que cumple con la siguiente lista de condiciones, considerando* α, β, ψ, A, $B\in\mathfrak{Fm}$, *con* A, B *fórmulas complejas:*

$(\to_1)$ $\quad (\alpha\to\beta)\to((\alpha\to(\beta\to\psi))\to(\alpha\to\psi))\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

$(\to_2)$ $\quad \alpha\to(\beta\to\alpha)\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

$(\to_3)$ $\quad ((\alpha\to\beta)\to\alpha)\to\alpha\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

$(\to_4)$ $\quad \beta\in Th_{\mathcal{S}}(\alpha,\alpha\to\beta)$,

$(\wedge_1)$ $\quad (\alpha\wedge\beta)\to\alpha\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

$(\wedge_2)$ $\quad (\alpha\wedge\beta)\to\beta\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

$(\wedge_3)$ $\quad \alpha\to(\beta\to(\alpha\wedge\beta))\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

$(\vee_1)$ $\quad \alpha\to(\alpha\vee\beta)\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

$(\vee_2)$ $\quad \beta\to(\alpha\vee\beta)\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

$(\vee_3)$ $\quad (\alpha\to\psi)\to((\beta\to\psi)\to((\alpha\vee\beta)\to\psi))\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

$(\neg_1)$ $\quad (A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

$(\neg_2)$ $\quad A\to(\neg A\to\alpha)\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

$(\neg_3)$ $\quad A\vee\neg A\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$,

(τ_1) $\quad (p:\bot)\wedge(\neg^k(p:\mu)\leftrightarrow\neg^{k-1}(p:\neg\mu))\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset), \quad k\in\mathbb{N}$,

(τ_2) $\quad (p:\mu)\to(p:\lambda)\in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$, *donde* $\lambda\sqsubseteq\mu$,

(τ_3) $\quad \alpha\to(p:\mu)\in Th_{\mathcal{S}}(\{\alpha\to(p:\mu_j)\ :\ j\in J\})$, *donde* $\mu=\sqcup_{j\in J}\mu_j$.

Una demostración, en sentido habitual respecto de una relación de consecuencia $\vdash$, *de una fórmula* φ *a partir de un conjunto de fórmulas* Γ, *denotada por* $\varphi\in Th_{\mathcal{S}}(\Gamma)$ *o por* $\Gamma\vdash\varphi$ *(lo que define la relación de consecuencia de* $P\mathcal{T}$*), es una sucesión de fórmulas* $\langle\psi_1,\ldots,\psi_\kappa\rangle$, *donde* κ *es un ordinal* [6], $\psi_\kappa=\varphi$, *y donde para todo* $i<\kappa$, ψ_i *o bien es axioma, o bien pertenece a* Γ, *o bien existen* j,l *menores que* i *tales que* $\psi_l=(\psi_j\to\psi_i)$ [7], *o bien existen* J *ordinal menor o*

[5] Es decir, toda fórmula con al menos un conectivo binario es compleja.

[6] Según la cardinalidad de τ, ya que si es infinito, la regla (τ_3) permite demostraciones infinitas.

[7] O sea, se obtiene ψ_i por Modus Ponens de dos fórmulas anteriores.

igual a i y ϕ fórmula, tales que $\psi_i = \phi \rightarrow (p : \sqcup_{j \in J} \mu_j)$ y tal que para $j \in J$ las fórmulas $\phi \rightarrow (p : \mu_j)$ aparecen antes que φ en la sucesión[8]. *Equivalentemente, se puede considerar que cada etapa de la demostración de φ a partir de Γ está dada por su contraparte en términos de $Th_{\mathcal{S}}()$.*

Un conjunto Γ de fórmulas se dice trivial *si $Th_{\mathcal{S}}(\Gamma) = |\mathfrak{Fm}|$, y se dice* inconsistente *si existe una fórmula ψ tal que $\{\psi, \neg\psi\} \subseteq Th_{\mathcal{S}}(\Gamma)$.*

■

Cuando τ es finito podemos reemplazar la regla (τ_3), por el axioma

$$(\tau_3)\prime \qquad (p : \mu_1) \wedge \ldots \wedge (p : \mu_k) \rightarrow (p : \sqcup\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset).$$

Además, al hacer uso de $(\rightarrow_4)$ se hará referencia a su nombre habitual de *Modus Ponens*, abreviado por MP, generalmente sin escribirlo completo, es decir, si $\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \subseteq Th_{\mathcal{S}}(\Gamma)$, se dirá simplemente que por MP se tiene $\psi \in Th_{\mathcal{S}}(\Gamma)$.

De igual modo, toda demostración usará implícitamente las propiedades de los sistemas de clausura.

Se consideran las convenciones habituales respecto del significado de $\vdash \varphi$, $\vdash \Gamma$, $\Gamma \vdash \Sigma$, $\Gamma \dashv \Sigma$, donde $\{\varphi\} \cup \Gamma \cup \Sigma \subseteq \mathfrak{Fm}$.

Es de notar que existen en $P\tau$ conjuntos de fórmulas inconsistentes pero no triviales, como se verá luego.

Lema 2.3.1.
- *(Ver [19], Remark 2.1)*
  Si $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ son fórmulas complejas y $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ es una tautología del Cálculo Proposicional Clásico (CPC), entonces $\varphi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ es un teorema de $P\tau$, considerando que los conectivos de CPC y $P\tau$ son interpretables, y que para fórmulas complejas los axiomas que regulan los conectivos en $P\tau$ son los mismos que en CPC.

- *(Ver [17], Theorem 1)*
  Si $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ es un teorema del Cálculo Proposicional Positivo (sin negaciones), entonces para todas $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ fórmulas se tiene que $\varphi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ es un teorema de $P\tau$.

- *(Ver [19], Theorem 2.1)*
  $\varphi \in Th_{\mathcal{S}}(\Gamma, \psi)$ si y sólo si $\psi \rightarrow \varphi \in Th_{\mathcal{S}}(\Gamma)$.

Definición 2. *Una* interpretación *I es una función que lleva las letras proposicionales en τ, y asociada a cada interpretación hay una* valuación *$v_I : \mathfrak{Fm} \rightarrow \{0, 1\}$ definida por:*

1. *Si p es letra proposicional, entonces:*

   a) *$v_I(p : \mu) = 1$ ssi $\mu \sqsubseteq I(p)$,*

[8]Es decir, se obtiene por aplicación de la regla (τ_3).

b) $v_I(\neg^k(p:\mu)) = v_I(p:\neg^k\mu)$.
En general, en vez de usar $v_I((p:\lambda))$, *abreviamos* $v_I(p:\lambda)$.

2. *Si* φ *y* ψ *son fórmulas cualesquiera, entonces:*
   a) $v_I(\varphi \to \psi) = 1$ *ssi* $v_I(\varphi) = 0$ *o* $v_I(\psi) = 1$.
   b) $v_I(\varphi \wedge \psi) = 1$ *ssi* $v_I(\varphi) = v_I(\psi) = 1$.
   c) $v_I(\varphi \vee \psi) = 1$ *ssi* $v_I(\varphi) = 1$ *o* $v_I(\psi) = 1$.

3. *Si* α *es una fórmula compleja, entonces* $v_I(\neg\alpha) = 1$ *ssi* $v_I(\alpha) = 0$.

■

Nótese que para toda interpretación I y fórmulas α, β, se cumple:

$$v_I(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1 \text{ si y sólo si } v_I(\alpha) = v_I(\beta),$$

y que para toda letra p se cumple:

$$v_I(p:\bot) = 1.$$

- (Ver [19], Theorem 2.2)
  Si $\alpha \in Th_S(\Gamma)$, entonces para toda interpretación I se tiene que $v_I[\Gamma] = \{1\}$ implica $v_I(\alpha) = 1$, es decir, la axiomatización es correcta respecto de las valuaciones.

- (Ver [19], Lemma 2.3)
  Si $\Gamma \subseteq |\mathfrak{Fm}|$ es no trivial, entonces existe una interpretación I tal que $v_I[\Gamma] \subseteq \{1\}$.

- (Ver [17], Theorem 16)
  Si $\Gamma \subseteq |\mathfrak{Fm}|$ es tal que el conjunto de todas las anotaciones distintas que aparecen en fórmulas de él está incluído en un subretículo finito de τ, entonces existe una demostración de largo finito de cada $\alpha \in Th_S(\Gamma)$.

  Para un tal Γ se tiene que, para α fórmula, si para toda interpretación I, $v_I[\Gamma] \subseteq \{1\}$ implica $v_I(\alpha) = 1$, entonces $\alpha \in Th_S(\Gamma)$, es decir, hay completud finitaria entre $P\tau$ y las valuaciones. Nótese que esto se tiene en particular cuando Γ es finito o cuando τ es finito (Ver [19] Theorem 2.4).

Si consideramos el retículo lineal ω^+ de los ordinales finitos más el primer ordinal infinito ω, y el conjunto $\Gamma := \{(p:0), (p:1), (p:2), \ldots\}$, con $(p:\omega) \notin \Gamma$, por la regla (τ_3) se tiene $(p:\omega) \in Th_S(\Gamma)$, pero no hay demostración finitaria (usando sólo una cantidad finita de fórmulas) de ello. Ver [17].

Por otra parte, considerando un retículo finito τ y una función unaria $\neg$ en él tal que $\neg\bot = \bot$, como para toda interpretación I y toda letra p se cumple $v_I(p:\bot) = 1$, entonces $v_I(\neg(p:\bot)) = v_I(p:\neg\bot) = v_I(p:\bot) = 1$, y también ocurre que $v_I\Big(\big((p:\bot)\wedge(p:\bot)\big) \wedge \neg\big((p:\bot)\wedge(p:\bot)\big)\Big) = 0$, porque $\big((p:\bot)\wedge(p:\bot)\big)$ es compleja. Luego, el conjunto $\{(p:\bot), \neg(p:\bot)\}$ es claramente inconsistente, y no es trivial, ya que $\big((p:\bot)\wedge(p:\bot)\big) \wedge \neg\big((p:\bot)\wedge(p:\bot)\big) \notin Th_S((p:\bot), \neg(p:\bot)) = Th_S(\emptyset)$.

Capítulo 3

Sistemas proposicionales finito-dimensionales

Definición 3. *Sea* $\mathfrak{Fm}$ *un lenguaje proposicional de tipo* $\mathcal{L}$ *generado por un conjunto de* **átomos** $\underline{At}$, *y sea* $1 \leq k < \omega$.

- *Sea* $\mathfrak{Fm}^k := \{\langle\psi_0, \ldots, \psi_{k-1}\rangle \ : \forall i < k \quad \psi_i \in \mathfrak{Fm}\}$ *el conjunto de las* k-fórmulas. *Cada k-fórmula* $\langle\psi_0, \ldots, \psi_{k-1}\rangle$ *se denotará por* ψ *o* $\langle\, \psi_i : i < k \,\rangle$, *salvo para el caso* $k = 1$, *en que las 1-fórmulas se denotarán en la forma habitual, no como 1-tuplas.*
- *Para cada* $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ *y* $\psi = \langle\psi_0, \ldots, \psi_{k-1}\rangle \in \mathfrak{Fm}^k$ *sea* $\sigma(\psi) := \langle\, \sigma(\psi_i) : i < k \,\rangle \in \mathfrak{Fm}^k$, *y para cada* $\boldsymbol{\Gamma} \subseteq \mathfrak{Fm}^k$ *sea* $\sigma[\boldsymbol{\Gamma}] := \{\sigma(\psi) \ : \psi \in \boldsymbol{\Gamma}\}$.

■

Definición 4. *Dado* $1 \leq k < \omega$, *un* sistema proposicional finito-dimensional *sobre* $\mathfrak{Fm}$ *con dimensión k, llamado también* sistema proposicional **k**-dimensional, *es un triple* $\mathcal{S}^k := \langle\, \mathfrak{Fm}, S_E(\,\mathcal{S}^k), \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k} \,\rangle$ *tal que:*

- $\mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$ *es un sistema de clausura sobre* $\mathfrak{Fm}^k$ *denominado* sistema de teorías *de* $\mathcal{S}^k$,
- $S_E(\,\mathcal{S}^k) := \{\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm}) \ : \forall \boldsymbol{\Gamma} \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k} \quad \sigma^{-1}[\boldsymbol{\Gamma}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}\}$, *denominado conjunto de* sustituciones estructurales.
- $\mathcal{S}^k$ *es* finitario *si* $\mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$ *es inductivo.*
- $\mathcal{S}^k$ *es* estructural *si* $S_E(\mathcal{S}^k) = Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$.
- *El operador de clausura sobre* $\mathfrak{Fm}^k$ *asociado a* $\mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$ *se denota por* $Th_{\mathcal{S}^k}$.
- *La relación de consecuencia asociada a* $\mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$ *se denota por* $\vdash_{\mathcal{S}^k}$.

- *El par* $\langle\ Ax\left(\mathcal{S}^k\right),\ Inf\left(\mathcal{S}^k\right)\rangle$ *es una* axiomatización *para* $\mathcal{S}^k$ *si:*
  - $Ax\left(\mathcal{S}^k\right) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset)$. *Cada* $\psi \in\ Ax\left(\mathcal{S}^k\right)$ *se denomina un* axioma *de* $\mathcal{S}^k$
  - $Inf\left(\mathcal{S}^k\right)$ *es un conjunto de* reglas de inferencia, *donde cada regla* $R \in\ Inf\left(\mathcal{S}^k\right)$ *cumple* $R \subseteq \mathcal{P}(\mathfrak{Fm}^k) \times \mathfrak{Fm}^k$.
  - *Para todo* $\mathbf{\Gamma} \cup \{\psi\} \subseteq \mathfrak{Fm}^k$ *se tiene:*
    $\psi \in Th_{\mathcal{S}^k}(\mathbf{\Gamma})$ *si y sólo si existe* $\langle \beta_i : i \leq \eta \rangle$, *llamada una* demostración de ψ desde $\mathbf{\Gamma}$, *con* η *ordinal,* $\beta_\eta = \psi$, *y tal que para cada* $i \leq \eta$ *se cumple:*
    - *O bien* $\beta_i \in\ Ax\left(\mathcal{S}^k\right)$,
    - *o bien* $\beta_i \in \mathbf{\Gamma}$,
    - *o bien existe* $\langle \{\beta_{i_j}\ : j \leq n \text{ y } i_j < i\}, \beta_i \rangle \in \bigcup\ Inf\left(\mathcal{S}^k\right)$.

■

Nota 1. Es fácil verificar que para todo *sistema proposicional* finito-dimensional el conjunto de las sustituciones estructurales constituye un monoide respecto de la composición.

Salvo que se indique lo contrario, se considerará en adelante que si $\mathcal{S}^k$ es un sistema proposicional de dimensión k, entonces: $S_E(\mathcal{S}^k) \neq \{\mathbf{id}_{\mathfrak{Fm}}\}$, es decir, que hay alguna sustitución estructural además de la identidad, y $\emptyset \neq Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset) \neq |\mathfrak{Fm}^k|$, es decir, hay axiomas y no toda k-fórmula es teorema.

También, salvo que se indique lo contrario, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2, \ldots$, $\mathcal{S}^k$ $\mathcal{R}^k$ $\mathcal{P}^k$, $\mathcal{S}^k_1$, $\mathcal{S}^k_2, \ldots$ denotarán sistemas proposicionales finito-dimensionales.

Además, si $\mathcal{S}^k$ es claro según el contexto, se usará S_E en vez de $S_E(\mathcal{S}^k)$.

En el caso de sistemas proposicionales 1-dimensionales, se omitirá el uso del superíndice "1" en la notación.

La siguiente proposición caracteriza $S_E(\mathcal{S}^k)$ respecto de las diferentes formas de considerar $\mathcal{S}^k$.

Proposición 3.0.2. *Si* $\mathcal{S}^k$ *es un sistema proposicional k-dimensional, entonces para todo* $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\sigma \in S_E(\mathcal{S}^k)$
2. $\forall \mathbf{T} \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}\ \ , \sigma^{-1}[\mathbf{T}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$
3. $\forall \mathbf{\Gamma} \subseteq |\mathfrak{Fm}^k|\ \ , \sigma[Th_{\mathcal{S}^k}(\mathbf{\Gamma})] \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$
4. $\forall \mathbf{\Gamma} \cup \{\psi\} \subseteq |\mathfrak{Fm}^k|\ \ , \psi \in Th_{\mathcal{S}^k}(\mathbf{\Gamma})$ *implica* $\sigma(\psi) \in Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$
5. $\forall \mathbf{\Gamma} \cup \{\psi\} \subseteq |\mathfrak{Fm}^k|\ \ , \mathbf{\Gamma} \vdash_{\mathcal{S}^k} \psi$ *implica* $\sigma[\mathbf{\Gamma}] \vdash_{\mathcal{S}^k} \sigma(\psi)$
6. *Si* $\langle\ Ax\left(\mathcal{S}^k\right),\ Inf\left(\mathcal{S}^k\right)\rangle$ *es una axiomatización de* $\mathcal{S}^k$, *entonces:*

- $\sigma[\ Ax\ (\ \mathcal{S}^k)] \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset)$
- $\forall R \in\ Inf\ (\ \mathcal{S}^k) \quad \forall \langle \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \in R \quad ; \sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$

Demostración. , ▪ $1 \leftrightarrow 2$: Por definición de $S_E(\ \mathcal{S}^k)$.

- $2 \rightarrow 3$: Sea $\mathbf{\Gamma} \subseteq |\mathfrak{Fm}^k|$.

  Claramente por 2 se tiene $\sigma^{-1}[Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$, y como $\mathbf{\Gamma} \subseteq \sigma^{-1}[\sigma[\mathbf{\Gamma}]]$ y $\sigma^{-1}[\sigma[\mathbf{\Gamma}]] \subseteq \sigma^{-1}[Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])]$, entonces $Th_{\mathcal{S}^k}(\mathbf{\Gamma})$, la menor teoría que contiene a $\mathbf{\Gamma}$, está contenida en $\sigma^{-1}[Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])]$, es decir, $\sigma[Th_{\mathcal{S}^k}(\mathbf{\Gamma})] \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$.

- $3 \rightarrow 2$: Sea $\mathbf{T} \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$.

  Por 3 se tiene que $\sigma[Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma^{-1}[\mathbf{T}])] \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\sigma^{-1}[\mathbf{T}]])$. Pero $Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\sigma^{-1}[\mathbf{T}]]) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$. Luego, $\sigma[Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma^{-1}[\mathbf{T}])] \subseteq \mathbf{T}$, es decir, $Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma^{-1}[\mathbf{T}]) \subseteq \sigma^{-1}[\mathbf{T}]$, y por lo tanto $\sigma^{-1}[\mathbf{T}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$.

- $3 \rightarrow 4$: Inmediato.

- $4 \rightarrow 3$: Inmediato.

- $4 \leftrightarrow 5$: Basta recordar que $\boldsymbol{\psi} \in Th_{\mathcal{S}^k}(\mathbf{\Gamma})$ si y sólo si $\mathbf{\Gamma} \vdash_{\mathcal{S}^k} \boldsymbol{\psi}$.

- $4 \rightarrow 6$: Como $Ax\ (\ \mathcal{S}^k) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset)$ por definición, entonces $\sigma[\ Ax\ (\ \mathcal{S}^k)] \subseteq \sigma[Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset)]$, y por 3 se obtiene $\sigma[Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset)] \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\emptyset]) = Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset)$, es decir, $\sigma[\ Ax\ (\ \mathcal{S}^k)] \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset)$.

  Por otra parte, por definición, si $R \in\ Inf\ (\ \mathcal{S}^k)$ y $\langle \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \in R$, entonces $\boldsymbol{\alpha} \in Th_{\mathcal{S}^k}(\mathbf{\Gamma})$, y por 3 se obtiene que $\sigma[\boldsymbol{\alpha}] \in Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$.

- $6 \rightarrow 4$: Si $\boldsymbol{\psi} \in Th_{\mathcal{S}^k}(\mathbf{\Gamma})$, entonces existe una demostración $\langle \beta_i : i \leq \eta \rangle$, con η ordinal, de $\boldsymbol{\psi}$ desde $\mathbf{\Gamma}$, y por 6 se tiene que para cada $i \leq \eta$ se cumple:

  - o bien $\beta_i \in\ Ax\ (\mathcal{S}^k)$, y por lo tanto $\sigma(\beta) \in Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$,
  - o bien $\beta_i \in \mathbf{\Gamma}$, y por lo tanto $\sigma(\beta) \in Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$,
  - o bien existe $\langle \{\beta_{i_j} \ : j \leq n \text{ y } i_j < i\}, \beta_i \rangle \in \bigcup\ Inf\ (\mathcal{S}^k)$,

  pero se tiene que si $\sigma[\{\beta_{i_j} \ : j \leq n \text{ y } i_j < i\}] \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$, entonces $\sigma(\beta_i) \in Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$. Luego, inductivamente se obtiene que $\forall i \leq \eta \quad , \sigma(\beta_i) \in Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$.

  En particular, como $\beta_\eta = \boldsymbol{\psi}$, se obtiene que $\sigma(\boldsymbol{\psi}) \in Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$.

□

Ejemplo 1.

1. A toda lógica proposicional k-dimensional, $\mathcal{S} = \langle\, \mathfrak{Fm}, \mathbf{Th}_{\mathcal{S}} \,\rangle$ se le asocia unívocamente el sistema proposicional k-dimensional estructural $S_E(\,\mathcal{S}\,) = Hom(\,\mathfrak{Fm},\, \mathfrak{Fm})$, e inversamente, todo sistema proposicional k-dimensional estructural $\langle\, \mathfrak{Fm},\, S_E(,)\, \mathbf{Th}_{\,\mathcal{S}^k} \,\rangle$ determina unívocamente la lógica proposicional $\langle\, \mathfrak{Fm}, \mathbf{Th}_{\,\mathcal{S}^k} \,\rangle$.

2. Toda extensión de una lógica proposicional $\mathcal{S}$ con sistema de clausura de la forma $\mathcal{C} := \{T \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}} \;: \Gamma \subseteq T\}$, donde para $\Gamma \subseteq \mathfrak{Fm}$ existe $\sigma \in Hom(\,\mathfrak{Fm},\, \mathfrak{Fm})$ con $\sigma[\Gamma] \nsubseteq \Gamma$, es un sistema proposicional 1-dimensional no estructural.

3. Todo k-sistema deductivo $\mathcal{S}^{\,k} = \langle\, \mathfrak{Fm}, \mathbf{Th}_{\,\mathcal{S}^k} \rangle$, $1 \leq k < \omega$, en el sentido de [4] o de [2] (donde se denominan sistemas deductivos k-dimensionales), es un sistema proposicional k-dimensional estructural, si $S_E(\,\mathcal{S}^{\,k}) = Hom(\,\mathfrak{Fm},\, \mathfrak{Fm})$.

4. Toda extensión de un k-sistema deductivo $\mathcal{S}^{\,k}$ de la forma $\mathcal{C} := \{\mathbf{T} \in \mathbf{Th}_{\,\mathcal{S}^k} \;: \mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{T}\}$, con $\mathbf{\Gamma} \subseteq \mathfrak{Fm}^k$ tal que existe $\sigma \in Hom(\,\mathfrak{Fm},\, \mathfrak{Fm})$ con $\sigma[\mathbf{\Gamma}] \nsubseteq \mathbf{\Gamma}$ es un sistema proposicional k-dimensional no estructural.

5. Cada Lógica Anotada $P_{\mathcal{T}}$ es un sistema proposicional 1-dimensional no estructural, si $S_E(P_{\mathcal{T}}\,)$ como en la definición 4, y es finitario si τ es finito.

Ejemplo 2.

La Lógica anotada $PFOUR$, originalmente usada por Blair y Subrahmanian en [1], está dada por el retículo $FOUR$:

$$\begin{tikzcd} & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ f \arrow[dr, dash] & & t \arrow[dl, dash] \\ & \bot & \end{tikzcd}$$

La negación está definida por $\neg(f) = t$, $\neg(t) = f$, $\neg(\top) = \top$ y $\neg(\bot) = \bot$.
Entonces utilizando la axiomatización y las valuaciones sobre $\{0, 1\}$ dadas antes, se puede caracterizar S_E para $PFOUR$.

Proposición 3.0.3. *Para toda $\sigma \in S_E$ y toda $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$, σ actúa respecto de p de uno de los siguientes modos:*

1. O bien existen $\{q, r, s, w\} \subseteq \underline{le}(\,\mathfrak{Fm})$, y $\{k, m, n, l\} \subseteq \omega$, tales que

$$\sigma : \begin{cases} (p : \top) & \longmapsto & \neg^k(q : \bot) \\ (p : f) & \longmapsto & \neg^m(s : \bot) \\ (p : t) & \longmapsto & \neg^n(w : \bot) \\ (p : \bot) & \longmapsto & \neg^l(r : \bot) \end{cases}$$

2. *O bien existen* $\{q, r, s, w\} \subseteq \underline{le}(\mathfrak{Fm})$, $\{k, m, n, l\} \subseteq \omega$, *y* $\{\lambda, \mu\} \subseteq \{f, t\} \subseteq$ *FOUR tales que*

$$\sigma : \begin{cases} (p:\top) & \longmapsto & \neg^k(q:\top) \\ (p:f) & \longmapsto & \neg^m(q:\lambda) \\ (p:t) & \longmapsto & \neg^n(q:\mu) \\ (p:\bot) & \longmapsto & \neg^l(r:\bot), \end{cases}$$

donde $\lambda = \mu$ *si y sólo si* $m + n$ *es impar*

3. *O bien existen* $\{q, r, s, w\} \subseteq \underline{le}(\mathfrak{Fm})$ *y* $\{k, m, n, l\} \subseteq \omega$, *tales que*

$$\sigma : \begin{cases} (p:\top) & \longmapsto & \neg^k(q:\top) \\ (p:f) & \longmapsto & \neg^m(q:\top) \\ (p:t) & \longmapsto & \neg^n(q:\top) \\ (p:\bot) & \longmapsto & \neg^l(r:\bot) \end{cases}$$

Ver demostración A en apéndice A.

El siguiente es el ejemplo más importante de sistema deductivo 2-dimensional, ya que para la noción de algebrizabilidad es fundamental.

Ejemplo 3.

Sea $\mathcal{C}^{co}_{\mathfrak{Fm}}$ el sistema proposicional 2-dimensional sobre un lenguaje $\mathfrak{Fm}$ determinado por la siguiente axiomatización:

- $Ax\left(\mathcal{C}^{co}_{\mathfrak{Fm}}\right) = \{\langle \alpha, \alpha \rangle \ : \alpha \in \mathfrak{Fm}\}$
- $\{\{\langle \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle \rangle\} \ : \{\alpha, \beta\} \subseteq \mathfrak{Fm}\} \in Inf\left(\mathcal{C}^{co}_{\mathfrak{Fm}}\right)$
- $\{\langle \{\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle\}, \langle \alpha, \gamma \rangle \rangle \ : \{\alpha, \beta, \gamma\} \subseteq \mathfrak{Fm}\} \in Inf\left(\mathcal{C}^{co}_{\mathfrak{Fm}}\right)$
- Para cada conectivo n-ario t de $\mathcal{L}$ se tiene

$$\Big\{\langle \{\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle, \ldots, \langle \alpha_{n-1}, \beta_{n-1} \rangle\}, \langle t(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}), t(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}) \rangle \rangle :$$
$$\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{n-1}\} \subseteq \mathfrak{Fm}\Big\} \in Inf\left(\mathcal{C}^{co}_{\mathfrak{Fm}}\right)$$

A fin de simplificar la notación, se omiten las llaves "{" y "}" si la primera componente en un elemento de una regla de inferencia consta de sólo un elemento.

Cualquier extensión de $\mathcal{C}^{co}_{\mathfrak{Fm}}$ sobre $\mathfrak{Fm}$ será llamada *sistema proposicional de congruencias* sobre $\mathfrak{Fm}$. Si $\mathfrak{Fm}$ es claro según el contexto puede escribirse $\mathcal{C}^{co}$ en vez de $\mathcal{C}^{co}_{\mathfrak{Fm}}$.

Por supuesto, tales extensiones no necesariamente serán estructurales. A modo de ejemplo, sea $\mathcal{S}$ la extensión de $\mathcal{C}^{co}_{\mathfrak{Fm}}$, donde $\mathfrak{Fm}$ es un lenguaje adecuado para $PFOUR$, determinada por las mismas reglas de inferencia de $\mathcal{C}^{co}_{\mathfrak{Fm}}$ y con conjunto de axiomas

$$Ax(\mathcal{S}) := Ax(\mathcal{C}^{co}_{\mathfrak{Fm}}) \cup \{\langle (p:\bot),(q:\bot)\rangle \ : \{p,q\} \subseteq \underline{le}(\mathfrak{Fm})\}.$$

En $Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$ los únicos pares de átomos son los de $Ax(\mathcal{S})$, es decir, ambos con anotacion $\bot$. Pero si $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ es tal que $\sigma(p:\bot) = (p:\top)$ y $\sigma(q:\bot) = (q:\top)$ para p y q en $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$, y $\sigma \in S_E(\mathcal{S})$, necesariamente $Th_{\mathcal{S}}(\emptyset) \subseteq \sigma^{-1}[\,Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}}$, obteniéndose $\langle (p:\top),(q:\top)\rangle = \sigma(\langle (p:\bot),(q:\bot)\rangle) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$. Contradicción. Luego $\mathcal{S}$ no es estructural.

Ejemplo 4.
Usando sistemas proposicionales finito-dimensionales puede establecerse una suerte de sincronización de sistemas proposicionales finito-dimensionales que compartan el mismo tipo de lenguaje, lo que establece un método para generar sistemas proposicionales de cualquier dimensión finita. A tal método lo denominaremos *mezcla* de sistemas.

- Para cada $i < n$ sea $\mathcal{S}_i^{k_i}$ un sistema proposicional de dimensión $1 \leq k_i < \omega$.

- Sean $m = \sum_{i<n} k_i$, y para cada $i < n$ y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{Fm}^m$, sea $\pi_i(\boldsymbol{\alpha}) := \langle \alpha_x, \ldots, \alpha_{x+k_i-1}\rangle$, donde

$$x = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} k_j & \text{si } i \neq 0, \\ 0 & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

  Es claro entonces que $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{Fm}^m \quad \forall i < n \quad , \boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathfrak{Fm}^{k_i}$.

- Para todo $\{\boldsymbol{\Gamma}_i \ : i < n\}$ sea

$$\bigotimes_{i<n} \boldsymbol{\Gamma}_i = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{Fm}^m \ : \forall i < n \quad \boldsymbol{\pi}_i(\boldsymbol{\alpha}) \in \boldsymbol{\Gamma}_i\}.$$

  Nótese que si para algún $i < n$ $\Gamma_i = \emptyset$, entonces $\bigotimes_{i<n} \boldsymbol{\Gamma}_i = \emptyset$.

- Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los m-conjuntos de la forma

$$\bigotimes_{i<n} \boldsymbol{\Gamma}_i$$

  donde para todo $i < n$, $\boldsymbol{\Gamma}_i \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}_i^{k_i}}$.

Veamos algunas propiedades:

- $\mathcal{C}$ es sistema de clausura sobre $\mathfrak{Fm}^m$

  Demostración. Es evidente que $\mathfrak{Fm}^m = \bigotimes_{i<n} \mathfrak{Fm}^{k_i}$. Sea $\{\mathbf{\Gamma}_j \in \mathcal{C} \ : j \in J\} \neq \emptyset$. Entonces para cada $j \in J$ existe $\{\mathbf{\Delta}_i^j \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}_i^{k_i}} \ : i < n\}$ tal que $\mathbf{\Gamma}_j = \bigotimes_{i<n} \mathbf{\Delta}_i^j$. Luego
  $\alpha \in \bigcap_{j\in J} \mathbf{\Gamma}_j$ ssi $\forall j \in J \ , \alpha \in \mathbf{\Gamma}_j$ ssi $\forall j \in J \ \forall i < n \ , \pi_i(\alpha) \in \mathbf{\Delta}_i^j$ ssi $\forall i < n \ \forall j \in J \ , \pi_i(\alpha) \in \mathbf{\Delta}_i^j$ ssi $\forall i < n \ , \pi_i(\alpha) \in \bigcap_{j\in J} \mathbf{\Delta}_i^j$ ssi $\alpha \in \bigotimes_{i<n} \bigcap_{j\in J} \mathbf{\Delta}_i^j$

  Luego, $\alpha \in \bigcap_{j\in J} \mathbf{\Gamma}_j = \bigcap_{j\in J} \bigotimes_{i<n} \mathbf{\Delta}_i^j = \bigotimes_{i<n} \bigcap_{j\in J} \mathbf{\Delta}_i^j \in \mathcal{C}$, ya que $\bigcap_{j\in J} \mathbf{\Delta}_i^j \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}_i^{k_i}}$ para todo $i < n$.

  Por lo tanto, $\mathcal{C}$ es sistema de clausura sobre $\mathfrak{Fm}^m$.

  □

- Sea $\bigotimes_{i<n} \mathcal{S}_i^{k_i}$ el sistema proposicional m-dimensional sobre $\mathfrak{Fm}$ con sistema de clausura $\mathcal{C}$ y $S_E(\bigotimes_{i<n} \mathcal{S}_i^{k_i}) :=$ $\{\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm}) \ : \forall \mathbf{\Gamma} \in \mathcal{C} \ \ \sigma^{-1}[\mathbf{\Gamma}] \in \mathcal{C}\}$. Para abreviar sea $\mathcal{S} := \bigotimes_{i<n} \mathcal{S}_i^{k_i}$.

- Para todo $\mathbf{\Gamma} \subseteq \mathfrak{Fm}^m$

$$Th_{\mathcal{S}}(\mathbf{\Gamma}) = \bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\mathbf{\Gamma}]).$$

  Demostración. Es claro que $\mathbf{\Gamma} \subseteq \bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\mathbf{\Gamma}]) \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}}$, y por lo tanto $Th_{\mathcal{S}}(\mathbf{\Gamma}) \subseteq \bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\mathbf{\Gamma}])$.

  En la otra dirección, si $\mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{T} \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}}$, existe $\{\mathbf{\Delta}_i \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}_i^{k_i}} \ : i < n\}$ tal que $\mathbf{T} = \bigotimes_{i<n} \mathbf{\Delta}_i$. Claramente $\forall i < n \ , \pi_i[\mathbf{\Gamma}] \subseteq \mathbf{\Delta}_i$ y por lo tanto $\forall i < n \ , Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\mathbf{\Gamma}]) \subseteq \mathbf{\Delta}_i$, es decir,

$$\bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\mathbf{\Gamma}]) \subseteq \mathbf{T},$$

  obtieniéndose la igualdad.

  □

- La igualdad anterior se escribe más sugestivamente como

$$\alpha \in Th_{\mathcal{S}}(\mathbf{\Gamma}) \text{si y sólo si } \forall i < n \ , \pi_i(\alpha) \in Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\mathbf{\Gamma}]).$$

- $S_E(\mathcal{S}) = \bigcap_{i<n} S_E(\mathcal{S}_i^{k_i})$

Demostración. Usaremos el hecho evidente de que para $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{Fm}^m$, $i < n$, y $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$

$$\pi_i(\sigma(\boldsymbol{\alpha})) = \sigma(\pi_i(\boldsymbol{\alpha})).$$

Sean $\boldsymbol{\Gamma} \subseteq \mathfrak{Fm}^m$, $\sigma \in \bigcap_{i<n} S_E(\mathcal{S}_i^{k_i})$, $\boldsymbol{\alpha} \in \sigma[Th_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\Gamma})] = \sigma[\bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\boldsymbol{\Gamma}])]$ y $\boldsymbol{\beta} \in \bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\boldsymbol{\Gamma}])$ tal que $\boldsymbol{\alpha} = \sigma(\boldsymbol{\beta})$, es decir, $\forall i < n$, $\pi_i(\boldsymbol{\beta}) \in Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\boldsymbol{\Gamma}])$.

Luego, $\forall i < n$, $\pi_i(\sigma(\boldsymbol{\beta})) = \sigma(\pi_i(\boldsymbol{\beta})) \in \sigma[Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\boldsymbol{\Gamma}])] \subseteq Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\sigma[\pi_i[\boldsymbol{\Gamma}]])$, lo que implica que $\forall i < n$, $\pi_i(\boldsymbol{\alpha}) \in Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\sigma[\boldsymbol{\Gamma}]])$.

Luego, $\boldsymbol{\alpha} \in \bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\sigma[\boldsymbol{\Gamma}]]) = Th_{\mathcal{S}}(\sigma[\boldsymbol{\Gamma}])$ y por lo tanto $\sigma \in S_E(\mathcal{S})$.

Entonces se obtiene $\bigcap_{i<n} S_E(\mathcal{S}_i^{k_i}) \subseteq S_E(\mathcal{S})$.

En la otra dirección, sean $\sigma \in S_E(\mathcal{S})$, $p < n$, y $\boldsymbol{\Delta} \subseteq \mathfrak{Fm}^{k_p}$. Para cada $\mathbf{X} \subseteq \mathfrak{Fm}^{k_p}$ sea $m(\mathbf{X}) = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{Fm}^m \ : \pi_p(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{X}\}$. Entonces

$$\pi_i[m(\mathbf{X})] = \begin{cases} \mathfrak{Fm}^{k_i} & \text{si } i \neq p \\ \mathbf{X} & \text{si } i = p \end{cases}$$

Pero se tiene $\sigma[Th_{\mathcal{S}}(m(\boldsymbol{\Delta}))] \subseteq Th_{\mathcal{S}}(\sigma[m(\boldsymbol{\Delta})])$, es decir,

$$\sigma[\bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[m(\boldsymbol{\Delta})])] \subseteq \bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\sigma[m(\boldsymbol{\Delta})]]).$$

Luego, $\sigma[\pi_p[\bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[m(\boldsymbol{\Delta})])]] = \pi_p[\sigma[\bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[m(\boldsymbol{\Delta})])]] \subseteq$

$$\pi_p[\bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[\sigma[m(\boldsymbol{\Delta})]])] \subseteq Th_{\mathcal{S}_p^{k_p}}(\pi_p[\sigma[m(\boldsymbol{\Delta})]]) \subseteq$$

$$Th_{\mathcal{S}_p^{k_p}}(\sigma[\pi_p[m(\boldsymbol{\Delta})]]) = Th_{\mathcal{S}_p^{k_p}}(\sigma[\boldsymbol{\Delta}]).$$

Pero claramente $m(Th_{\mathcal{S}_p^{k_p}}(\boldsymbol{\Delta})) = \bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[m(\boldsymbol{\Delta})])$, y por lo tanto

$$\pi_p[\bigotimes_{i<n} Th_{\mathcal{S}_i^{k_i}}(\pi_i[m(\boldsymbol{\Delta})])] =$$

$$Th_{\mathcal{S}_p^{k_p}}(\pi_p[m(\boldsymbol{\Delta})]) = Th_{\mathcal{S}_p^{k_p}}(\boldsymbol{\Delta})$$

Se obtiene finalmente que $\sigma[Th_{\mathcal{S}_p^{k_p}}(\boldsymbol{\Delta})] \subseteq Th_{\mathcal{S}_p^{k_p}}(\sigma[\boldsymbol{\Delta}])$.

Luego, $S_E(\mathcal{S}) \subseteq \bigcap_{i<n} S_E\, \mathcal{S}_i^{k_i}$, y por lo tanto se obtiene la igualdad pedida.

□

Consideremos ahora un caso concreto:

Sean CPC el Cálculo Proposicional Clásico, $PFOUR$ la lógica anotada presentada en el ejemplo 2. e IPC el Cálculo Proposicional Intuicionista Clásico, todas definidas sobre el lenguaje $\mathfrak{Fm}$ adecuado a $PFOUR$, es decir, con $\underline{At} = \{(p:\mu) \ : p \in \underline{le} \text{ y } \mu \in FOUR\}$.

Entonces por lo anterior $\mathcal{S}$:= CPC $\otimes$ $PFOUR$ $\otimes$ IPC es un sistema proposicional de dimensión 3, y como CPC e IPC son estructurales, $S_E(\mathcal{S}) = S_E(\,PFOUR\,)$.

Es interesante ver una axiomatización de $\mathcal{S}$, y cómo ella depende de las axiomatizaciones de los sistemas que se mezclan en ella.

Sea $Ax := Ax(\text{ CPC }) \otimes Ax(\,PFOUR\,) \otimes Ax(\text{ IPC })$. Es evidente que $Ax \subseteq Th_{\text{CPC}}(\emptyset) \otimes Th_{PFOUR}(\emptyset) \otimes Th_{\text{IPC}}(\emptyset)$.

Los tres sistemas tienen a MP como única regla de inferencia, que es estructural. Para $x, y \in \{0,1\}$ y $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1\} \subseteq \mathfrak{Fm}$ sean:

R_0^{xy} el conjunto de los pares de la forma

$$\langle \{\langle \alpha_0,\, \beta_0,\, \gamma_0 \rangle, \langle \alpha_1,\, \beta_0 \to \beta_1,\, \gamma_1 \rangle\}, \langle \alpha_x,\, \beta_1,\, \gamma_y \rangle \rangle$$

R_1^{xy} el conjunto de los pares de la forma

$$\langle \{\langle \alpha_0,\, \beta_0,\, \gamma_0 \rangle, \langle \alpha_0 \to \alpha_1,\, \beta_1,\, \gamma_1 \rangle\}, \langle \alpha_1,\, \beta_x,\, \gamma_y \rangle \rangle$$

R_2^{xy} el conjunto de los pares de la forma

$$\langle \{\langle \alpha_0,\, \beta_0,\, \gamma_0 \rangle, \langle \alpha_1,\, \beta_1,\, \gamma_0 \to \gamma_1 \rangle\}, \langle \alpha_x,\, \beta_y,\, \gamma_1 \rangle \rangle$$

Sea además el conjunto P definido por:

$$\langle \{\langle \alpha_0,\, \beta_0,\, \gamma_0 \rangle, \langle \alpha_1,\, \beta_1,\, \gamma_1 \rangle\}, \langle \alpha_x,\, \beta_y,\, \gamma_z \rangle \rangle \in P$$

si y sólo si

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1\} \subseteq \mathfrak{Fm} \text{ y } x, y, z \in \{0,1\}$$

Sea $In := \{P\} \cup \{R_i^{xy} \ : \ i < n \text{ y } x, y \in \{0,1\}\}$. Es claro entonces que $\langle \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \in \bigcup In$ implica $\boldsymbol{\alpha} \in Th_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\Gamma})$.

Para todo I y todo $\{\langle \alpha,\, \beta,\, \gamma \rangle\} \cup \{\langle \alpha_i,\, \beta_i,\, \gamma_i \rangle \ : i \in I\} \subseteq \mathfrak{Fm}^3$ se tiene:

$$\langle \alpha,\, \beta,\, \gamma \rangle \in Th_{\mathcal{S}}(\{\langle \alpha_i,\, \beta_i,\, \gamma_i \rangle \ : i \in I\}) \text{ si y sólo si}$$

$\alpha \in Th_{\text{CPC}}(\{\alpha_i \ : \ i \in I\})$, $\beta \in Th_{PFOUR}(\{\beta_i \ : \ i \in I\})$, y
$\gamma \in Th_{\text{IPC}}(\{\gamma_i \ : \ i \in I\})$

Lo que interesa es mostrar que $\langle Ax, In \rangle$ es un axiomatización de $\mathcal{S}$, y más aún, que una demostración usando $\langle Ax, In \rangle$ se puede construir a partir de las tres demostraciones en cada coordenada, usando un método que se mostrará más evidente a través de un ejemplo concreto:

Sean $\delta := \langle\, (p : \bot) \wedge \neg(p : \bot),\ (p : \top) \to ((p : f) \to (q : t)),\ \neg(p : \bot)\,\rangle$
y
$\epsilon := \langle\, (p : \top),\ (p : \top) \to (q : t),\ (p : \bot) \to ((q : f) \wedge \neg(q : f))\,\rangle$

Es claro que $\epsilon_0 \in Th_{\,\mathrm{CPC}}\,(\delta_0)$, $\epsilon_1 \in Th_{\,PFOUR}\,(\delta_1)$, y $\epsilon_2 \in Th_{\,\mathrm{IPC}}\,(\delta_2)$, y también $\pi_0[\{\delta\}] = \{\delta_0\}$, $\pi_1[\{\delta\}] = \{\delta_1\}$, y $\pi_2[\{\delta\}] = \{\delta_2\}$, por lo que se tiene $\epsilon \in Th_S\,(\delta)$. Como estamos interesados en mezclar demostraciones por coordenadas en una demostración de dimensión 3 usando $\langle\, Ax, In\,\rangle$ como axiomatización, necesitamos derivaciones explícitas por coordenada, y para ello necesitamos también contar con los axiomas de CPC e IPC (ya contamos con la lista de axiomas de $PFOUR$ y MP es la única regla en todas):

Con A, B y C fórmulas cualquiera de $\mathfrak{Fm}$, sean:

Ax 1 $(A \to (B \to A))$

Ax 2 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Ax 3 $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

Ax 4 $(A \wedge B) \to A$

Ax 5 $(A \wedge B) \to B$

Ax 6 $(C \to A) \to ((C \to B) \to (C \to (A \wedge B)))$

Ax 7 $A \to (A \vee B)$

Ax 8 $B \to (A \vee B)$

Ax 9 $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

Ax 10 $(A \wedge \neg A) \to B$

Ax 11 $A \to (B \vee \neg B)$

Ax 12 $A \to (B \to B)$

Ax 13 $\neg A \to (A \to (B \wedge \neg B))$

Ax 14 $(A \to (B \wedge \neg B)) \to \neg A$

Entonces $Ax\,(\,\mathrm{CPC}\,) = \{Ax\,1, \ldots, Ax\,11\}$ y $Ax\,(\,\mathrm{IPC}\,) = \{Ax\,1, Ax\,2, Ax\,4, \ldots, Ax\,10, Ax\,12, Ax\,13, Ax\,14\}$.

Veamos ahora las demostraciones por coordenada, con nombres para las fórmulas y uso de axiomas y reglas:

- Para $\epsilon_0 \in Th_{\,\mathrm{CPC}}\,(\delta_0)$:

$$\begin{array}{lll} \langle\ (p : \bot) \wedge \neg(p : \bot), & ((p : \bot) \wedge \neg(p : \bot)) \to (p : \top), & (p : \top)\ \rangle \\ \quad a_0 = \delta_0 & \quad a_1 \in Ax\,(\,\mathrm{CPC}\,) & a_2\text{: } MP\ a_0 \text{ y } a_1 \end{array}$$

- Para $\epsilon_1 \in Th_{\,PFOUR}\,(\delta_1)$:

$$\begin{array}{ll} \langle\ (p : \top) \to ((p : f) \to (q : t)), & (p : \top) \to (p : f), \\ \quad b_0 = \delta_1 & b_1 \in Ax\,(\,PFOUR\,) \end{array}$$

$$((p:\top)\to(p:f))\to(((p:\top)\to((p:f)\to(q:t)))\to((p:\top)\to(q:t))),$$
$$b_2 \in\ Ax\,(\ PFOUR\ )$$

$$\underset{b_3:\ MP\ b_1\ \text{y}\ b_2}{((p:\top)\to((p:f)\to(q:t)))\to((p:\top)\to(q:t)),}\quad \underset{b_4:\ MP\ b_0\ \text{y}\ b_3}{(p:\top)\to(q:t)\ \rangle}$$

- Para $\epsilon_2 \in Th_{\,\text{IPC}}\,(\delta_2)$:

$$\langle\ \underset{c_0=\delta_2}{\neg(p:\bot),}\quad \underset{c_1\in\ Ax\,(\ \text{IPC}\ )}{\neg(p:\bot)\to((p:\bot)\to((q:f)\wedge\neg(q:f))),}$$

$$\underset{c_2:\ MP\ c_0\ \text{y}\ c_1}{(p:\bot)\to((q:f)\wedge\neg(q:f))\ \rangle}$$

Ahora están todos los elementos para "mezclar" esas tres demostraciones en una demostración $\langle\,\zeta_0,\ldots,\zeta_6\,\rangle$ de ϵ desde δ usando $\langle\,Ax,In\,\rangle$:

$$\langle\quad \underset{\zeta_0=\delta}{\delta,}\quad \underset{\zeta_1\in Ax}{\langle\,a_1,b_1,c_1\,\rangle,}\quad \underset{\zeta_2:\ R_1^{11}\ \zeta_0\ \text{y}\ \zeta_1}{\langle\,a_2,b_1,c_1\,\rangle,}\quad \underset{\zeta_3:\ R_3^{11}\ \zeta_0\ \text{y}\ \zeta_2}{\langle\,a_2,b_1,c_2\,\rangle,}$$

$$\underset{\zeta_4\in Ax}{\langle\,a_1,b_2,c_1\,\rangle,}\quad \underset{\zeta_5:\ R_2^{00}\ \zeta_3\ \zeta_4}{\langle\,a_2,b_3,c_2\,\rangle,}\quad \underset{\zeta_6:\ R_2^{00}\ \zeta_0\ \text{y}\ \zeta_5}{\langle\,a_2,b_4,c_2\,\rangle}\qquad\rangle$$

Luego, usando el método ejemplificado arriba, es fácil ver que $\langle\,Ax,In\,\rangle$ es una axiomatización para CPC $\otimes$ $PFOUR$ $\otimes$ IPC .

La motivación de este ejemplo es responder a una inquietud que Janus Czelakowski plantea en [8] respecto de cómo podría interpretarse un sistema k-deductivo en sentido de [4] para $k>2$. Considerando que un sistema k-deductivo es indistinguible de un sistema proposicional k-dimensional estructural, espero que la mezcla de sistemas finito-dimensionales responda en alguna medida a tal inquietud.

3.1. Modelos para sistemas proposicionales.

El concepto de modelo para un sistema proposicional k-dimensional adecuado a los objetivos de esta tesis (establecer una noción de algebrizabilidad debilitando estructuralidad) debe satisfacer varios requerimientos, para que cumpla un papel análogo al que cumplen los modelos de lógicas proposicionales en Lógica Algebraica Abstracta:

- Si el sistema es estructural, entonces los modelos habituales (matrices, lógicas abstractas) deben ser modelos en el sentido propuesto aquí, o al menos estar estrechamente relacionados con algunos de éstos.
- Todo sistema proposicional k-dimensional debe ser *completo* respecto de la clase de todos sus modelos.
- Los modelos deben estar asociados a álgebras, y las operaciones entre álgebras deben, con posibles restricciones, determinar operaciones entre modelos.
- Los modelos deben reflejar de manera natural la ausencia de estructuralidad del sistema

  Nota 2. En tal sentido, la noción de modelo debe ser básicamente distinta de la que, por ejemplo, considera Wójciki en [21], donde aún a una lógica no estructural se le asocian modelos, matrices generalizadas, que no reflejan en sí mismos la no estructuralidad.

- Las herramientas utilizadas por Lógica Algebraica Abstracta deben poder utilizarse en los modelos aquí considerados.

La noción de modelo que mejor acomoda a esos requerimientos se establecerá utilizando el siguiente tipo de objetos:

Definición 5. *Sean* $\mathfrak{Fm}$ *un lenguaje proposicional y* $1 \leq k < \omega$.
Un triple $\mathbb{L} = \langle \mathbf{A}, H, C \rangle$ *es una* $\mathrm{HR}^k_{\mathfrak{Fm}}$-lógica abstracta[1] *si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra del tipo de* $\mathfrak{Fm}$, $\emptyset \neq H \subseteq Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$, *y* C *un sistema de clausura sobre* $|\mathbf{A}|^k$.

■

Si $\mathfrak{Fm}$ es claro según el contexto, se dirá simplemente que $\mathbb{L}$ es una HR^k-lógica abstracta.

En adelante, salvo que se indique lo contrario, $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}', \ldots$, $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2, \ldots$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}\ldots$ denotarán HR^k-lógicas abstractas, para algún $1 \leq k < \omega$.

Las k-tuplas de elementos de $\mathbf{A}$, es decir, los elementos de $|\mathbf{A}|^k$, se denominan k-elementos, y si k es claro según el contexto, se utilizarán "negritas" para denotar k-elementos de $\mathbf{A}$, es decir, a es un elemento de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{a}$ es un k-elemento de $\mathbf{A}$, y en particular, si $\mathbf{a}$ es un k-elemento de $\mathbf{A}$, entonces salvo

[1] $\mathrm{HR}_{\mathfrak{Fm}}$ significa "Homomorficamente Restringida relativa a $\mathfrak{Fm}$".

que se indique lo contrario, a_i con $i \leq k$ denota la i-ésima coordenada de $\mathbf{a}$. La misma notación se usa para conjuntos de k-elementos, es decir, $\mathbf{F}$ representa un conjunto de k-elementos, llamado k-conjunto, si k es claro según el contexto.

Los k-conjuntos de $\mathcal{C}$ se denominan *cerrados* de $\mathbb{L}$.

En $\mathbb{L} = \langle\, \mathbf{A}, H, \mathcal{C}\,\rangle$, $\mathbf{A}$ es el *álgebra asociada* (o *subyacente*) de $\mathbb{L}$ y se denota por $A.\mathbb{L}$, H es el *conjunto de morfismos asociados* a $\mathbb{L}$, denotado por $H.\mathbb{L}$, y $\mathcal{C}$ es el sistema de *cerrados* de $\mathbb{L}$, denotado por $\mathcal{C}.\mathbb{L}$.

Las HR^k-lógicas abstractas son una doble generalización de los objetos sobre los que se establecen modelos en Lógica Algebraica Abstracta:

- La adición de un subconjunto de los homomorfismos desde $\mathfrak{Fm}$ en el álgebra asociada, lo que no se ha usado en algebrización, y que permite reflejar la carencia de estructuralidad.

- Considerar sistemas de clausura de conjuntos de k-elementos, lo que extiende la noción de lógica abstracta, presentada por Brown y Suszko en [5] y utilizada ampliamente por Font y Jansana en [14] para Lógica Algebraica Abstracta, de manera análoga a como en [4] y [2] Blok y Pigozzi extienden a k-matrices la noción de matriz, mediante el uso de k-elementos del álgebra.

Se destacan entonces dos componentes "intermedias" de una HR^k-lógica abstracta $\mathbb{L}$, correspondientes a estructuras tratables de manera general con independencia del concepto de HR-lógica abstracta:

- $\overline{\mathbb{L}} := \langle\, A.\mathbb{L}, H.\mathbb{L}\,\rangle$, que corresponde a un *HR-álgebra relativa a* $\mathfrak{Fm}$, es decir, un par formado por un álgebra y un conjunto no vacío de homomorfismos desde $\mathfrak{Fm}$ en el álgebra (si $\mathfrak{Fm}$ es claro según el contexto, puede omitirse su mención). Estas estructuras, denotadas por $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, etcétera, serán tratadas más adelante. Para ellas se usarán también las notaciones $A.\mathfrak{A}$ para su álgebra y $H.\mathfrak{A}$ para su conjunto de morfismos.

- $\widetilde{\mathbb{L}} := \langle\, A.\mathbb{L}, \mathcal{C}.\mathbb{L}\,\rangle$, que corresponde a una *k-lógica abstracta*, es decir, un par formado por un álgebra y un sistema de clausura de k-subconjuntos de ella, y serán denotadas por $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, etcétera. Ellas son una directa generalización de las lógicas abstractas al caso finito-dimensional, y por lo tanto pueden para ellas utilizarse tanto las herramientas de lógicas abstractas como las de k-matrices. Se usarán tambien las notaciones $A.\mathbf{L}$ para su álgebra y $\mathcal{C}.\mathbf{L}$ para su sistema de clausura.

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son álgebras, $1 \leq k < \omega$, y $h \in Hom(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, entonces para $\mathbf{a} = \langle a_0, \ldots, a_{k-1}\rangle \in |\,\mathbf{A}|^k$, $\mathbf{F} \subseteq |\,\mathbf{A}|^k$, y $\mathbf{F}' \subseteq |\,\mathbf{B}|^k$ se definen

- $h(\mathbf{a}) = \langle h(a_0), \ldots, h(a_{k-1})\rangle$
- $h[\mathbf{F}] = \{h(\mathbf{a}) \;:\; \mathbf{a} \in \mathbf{F}\}$
- $h^{-1}[\mathbf{F}'] = \{\mathbf{a} \in |\,\mathbf{A}|^k \;:\; h(\mathbf{a}) \in \mathbf{F}'\}$

Definición 6. *Sea* $\mathcal{S}^k$ *un sistema proposicional* k*-dimensional, con* $1 \leq k < \omega$.

Entonces un modelo para $\mathcal{S}^k$ *es una* HR^k*-lógica abstracta* $\langle\, \mathbf{A}, H, \mathcal{C} \,\rangle$ *tal que:*

$$\forall h \in H \quad \forall \mathbf{F} \in \mathcal{C} \quad h^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}.$$

∎

Si $\mathcal{S}^k$ es sistema proposicional k-dimensional, $\mathbf{A}$ es un álgebra, $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$, y $\mathbf{F} \subseteq |\,\mathbf{A}|^k$, entonces se dirá que h es *compatible* con $\mathbf{F}$ si se cumple que $h^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$. Se dirá también que $\emptyset \neq H \subseteq Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ es *compatible* con $\{\mathbf{F}_i \subseteq |\,\mathbf{A}|^k \ : \ i \in I\}$, $I \neq \emptyset$, si todo $h \in H$ es compatible con $\mathbf{F}_i$, para todo $i \in I$.

Nótese que como siempre se tiene que $\mathfrak{Fm}^k \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$, entonces $Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ es compatible con $|\,\mathbf{A}|^k$, para todo $\mathbf{A}$ álgebra del tipo de $\mathfrak{Fm}$. En particular, para cualquier álgebra $\mathbf{A}$ y homomorfismo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ se cumple que h es compatible con todo $\mathbf{F}$ tal que $\left(h[\mathfrak{Fm}]\right)^k \subseteq \mathbf{F} \subseteq |\,\mathbf{A}|^k$, ya que entonces $h^{-1}[\mathbf{F}] = h^{-1}\left[\left(h[\mathfrak{Fm}]\right)^k\right] = \mathfrak{Fm}^k$.

Considerando lo anterior, se dirá que un modelo $\mathbb{L}$ para un sistema proposicional k-dimensional $\mathcal{S}^k$ es *trivial* si para todo $h \in H.\mathbb{L}$ y todo $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ se tiene $h^{-1}[\mathbf{F}] = \mathfrak{Fm}^k$.

Por otra parte, es inmediato que todo sistema proposicional k-dimensional $\mathcal{S}^k$ es modelo de sí mismo, y para el caso estructural se tiene que los modelos para $\mathcal{S}$ cuyo conjunto de morfismos asociado es el conjunto de todos los homomorfismos desde $\mathfrak{Fm}$ en el álgebra asociada, si $k = 1$, representan directamente a los modelos sobre lógicas abstractas utilizados en [14], y si $k \neq 1$, entonces los cerrados del modelo junto con el álgebra asociada son k-matrices.

De acuerdo a lo anterior, las nociones y propiedades presentadas en [2] de congruencia de un álgebra compatible con un conjunto de k-elementos del álgebra y de congruencia de Leibnitz de él son directamente aplicables ya que no dependen de los morfismos asociados ni de el sistema de cerrados como un todo.

Nota 3. En este trabajo se seguirán, "mutatis mutandis", las ideas y resultados que J. M. Font y R. Jansana presentan en [14], y que W. Blok y D. Pigozzi presentan en [4] y en [2]. También se utilizarán las ideas y desarrollos de B. Herrmann [12], en particular al no exigir finitud.

Entonces, con $1 \leq k < \omega$, se tiene[2]:

- Una congruencia θ del álgebra $\mathbf{A}$ es *compatible* con $\mathbf{F} \subseteq |\mathbf{A}|^k$ si para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ k-elementos de $\mathbf{A}$ se cumple que si $\mathbf{a} \in \mathbf{F}$ y para todo $i \leq k$, si $a_i \,\theta\, b_i$, entonces $\mathbf{b} \in \mathbf{F}$.

  Se denota por $\mathbf{a}\,\theta^k\,\mathbf{b}$ si para todo $i \leq k$ se cumple $a_i \,\theta\, b_i$.

- $\Omega_{\mathbf{A}}(\mathbf{F})$ es la mayor congruencia del álgebra $\mathbf{A}$ compatible con $\mathbf{F} \subseteq |\mathbf{A}|^k$, y siempre existe. Si $\mathfrak{A}$ es HR-álgebra, entonces $\Omega_{\mathfrak{A}}(\mathbf{F}) := \Omega_{A.\mathfrak{A}}(\mathbf{F})$, y si $\mathbb{L}$ es una HR^k-lógica abstracta, entonces $\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) := \Omega_{A.\mathbb{L}}(\mathbf{F})$.

- Una congruencia $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathbf{A}$ del álgebra $\mathbf{A}$ es compatible con $\mathbf{F} \subseteq |\mathbf{A}|^k$ si y sólo si $\theta \leq \Omega_{\mathbf{A}}(\mathbf{F})$.

- Si $\mathbf{A}$ es un álgebra y $\{\mathbf{F}_i \subseteq |\mathbf{A}|^k \ : \ i \in I\}$ es no vacío, entonces

$$\bigcap_{i \in I} \Omega_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}_i) \leq \Omega_{\mathbf{A}}(\bigcap_{i \in I} \mathbf{F}_i).$$

- Si $h \in Hom(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ es un homomorfismo sobreyectivo entre las álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, entonces para todo $\mathbf{F} \subseteq |\mathbf{B}|^k$ se cumple:

$$\Omega_{\mathbf{A}}(h^{-1}[\mathbf{F}]) = h^{-1}[\Omega_{\mathbf{B}}(\mathbf{F})].$$

Sin embargo, la congruencia de Tarski de una k-lógica abstracta no está explícitamente presentada cuando $k \neq 1$.

Definición 7. *Dada una k-lógica abstracta* $\mathbf{L}$, *la* congruencia de Tarski *de* $\mathbf{L}$, *denotada por* $\widetilde{\Omega}\,(\mathbf{L})$, *es la mayor congruencia de $A.\mathbf{L}$ compatible con todos los cerrados de $C.\mathbf{L}$. Si $\mathbb{L}$ es una HR^k-lógica abstracta, entonces* $\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}) := \widetilde{\Omega}\,(\widetilde{\mathbb{L}})$.

Si la congruencia de Tarski de una k-lógica abstracta o de una HR^k-lógica abstracta es la identidad, se dirá que es reducida.

■

[2]Ver [4] y [2].

La siguiente proposición entrega algunas propiedades de la congruencia de Tarski de una HR^k-lógica abstracta, y su demostración es enteramente análoga a la demostración de las respectivas propiedades de la congruencia de Tarski de una lógica abstracta (en el sentido de [14]) a partir de las propiedades de matrices lógicas, con k-matrices lógicas (en sentido de [2]) reemplazando a las matrices lógicas:

Proposición 3.1.1. *Sea $1 \leq k < \omega$. Entonces:*

1. *Si $\mathbb{L}$ es una HR^k-lógica abstracta, entonces*

$$\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}) = \bigcap_{\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}} \Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})$$

2. *Si $\mathbb{L}$ y $\mathbb{L}'$ son HR^k-lógicas abstractas, $h \in Hom(A.\mathbb{L}, A.\mathbb{L}')$ es sobreyectivo, y $\mathcal{C}.\mathbb{L} = \{h^{-1}[\mathbf{F}] \ : \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}'\}$, entonces $\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}) = h^{-1}[\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}')]$*

Para cada HR^k-lógica abstracta $\mathbb{L} = \langle\, \mathbf{A}, H, \mathcal{C}\,\rangle$ sea $\mathbf{C}^{\mathbb{L}}_{\mathfrak{Fm}^k}$ el sistema de clausura sobre $\mathfrak{Fm}^k$ generado por $\{h^{-1}[\mathbf{F}] \ : h \in H \text{ y } \mathbf{F} \in \mathcal{C}\}$. Sean $C^{\mathbb{L}}_{\mathfrak{Fm}^k}(\,\cdot\,)$ y $\models_{\mathbb{L}}$ el operador de clausura y la relación de consecuencia sobre $\mathfrak{Fm}^k$ respectivamente, asociados a $\mathbf{C}^{\mathbb{L}}_{\mathfrak{Fm}^k}$. Si $\mathfrak{Fm}^k$ es claro según el contexto, se puede omitir el subíndice "$\mathfrak{Fm}^k$".

Análogamente, si L es una clase de HR^k-lógicas abstractas, sea $\mathbf{C}^{L}_{\mathfrak{Fm}^k}$ el sistema de clausura sobre $\mathfrak{Fm}^k$ generado por $\bigcup_{\mathbb{L}\in L} \mathbf{C}^{\mathbb{L}}_{\mathfrak{Fm}^k}$, y sean $C^{L}_{\mathfrak{Fm}^k}(\,\cdot\,)$ el operador de clausura y $\models_{L}$ la relación de consecuencia asociados a $\mathbf{C}^{L}_{\mathfrak{Fm}^k}$. Si $L = \{\mathbb{L}\}$, se omiten las llaves, y por lo tanto se usa la notación del párrafo anterior.

Lema 3.1.2. 1. *Sea S^k un sistema proposicional k-dimensional, y sea $\mathbb{L} = \langle\, \mathbf{A}, H, \mathcal{C}\,\rangle$ una HR^k-lógica abstracta.*

Entonces para todo $\mathbf{\Gamma} \cup \{\boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \mathfrak{Fm}^k$ se tiene:

$$\mathbf{\Gamma} \models_{\mathbb{L}} \boldsymbol{\alpha} \text{ si y sólo si } \forall\, h \in H.\mathbb{L} \quad h(\boldsymbol{\alpha}) \in C_{\mathbb{L}}(h[\mathbf{\Gamma}]),$$

donde $C_{\mathbb{L}}$ es el operador de clausura sobre $|A.\mathbb{L}|^k$ determinado por $\mathcal{C}.\mathbb{L}$.[3]

2. *Sea S^k un sistema proposicional k-dimensional, y sea L una clase de HR^k-lógicas abstractas.*

Entonces para todo $\mathbf{\Gamma} \cup \{\boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \mathfrak{Fm}^k$ se tiene:

$$\mathbf{\Gamma} \models_{L} \boldsymbol{\alpha} \text{ si y sólo si } \forall\, \mathbb{L} \in L \quad \forall\, h \in H.\mathbb{L} \quad h(\boldsymbol{\alpha}) \in C_{\mathbb{L}}(h[\mathbf{\Gamma}]).$$

Demostración. Se omitirán en esta demostración los subíndices "$\mathfrak{Fm}^k$".

[3] No confundir $C^{\mathbb{L}}(\cdot)$ sobre $\mathfrak{Fm}^k$, aunque se omita el subíndice $\mathfrak{Fm}^k$, con $C_{\mathbb{L}}$ sobre $|A.\mathbb{L}|^k$.

1. Como $\mathbf{C}^{\mathbb{L}}$ está generado por $\{h^{-1}[\mathbf{F}] \ : h \in H.\mathbb{L} \text{ y } \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}\}$, entonces $\mathbf{\Gamma}' \in \mathbf{C}^{\mathbb{L}}$ si y sólo si existen I, $\{h_i \in H.\mathbb{L} \ : \ i \in I\}$, y $\{\mathbf{F}_i \in \mathcal{C}.\mathbb{L} \ : \ i \in I\}$ tales que $\mathbf{\Gamma}' = \bigcap_{i \in I} h_i{}^{-1}[\mathbf{F}_i]$.

   Luego, se tiene
   $\forall\, h \in H.\mathbb{L} \quad h(\boldsymbol{\alpha}) \in C_{\mathbb{L}}(h[\mathbf{\Gamma}]) \leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow \forall\, h \in H.\mathbb{L} \quad h(\boldsymbol{\alpha}) \in \bigcap \{\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L} \ : h[\mathbf{\Gamma}] \subseteq \mathbf{F}\} \\
&\leftrightarrow \forall\, h \in H.\mathbb{L} \quad \boldsymbol{\alpha} \in \bigcap \{h^{-1}[\mathbf{F}] \ : \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L} \text{ y } \mathbf{\Gamma} \subseteq h^{-1}[\mathbf{F}]\} \\
&\leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in \bigcap_{h \in H.\mathbb{L}} \bigcap \{h^{-1}[\mathbf{F}] \ : \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L} \text{ y } \mathbf{\Gamma} \subseteq h^{-1}[\mathbf{F}]\} \\
&\leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in \bigcap \{h^{-1}[\mathbf{F}] \ : h \in H.\mathbb{L} \text{ y } \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L} \text{ y } \mathbf{\Gamma} \subseteq h^{-1}[\mathbf{F}]\} \\
&\leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in \bigcap \{\mathbf{\Gamma}' \in \mathbf{C}^{\mathbb{L}} \ : \mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{\Gamma}'\} \\
&\leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in C^{\mathbb{L}}(\mathbf{\Gamma}) \\
&\leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models_{\mathbb{L}} \boldsymbol{\alpha}
\end{aligned}$$

2. Como $\mathbf{C}^{L}$ está generado por $\bigcup_{\mathbb{L} \in L} \mathbf{C}^{\mathbb{L}}_{\mathfrak{Fm}^k}$, entonces $\mathbf{\Gamma}' \in \mathbf{C}^{L}$ si y sólo si existen I, $\{\mathbb{L}_i \in L \ : \ i \in I\}$ y $\{\mathbf{\Gamma}_i \in \mathbf{C}^{\mathbb{L}_i} \ : \ i \in I\}$ tales que $\mathbf{\Gamma}' = \bigcap_{i \in I} \mathbf{\Gamma}_i$.

   Entonces se tiene:
   $\forall\, \mathbb{L} \in L \quad \forall\, h \in H.\mathbb{L} \quad \forall\, \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L} \quad h(\boldsymbol{\alpha}) \in C_{\mathbb{L}}(h[\mathbf{\Gamma}]) \leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\leftrightarrow \forall\, \mathbb{L} \in L \quad \mathbf{\Gamma} \models_{\mathbb{L}} \boldsymbol{\alpha} \\
&\leftrightarrow \forall\, \mathbb{L} \in L \quad \boldsymbol{\alpha} \in \bigcap \{\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{L}} \in \mathbf{C}^{\mathbb{L}} \ : \mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{\Gamma}_{\mathbb{L}}\} \\
&\leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in \bigcap_{\mathbb{L} \in L} \bigcap \{\mathbf{\Gamma}_{\mathbb{L}} \in \mathbf{C}^{\mathbb{L}} \ : \mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{\Gamma}_{\mathbb{L}}\} \\
&\leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \in \bigcap \{\mathbf{\Gamma}' \in \mathbf{C}^{L} \ : \mathbf{\Gamma} \subseteq \mathbf{\Gamma}'\} \\
&\leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models_{L} \boldsymbol{\alpha}
\end{aligned}$$

□

Definición 8. *Sea $\mathcal{S}^k$ un sistema proposicional k-dimensional. Entonces $M_{\mathcal{S}^k}$ es la clase de todos los modelos de $\mathcal{S}^k$.*

■

El siguiente lema se obtiene directamente a partir de las definiciones:

Lema 3.1.3. *Sea $\mathcal{S}^k$ un sistema proposicional k-dimensional, y sea L una clase de HR^k-lógicas abstractas. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $L \subseteq M_{\mathcal{S}^k}$.

2. $\mathbf{C}^L_{\mathfrak{Fm}^k}$ *es subsistema de clausura de* $\mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$.

3. *Para todo* $\Gamma \cup \{\psi\} \subseteq \mathfrak{Fm}^k$

$$\psi \in Th_{\mathcal{S}^k}(\Gamma) \text{ implica } \psi \in C^L_{\mathfrak{Fm}^k}(\Gamma).$$

4. *Para todo* $\Gamma \cup \{\psi\} \subseteq \mathfrak{Fm}^k$

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}^k} \psi \text{ implica } \Gamma \models_L \psi.$$

Se dirá entonces que un sistema proposicional k-dimensional $\mathcal{S}^k$ es *completo* respecto de una clase de modelos L cuando $\mathbf{C}^L_{\mathfrak{Fm}^k} = \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$, o equivalentemente, cuando $\vdash_{\mathcal{S}^k} = \models_L$.

Por lema anterior, $\mathbf{C}^{M_{\mathcal{S}^k}}_{\mathfrak{Fm}^k} \subseteq \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$, y como ya fue notado, $\mathcal{S}^k \in M_{\mathcal{S}^k}$, lo que implica que $\mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$ es parte de los generadores de $\mathbf{C}^{M_{\mathcal{S}^k}}_{\mathfrak{Fm}^k}$, obteniéndose que $\mathbf{C}^{M_{\mathcal{S}^k}}_{\mathfrak{Fm}^k} = \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$. Luego, $\mathcal{S}^k$ es completo respecto de todos sus modelos.

Es evidente que la principal dificultad para manipular modelos es el conjunto de morfismos asociados, ya que esencialmente es lo único que no tiene herramientas bien desarrolladas[4]. Particularmente difícil es la presentación de ejemplos de modelos, aún sobre álgebras finitas, dado que la especificación de un modelo requiere la especificación del conjunto (infinito) de morfismos asociados. En el ejemplo de *PFOUR* dado antes, la especificación de las sustituciones estructurales se apoya en las imágenes de los átomos, que son fórmulas de un tipo muy específico (hiperliterales), y en que tales imágenes se relacionan con la axiomatización de *PFOUR* . La axiomatización de *PFOUR* puede no ser "transferible" a sus modelos, como en Lógica Algebraica Abstracta (ver por ejemplo la Proposición 2.1 en [7]), ya que *PFOUR* no es estructural, y en particular los axiomas relativos a hiperliterales no necesariamente tendrán un significado único en el álgebra asociada a un modelo, sino que dependerá de la imagen de esos axiomas por cada homomorfismo asociado, cómo se verá en ejemplos más adelante.

Una manera de encarar el problema consiste en establecer un cuociente del conjunto de morfismos asociados a cada modelo, que permita identificar homomorfismos "indistinguibles" respecto de su accionar en el álgebra asociada. Tal cuociente debe ser uniformemente definido para todos los modelos de un sistema proposicional k-dimensional, para facilitar la presentación de ejemplos.

Entonces dado un sistema proposicional $\mathcal{S}^k$ sea $D \subseteq Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ un monoide respecto de la composición, con $\mathbf{id}_{\mathfrak{Fm}} \in D$, denotada simplemente por *id*.

Para cada álgebra $\mathbf{A}$ del tipo de $\mathfrak{Fm}$ sea $\mathbf{D}$ la relación binaria sobre $Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ dada por:

Para todos f, g en $Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ sea $f \equiv g(\mathbf{D})$ si y sólo si existen σ y δ en D tales que

[4]Rigurosamente hablando no se ha considerado, al menos en la literatura usada, sistemas de clausura de k-elementos, pero se acepta que ello no presenta grandes dificultades.

$$f = g \circ \sigma \quad \text{y}$$
$$g = f \circ \delta.$$

Es claro que para todo $f \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ se cumple que $f = f \circ \mathbf{id}$, es decir, $\mathbf{D}$ es refleja. Además su simetría se obtiene por definición, y si $f \equiv g\,(\mathbf{D})$ y $g \equiv h\,(\mathbf{D})$, entonces existe $\{\sigma_1, \sigma_2, \delta_1, \delta_2\} \subseteq D$ tal que

$$f = g \circ \sigma_1 \quad g = f \circ \delta_1 \quad g = h \circ \sigma_2 \quad h = g \circ \delta_2.$$

Pero entonces $f = h \circ (\sigma_2 \circ \sigma_1)$, $h = f \circ (\delta_1 \circ \delta_2)$, y se tiene que $\sigma_2 \circ \sigma_1$ y $\delta_1 \circ \delta_2$ están en D por ser éste un monoide respecto de la composición. Luego, $\mathbf{D}$ es transitiva y por tanto relación de equivalencia sobre $Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$.

Si $\emptyset \neq H \subseteq Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$, entonces la restricción de $\mathbf{D}$ a H es claramente de equivalencia. Además, es evidente que si $D \subseteq D'$, ambos monoides que contienen a id, entonces $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{D'}$.

Para cada $f \in H \subseteq Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ sea $[f]^H_{\mathbf{D}}$ la clase de equivalencia de f en H respecto de $\mathbf{D}$.

En particular para $D \subseteq S_E(\mathcal{S}^k)$ se cumple que dados $\mathbf{F} \subseteq |\mathbf{A}|^k$, $f, g \in H \subseteq Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$, si f es compatible con $\mathbf{F}$ y $f \equiv g\,(\mathbf{D})$, entonces g es compatible con $\mathbf{F}$, ya que $f^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$ y como existe $\sigma \in D$ tal que $g = f \circ \sigma$, se tiene que $g^{-1}[\mathbf{F}] = \sigma^{-1}[f^{-1}[\mathbf{F}]] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$. En particular, $f \equiv g\,(\mathbf{D})$ implica que f es compatible con $\mathbf{F}$ si y sólo si g lo es.

Ejemplo 5.

Sea $P\tau$ una Lógica Anotada. Hay que recordar que $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$ tiene cardinalidad infinita numerable. Sea para cada τ y cada $\mathbf{A}$ álgebra del tipo de $P\tau$ el conjunto $|\mathbf{A}|^\tau$ de todas las funciones de τ en $|\mathbf{A}|$:

- Si $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ y $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$, sea $\widehat{h}(p) := \langle h(p : \mu) : \mu \in \tau \rangle \in |\mathbf{A}|^\tau$[5], y sea $Dis(h) := \{\widehat{h}(p) \in |\mathbf{A}|^\tau \ : p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})\}$. Claramente $\emptyset \neq Dis(h) \subseteq |\mathbf{A}|^\tau$ y la cardinalidad de $Dis(h)$ es menor o igual a la cardinalidad de $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$. $Dis(h)$ será llamada la *distribución* de h en $\mathbf{A}$.
- Sea $\sim_h$ la relación entre letras de $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$ dada por $p \sim_h q$ si y sólo si $\widehat{h}(p) = \widehat{h}(q)$. Claramente es de equivalencia, y por tanto induce una partición de $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$ en clases $[p]_{\sim h}$ para cada $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$.
- Es evidente que $[q]_{\sim h} = [p]_{\sim h}$ si y sólo si $\widehat{h}(q) = \widehat{h}(p)$. Luego, podemos definir una aplicación $\widetilde{h}$ entre clases de equivalencia por $\sim_h$ en $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$ y funciones de $Dis(h)$ por $\widetilde{h}([p]_{\sim h}) := \widehat{h}(p)$. Entonces $\widetilde{h}$ está bien definida, y si $\widetilde{h}([p]_{\sim h}) = \widetilde{h}([q]_{\sim h})$, entonces $\widehat{h}(p) = \widehat{h}(q)$, es decir, $[p]_{\sim h} = [q]_{\sim h}$, y para toda $d \in Dis(h)$ existe por definición una letra $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$ tal que $d = \widehat{h}(p)$. Luego, $\widetilde{h}$ es biyección entre $\underline{le}(\mathfrak{Fm})/ \sim_h := \{[p]_{\sim h} \ : p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})\}$ y $Dis(h)$.

[5]La función $\langle a_\mu : \mu \in \tau \rangle$ lleva a $\mu \in \tau$ en a_μ.

- Para toda Lógica Anotada $P\tau$ una sustitución $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ tiene la propiedad $\tau - le$ si se tiene

$$\forall p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm}) \quad \exists q \in \underline{le}(\mathfrak{Fm}) \quad \forall \mu \in \tau \quad \sigma(p:\mu) = (q:\mu).$$

Lema 3.1.4. *Toda sustitución con la propiedad $\tau - le$ es estructural.*

Demostración. Claramente las imagenes de los axiomas $(\rightarrow_1)$, $(\rightarrow_2)$, $(\rightarrow_3)$, $(\wedge_1)$, $(\wedge_2)$, $(\wedge_3)$, $(\vee_1)$, $(\vee_2)$, y $(\vee_3)$ por σ son axiomas del tipo respectivo, y para los axiomas $(\neg_1)$, $(\neg_2)$, y $(\neg_3)$, como su forma se mantiene al aplicar σ, y por ser ésta homomorfismo de $\mathfrak{Fm}$ en $\mathfrak{Fm}$, no lleva fórmulas complejas en hiperliterales, por lo que también preserva su restricción, y entonces las imagenes de esos axiomas son axiomas del respectivo tipo.

Es claro que σ es compatible con la regla MP.

Todo axioma (τ_1) es de la forma $(p:\bot) \wedge \left(\neg^k(p:\mu) \leftrightarrow \neg^{k-1}(p:\neg\mu)\right)$ para $k \in \omega$, $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$, y $\mu \in \tau$. Entonces su imagen por σ es de la forma $(q:\bot) \wedge \left(\neg^k(q:\mu) \leftrightarrow \neg^{k-1}(q:\neg\mu)\right)$, que es también un axioma del tipo (τ_1).

Todo axioma (τ_2) es de la forma $(p:\mu) \rightarrow (p:\lambda)$ para $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$ y $\lambda \sqsubseteq \mu$ en τ. Entonces su imagen por σ es de la forma $(q:\mu) \rightarrow (q:\lambda)$, que es un axioma del mismo tipo.

La regla (τ_3) es de la forma $\varphi \rightarrow (p:\mu) \in \; Th_{\mathcal{S}}(\{\varphi \rightarrow (p:\mu_j) \;\; : j \in J\})$, con $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$, $\varphi \in \mathfrak{Fm}$, y $\mu = \sqcup_{j\in J}\mu_j$ en τ. Entonces la imagen de $\{\varphi \rightarrow (p:\mu_j) \;\; : j \in J\}$ es $\{\sigma(\varphi) \rightarrow (q:\mu_j) \;\; : j \in J\}$, y dado que la imagen de $\varphi \rightarrow (p:\mu)$ es $\sigma(\varphi) \rightarrow (q:\mu)$, por lo tanto $\sigma(\varphi) \rightarrow (q:\mu) \in Th_{\mathcal{S}}(\{\sigma(\varphi) \rightarrow (q:\mu_j) \;\; : j \in J\})$, es decir, σ es compatible con la regla (τ_3).

Luego, si $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ tiene la propiedad $\tau - le$, entonces $\sigma \in S_E$. □

- Para todos $h, g \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ y $d \in |\mathbf{A}|^\tau$ tales que $d \in Dis(h) \cap Dis(g)$, se tiene que para todos $p, q \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$ con $p \in (\widetilde{h})^{-1}[d]$ y $q \in (\widetilde{g})^{-1}[d]$ se cumple que $h(p:\mu) = g(q:\mu)$, para todo $\mu \in \tau$, ya que $\widehat{h}(p) = d = \widehat{g}(q)$.

- Si para $h, g \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ se tiene $Dis(h) \subseteq Dis(g)$, entonces para cada $d \in Dis(h)$ sea k_d cualquier función de $(\widetilde{h})^{-1}[d]$ en $(\widetilde{g})^{-1}[d]$ (Nótese que si $(\widetilde{h})^{-1}[d] = \underline{le}(\mathfrak{Fm}) \supseteq (\widetilde{g})^{-1}[d]$, siempre se puede pedir que k_d sea la identidad sobre $(\widetilde{g})^{-1}[d]$). Sea $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ determinada por

$$\sigma(p:\mu) = (k_{\widehat{h}(p)}(p):\mu), \text{ para todo } \mu \in \tau \text{ y toda } p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm}).$$

Entonces para todo $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$ y $\mu \in \tau$ se tiene que $g \circ \sigma(p:\mu) = g(k_{\widehat{h}(p)}(p):\mu)$, pero como $k_{\widehat{h}(p)}(p) \in (\widetilde{g})^{-1}[\widehat{h}(p)]$, entonces por el punto anterior se tiene que $g(k_{\widehat{h}(p)}(p):\mu) = h(p:\mu)$, es decir, $g \circ \sigma(p:\mu) =$

$h(p : \mu)$, para todo $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$ y $\mu \in \tau$. Luego, $h = g \circ \sigma$, y como por definición σ cumple la propiedad $\tau - le$, entonces se tiene que si $Dis(h) \subseteq Dis(g)$ entonces existe $\sigma \in S_E$ con la propiedad $\tau - le$ tal que $h = g \circ \sigma$. En particular, si g es compatible con $F \subseteq |\mathbf{A}|$, entonces h también lo es.

- Inversamente, si existe $\sigma \in S_E$ con la propiedad $\tau - le$ tal que $h = g \circ \sigma$, se tiene que para $d \in Dis(h)$ existe $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$ tal que $d = \langle h(p : \mu) : \mu \in \tau \rangle = \langle g \circ \sigma(p : \mu) : \mu \in \tau \rangle$, pero por la propiedad $\tau - le$ se tiene que existe $q \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$ tal que $\sigma(p : \mu) = (q : \mu)$ para todo $\mu \in \tau$. Luego, $d = \langle g(q : \mu) : \mu \in \tau \rangle \in Dis(g)$, es decir, $Dis(h) \subseteq Dis(g)$.

- Sea **Dis** la relación entre homomorfismos de $Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ dada por $h \equiv g\,(\mathbf{Dis})$ si y sólo si $Dis(h) = Dis(g)$. Claramente **Dis** es de equivalencia, y por tanto induce una partición de $Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$. En particular se tiene que existen $\sigma, \rho \in S_E$ con la propiedad $\tau - le$ tales que $h = g \circ \sigma$ y $g = h \circ \rho$. También se tiene que para todo $F \subseteq |\mathbf{A}|$ se cumple que h es compatible con F si y sólo si g es compatible con F. Se usará entonces indistintamente los términos "h es compatible con $F \subseteq |\mathbf{A}|$", "$[h]_{\mathbf{Dis}}$ es compatible con $F \subseteq |\mathbf{A}|$", y "$Dis(h)$ es compatible con $F \subseteq |\mathbf{A}|$".

- Inversamente, si para $h, g \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ existen $\sigma, \rho \in S_E$ con la propiedad $\tau - le$ tales que $h = g \circ \sigma$ y $g = h \circ \rho$, entonces $Dis(h) = Dis(g)$, es decir, $h \equiv g\,(\mathbf{Dis})$.

- Si ${S_E}_\tau^{le} := \{\sigma \in S_E \ : \sigma \text{ tiene la propiedad } \tau - le\}$, entonces $\mathbf{Dis} = {\boldsymbol{S_E}}_{\boldsymbol{\tau}}^{\mathbf{le}}$ (la relación entre morfismos definida previamente a este ejemplo).

- Si $\emptyset \neq D \subseteq |\mathbf{A}|^\tau$ es de cardinalidad no mayor que la cardinalidad de $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$, entonces existe una partición de $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$ tal que se tiene una biyección b entre las clases de tal partición y los elementos de D. Luego, basta definir $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ por

  $h(p : \mu) = d(\mu)$ para todos $\mu \in \tau$ y $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$ tal que la imagen por b de la clase de p es $d \in D$.

  Claramente entonces $Dis(h) = D$, y por lo tanto se tiene que para todo $\emptyset \neq D \subseteq |\mathbf{A}|^\tau$ de cardinalidad no mayor que la cardinalidad de $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$ existe $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ tal que $Dis(h) = D$.

- Finalmente, existe una biyección $\widetilde{DIS}$ que va de $Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})/\mathbf{Dis} := \{[h]_{\mathbf{Dis}} \ : h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})\}$ sobre el conjunto

  $$|\mathbf{A}|^\tau{}_{le} := \{D \subseteq |\mathbf{A}|^\tau \ : 0 \neq \#D \leq \#\underline{le}(\mathfrak{Fm})\},$$

  definida por $\widetilde{DIS}([h]_{\mathbf{Dis}}) = Dis(h)$, donde $\#D$ es la cardinalidad de D, y es biyección ya que claramente está bien definida y es inyectiva, y por el punto anterior se tiene que es sobreyectiva.

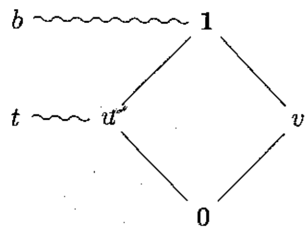
- Nótese que como $Dis(h) \subseteq Dis(g)$ si y sólo si existe $\sigma \in S_E$ con la propiedad $\tau-le$ tal que $h = g \circ \sigma$, entonces para todo $F \subseteq |\mathbf{A}|$, si g es compatible con F, también lo es h. Luego, llamando a una distribucion *mínima* cuando es de la forma $\{d\}$, para $d \in |\mathbf{A}|^\tau$, y para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ si $Dis_m(h) := \{\{d\} \ : d \in Dis(h)\}$ es el conjunto de las distribuciones mínimas asociadas a h, entonces para todo $F \subseteq |\mathbf{A}|$, si $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ es compatible con él, también $Dis_m(h)$ lo es. Además, se tiene que si $\emptyset \neq H \subseteq Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ es compatible con $F \subseteq |\mathbf{A}|$, entonces también lo es $\bigcup_{h \in H} Dis_m(h)$. Por simplicidad, se omitirán las llaves en una districbución minimal, identificando entonces $d \in |\mathbf{A}|^\tau$ con la distribución mínima que determina. Nótese que la clase de equivalencia de homomorfismos asociada a cada $d \in |\mathbf{A}|^\tau$, $(\widetilde{\mathbf{Dis}})^{-1}[d]$, tiene un sólo elemento, es decir, sólo hay un homomorfismo cuya distribución es exactamente d.

- Para todo $\mathbb{L}$ modelo para $P\tau$ se cumple que

$$C.\mathbb{L} \subseteq \bigcap \{F \subseteq |A.\mathbb{L}| \ : \bigcup_{h \in H.\mathbb{L}} Dis_m(h) \text{ es compatible con } F\}$$

Lo anterior permite la presentación de HR-lógicas abstractas y modelos para Lógicas Anotadas mediante referencia a las distribuciones, consideradas clases de equivalencia de homomorfismos. En particular, para τ finito, $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$ infinito numerable, y un álgebra finita $\mathbf{A}$, el conjunto $|\mathbf{A}|^\tau{}_{le}$ es finito, y por lo tanto $|\mathbf{A}|^\tau{}_{le} = \{D \subseteq |\mathbf{A}|^\tau \ : \emptyset \neq D\}$.

Ejemplo 6.
En *PFOUR* , consideremos el álgebra $\mathbf{A}$ del tipo de $\mathfrak{Fm}$ dada por:



donde $\mathbf{B} = \{\mathbf{0}, u, v, \mathbf{1}\}$ con $\wedge$, $\vee$, y $\neg$ forma un álgebra de Boole, con $x \to y = \neg x \vee y$ para $x, y \in \mathbf{B}$, y con las habituales líneas continuas representando el orden. Las operaciones para $\{b, t\}$ son

$\wedge$	b	t
b	$\mathbf{1}$	u
t	u	u

$\vee$	b	t
b	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
t	$\mathbf{1}$	u

$\to$	b	t
b	$\mathbf{1}$	u
t	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$

	$\neg$
b	b
t	t

y con $b \wedge b = \mathbf{1}$ y $t \wedge t = a$, se define para todo $x \in \mathbf{B}$ e $y \in \{b, t\}$:

- $x \wedge y = y \wedge x = x \wedge (y \wedge y)$

- $x \vee y = y \vee x = x \vee (y \wedge y)$

- $x \to y = x \to (y \wedge y)$

- $y \to x = (y \wedge y) \to x$

Es decir, las líneas horizontales de la forma $\sim\sim \cdots \sim$ representan el hecho de que respecto de $\mathbf{B}$, b y t no se diferencian de $\mathbf{1}$ y u respectivamente.

En este caso se tiene que $|\mathbf{A}|^{FOUR} = 1296$, y por lo tanto se tienen 1296 distribuciones mínimas, e identificándolas con el único homomorfismo que tiene esa distribución, se pueden clasificar respecto de su recorrido, de si son o no triviales, es decir, si el menor $F \subseteq |\mathbf{A}|$ con el que son compatibles es igual a su recorrido. Una preclasificación se presenta en la siguiente tabla:

#	¿Trivial?	¿Sobreyectiva?
280	Si	Si
992	Si	No
22	No	Si
2	No	No

Las 280 distribuciones triviales y sobreyectivas no se incluirán en las descripciones siguientes. Una descripción más detallada por grupos de las demás, incluyendo el recorrido, y con un diagrama adjunto, se da en el siguiente listado, donde se adoptan las siguientes convenciones:

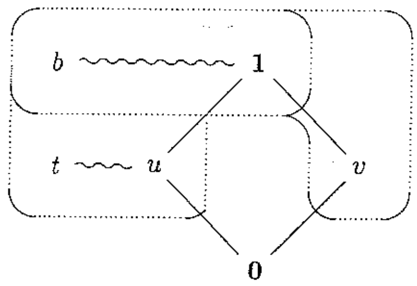
- No se hará diferencia entre la distribución mínima $\{d\}$, la función $d \in |\mathbf{A}|^{FOUR}$, y el homomorfismo (único) h tal que $dis(h) = \{d\}$.

- El recorrido, cuando la distribución no es sobreyectiva, se denotará en el diagrama por una línea continua.

- Los $F \subseteq |\mathbf{A}|$ contenidos propiamente en el recorrido son incluidos pero denotados por líneas punteadas. Nótese que por cada uno de tales cerrados y cada subconjunto de $|\mathbf{A}|$ disjunto del recorrido, si no es sobreyectiva, hay un cerrado con el que la distribución es compatible, pero no se incluyen en el diagrama.

Grupo 1: La distribución $d(\bot) = b$, $d(f) = t$, $d(t) = t$, y $d(\top) = t$, sobreyectiva y no trivial: Cerrados: $\{\{b, \mathbf{1}\}\ \{b, \mathbf{1}, v\}\ \{b, \mathbf{1}, t, u\}\ |\mathbf{A}|\}$

Su diagrama es

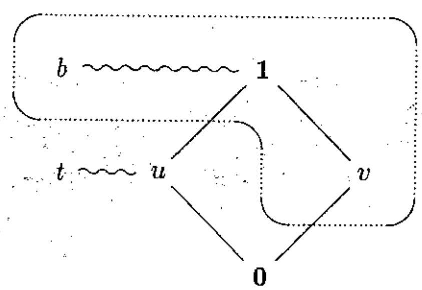


Grupo 2: 8 distribuciones sobreyectivas y no triviales:

$d(\perp)$	$d(f)$	$d(t)$	$d(\top)$
b	**1**	u	t
b	**1**	**0**	t
b	u	**1**	t
b	u	v	t
b	**0**	**1**	t
b	**0**	v	t
b	v	u	t
b	v	**0**	t

Cerrados: $\{b, \mathbf{1}, v\}$ y $|\mathbf{A}|$

Su diagrama es

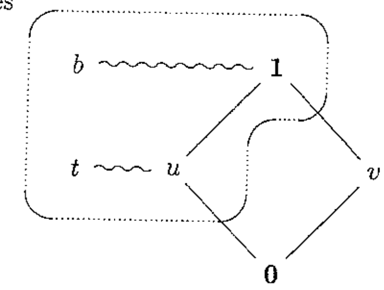


Grupo 3: 13 distribuciones sobreyectivas y no triviales:

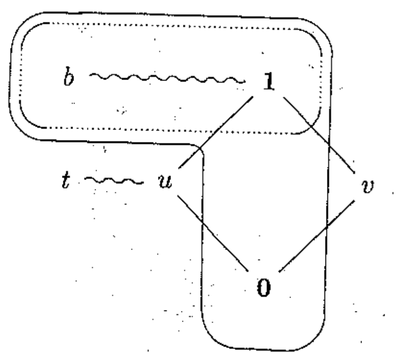
$d(\perp)$	$d(f)$	$d(t)$	$d(\top)$
b	b	b	t
b	b	t	b
b	b	t	t
b	t	b	b
b	t	b	t
b	t	t	b
t	b	b	b
t	b	b	t
t	b	t	b
t	b	t	t
t	t	b	b
t	t	b	t
t	t	t	b

Cerrados: $\{b, t, u, \mathbf{1}\}$ y $|\mathbf{A}|$

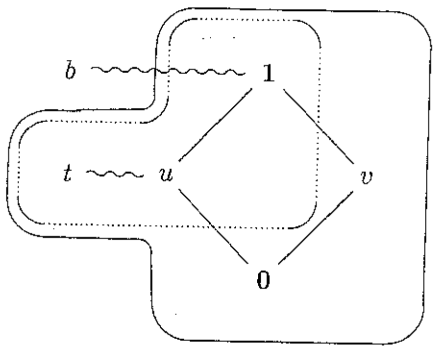
Su diagrama es



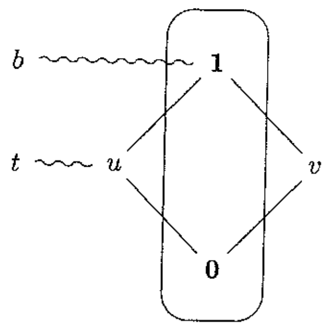
Grupo 4: La distribución $d(\perp) = d(f) = d(t) = d(\top) = b$, no sobreyectiva ni trivial:



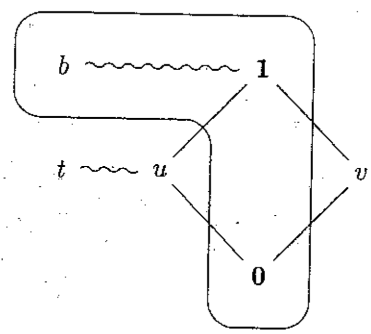
Grupo 5: La distribución $d(\bot) = d(f) = d(t) = d(\top) = t$ no sobreyectiva ni trivial:



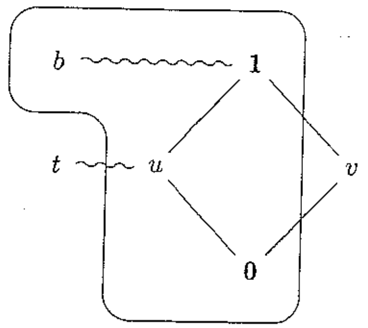
Grupo 6: 16 distribuciones no sobreyectivas y triviales:



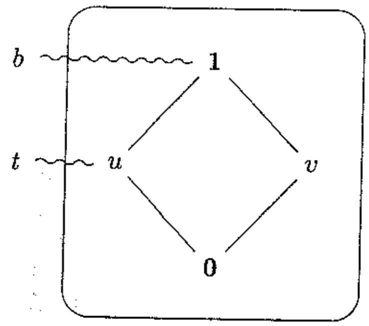
Grupo 7: 64 distribuciones no sobreyectivas y triviales:



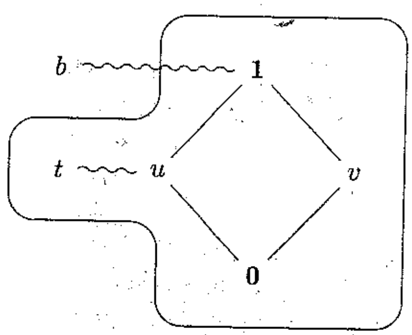
Grupo 8: 304 distribuciones no sobreyectivas y triviales:



Grupo 9: 240 distribuciones no sobreyectivas y triviales:



Grupo 10: 368 distribuciones no sobreyectivas y triviales:



Una revisión de los cerrados que aparecen en cada grupo arroja 24 cerrados de entre los 64 subconjuntos de $|\mathbf{A}|$, sin contar a $|\mathbf{A}|$. Para cada uno de ellos se pueden detallar los grupos de distribuciones que son compatibles con ellos, formando 10 grupos denotados por F_i, $i \in \{1, \ldots, 10\}$:

i	Cerrados	Distribuciones compatibles
1	$\{b, \mathbf{1}\}$	1, 4
2	$\{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ $\{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, v\}$ $\{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, u\}$ $\{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, t\}$ $\{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, t, u\}$ $\{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, t, v\}$	4, 6, 7
3	$\{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, u, v\}$	4, 6, 7, 8, 9
4	$\{b, \mathbf{1}, t\}$ $\{b, \mathbf{1}, u\}$ $\{b, \mathbf{1}, t, v\}$ $\{b, \mathbf{1}, u, v\}$ $\{b, \mathbf{1}, t, u, v\}$	4
5	$\{b, \mathbf{1}, v\}$	1,2,4
6	$\{b, \mathbf{1}, t, u\}$	1,3,4
7	$\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, v\}$ $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, t\}$ $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, t, v\}$ $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, u\}$ $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, t, u\}$	6
8	$\{\mathbf{1}, t, u\}$	5
9	$\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, u, v\}$	6, 9
10	$\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, t, u, v\}$	5, 6, 9, 10

Respecto de los homomorfismos $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ cuya distribución no es mínima y los subconjuntos F de $|\mathbf{A}|$ con los que son compatibles, ya se sabe que si h es compatible con F, entonces todo $d \in Dis(h)$ lo es. La idea entonces es probar el recíproco, es decir, que si todo $d \in Dis(h)$ es compatible con F, entonces h lo es.

Entonces se tiene lo siguiente:

- Si F es de tipo F_i, con $i \in \{4, 7, 8\}$, sólo hay una distribución mínima que es compatible con él, por lo que h es compatible con alguno de ellos si y sólo si $Dis(h)$ es igual a tal distribución mínima.
- Si F es del tipo F_i, con $i \in \{2, 3, 9, 10\}$, entonces se tiene que F es subálgebra de $|\mathbf{A}|$, contiene a los recorridos de todas las distribuciones mínimas que son compatibles con él, y uno de tales recorridos es F, lo que, como el recorrido de h es la subálgebra de $|\mathbf{A}|$ generada por los recorridos de todos los $d \in Dis(h)$, implica que el recorrido de h está a su vez contenido en F, es decir, $h^{-1}[F] = \mathfrak{Fm}$.
- Sea F del tipo F_i, con $i \in \{1, 5, 6\}$. Se necesita probar que si todo $d \in Dis(h)$ es compatible con F, entonces h lo es.

  Para probar que $h^{-1}[F] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}}$, sea $\psi \in Th_{\mathcal{S}}(h^{-1}[F])$. Entonces existe una demostración de ψ a partir de $h^{-1}[F]$, $\langle \beta_i : i \leq \eta \rangle$, con η ordinal, de modo que: $\beta_\eta = \psi$, y tal que para cada $i \leq \eta$ se cumple:

  - O bien $\beta_i \in Ax(\mathcal{S})$.
  - O bien $\beta_i \in h^{-1}[F]$.

- O bien existe $j \leq i$ tal que $\langle \{\beta_j, \beta_j \to \beta_i\}, \beta_i \rangle \in MP$, con MP la única regla de inferencia de $PFOUR$ ($FOUR$ es finito), correspondiente a $(\to_4)$ en la axiomatización presentada para P_T .

Entonces basta probar que $Ax(\mathcal{S}) \subseteq h^{-1}[F]$ y que $h^{-1}[F]$ es cerrado bajo MP, pero para esto último nótese que para tales F se cumple que para todos a y b en $|\mathbf{A}|$, si $\{a, a \to b\} \subseteq F$, entonces $b \in F$ (es decir, F es cerrado por MP), lo que implica que $h^{-1}[F]$ es cerrado por MP en $\mathfrak{Fm}$, ya que si $\{\alpha, \alpha \to \beta\} \subseteq h^{-1}[F]$, entonces $\{h(\alpha), h(\alpha) \to h(\beta)\} \subseteq F$, y por lo tanto $h(\beta) \in F$, es decir, $\beta \in h^{-1}[F]$.

Sólo resta probar que $Ax(\mathcal{S}) \subseteq h^{-1}[F]$, y para ello, hay que observar que para todos $x, y \in |\mathbf{A}|$ se cumple:

$$\{x \wedge y,\, x \vee y,\, x \to y\} \subseteq \mathbf{B}$$

$$x \wedge y = (x \wedge x) \wedge (y \wedge y),$$

$$x \vee y = (x \wedge x) \vee (y \wedge y),$$

$$x \to y = (x \wedge x) \to (y \wedge y).$$

Además, $\mathbf{1} \in F$, ya que para cualquier $d \in Dis_m(h)$, identificando d con $(\widetilde{Dis})^{-1}[d]$, se tiene que $Th_{\mathcal{S}}(\emptyset) \subseteq d^{-1}[F] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}}$, y por lo tanto, si $\alpha = (p : \bot) \wedge (p : \bot)$, se tiene que $h(\alpha) \in \mathbf{B}$, y como $\mathbf{B}$ es un álgebra de Boole, necesariamente $h(\neg\alpha \wedge \alpha) = \mathbf{1}$. Pero además $\neg\alpha \wedge \alpha \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$, así que $\mathbf{1} \in F$.

Entonces para los axiomas $(\to_1)$, $(\to_2)$, $(\to_3)$, $(\wedge_1)$, $(\wedge_2)$, $(\wedge_3)$, $(\vee_1)$, $(\vee_2)$, $(\vee_3)$, $(\neg_1)$, $(\neg_2)$, y $(\neg_3)$, basta con mostrar un caso, digamos $(\to_2)$, y para los demás el argumento es análogo:

Sean $\alpha, \beta \in \mathfrak{Fm}$. Por brevedad, en $\mathbf{A}$ escribiremos x^2 por $x \wedge x$. Entonces $\alpha \to (\beta \to \alpha) \in Ax(\mathcal{S})$, y por las observaciones previas se tiene que $h(\alpha \to (\beta \to \alpha)) =$
$h(\alpha) \to (h(\beta) \to h(\alpha)) = h(\alpha)^2 \to (h(\beta)^2 \to h(\alpha)^2) = \mathbf{1}$, con la última igualdad dada porque $x^2 \in \mathbf{B}$, y porque $h(\alpha)^2 \to (h(\beta)^2 \to h(\alpha)^2)$ es una instancia, en el álgebra de Boole $\mathbf{B}$, de una tautología del Cálculo Proposicional Clásico, lo que implica que su valor es $\mathbf{1}$.

Para los axiomas (τ_1), (τ_2), y (τ_3) ($FOUR$ es finito), como los átomos involucrados comparten la misma letra de $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$, basta con el argumento siguiente:

Sea α en alguno de los axiomas nombrados, y sea p la letra que los átomos de α contienen. Sea $f = (\widetilde{Dis})^{-1}[\{[p]_{\sim h}\}]$ el homomorfismo cuya distribución corresponde a la clase de p en $\underline{le}(\mathfrak{Fm})$ respecto de h. Entonces sabemos que existe una sustitución $\sigma \in S_E$ con la propiedad $\tau - le$ tal que $f = h \circ \sigma$, y que ella puede ser la identidad sobre $[p]_{\sim h}$. Entonces, como por hipótesis f es compatible con F, se tiene que $f(\alpha) \in F$, es decir,

$h(\alpha) = h(\sigma(\alpha)) \in F$. Luego, $\alpha \in h^{-1}[F]$, y por lo tanto se obtiene que $Ax(\mathcal{S}) \subseteq h^{-1}[F]$.

Luego, se concluye que $h^{-1}[F] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}}$, lo que prueba que h es compatible con F si y sólo si todo $d \in Dis(h)$ lo es.

Si $I \subseteq \{1, \ldots, 5\}$, sea

$$\begin{aligned}[I] = \{ & h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A}) : \forall\, d \in Dis(h) \\ & d \text{ pertenece al Grupo } i, \text{ con } i \in I\}\end{aligned}$$

Entonces los modelos no triviales para $PFOUR$ sobre $\mathbf{A}$ de la forma $\langle\, \mathbf{A}, H, \mathcal{C}\,\rangle$ son tales que:

(A) $H \subseteq [\{1, 4\}]$ y $\mathcal{C}$ es subsistema de clausura de $\{\{b, \mathbf{1}\}, \{b, \mathbf{1}, t, u\}, \{b, \mathbf{1}, v\}, |\mathbf{A}|\}$.

(B) $H \subseteq [\{1, 2, 4\}]$ y $\mathcal{C}$ es subsistema de clausura de $\{\{b, \mathbf{1}, v\}, |\mathbf{A}|\}$.

(C) $H \subseteq [\{1, 3, 4\}]$ y $\mathcal{C}$ es subsistema de clausura de $\{\{b, \mathbf{1}, t, u\}, |\mathbf{A}|\}$.

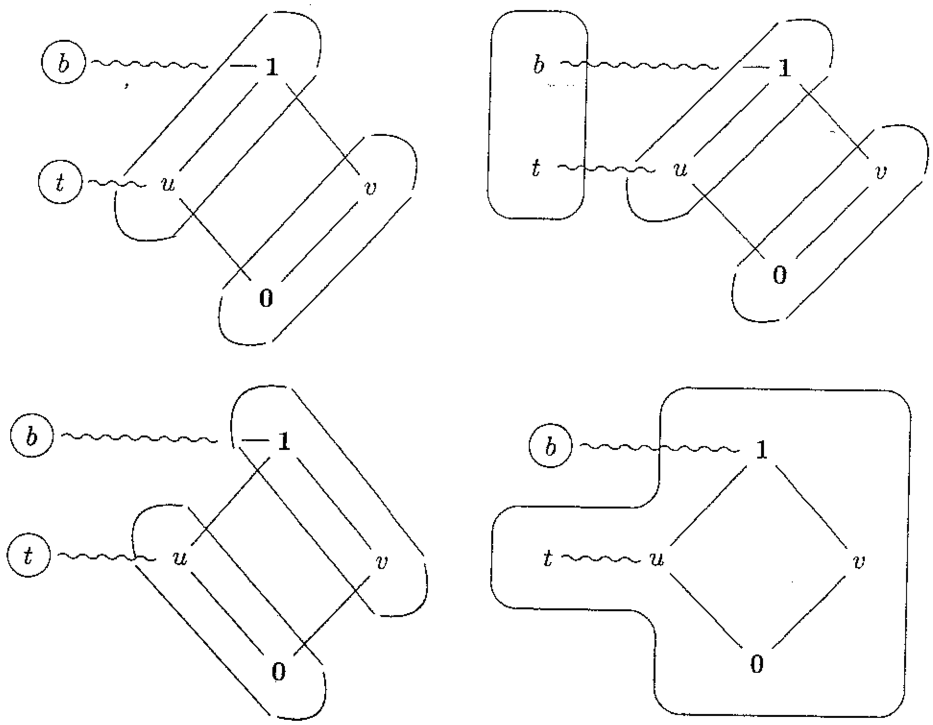
(D) $H \subseteq [\{5\}]$ y $\mathcal{C}$ es subsistema de clausura de $\{\{\mathbf{1}, t, u\}, |\mathbf{A}|\}$.

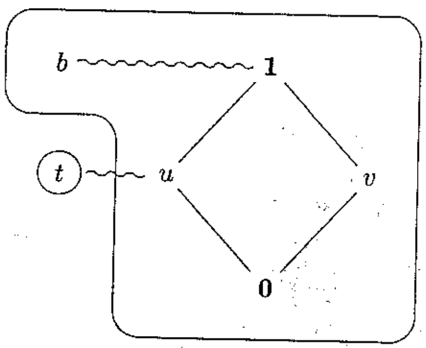
(E) $H \subseteq [\{4\}]$ y $\mathcal{C}$ es subsistema de clausura del sistema de clausura formado por:

$$\begin{array}{cccc}
|\mathbf{A}| & \{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, t, u\} & \{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, t, v\} & \{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, u, v\} \\
\{b, \mathbf{1}, t, u, v\} & \{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, t\} & \{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, u\} & \{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}, v\} \\
\{b, \mathbf{1}, t, u\} & \{b, \mathbf{1}, u, v\} & \{b, \mathbf{1}, t, v\} & \{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}\} \\
\{b, \mathbf{1}, t\} & \{b, \mathbf{1}, u\} & \{b, \mathbf{1}, v\} & \{b, \mathbf{1}\}
\end{array}$$

con la condición de que $\{b, \mathbf{1}, \mathbf{0}\} \neq \bigcap \mathcal{C}$, ya que en este caso el modelo sería trivial.

Hay 7 congruencias en $\mathbf{A}$:





$\mathbf{id}_{|\mathbf{A}|}$

$|\mathbf{A}|^2$

Finalmente, los únicos $F \subseteq |\mathbf{A}|$ cuya congruencia de Leibnitz no es la identidad son:

$$\begin{array}{ccc} \{b,\, \mathbf{1},\, u\} & \{b,\, \mathbf{1},\, v\} & \{b,\, \mathbf{1},\, t,\, u\} \\ \{b,\, \mathbf{1},\, t,\, u\} & \{b,\, \mathbf{1},\, \mathbf{0},\, u,\, v\} & \{\mathbf{1},\, t,\, u\} \\ \{\mathbf{1},\, \mathbf{0},\, u,\, v\} & \{\mathbf{1},\, \mathbf{0},\, t,\, u,\, v\} & \end{array}$$

Por lo tanto, sólo los modelos (A) y (E) pueden ser reducidos, y sólo (A) tiene modelos reducidos con algún morfismo sobreyectivo.

Además, comparando los modelos (A) con los (D), por ejemplo, se ve que la interpretación de los axiomas de la forma $(p : \bot)$ es diferente en ambos, por lo que claramente no puede hacerse una "transferencia" de axiomas y reglas de inferencia del sistema proposicional en un modelo, como ocurre en el caso estructural.

El ejemplo anterior muestra que aún para un álgebra finita con pocos elementos se tiene una gran diversidad de modelos no triviales, diferentes no sólo por los morfismos involucrados (es claro que dado un modelo se puede obtener otro modelo tomando un subconjunto cualquiera de su conjunto de morfismos asociados), sino también por los sistemas de clausura. Pero el ejemplo da una muestra de que hay formas claras de delimitar los modelos a considerar.

La primera restricción a los modelos de un sistema proposicional finito-dimensional consiste en considerar modelos reducidos, lo que es un procedimiento estándar en Lógica Algebraica Abstracta, al asignar significado al álgebra. Por ejemplo, las álgebras de Boole para el Cálculo Proposicional Clásico, álgebras de Heyting para la Lógica Intuicionista, etcétera.

Entonces se necesita la siguiente definición, considerando tal restricción a los modelos:

Definición 9. *Si L es una clase de HR^k-lógicas abstractas, $1 \leq k < \omega$, entonces L^* denota la clase de HR^k-lógicas abstractas reducidas de L.*

■

En particular, $M^*_{\mathcal{S}^k}$ denota la clase de modelos reducidos para el sistema proposicional k-dimensional $\mathcal{S}^k$.

Pero además, el ejemplo muestra que hay modelos no triviales tales que todos sus morfismos asociados tienen por recorrido una misma subálgebra del álgebra asociada, por lo que los elementos del álgebra que están fuera de tal subálgebra no intervienen en la propiedad de ser modelo. En Lógica Algebraica Abstracta, los modelos considerados tienen al conjunto de todos los homomorfismos del álgebra de fórmulas en su álgebra como conjunto de morfismos asociados, lo que permite que todos los elementos del álgebra intervengan en la propiedad de ser modelo. Por supuesto, a menos que el álgebra considerada sea de menor o igual cardinalidad que el álgebra de fórmulas, no se espera que haya *un* homomorfismo sobreyectivo, es decir, que involucre a la totalidad del álgebra. Pero tales modelos cumplen con que todo subconjunto del álgebra de cardinalidad no mayor que la cardinalidad del conjunto de átomos que genera al álgebra de fórmulas pertenece al recorrido de algún morfismo asociado (por ser el álgebra de fórmulas totalmente libre). En particular, si el tipo del álgebra de fórmulas consta de un conjunto de conectivos de menor cardinalidad que la del conjunto de átomos (habitualmente hay sólo una cantidad finita de conectivos, y se asume aquí que todos ellos son finitarios), entonces para todo subconjunto del álgebra de un modelo de cardinalidad no mayor que la cardinalidad del álgebra de fórmulas existe un morfismo que contiene a tal subconjunto en su recorrido.

Entonces se necesita la siguiente definición, considerando esta restricción sobre los modelos:

Definición 10. *Un HR-álgebra* $\mathfrak{A}$ *relativa a* $\mathfrak{Fm}$ *es* localmente cubierta *si para todo* $B \subseteq |A.\mathfrak{A}|$ *de cardinalidad no mayor que la cardinalidad de* At *existe* $h \in H.\mathfrak{A}$ *tal que* $B \subseteq h[\mathfrak{Fm}]$.

Para todo k *tal que* $1 \leq k < \omega$, *se dirá que una* HR^k*-lógica abstracta* $\mathbb{L}$ *es* localmente cubierta *si y sólo si* $\overline{\mathbb{L}}$ *lo es.*

Si L *es una clase de HR-álgebras o de* HR^k*-lógicas abstractas,* $1 \leq k < \omega$, *entonces* ${}^{LC}L$ *denota la clase de HR-álgebras (respectivamente de* HR^k*-lógicas abstractas) localmente cubiertas de* L.

■

En particular, ${}^{LC}M_{\mathcal{S}^k}$ denota la clase de modelos localmente cubiertos para $\mathcal{S}^k$, $1 \leq k < \omega$.

Además, se tiene que para toda $\mathfrak{A}$ HR-álgebra localmente cubierta relativa a $\mathfrak{Fm}$, y $1 \leq k < \omega$, si $\mathbf{F} \subseteq |A.\mathfrak{A}|^k$ es de cardinalidad no mayor que la cardinalidad de At entonces considerando $F := \{a \in |A.\mathfrak{A}| \ : \exists\, \mathbf{b} \in \mathbf{F} \quad \exists i \leq k \quad a = b_i\}$, es claro que F es de cardinalidad no mayor que la cardinalidad de At (se asume infinito), por lo que existe $h \in H.\mathfrak{A}$ tal que $F \subseteq h[\mathfrak{Fm}]$, lo que implica que $\mathbf{F} \subseteq h[|\mathfrak{Fm}^k|]$, es decir, el concepto de localmente cubierto se extiende a k-subconjuntos de $|A.\mathfrak{A}|$.

Por otra parte, es habitual en Lógica Algebraica Abstracta, aún bajo enfoque matricial, el considerar para un álgebra particular el sistema de clausura de todos los subconjuntos tales que su preimagen por cada homomorfismo desde el álgebra de fórmulas en el álgebra es una teoría, llamado el sistema de $\mathcal{S}$-filtros (para una lógica proposicional $\mathcal{S}$). En particular, en el enfoque basado en lógicas abstractas desarrollado por Font y Jansana en [14], los modelos importantes son aquellos cuyo reducto tiene por sistema de clausura al sistema de todos los $\mathcal{S}$-filtros, llamados *modelos llenos*, así es que los modelos llenos reducidos son exactamente aquellos modelos reducidos cuyo sistema de clausura es el sistema de todos los $\mathcal{S}$-filtros. Además, en términos de este trabajo, el conjunto de morfismos asociados es maximal, en el sentido de que no hay más morfismos que por preimagen lleven a todos los $\mathcal{S}$-filtros en teorías; de hecho, los morfismos asociados son todos los homomorfismos desde el álgebra de fórmulas en el álgebra del modelo.

Respecto de los sistemas proposicionales k-dimensionales, si $\mathcal{S}^k$ es uno de ellos, con $1 \leq k < \omega$, es claro que en tanto modelo de sí mismo cumple con que todo homomorfismo de $\mathfrak{Fm}$ en su álgebra asociada ($\mathfrak{Fm}$) compatible con su sistema de clausura asociado ($\mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$) pertenece a su conjunto de morfismos asociado ($S_E(\mathcal{S}^k)$); por otra parte, todo subconjunto $\mathbf{\Gamma}$ de $\mathfrak{Fm}^k$ tal que el conjunto de morfismos asociado es compatible con él pertenece a su sistema de clausura, ya que en particular la identidad pertenece al conjunto de morfismos asociado. Entonces $\mathcal{S}^k$, como modelo de sí mismo, no puede extenderse a otros modelos sobre la misma álgebra asociada por extensión de su conjunto de morfismos asociado o por extensión de su sistema de clausura asociado. Ello es análogo al comportamiento de los modelos llenos reducidos comentado en el párrafo anterior. Más aún, el ejemplo precedente muestra que hay modelos no triviales que representan a los demás en el sentido de que los representados se obtienen restringiendo el conjunto de morfismos o el sistema de clausura, es decir, los que representan a los demás son los (A), (B), (C), (D), y (E), pero cuyos morfismos y sistemas de clausura son los ahí mostrados, no subconjuntos o subsistemas de clausura. Aquellos que representan a otros cumplen también que no pueden extenderse sobre la misma álgebra por extensión del conjunto de morfismos o por extensión del sistema de clausura.

Entonces es necesaria una nueva definición para esta restricción sobre los modelos:

Definición 11. *Si $\mathbb{L} \in M_{\mathcal{S}^k}$, se dirá que $\mathbb{L}$ es un modelo* maximal-algebraico *si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

- *Para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A.\mathbb{L})$, si h es compatible con $\mathcal{C}.\mathbb{L}$, entonces $h \in H.\mathbb{L}$.*

- *Para todo $\mathbf{F} \subseteq |A.\mathbb{L}|^k$, si $H.\mathbb{L}$ es compatible con $\mathbf{F}$, entonces $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$.*

Si $L \subseteq M_{\mathcal{S}^k}$, entonces ${}_mL$ denota la clase de los modelos para $\mathcal{S}^k$ de L que son maximal-algebraicos.

■

En particular, ${}_mM_{\mathcal{S}^k}$ denota la clase de todos los modelos para $\mathcal{S}^k$ maximal-algebraicos.

De acuerdo a lo anterior, es claro que los modelos para un sistema proposicional k-dimensional $\mathcal{S}^k$ de importancia aquí serán aquellos localmente cubiertos y maximal-algebraicos, que serán llamados *modelos principales* para $\mathcal{S}^k$, es decir, la clase ${}^{\mathrm{LC}}_{m}M_{\mathcal{S}^k}$. Para abreviar, tal clase se denotará por $PM_{\mathcal{S}^k}$, y la clase de los modelo principales reducidos se denotará entonces por $PM^*_{\mathcal{S}^k}$.

Como se verá luego, la clase de los modelos principales reducidos para un sistema proposicional finito-dimensional cumplen aquí un rol análogo al de la clase de los modelos llenos reducidos en el trabajo de Font y Jansana [14]. Además, en un capítulo posterior se definirán operaciones que generan modelos a partir de otros modelos, y al aplicarlas sobre modelos principales preservan varias propiedades de interés.

Capítulo 4

HR-algebrizabilidad.

4.1. Equivalencia de sistemas proposicionales.

Sean $\mathcal{S}^k$ y $\mathcal{R}^l$ dos sistemas proposicionales finito-dimensionales de dimensiones $1 \leq k < \omega$ y $1 \leq l < \omega$ respectivamente, ambos sobre el mismo lenguaje $\mathfrak{Fm}$. Sea $x_0, \ldots, x_{k-1}$ una secuencia de símbolos que se asumen no pertenecientes a $\mathfrak{Fm}$ y sea $\mathbf{T}(x_0, \ldots, x_{k-1})$ el álgebra de términos (totalmente libre) del tipo de $\mathfrak{Fm}$ generada por ellos.

Una (k,l)-traducción consta de dos componentes:

1. Un subconjunto no vacío ν de $|T(x_0, \ldots, x_{k-1})|^l$ tal que para cada $\delta \in \nu$ y cada $j < l$ todos los símbolos $x_0, \ldots, x_{k-1}$ aparecen en δ_i.

2. El conjunto de todos los homomorfismos de $\mathbf{T}(x_0, \ldots, x_{k-1})$ en $\mathfrak{Fm}$.

A cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{Fm}^k$, la (k,l)-traducción le asigna el l-conjunto $\nu(\boldsymbol{\alpha}) := f[\boldsymbol{\nu}]$ donde f está determinado por $f(x_i) = \alpha_i$ para todo $i < k$.

Si $\boldsymbol{\Gamma} \subseteq \mathfrak{Fm}^k$, entonces $\boldsymbol{\nu}[\boldsymbol{\Gamma}] := \bigcup_{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\Gamma}} \nu(\boldsymbol{\alpha})$.

Nótese que la definición implica que si $\boldsymbol{\nu} = \{\langle \delta_0^j, \ldots, \delta_{k-1}^j \rangle \ : j \in J\}$ para $J \neq \emptyset$, entonces dado $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1} \rangle \in \mathfrak{Fm}^k$, se tiene que:

$\nu(\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1} \rangle) = \{\langle f(\delta_0^j), \ldots, f(\delta_{l-1}^j) \rangle \ : j \in J\}$

y para $\delta_d^j(x_0, \ldots, x_{k-1})$ con $j \in J$ y $d < l$ (recordando la condición sobre ν), se tiene $f(\delta_d^j(x_0, \ldots, x_{k-1})) = \delta_d^j(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$, donde esta última fórmula de $\mathfrak{Fm}$ está construida a partir de las fórmulas $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ mediante conectivos exactamente del mismo modo en que δ_d^j lo está a partir de los símbolos $x_0, \ldots, x_{k-1}$. El uso del álgebra de términos generada por tales símbolos permite manipular de manera estrictamente algebraica la noción de reemplazo de fórmulas por átomos en una fórmula dada (además de considerar las dimensiones k y l) sin utilizar sustituciones de $\mathfrak{Fm}$, que podrían no ser estructurales. En general, salvo que se indique lo contrario, para referirse a una (k,l)-traducción se usará la notación: "... una (k,l)-traducción $\boldsymbol{\nu}$...", sin necesidad de explicitar $\mathbf{T}(x_0, \ldots, x_{k-1})$, ni el hecho de que $\boldsymbol{\nu} \subseteq |\mathbf{T}(x_0, \ldots, x_{k-1})|^l$, ni los homomorfismos usados.

Por otra parte, tal definición permite realizar (k,l)-traducciones en cualquier álgebra, y más aún, establecer una suerte de conmutatividad con los homomorfismos de $\mathfrak{Fm}$ en el álgebra:

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ álgebras del tipo de $\mathfrak{Fm}$, ν una (k,l)-traducción, $h \in Hom(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Entonces se tiene:

- Si $\mathbf{a} \in |\mathbf{A}|^k$, entonces $\nu(\mathbf{a}) := g[\nu]$, donde $g \in Hom(\mathbf{T}(x_0,\ldots,x_{k-1}), \mathbf{A})$ está determinado por $g(x_i) = a_i$ para todo $i < k$.
- Si $\mathbf{a} \in |\mathbf{A}|^k$, entonces $h[\nu(\mathbf{a})] = \nu(h[\mathbf{a}])$, ya que si $f \in Hom(\mathbf{T}(x_0,\ldots,x_{k-1}), \mathbf{A})$ y $g \in Hom(\mathbf{T}(x_0,\ldots,x_{k-1}), \mathbf{B})$ son respectivamente determinados por $f(x_i) = a_i$ y $g(x_i) = h(a_i)$ para todo $i < k$, entonces es claro que $g = h \circ f$ (coinciden en los generadores de $\mathbf{T}(x_0,\ldots,x_{k-1})$). Luego, $h[\nu(\mathbf{a})] = h[f[\nu]] = g[\nu] = \nu(h[\mathbf{a}])$.
- Si $\mathbf{F} \subseteq |\mathbf{A}|^k$, entonces también se define $\nu[\mathbf{F}] := \bigcup_{\mathbf{a}\in\mathbf{F}} \nu(\mathbf{a})$.
- Es claro entonces que $\mathbf{F} \in |\mathbf{A}|^k$ implica $h[\nu[\mathbf{F}]] = \nu[h[\mathbf{F}]]$.
- Además se tiene que si $\mathbf{G} \in |\mathbf{B}|^k$, entonces $\nu[h^{-1}[\mathbf{G}]] \subseteq h^{-1}[\nu[\mathbf{G}]]$, ya que $h[\nu[h^{-1}[\mathbf{G}]]] = \nu[h[h^{-1}[\mathbf{G}]]] \subseteq \nu[\mathbf{G}]$.

Ejemplo 7.
Sea $\mathfrak{Fm}$ un lenguaje apropiado para *PFOUR* . Entonces [1]

$$\nu = \{x_0 \leftrightarrow x_1,\ \neg x_0 \leftrightarrow \neg x_1\}$$

es una $(2,1)$-traducción. Consideremos una 2-fórmula particular, digamos $\langle \alpha, \beta \rangle$ con $\alpha = (p:f) \rightarrow (\neg((q:\bot) \wedge (r:t)))$ y $\beta = (p:f) \vee (r:\top)$. Entonces se tiene que con f tal que $f(x_0) = \alpha$ y $f(x_1) = \beta$ se obtiene el conjunto de 1-fórmulas:

$$\begin{aligned}
&\nu(\langle (p:f) \rightarrow (\neg((q:\bot) \wedge (r:t))), (p:f) \vee (r:\top) \rangle) = f[\nu] = \\
&\quad = \{f(x_0 \leftrightarrow x_1),\ f(\neg x_0 \leftrightarrow \neg x_1)\} \\
&\quad = \{f(x_0) \leftrightarrow f(x_1),\ \neg f(x_0) \leftrightarrow \neg f(x_1)\} \\
&\quad = \{(p:f) \rightarrow (\neg((q:\bot) \wedge (r:t))) \leftrightarrow (p:f) \vee (r:\top), \\
&\qquad \neg((p:f) \rightarrow (\neg((q:\bot) \wedge (r:t)))) \leftrightarrow \neg((p:f) \vee (r:\top))\}
\end{aligned}$$

Nota 4. La idea de definir traducciones usando un álgebra de términos generada por símbolos que no necesariamente pertenecen a $\mathfrak{Fm}$ pretende evitar el uso de sustituciones no estructurales. Por ejemplo en *PFOUR* no hay sustituciones estructurales que lleven átomos en fórmulas arbitrarias, por lo que obligatoriamente una traducción definida dentro de $\mathfrak{Fm}$ necesita sustituciones no estructurales para abarcar a todas las fórmulas. Con el uso del álgebra de términos externa, y homomorfismos desde ella, se evitan confusiones y se preserva la idea de *término* asociada habitualmente a traducciones.

Por supuesto, si el sistema proposicional es estructural, no hay dificultad en utilizar átomos de $\mathfrak{Fm}$ para definir traducciones.

[1] Recordando que $x_0 \leftrightarrow x_1$ abrevia a $(x_0 \rightarrow x_1) \wedge (x_1 \rightarrow x_0)$.

Claramente el concepto de (k,l)-traducción es meramente algebraico, y sólo establece una relación sintáctica entre sistemas proposicionales finito-dimensionales. La siguiente definición enlaza además los respectivos aparatos deductivos:

Definición 12. *Sean $\mathcal{S}^k$ y $\mathcal{R}^l$ sistemas proposicionales finito-dimensionales con dimensiones $1 \leq k < \omega$ y $1 \leq l < \omega$ respectivamente.*

1. *Una (k,l)-traducción $\boldsymbol{\nu}$ es una* interpretación deductiva *de $\mathcal{S}^k$ en $\mathcal{R}^l$ si para todo $\boldsymbol{\Gamma} \cup \{\boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \mathfrak{Fm}^k$ se tiene:*

$$\boldsymbol{\alpha} \in Th_{\mathcal{S}^k}(\boldsymbol{\Gamma}) \text{ si y sólo si } \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\alpha}) \subseteq Th_{\mathcal{R}^l}(\boldsymbol{\nu}[\boldsymbol{\Gamma}]).$$

Usaremos simplemente interpretación *en vez de* interpretación deductiva.

2. *$\mathcal{S}^k$ y $\mathcal{R}^l$ son* deductivamente equivalentes *(equivalentes para abreviar) si existen una interpretación $\boldsymbol{\nu}$ de $\mathcal{S}^k$ en $\mathcal{R}^l$ y una interpretación $\boldsymbol{\rho}$ de $\mathcal{R}^l$ en $\mathcal{S}^k$ tales que*

$$\textit{Para toda } \boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{Fm}^k: \quad Th_{\mathcal{S}^k}(\boldsymbol{\alpha}) = Th_{\mathcal{S}^k}(\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\alpha})]),$$

$$\textit{para toda } \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{Fm}^l: \quad Th_{\mathcal{R}^l}(\boldsymbol{\beta}) = Th_{\mathcal{R}^l}(\boldsymbol{\nu}[\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\beta})]).$$

En ese caso $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\rho}$ son interpretaciones mutuamente inversas. Diremos simplemente que $\mathcal{S}^k$ y $\mathcal{R}^l$ son equivalentes *en vez de decir que son* deductivamente equivalentes.

■

Simplificando notación, al aplicar consecutivamente una (k,l)-traducción $\boldsymbol{\nu}$ y una (l,k)-traducción $\boldsymbol{\rho}$ se omitirán los paréntesis cuadrados, es decir, si $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{Fm}^k$, entonces $\boldsymbol{\rho\nu}(\boldsymbol{\alpha})$ abrevia a $\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\alpha})]$.

Nótese que $\mathcal{S}^k$ y $\mathcal{R}^l$ son equivalentes si existen dos interpretaciones $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\rho}$ que satisfacen las cuatro condiciones siguientes para todos $\boldsymbol{\Gamma} \cup \{\boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \mathfrak{Fm}^k$ y $\boldsymbol{\Delta} \cup \{\boldsymbol{\beta}\} \subseteq \mathfrak{Fm}^l$:

$$\boldsymbol{\alpha} \in Th_{\mathcal{S}^k}(\boldsymbol{\Gamma}) \text{ si y sólo si } \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\alpha}) \subseteq Th_{\mathcal{R}^l}(\boldsymbol{\nu}[\boldsymbol{\Gamma}]) \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{\beta} \in Th_{\mathcal{R}^l}(\boldsymbol{\Delta}) \text{ si y sólo si } \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\beta}) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\boldsymbol{\rho}[\boldsymbol{\Delta}]) \tag{4.2}$$

$$Th_{\mathcal{S}^k}(\boldsymbol{\alpha}) = Th_{\mathcal{S}^k}(\boldsymbol{\rho\nu}(\boldsymbol{\alpha})) \tag{4.3}$$

$$Th_{\mathcal{R}^l}(\boldsymbol{\beta}) = Th_{\mathcal{R}^l}(\boldsymbol{\nu\rho}(\boldsymbol{\beta})) \tag{4.4}$$

La siguiente proposición permite establecer que para que tales sistemas sean equivalentes es suficiente con las condiciones 4.1 y 4.4, y por simetría también basta con las condiciones 4.2 y 4.3:

Proposición 4.1.1. *Sean $\mathcal{S}^k$ y $\mathcal{R}^l$ sistemas proposicionales finito-dimensionales con dimensiones $1 \leq k < \omega$ y $1 \leq l < \omega$ respectivamente. Entonces $\mathcal{S}^k$ y $\mathcal{R}^l$ son equivalentes si y sólo si existe una interpretación ν de $\mathcal{S}^k$ en $\mathcal{R}^l$ y existe una (l,k)-traducción ρ tales que para todo $\beta \in \mathfrak{Fm}^l$ se cumple*

$$Th_{\mathcal{R}^l}(\beta) = Th_{\mathcal{R}^l}(\nu\rho(\beta)).$$

Demostración. Para probar que ρ es una interpretación de $\mathcal{R}^l$ en $\mathcal{S}^k$ basta con lo siguiente:

> Sea $\Delta \cup \{\beta\} \subseteq \mathfrak{Fm}^l$. Entonces por hipótesis se tiene que $Th_{\mathcal{R}^l}(\beta) = Th_{\mathcal{R}^l}(\nu\rho(\beta))$ y por lo tanto también se tiene que $Th_{\mathcal{R}^l}(\Delta) = Th_{\mathcal{R}^l}(\nu\rho(\Delta))$.
>
> Luego se tiene $\beta \in Th_{\mathcal{R}^l}(\Delta)$ si y sólo si $\nu\rho(\beta) \subseteq Th_{\mathcal{R}^l}(\nu\rho(\Delta))$ si y sólo si $\rho(\beta) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\rho(\Delta))$, con la última equivalencia dada porque ν es interpretación por hipótesis. Eso prueba que ρ es interpretación.

Para probar 4.3 basta con observar que para toda $\alpha \in \mathfrak{Fm}^k$ se tiene que $Th_{\mathcal{S}^k}(\alpha) = Th_{\mathcal{S}^k}(\rho\nu(\alpha))$ si y sólo si $Th_{\mathcal{R}^l}(\nu(\alpha)) = Th_{\mathcal{R}^l}(\nu\rho\nu(\alpha))$, y esta igualdad es válida por hipótesis.

□

Bajo las condiciones de la proposición anterior se dirá que ρ es una *inversa por derecha* de ν.

Ejemplo 8.
Consideremos la variedad de las álgebras de Boole, BA, con $\mathbf{1}$ el símbolo que representa en cada álgebra de Boole al mayor elemento del álgebra, denotado a su vez por $\mathbf{1_A}$, si $\mathbf{A} \in BA$. Sea $\mathrm{EQ(BA)}^2$ el sistema proposicional de congruencias definido sobre el lenguaje $\mathfrak{Fm}$ de tipo $\{\rightarrow, \neg, \wedge, \vee\}$, por los axiomas $\{\langle \alpha, \beta \rangle \ : \ \alpha \approx \beta$ es un axioma para $BA\}$, además de los considerados para el sistema $\mathcal{C}^{co}_{\mathfrak{Fm}}$. De ello es fácil concluir que para todo $\{\langle \alpha, \beta \rangle\} \cup \{\langle \phi_i, \psi_i \rangle \ : \ i \in I\}$ se cumple $\langle \alpha, \beta \rangle \in Th_{\mathrm{EQ(BA)}^2}(\{\langle \phi_i, \psi_i \rangle \ : \ i \in I\})$ si y sólo si $\alpha \approx \beta$ es una identidad de BA cuando $\{\phi_i \approx \psi_i \ : \ i \in I\}$ es un conjunto de identidades de BA.

Es sabido también que en BA se cumple que para todos α y β en $\mathfrak{Fm}$ $\alpha \rightarrow \alpha \approx \mathbf{1}$ es una identidad de BA, y además $\alpha \approx \beta$ es una identidad de BA si y sólo si $\alpha \leftrightarrow \beta \approx \mathbf{1}$ lo es, donde como es habitual $\alpha \leftrightarrow \beta$ abrevia a $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

Si CPC es el sistema proposicional (1-dimensional y estructural) del Cálculo Proposicional Clásico, ejemplo paradigmático de algebrización, es sabido que $\alpha \in Th_{CPC}(\Gamma)$ si y sólo si $\alpha \approx \mathbf{1}$ es una identidad de BA cuando $\{\gamma \approx \mathbf{1} \ : \ \gamma \in \Gamma\}$ es un conjunto de identidades de BA.

Sean entonces ν la $(1,2)$-traducción $\{\langle x_0, x_0 \rightarrow x_0 \rangle\}$, y ρ la $(2,1)$-traducción $\{x_0 \leftrightarrow x_1\}$.Pero si $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathfrak{Fm}$, entonces por lo comentado antes $\nu(\alpha) \subseteq$

$Th_{\mathrm{EQ(BA)}^2}(\nu[\Gamma])$ si y sólo si $\alpha \approx (\alpha \to \alpha)$ es una identidad de BA cuando $\{\gamma \approx (\gamma \to \gamma) \ : \gamma \in \Gamma\}$ es un conjunto de identidades de BA, lo que a su vez equivale a que $\alpha \approx \mathbf{1}$ es una identidad de BA cuando $\{\gamma \approx \mathbf{1} \ : \gamma \in \Gamma\}$ es un conjunto de identidades de BA, lo que finalmente equivale a que $\alpha \in Th_{CPC}(\Gamma)$. Luego, ν es una interpretación de CPC en $\mathrm{EQ(BA)}^2$.

Si ahora $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathfrak{Fm}^2$, entonces es claro que $\alpha \approx \beta$ es un identidad de BA si y sólo si $(\alpha \leftrightarrow \beta) \approx \mathbf{1}$ es una identidad de BA si y sólo si $(\alpha \leftrightarrow \beta) \approx ((\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta))$ es una identidad de BA. Luego, por lo comentado antes se obtiene que $Th_{\mathrm{EQ(BA)}^2}(\langle \alpha, \beta \rangle) = Th_{\mathrm{EQ(BA)}^2}(\nu\rho(\langle \alpha, \beta \rangle))$. De ello se concluye que ρ es una inversa por derecha de ν, lo que finalmente implica que CPC y $\mathrm{EQ(BA)}^2$ son equivalentes.

Dados $\mathcal{S}^k$ y $\mathcal{R}^l$, para denotar que son equivalentes usaremos la notación:

$$\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftharpoons} \mathcal{R}^l$$

Consideremos ahora algunas propiedades de la equivalencia entre sistemas proposicionales finito-dimensionales:

Proposición 4.1.2. *Si* $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftharpoons} \mathcal{R}^l$, *entonces* $S_E(\mathcal{S}^k) = S_E(\mathcal{R}^l)$.

Demostración. Sean $\sigma \in S_E\, \mathcal{S}^k$ y $\mathbf{\Gamma} \cup \{\boldsymbol{\alpha}\} \subseteq \mathfrak{Fm}^l$.

Si $\boldsymbol{\alpha} \in Th_{\mathcal{R}^l}(\mathbf{\Gamma})$, por ser $\boldsymbol{\rho}$ una interpretación, se obtiene que $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha}) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\boldsymbol{\rho}[\mathbf{\Gamma}])$, y por lo tanto $\sigma(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\alpha})) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\sigma[\boldsymbol{\rho}[\mathbf{\Gamma}]])$. Pero como $\boldsymbol{\rho}$ conmuta con homomorfismos, en particular se obtiene que $\boldsymbol{\rho}(\sigma(\boldsymbol{\alpha})) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\boldsymbol{\rho}[\sigma[\mathbf{\Gamma}]])$, y nuevamente por ser $\boldsymbol{\rho}$ una interpretación, se obtiene que $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in Th_{\mathcal{R}^l}(\sigma[\mathbf{\Gamma}])$.

Luego, $S_E(\mathcal{S}^k) \subseteq S_E(\mathcal{R}^l)$, y por simetría se obtiene que $S_E(\mathcal{S}^k) = S_E(\mathcal{R}^l)$.

□

Para la siguiente proposición se utiliza la notación:

Si $\mathbf{\Gamma} \cup \mathbf{\Delta} \subseteq \mathfrak{Fm}^k$, entonces $\langle \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Delta} \rangle := \{\langle \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\delta} \rangle \ : \boldsymbol{\delta} \in \mathbf{\Delta}\}$.

Proposición 4.1.3. *Si* $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftharpoons} \mathcal{R}^l$ *y* $\mathcal{S}^k$ *es axiomatizado por* $\langle\, Ax(\mathcal{S}^k),\ Inf(\mathcal{S}^k) \rangle$, *entonces* $\langle \boldsymbol{\nu}[\, Ax(\mathcal{S}^k)], \boldsymbol{\nu}[\, Inf(\mathcal{S}^k)] \cup \mathbf{U} \rangle$ *es una axiomatización de* $\mathcal{R}^l$, *donde*

$$\boldsymbol{\nu}[\, Inf(\mathcal{S}^k)] = \{\{\langle \boldsymbol{\nu}[\mathbf{\Gamma}], \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\alpha}) \rangle\} \ : \{\langle \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\alpha} \rangle\} \in Inf(\mathcal{S}^k)\} \text{ y}$$

$$\mathbf{U} = \Big\{\{\langle \boldsymbol{\nu\rho}(\boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\beta} \rangle \ : \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{Fm}^l\} \ , \{\langle \{\boldsymbol{\beta}\}, \boldsymbol{\nu\rho}(\boldsymbol{\beta}) \rangle \ : \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{Fm}^l\}\Big\}.$$

Demostración. Claramente cada $\boldsymbol{\alpha} \in Ax(\mathcal{S}^k)$ cumple con $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\alpha}) \in Th_{\mathcal{R}^l}(\emptyset)$, y si $\langle \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \in \bigcup Inf(\mathcal{S}^k)$, entonces $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\alpha}) \in Th_{\mathcal{R}^l}(\boldsymbol{\nu}[\mathbf{\Gamma}])$. Sólo falta probar que si $\boldsymbol{\beta} \in Th_{\mathcal{R}^l}(\mathbf{\Delta})$, entonces existe una demostración de $\boldsymbol{\beta}$ desde $\mathbf{\Delta}$ usando $\langle \boldsymbol{\nu}[\, Ax(\mathcal{S}^k)], \boldsymbol{\nu}[\, Inf(\mathcal{S}^k)] \rangle$.

Pero de $\beta \in Th_{\mathcal{R}^l}(\boldsymbol{\Delta})$ se obtiene por interpretación que $\rho(\beta) \in Th_{\mathcal{S}^k}(\rho[\boldsymbol{\Delta}])$. Sean $\alpha \in \rho(\beta)$ y $\langle \gamma_i : i \leq \eta \rangle$ una demostración de α desde $\rho[\boldsymbol{\Delta}]$ mediante $\langle\, Ax\,(\,\mathcal{S}^k),\ Inf\,(\,\mathcal{S}^k)\,\rangle$. Es claro entonces que de $\langle \nu(\gamma_i) : i \leq \eta \rangle$ se obtiene una demostración de $\nu(\alpha)$ desde $\nu\rho[\boldsymbol{\Delta}]$, pero entonces se tiene que toda l-fórmula de $\nu\rho(\beta)$ tiene una demostración desde $\nu\rho[\boldsymbol{\Delta}]$. Entonces usando las reglas de inferencia de $\mathbf{U}$ se pueden demostrar todas las l-fórmulas de $\nu\rho[\boldsymbol{\Delta}]$ desde $\boldsymbol{\Delta}$, y también se puede demostrar β desde $\nu\rho(\beta)$. Luego, β tiene una demostración desde $\nu\rho[\boldsymbol{\Delta}]$ usando $\langle \nu[\,Ax\,(\,\mathcal{S}^k)],\ \nu[\,Inf\,(\,\mathcal{S}^k)] \cup \mathbf{U} \rangle$.

□

Respecto de modelos para sistemas proposicionales finito-dimensionales equivalentes, se tiene una estrecha relación, como se ve a continuación:

Definición 13. *Si ρ es una (l,k)-traducción y $\mathbb{L}$ es una HR^k-lógica abstracta, sean:*

- $\widehat{\rho}(\mathbf{F}) := \{\mathbf{a} \in |A.\mathbb{L}|^l \ : \rho(\mathbf{a}) \subseteq \mathbf{F}\}$ *para cada* $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$,
- $\widehat{\rho}[\mathcal{C}.\mathbb{L}] := \{\widehat{\rho}(\mathbf{F}) \ : \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}\}$, *y*
- $\rho^{op}[\mathbb{L}] := \langle A.\mathbb{L},\ H.\mathbb{L},\ \widehat{\rho}[\mathcal{C}.\mathbb{L}]\,\rangle$.

■

Nótese que bajo las hipótesis de la definición $\rho^{op}[\mathbb{L}]$ es una HR^l-lógica abstracta y $\overline{\mathbb{L}} = \overline{\rho^{op}[\mathbb{L}]}$.

Lema 4.1.4. *Sean $\mathcal{S}^k$ y $\mathcal{R}^l$ sistemas proposicionales de dimensiones $1 \leq k < \omega$ y $1 \leq l < \omega$ respectivamente. Entonces:*

1. *Si ρ es una interpretación de $\mathcal{R}^l$ en $\mathcal{S}^k$ y $\mathbb{L} \in M_{\mathcal{S}^k}$:*

   a) $\rho^{op}[\mathbb{L}] \in M_{\mathcal{R}^l}$,

   b) *Para todos $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ y $h \in H.\mathbb{L}$ se cumple*

   $$\widehat{\rho}(h^{-1}[\mathbf{F}]) = h^{-1}[\widehat{\rho}(\mathbf{F})].$$

   c) *Para todos I y $\{\mathbf{F}_i \in \mathcal{C}.\mathbb{L} \ : \ i \in I\}$ se cumple*

   $$\widehat{\rho}(\bigcap_{i \in I} \mathbf{F}_i) = \bigcap_{i \in I} \widehat{\rho}(\mathbf{F}_i).$$

   d) *$\mathbb{L}$ es localmente cubierta si y sólo si $\rho^{op}[\mathbb{L}]$ lo es.*

2. *Si $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftharpoons} \mathcal{R}^l$, entonces*

   a) *Para todo $\mathbb{L} \in {}^{LC}M_{\mathcal{S}^k}$ se cumplen $\forall \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L} \quad \mathbf{F} = \widehat{\nu}(\widehat{\rho}(\mathbf{F}))$ y $\nu^{op}[\rho^{op}[\mathbb{L}]] = \mathbb{L}$.*

b) *Para todo* $\mathbb{M} \in {}^{LC}M_{\mathcal{R}^l}$ *se cumplen* $\forall \mathbf{G} \in \mathcal{C}.\mathbb{M} \quad \mathbf{G} = \widehat{\rho}(\widehat{\nu}(\mathbf{G}))$ *y* $\rho^{op}[\nu^{op}[\mathbb{M}]] = \mathbb{M}$.

3. *Si* $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftarrows}, \mathcal{R}^l$, *entonces:*

$$\rho^{op}[\mathcal{S}^k] = \mathcal{R}^l, \ y$$

$$\nu^{op}[\mathcal{R}^l] = \mathcal{S}^k.$$

4. *Si* $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftarrows} \mathcal{R}^l$, *entonces:*

a) *Para todo* $\mathbb{L} \in {}^{LC}M_{\mathcal{S}^k}$ *se cumple*

$$\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k} \text{ si y sólo si } \rho^{op}[\mathbb{L}] \in PM_{\mathcal{R}^l}$$

b) *Para todo* $PM_{\mathcal{R}^l}$ *se cumple*

$$\mathbb{M} \in PM_{\mathcal{R}^l} \text{ si y sólo si } \nu^{op}[\mathbb{M}] \in PM_{\mathcal{S}^k}$$

5. *Si* ρ *es una interpretación de* $\mathcal{S}^k$ *en* $\mathcal{R}^l$, *entonces:*
Para todo $\mathbb{L} \in M_{\mathcal{S}^k}$, *todo* $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$, *y toda* $\theta \in \mathrm{Con}\, A.\mathbb{L}$ *se cumple que*

$$\theta \leq \Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) \text{ implica } \theta \leq \Omega_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(\widehat{\rho}(\mathbf{F}))$$

6. *Si* $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftarrows} \mathcal{R}^l$, *entonces*

a) *Para todo* $\mathbb{L} \in {}^{LC}M_{\mathcal{S}^k}$ *y todo* $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ *se cumple* $\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) = \Omega_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(\widehat{\rho}(\mathbf{F}))$

b) *Para todo* $\mathbb{M} \in {}^{LC}M_{\mathcal{R}^l}$ *y todo* $\mathbf{G} \in \mathcal{C}.\mathbb{M}$ *se cumple* $\Omega_{\mathbb{M}}(\mathbf{G}) = \Omega_{\nu^{op}[\mathbb{M}]}(\widehat{\nu}(\mathbf{G}))$

7. *Si* $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftarrows} \mathcal{R}^l$, *entonces*

a) *Para todo* $\mathbb{L} \in {}^{LC}M_{\mathcal{S}^k}$ *se tiene* $\widetilde{\Omega}(\mathbb{L}) = \widetilde{\Omega}(\rho^{op}[\mathbb{L}])$

b) *Para todo* $\mathbb{M} \in {}^{LC}M_{\mathcal{R}^l}$ *se tiene* $\widetilde{\Omega}(\mathbb{M}) = \widetilde{\Omega}(\nu^{op}[\mathbb{M}])$

Demostración. 1. *a*) Sean $\mathbf{G} \in \mathcal{C}.\rho^{op}[\mathbb{L}]$ y $h \in H.\rho^{op}[\mathbb{L}] = H.\mathbb{L}$. Entonces existe $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ tal que $\mathbf{G} = \widehat{\rho}(\mathbf{F})$. Sea $\beta \in Th_{\mathcal{R}^l}(h^{-1}[\widehat{\rho}(\mathbf{F})])$.
Entonces por interpretación se tiene que $\rho(\beta) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\rho[h^{-1}[\widehat{\rho}(\mathbf{F})]])$, pero $\rho[h^{-1}[\widehat{\rho}(\mathbf{F})]] \subseteq h^{-1}[\rho[\widehat{\rho}(\mathbf{F})]] \subseteq h^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$.
Luego, $\rho(\beta) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(h^{-1}[\mathbf{F}]) = h^{-1}[\mathbf{F}]$, lo que implica $\rho[h(\beta)] = h[\rho(\beta)] \subseteq \mathbf{F}$. Entonces se tiene que $h(\beta) \in \widehat{\rho}(\mathbf{F})$, y por lo tanto $\beta \in h^{-1}[\widehat{\rho}(\mathbf{F})]$.
Luego, $h^{-1}[\widehat{\rho}(\mathbf{F})] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{R}^l}$, y se obtiene entonces que $\rho^{op}[\mathbb{L}] \in M_{\mathcal{R}^l}$.

b) $\beta \in \widehat{\rho}(h^{-1}[\mathbf{F}])$ ssi $\rho(\beta) \subseteq h^{-1}[\mathbf{F}]$ ssi $\rho(h(\beta)) = h[\rho(\beta)] \subseteq \mathbf{F}$ ssi $h(\beta) \in \widehat{\rho}(\mathbf{F})$ ssi $\beta \in h^{-1}[\widehat{\rho}(\mathbf{F})]$.

c) Es claro que $\rho^{op}\big[|A.\mathbb{L}|^k\big] = |A.\mathbb{L}|^l$. Sean $I \neq \emptyset$ y $\{\mathbf{F}_i \ : \ i \in I\}$.
Entonces:

$$\begin{aligned} \beta \in \widehat{\rho}\Big(\bigcap_{i \in I} \mathbf{F}_i\Big) \text{ ssi } \rho(\beta) \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathbf{F}_i & \\ \text{si y sólo si } \forall\ i \in I \quad & \rho(\beta) \subseteq \mathbf{F}_i \\ \text{si y sólo si } \forall\ i \in I \quad & \beta \in \widehat{\rho}(\mathbf{F}_i) \\ \text{si y sólo si } \beta \in \bigcap_{i \in I} & \widehat{\rho}(\mathbf{F}_i) \end{aligned}$$

Luego, $\widehat{\rho}(\bigcap_{i \in I} \mathbf{F}_i) = \bigcap_{i \in I} \widehat{\rho}(\mathbf{F}_i)$.

d) Como $\overline{\rho^{op}[\mathbb{L}]} = \overline{\mathbb{L}}$, es claro que $\mathbb{L}$ es localmente cubierta si y sólo si $\rho^{op}[\mathbb{L}]$.

2. a) Sean $\mathbb{L} \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{S}^k}$ y $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$. Si $\mathbf{a} \in |A.\mathbb{L}|^k$, existen $h \in H.\mathbb{L}$ y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{Fm}^k$ tales que $h(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{a}$.

Entonces $\mathbf{a} \in \mathbf{F}$ si y sólo si $h(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{F}$ si y sólo si $\boldsymbol{\alpha} \in h^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$ si y sólo si $\rho\nu(\boldsymbol{\alpha}) \subseteq h^{-1}[\mathbf{F}]$ si y sólo si $\rho\nu(\mathbf{a}) = h[\rho\nu(\boldsymbol{\alpha})] \subseteq \mathbf{F}$ si y sólo si $\nu(\mathbf{a}) \subseteq \widehat{\rho}(\mathbf{F})$ si y sólo si $\mathbf{a} \in \widehat{\nu}(\widehat{\rho}(\mathbf{F}))$
Luego, $\mathbf{F} = \widehat{\nu}(\widehat{\rho}(\mathbf{F}))$ para todo $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$.
Por otra parte, $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\nu^{op}\big[\rho^{op}[\mathbb{L}]\big] = \widehat{\nu}\big[\widehat{\rho}[\mathcal{C}.\mathbb{L}]\big]$ si y sólo si existe $\mathbf{G} \in \mathcal{C}.\rho^{op}[\mathbb{L}] = \widehat{\rho}[\mathcal{C}.\mathbb{L}]$ tal que $\mathbf{F} = \widehat{\nu}(\mathbf{G})$ si y sólo si existe $\mathbf{F}' \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ tal que $\mathbf{F} = \widehat{\nu}(\widehat{\rho}(\mathbf{F}')) = \mathbf{F}'$ si y sólo si $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$.
Luego, se concluye que $\mathcal{C}.\nu^{op}\big[\rho^{op}[\mathbb{L}]\big] = \mathcal{C}.\mathbb{L}$, y por lo tanto $\nu^{op}\big[\rho^{op}[\mathbb{L}]\big] = \mathbb{L}$.

b) La demostración es simétrica a la anterior.

3. Como $\mathcal{S}^k \in PM_{\mathcal{S}^k}$ y $\mathcal{R}^l \in PM_{\mathcal{R}^l}$, y además $\overline{\mathcal{S}^k} = \overline{\mathcal{R}^l}$, entonces:

- Para todo $\mathbf{\Gamma} \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$ se tiene que $S_E(\mathcal{R}^l)$ es compatible con $\widehat{\rho}(\mathbf{\Gamma})$, y por lo tanto $\widehat{\rho}(\mathbf{\Gamma}) \in \mathbf{Th}_{\mathcal{R}^l}$. Luego, $\widehat{\rho}(\mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}) \subseteq \mathbf{Th}_{\mathcal{R}^l}$.
- Análogamente se tiene $\widehat{\nu}(\mathbf{Th}_{\mathcal{R}^l}) \subseteq \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$.
- Para todo $\mathbf{\Gamma} \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$ se cumple $\mathbf{\Gamma} = \widehat{\nu}(\widehat{\rho}(\mathbf{\Gamma}))$, y como $\widehat{\rho}(\mathbf{\Gamma}) \in \mathbf{Th}_{\mathcal{R}^l}$, se obtiene que $\mathbf{\Gamma} \in \widehat{\nu}(\mathbf{Th}_{\mathcal{R}^l})$, y por lo tanto $\widehat{\nu}(\mathbf{Th}_{\mathcal{R}^l}) = \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$.
- Análogamente se obtiene que $\widehat{\rho}(\mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}) = \mathbf{Th}_{\mathcal{R}}\,l$.

Eso prueba la afirmación.

4. a) 1) Si $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$, entonces $\rho^{op}[\mathbb{L}] \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{R}^l}$, y además $\overline{\mathbb{L}} = \overline{\rho^{op}[\mathbb{L}]}$.
Entonces:
   a' Si $H.\rho^{op}[\mathbb{L}]$ es compatible con $\mathbf{G} \subseteq |A.\rho^{op}[\mathbb{L}]|^l$, sea $\mathbb{M}$ tal que $\widetilde{\mathbb{M}} = \widetilde{\rho^{op}[\mathbb{L}]}$ y $\mathcal{C}.\mathbb{M}$ es el sistema de clausura generado por $\mathcal{C}.\rho^{op}[\mathbb{L}] \cup \{\mathbf{G}\}$. Entonces $\mathbb{M} \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{R}^l}$, y por lo tanto $\nu^{op}[\mathbb{M}] \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{S}^k}$. Pero la definición de $\mathbb{M}$ y $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$ implican que $\nu^{op}[\mathbb{M}] = \mathbb{L}$, y por lo tanto $\mathbb{M} = \rho^{op}[\nu^{op}[\mathbb{M}]] = \rho^{op}[\mathbb{L}]$, lo que a su vez implica $\mathbf{G} \in \mathcal{C}.\rho^{op}[\mathbb{L}]$.
   b' Si $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A.\rho^{op}[\mathbb{L}])$ es compatible con $\mathcal{C}.\rho^{op}[\mathbb{L}]$, sea $\mathbb{M}$ tal que $\widetilde{\mathbb{M}} = \widetilde{\rho^{op}[\mathbb{L}]}$ y $H.\mathbb{M} = H.\rho^{op}[\mathbb{L}] \cup \{h\}$. Entonces $\mathbb{M} \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{R}^l}$, y por lo tanto $\nu^{op}[\mathbb{M}] \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{S}^k}$. Pero la definición de $\mathbb{M}$ y $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$ implican que $\nu^{op}[\mathbb{M}] = \mathbb{L}$, y por lo tanto $\mathbb{M} = \rho^{op}[\nu^{op}[\mathbb{M}]] = \rho^{op}[\mathbb{L}]$, lo que a su vez implica $h \in H.\rho^{op}[\mathbb{L}]$.

   Luego, $\rho^{op}[\mathbb{L}] \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{R}^l}$.

   2) Si $\rho^{op}[\mathbb{L}] \in PM_{\mathcal{R}^l}$ entonces $\overline{\mathbb{L}} = \overline{\rho^{op}[\mathbb{L}]}$. Luego:
   a' Si $H.\mathbb{L}$ es compatible con $\mathbf{F} \subseteq |A.\mathbb{L}|^k$, sea $\mathbb{M}$ tal que $\overline{\mathbb{M}} = \overline{\mathbb{L}}$ y $\mathcal{C}.\mathbb{M}$ es el sistema de clausura generado por $\mathcal{C}.\mathbb{L} \cup \{\mathbf{F}\}$. Entonces $\mathbb{M} \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{S}^k}$, y por lo tanto $\rho^{op}[\mathbb{M}] \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{R}^l}$. Pero la definición de $\mathbb{M}$ y $\rho^{op}[\mathbb{L}] \in PM_{\mathcal{R}^l}$ implican que $\rho^{op}[\mathbb{M}] = \rho^{op}[\mathbb{L}]$, y por lo tanto $\mathbb{M} = \nu^{op}[\rho^{op}[\mathbb{M}]] = \nu^{op}[\rho^{op}[\mathbb{L}]]$, lo que a su vez implica $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$.
   b' Si $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A.\mathbb{L})$ es compatible con $\mathcal{C}.\mathbb{L}$, sea $\mathbb{M}$ tal que $\widetilde{\mathbb{M}} = \widetilde{\mathbb{L}}$ y $H.\mathbb{M} = H.\mathbb{L} \cup \{h\}$. Entonces $\mathbb{M} \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{S}^k}$, y por lo tanto $\rho^{op}[\mathbb{M}] \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{R}^l}$. Pero la definición de $\mathbb{M}$ y $\rho^{op}[\mathbb{L}] \in PM_{\mathcal{R}^l}$ implican que $\rho^{op}[\mathbb{M}] = \rho^{op}[\mathbb{L}]$, y por lo tanto $\mathbb{M} = \nu^{op}[\rho^{op}[\mathbb{M}]] = \rho^{op}[\rho^{op}[\mathbb{L}]]$, lo que a su vez implica $h \in H.\mathbb{L}$.

   Luego, $\mathbb{L} \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{S}^k}$.

   b) La demostración es simétrica de la anterior.

5. Supongamos $\theta \leq \Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})$, y sean $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ en $|A.\mathbb{L}|^l$ tales que $\mathbf{c}\,\theta^l\,\mathbf{d}$ y $\mathbf{c} \in \widehat{\rho}(\mathbf{F})$. Entonces $\rho(\mathbf{c}) \subseteq \mathbf{F}$, y para probar que θ es compatible con $\widehat{\rho}(\mathbf{F})$ basta probar que $\mathbf{d} \in \widehat{\rho}(\mathbf{F})$, es decir, basta probar que $\rho(\mathbf{d}) \subseteq \mathbf{F}$.

   Sean $\delta \in \rho$ y $f, g \in Hom(\mathbf{T}(\{x_0, \ldots, x_{l-1}\}), A.\mathbb{L})$ tales que $f(\rho) = \rho(\mathbf{c})$ y $g(\rho) = \rho(\mathbf{d})$. Entonces $g(\delta) \in \rho(\mathbf{d})$ y $f(\delta) \in \rho(\mathbf{c}) \subseteq \mathbf{F}$. Pero para todo $i < l$ se cumple que $g(x_i) = d_i \theta c_i = f(x_i)$, ya que $\mathbf{c}\,\theta^l\,\mathbf{d}$, y por inducción sobre los conectivos del tipo de $\mathfrak{Fm}$ se obtiene, recordando que ρ lleva l-elementos en k-conjuntos, que para todo $j < k$ $g(\delta)_j \theta f(\delta)_j$. Por lo tanto se tiene que $g(\delta)\,\theta^k\, f(\delta)$, y como $f(\delta) \in \mathbf{F}$ y $\theta \leq \Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})$, ello implica que $g(\delta) \in \mathbf{F}$. Luego, $\rho(\mathrm{d}) \subseteq \mathbf{F}$, es decir, $\mathbf{d} \in \widehat{\rho}(\mathbf{F})$.

Por lo tanto, se concluye que $\theta \leq \Omega_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(\widehat{\rho}(\mathbf{F}))$.

6. *a)* Ya sabemos que si $\mathbb{L} \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{S}^k}$ y $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ se cumple $\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) \leq \Omega_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(\widehat{\rho}(\mathbf{F}))$, pero como además $\rho^{op}[\mathbb{L}] \in {}^{\mathrm{LC}}M_{\mathcal{R}^l}$ y $\widehat{\rho}(\mathbf{F}) \in \mathcal{C}.\rho^{op}[\mathbf{L}]$, entonces $\Omega_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(\widehat{\rho}(\mathbf{F})) \leq \Omega_{\nu^{op}[\rho^{op}[\mathbb{L}]]}(\widehat{\nu}(\widehat{\rho}(\mathbf{F}))) = \Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})$. Eso prueba la afirmación.

   b) El argumento es simétrico del anterior.

7. *a)* $\widetilde{\Omega}\,(\mathbb{L}) = \bigcap_{\mathbf{F}\in\mathcal{C}.\mathbb{L}} \Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) = \bigcap_{\mathbf{F}\in\mathcal{C}.\mathbb{L}} \Omega_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(\widehat{\rho}(\mathbf{F})) = \bigcap_{\mathbf{G}\in\mathcal{C}.\rho^{op}[\mathbb{L}]} \Omega_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(\mathbf{G})$ $= \widetilde{\Omega}\,(\rho^{op}[\mathbb{L}])$.

   b) La demostración es simétrica de la anterior.

□

Entonces la siguiente proposición no requiere demostración:

Proposición 4.1.5. *Si* $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftharpoons} \mathcal{R}^l$, *entonces:*

1. $\rho^{op} : {}^{LC}M_{\mathcal{S}^k} \longmapsto {}^{LC}M_{\mathcal{R}^l}$ *es una biyección y* ν^{op} *es su inversa.*

2. $\rho^{op} : PM_{\mathcal{S}^k} \longmapsto PM_{\mathcal{R}^l}$ *es una biyección y* ν^{op} *es su inversa.*

3. $\rho^{op} : PM^*_{\mathcal{S}^k} \longmapsto PM^*_{\mathcal{R}^l}$ *es una biyección y* ν^{op} *es su inversa.*

Son necesarias algunas definiciones extra para caracterizar de manera más completa la relación entre modelos principales de sistemas equivalentes, y el comportamiento de las traducciones:

Definición 14.

- *Si* $\mathbb{L}$ *es una* HR^k*-lógica abstracta, con* $1 \leq k < \omega$, *el* reducto HR-algebraico *de* $\mathbb{L}$ *es* $\overline{\mathbb{L}}$, *y si* L *es una clase de* HR^k*-lógicas abstractas, entonces* $\overline{L} := \{\overline{\mathbb{L}} \;:\; \mathbb{L} \in L\}$ *es su clase de reductos HR-algebraicos. En tanto operador (sin argumento) será denotado por* $\overline{(\cdot)}$.

- *Si* $\mathcal{S}^k$ *es un sistema proposicional k-dimensional, con* $1 \leq k < \omega$, *entonces para toda HR-álgebra* $\mathfrak{A}$ *sean*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathfrak{A}) := \{\mathbf{F} \subseteq |A.\mathfrak{A}|^k \;:\; H.\mathfrak{A} \text{ es compatible con } \mathbf{F}\},\ y$$

$$\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{A}] := \langle A.\mathfrak{A},\ H.\mathfrak{A},\ \mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathfrak{A})\,\rangle.$$

Si $\mathbb{L}$ *es una* HR^k*-lógica abstracta, entonces* $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathbb{L}) := \mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\overline{\mathbb{L}})$ *y* $\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathbb{L}] := \mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\overline{\mathbb{L}}\,]$.

■

Lema 4.1.6. *Si $\mathcal{S}^k$ es un sistema proposicional k-dimensional, con $1 \leq k < \omega$, entonces*

$$\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\cdot] : \overline{PM_{\mathcal{S}^k}} \longmapsto PM_{\mathcal{S}^k} \text{ es una biyección y } \overline{(\cdot)} \text{ es su inversa, y}$$
$$\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\cdot] : \overline{PM^*_{\mathcal{S}^k}} \longmapsto PM^*_{\mathcal{S}^k} \text{ es una biyección y } \overline{(\cdot)} \text{ es su inversa.}$$

Demostración. Sea $\mathfrak{A} \in \overline{PM_{\mathcal{S}^k}}$. Entonces existe $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$ tal que $\mathfrak{A} = \overline{\mathbb{L}}$. Pero como $H.\mathfrak{A} = H.\mathbb{L}$, se tiene por definición que $\mathcal{C}.\mathbb{L} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathfrak{A})$, y como $\mathbb{L}$ es maximal-algebraico y $H.\mathbb{L}$ es compatible con $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathfrak{A})$, entonces $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{C}.\mathbb{L}$. Luego, $\mathcal{C}.\mathbb{L} = \mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathfrak{A})$, y por lo tanto $\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{A}] = \mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$, lo que prueba que $\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{A}] \in PM_{\mathcal{S}^k}$ para toda $\mathfrak{A} \in \overline{PM_{\mathcal{S}^k}}$.

Por otra parte, si para $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \overline{PM_{\mathcal{S}^k}}$ se tiene $\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{A}] = \mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{B}]$, entonces claramente $\mathfrak{A} = \overline{\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{A}]} = \overline{\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{B}]} = \mathfrak{B}$, por lo que el operador $\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\cdot]$ es inyectivo.

Finalmente, como para todo $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$ se tiene que $\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\overline{\mathbb{L}}] = \mathbb{L}$, el operador es sobreyectivo, es decir, es una biyección.

Respecto de $\overline{(\cdot)}$, es claro por definición que $\overline{\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{A}]} = \mathfrak{A}$, asi que $\overline{(\cdot)}$ y $\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\cdot]$ son biyecciones inversas una de la otra.

La afirmación respecto de $PM^*_{\mathcal{S}^k}$ es entonces evidente. □

Definición 15. *1. Sean* **A**, **B**, *y* **C** *álgebras, $G \cup \{g\} \subseteq Hom(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, y $H \cup \{h\} \subseteq Hom(\mathbf{B}, \mathbf{C})$. Entonces se definen los siguientes conjuntos:*

$$h \circ G = \{h \circ g \;:\; g \in G\}$$
$$H \circ g = \{h \circ g \;:\; h \in H\}$$
$$H \circ G = \{h \circ g \;:\; h \in H \text{ y } g \in G\}.$$

2. Para toda HR-álgebra $\mathfrak{A}$ sea

$$End(\mathfrak{A}) := \{g \in Hom(A.\mathfrak{A}, A.\mathfrak{A}) \;:\; g \circ H.\mathfrak{A} \subseteq H.\mathfrak{A}\}.$$

Si $\mathbb{L}$ es una HR^k-lógica abstracta, $1 \leq k < \omega$, entonces $End(\mathbb{L}) := End(\overline{\mathbb{L}})$. Los elementos de $End(\mathfrak{A})$ (o de $End(\mathbb{L})$) se denominan endomorfismos de $\mathfrak{A}$.

■

Lema 4.1.7. *Sean $\mathcal{S}^k$ sistema proposicional k-dimensional y $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$. Entonces:*

1. $End(\mathbb{L}) \circ H.\mathbb{L} = H.\mathbb{L} = H.\mathbb{L} \circ S_E(\mathcal{S}^k)$
2. $End(\mathbb{L}) = \{g \in Hom(A.\mathbb{L}, A.\mathbb{L}) \;:\; \forall \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L} \;\; g^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathcal{C}.\mathbb{L}\}$.
3. $End(\mathcal{S}^k) = S_E(\mathcal{S}^k)$

Demostración. 1. Por definición se tiene que $End(\mathbb{L}) \circ H.\mathbb{L} \subseteq H.\mathbb{L}$, y como claramente $\mathbf{id}_{\mathbf{A}.\mathbb{L}} \in End(\mathbb{L})$, se obtiene la primera igualdad.

Para la segunda igualdad, basta con observar que $\mathbf{id}_{\mathfrak{Fm}} \in S_E(\mathcal{S}^k)$, y por lo tanto $H.\mathbb{L} \subseteq H.\mathbb{L} \circ S_E(\mathcal{S}^k)$, y que para todos $\sigma \in S_E(\mathcal{S}^k)$, $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$, y $h \in H.\mathbb{L}$ se cumple que $(h \circ \sigma)^{-1}[\mathbf{F}] = \sigma^{-1}[h^{-1}[\mathbf{F}]] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$, es decir, $(h \circ \sigma)$ es compatible con $\mathcal{C}.\mathbb{L}$, y por lo tanto pertenece a $H.\mathbb{L}$.

2. Sean $g \in End(\mathbb{L})$ y $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$. Entonces para todo $h \in H.\mathbb{L}$ se tiene que $h^{-1}[g^{-1}[\mathbf{F}]] = (g \circ h)^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$, ya que $g \circ H \in H.\mathbb{L}$. Luego, $H.\mathbb{L}$ es compatible con $\{g^{-1}[\mathbf{F}] \ : \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}\}$, y por lo tanto $\{g^{-1}[\mathbf{F}] \ : \mathbf{F}\} \subseteq \mathcal{C}.\mathbb{L}$. Eso implica que
   $End(\mathbb{L}) \subseteq \{g \in Hom(A.\mathbb{L}, A.\mathbb{L}) \ : \forall \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L} \quad g^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathcal{C}.\mathbb{L}\}$.
   En la otra dirección, se tiene que si
   $$g \in \{g \in Hom(A.\mathbb{L}, A.\mathbb{L}) \ : \forall \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L} \quad g^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathcal{C}.\mathbb{L}\},$$
   entonces para todos $h \in H.\mathbb{L}$ y $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ se tiene que $(g \circ h)^{-1}[\mathbf{F}] = h^{-1}[g^{-1}[\mathbf{F}]] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$, por definición. Pero entonces $g \circ h$ es compatible con $\mathcal{C}.\mathbb{L}$, y por lo tanto $g \circ h \in H.\mathbb{L}$, es decir, $g \in End(\mathbb{L})$. Eso prueba la igualdad afirmada.

3. Es evidente por el ítem anterior.

□

Definición 16. *Si $\mathcal{S}^k$ es un sistema proposicional k-dimensional, entonces para todos $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$, $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$, y $g \in End(\mathbb{L})$ sea*

$$g_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) := C_{\mathbb{L}}(g[\mathbf{F}]).$$

■

Lema 4.1.8. *Sean $\mathcal{S}^k$ y $\mathcal{R}^l$ dos sistemas proposicionales finito-dimensionales de dimensiones $1 \leq k < \omega$ y $1 \leq l < \omega$ respectivamente, tales que $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftharpoons} \mathcal{R}^l$. Entonces*

1. $\overline{PM^*_{\mathcal{S}^k}} = \overline{PM^*_{\mathcal{R}^l}} \subseteq \overline{PM_{\mathcal{S}^k}} = \overline{PM_{\mathcal{R}^l}}$
2. *Para toda $\mathfrak{A} \in \overline{PM_{\mathcal{S}^k}}$ se tiene que $\widehat{\rho}(\cdot)$ es un isomorfismo de retículos de $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathfrak{A})$ en $\mathcal{F}_{\mathcal{R}^l}(\mathfrak{A})$, y $\widehat{\nu}(\cdot)$ es su inversa*
3. *Para todos $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$, $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$, y todo $g \in End(\mathbb{L})$ se cumplen*
   $$g^{-1}[\widehat{\rho}(\mathbf{F})] = \widehat{\rho}(g^{-1}[\mathbf{F}]) \ y$$
   $$\widehat{\rho}(g_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})) = g_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(\widehat{\rho}(\mathbf{F})).$$

   Se dirá en este caso que $\widehat{\rho}$ conmuta por imagen y preimagen con endomorfismos.

4. *Para todos* $\mathbb{M} \in PM_{\mathcal{R}^l}$, $\mathbf{G} \in C.\mathbb{M}$, *y todo* $g \in End(\mathbb{M})$ *se cumplen*

$$g^{-1}[\widehat{\nu}(\mathbf{G})] = \widehat{\nu}(g^{-1}[\mathbf{G}]) \text{ y}$$

$$\widehat{\nu}(g_{\mathbb{M}}(\mathbf{G})) = g_{\nu^{op}[\mathbb{M}]}(\widehat{\nu}(\mathbf{G})).$$

Se dirá en este caso que $\widehat{\nu}$ conmuta por imagen y preimagen con endomorfismos.

Demostración. 1. Basta observar que para todo sistema proposicional finito-dimensional $\mathcal{Q}$, $PM_{\mathcal{Q}}{}^* \subseteq PM_{\mathcal{Q}}$, y que por definición tanto ν^{op} como ρ^{op} no modifican el reducto HR-algebraico.

2. Sólo es necesario probar que ρ^{op} va de $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathfrak{A})$ sobre $\mathcal{F}_{\mathcal{R}^l}(\mathfrak{A})$, ya que lo demás es consecuencia directa del lema 4.1.4.

   Como $\overline{\rho^{op}[\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{A}]]} = \overline{\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{A}]} = \mathfrak{A}$, y $\rho^{op}[\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{A}]] \in PM_{\mathcal{R}^l}$, entonces $\rho^{op}[\mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathfrak{A}]] = \mathcal{F}^o_{\mathcal{R}^l}[\mathfrak{A}]$, lo que por lema 4.1.4 basta para probar que ρ^{op} es isomorfismo de retículos de $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathfrak{A})$ sobre $\mathcal{F}_{\mathcal{R}^l}(\mathfrak{A})$, y que ν^{op} es su inversa.

3. Para la primera afirmación, con $\mathbf{a} \in |A.\mathbb{L}|^l$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \in g^{-1}[\widehat{\rho}(\mathbf{F})] \text{ si y sólo si } g(\mathbf{a}) \in \widehat{\rho}(\mathbf{F}) \text{ si y sólo si}& \\
g(\rho(\mathbf{a})) = \rho(g(\mathbf{a})) \subseteq \mathbf{F} \text{ si y sólo si } \rho(\mathbf{a}) \in g^{-1}[\mathbf{F}]& \\
\text{si y sólo si } \mathbf{a} \in \widehat{\rho}(g^{-1}[\mathbf{F}])&
\end{aligned}$$

   Para la segunda afirmación, sea $\mathbf{a} \in g[\widehat{\rho}(\mathbf{F})]$. Entonces existe $b \in \widehat{\rho}(\mathbf{F})$ tal que $a = g(b)$. Pero $\rho(\mathbf{a}) = \rho(g(b)) = g(\rho(b)) \subseteq g[\mathbf{F}] \subseteq g_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})$. Luego, $g[\widehat{\rho}(\mathbf{F})] \subseteq \widehat{\rho}(g_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})) \in C.\rho^{op}[\mathbb{L}]$, y por definición se obtiene que $g_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(\widehat{\rho}(\mathbf{F})) \subseteq \widehat{\rho}(g_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}))$.

   En la otra dirección, sea $\mathbf{G} \in C.\rho^{op}[\mathbb{L}]$ tal que $g[\widehat{\rho}(\mathbf{F})] \subseteq \mathbf{G}$. Entonces $\widehat{\rho}(\mathbf{F}) \subseteq g^{-1}[\mathbf{G}]$, y por lo tanto $\mathbf{F} = \widehat{\nu}(\widehat{\rho}(\mathbf{F})) \subseteq \widehat{\nu}(g^{-1}[\mathbf{G}])$. Pero como $\widehat{\nu}(g^{-1}[\mathbf{G}]) = g^{-1}[\widehat{\nu}(\mathbf{G})]$, necesariamente $g[\mathbf{F}] \subseteq \widehat{\nu}(\mathbf{G}) \in \mathbb{L}$. Luego, $g_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) \subseteq \widehat{\nu}(\mathbf{G})$, y por lo tanto $\widehat{\rho}(g_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})) \subseteq \widehat{\rho}(\widehat{\nu}(\mathbf{G})) = \mathbf{G}$, lo que finalmente implica que $\widehat{\rho}(g_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})) \subseteq C_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(g[\widehat{\rho}(\mathbf{F})]) = g_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(\widehat{\rho}(\mathbf{F}))$. Se obtiene entonces la igualdad pedida.

4. Simétrica a la anterior.

□

Proposición 4.1.9. *Sean* $\mathcal{S}^k$ *y* $\mathcal{R}^l$ *dos sistemas proposicionales de dimensiones* $1 \leq k < \omega$ *y* $1 \leq l < \omega$ *respectivamente, tales que* $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftharpoons} \mathcal{R}^l$.

Entonces para toda $\mathfrak{A} \in \overline{PM_{\mathcal{S}^k}} = \overline{PM_{\mathcal{R}^l}}$ *se cumple que* $\widehat{\rho}$ *es un isomorfismo de retículos de* $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathfrak{A})$ *sobre* $\mathcal{F}_{\mathcal{R}^l}(\mathfrak{A})$, $\widehat{\nu}$ *es su inversa, y ambos conmutan por imagen y preimagen con endomorfismos.*

4.2. Sistemas de congruencias.

Los sistemas proposicionales de congruencias son de la mayor importancia en este trabajo, por las características que se detallan en la proposición siguiente. Si se consideran estructurales, tales sistemas son llamados "algebraicos" en [2], y tanto en ese trabajo como aquí la noción de algebrizabilidad de un sistema proposicional finito-dimensional depende de si es o no equivalente a un sistema proposicional de congruencias.

Proposición 4.2.1. *Sea $\mathcal{G}$ un sistema proposicional de congruencias, y sean $\mathbb{M} \in PM_{\mathcal{G}}$ y $\mathbf{G} \in \mathcal{C}.\mathbb{M}$. Entonces:*

1. *$\mathbf{G}$ es una congruencia sobre $A.\mathbb{M}$*
2. $\Omega_{\mathbb{M}}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$

Demostración. 1. Como $\mathbb{M}$ es localmente cubierta, entonces:

Para todo $a \in |A.\mathbb{M}|$ existen $h \in H.\mathbb{M}$ y $\alpha \in \mathfrak{Fm}$ tales que $a = h(\alpha)$. Pero $\langle \alpha, \alpha \rangle \in Th_{\mathcal{G}}(\emptyset) \subseteq h^{-1}[\mathbf{G}]$, por lo que $\langle a, a \rangle \in \mathbf{G}$. Luego, como relación en $|A.\mathbb{M}|$, $\mathbf{G}$ es simétrica.

Si $\langle a, b \rangle \in \mathbf{G}$, entonces con $h \in H.\mathbb{M}$ y $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathfrak{Fm}^2$ tales que $h(\langle \alpha, \beta \rangle) = \langle a, b \rangle$, de $\langle \beta, \alpha \rangle \in Th_{\mathcal{G}}(\langle \alpha, \beta \rangle) \subseteq h^{-1}[\mathbf{G}]$ se obtiene $\langle b, a \rangle \in \mathbf{G}$. Luego, $\mathbf{G}$ es refleja.

Si $\{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\} \subseteq \mathbf{G}$, entonces con $h \in H.\mathbb{M}$ y $\{\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle\} \subseteq \mathfrak{Fm}^2$ tales que $h(\langle \alpha, \beta \rangle) = \langle a, b \rangle$ y $h(\langle \beta, \gamma \rangle) = \langle b, c \rangle$, de $\langle \alpha, \gamma \rangle \in Th_{\mathcal{G}}(\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \gamma \rangle) \subseteq h^{-1}[\mathbf{G}]$ se obtiene $\langle a, c \rangle \in \mathbf{G}$. Luego, $\mathbf{G}$ es transitiva.

Si $t \in \mathcal{L}$ es un conectivo n-ario, y $\{a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}\} \subseteq |A.\mathbb{M}|$ son tales que $\{\langle a_0, b_0 \rangle, \ldots, \langle a_{n-1}, b_{n-1} \rangle\} \subseteq \mathbf{G}$, entonces con $h \in H.\mathbb{M}$ y $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{n-1}\} \subseteq \mathfrak{Fm}$ tales que para todo $i < n$ $h(\langle \alpha_i, \beta_i \rangle) = \langle a_i, b_i \rangle$, de

$$\langle t(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}), t(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}) \rangle \in Th_{\mathcal{G}}(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle, \ldots, \langle \alpha_{n-1}, \beta_{n-1} \rangle)$$

y $Th_{\mathcal{G}}(\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle, \ldots, \langle \alpha_{n-1}, \beta_{n-1} \rangle) \subseteq h^{-1}[\mathbf{G}]$ se obtiene

$$\langle t(a_0, \ldots, a_{n-1}), t(b_0, \ldots, b_{n-1}) \rangle = h(\langle t(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}), t(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}) \rangle)$$

, que está en $\mathbf{G}$. Luego, $\mathbf{G}$ es congruencia de $A.\mathbb{M}$

2. Probaremos primero que $\mathbf{G}$, como congruencia, es compatible con $\mathbf{G}$, como 2-conjunto. Si $\langle a, b \rangle \in \mathbf{G}$ y $\langle a, b \rangle\, \mathbf{G}^2 \,\langle c, d \rangle$, entonces $\{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle\} \subseteq \mathbf{G}$, y usando transitividad dos veces y simetría, se obtiene $\langle c, d \rangle \in \mathbf{G}$. Luego, $\mathbf{G}$ es compatible consigo misma, es decir, $\mathbf{G} \leq \Omega_{\mathbb{M}}(\mathbf{G})$.

En la otra dirección, si $\langle a, b \rangle \in \Omega_{\mathbb{M}}(\mathbf{G})$, como $\langle a, b \rangle\, \Omega_{\mathbb{M}}(\mathbf{G})^2 \,\langle a, a \rangle$ y $\langle a, a \rangle \in \mathbf{G}$, entonces $\langle a, b \rangle \in \mathbf{G}$. Luego, $\Omega_{\mathbb{M}}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$.

□

Consecuencia directa de ello es que si $\mathbb{M} \in PM_{\mathcal{G}}$, entonces $\mathcal{C}.\mathbb{M}$ es subretículo completo de $\mathrm{Con}\,\mathcal{A}.\mathbb{M}$, y además si $\mathbb{M} \in PM^*_{\mathcal{G}}$, entonces $C_{\mathbb{M}}(\emptyset) = \mathbf{id}_{\mathbf{A}.\mathbb{M}}$.

Consideremos ahora lo que ocurre cuando $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftarrows} \mathcal{G}$, con $\mathcal{S}^k$ sistema proposicional k-dimensional y $\mathcal{G}$ sistema proposicional de congruencias:

> Por la proposición 4.1.9 sabemos que para toda $\mathfrak{A} \in \overline{PM_{\mathcal{S}^k}}$, $\widehat{\rho}$ es un isomorfismo de los retículos $\mathcal{F}_{\mathcal{S}^k}(\mathfrak{A})$ y $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(\mathfrak{A})$, y que $\widehat{\nu}$ es su inversa, y además por el lema 4.1.4 y la proposición anterior, para todo $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ se cumple $\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) = \Omega_{\rho^{op}[\mathbb{L}]}(\widehat{\rho}(\mathbf{F})) = \widehat{\rho}(\mathbf{F})$, ya que $\rho^{op}[\mathbb{L}] \in PM_{\mathcal{G}}$, y por lo tanto $\Omega_{\mathbb{L}}$ y $\widehat{\rho}$ coinciden sobre $\mathcal{C}.\mathbb{L}$. Luego, dado que para cada $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ $\widehat{\rho}(\mathbf{F}) = \{\langle a, b\rangle \in |\mathcal{A}.\mathbb{L}|^2 \ : \ \rho(\langle a,b\rangle) \subseteq \mathbf{F}\}$, la congruencia de Leibnitz de $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ es definible sintácticamente en $\mathcal{A}.\mathbb{L}$ por la interpretación $\boldsymbol{\rho}$ y $\mathbf{F}$.
>
> Por otra parte, si $\mathbb{L} \in PM^*_{\mathcal{S}^k}$, entonces $\rho^{op}[\mathbb{L}] \in PM^*_{\mathcal{G}}$ y por lo tanto $C_{\mathbb{L}}(\emptyset) = \widehat{\nu}(\mathbf{id}_{\mathbf{A}.\mathbb{L}}) = \{\mathbf{a} \in |\mathcal{A}.\mathbb{L}|^k \ : \ \nu(\mathbf{a}) \leq \mathbf{id}_{\mathbf{A}.\mathbb{L}}\}$. Luego, el menor cerrado de $\mathcal{C}.\mathbb{L}$ es definible en $\mathcal{A}.\mathbb{L}$ sintácticamente por $\boldsymbol{\nu}$.

Esas propiedades, y las que se mostrarán a continuación, nos autorizan a establecer la siguiente definición:

Definición 17. *Sea $\mathcal{S}^k$ un sistema proposicional k-dimensional, $1 \leq k < \omega$.*

> *$\mathcal{S}^k$ es HR-algebrizable si es equivalente a un sistema proposicional de congruencias.*

■

Como ya se vio en el ejemplo 8, CPC es HR-algebrizable, ya que es equivalente a $\mathrm{EQ(BA)}^2$ mediante la $(2,1)$-interpretación $\{x_0 \leftrightarrow x_1\}$ y la $(1,2)$-interpretación $\{\langle x_0, x_0 \rightarrow x_0\rangle\}$. Más aún, es claro que un sistema proposicional k-dimensional estructural, al considerarlo como sistema k-deductivo en el sentido de [4], es algebrizable si y sólo si es HR-algebrizable, ya que el sistema proposicional de congruencias a que sería equivalente en el último caso es también estructural, y por lo tanto indistinguible de un sistema de congruencias en el sentido de [4].

La siguiente proposición permite establecer de manera más manejable e intuitiva la propiedad de ser HR-algebrizable:

Proposición 4.2.2. *Un sistema proposicional k-dimensional $\mathcal{S}^k$ con $1 \leq k < \omega$ es HR-algebrizable si y sólo si existen una $(k,2)$-traducción $\boldsymbol{\nu}$ y una $(2,k)$-traducción $\boldsymbol{\rho}$ tales que*

1. $\rho(\langle \alpha, \alpha\rangle) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset)$ *para toda* $\alpha \in \mathfrak{Fm}$,
2. $\rho(\langle \alpha, \beta\rangle) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\rho(\langle \beta, \alpha\rangle))$ *para todos* $\alpha, \beta \in \mathfrak{Fm}$,
3. $\rho(\langle \alpha, \gamma\rangle) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\rho(\langle \alpha, \beta\rangle, \langle \beta, \gamma\rangle))$ *para todos* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{Fm}$

4. $\rho(\langle t(\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1}), t(\beta_0,\ldots,\beta_{n-1})\rangle) \subseteq$
$Th_{\mathcal{S}^k}(\{\rho(\langle\alpha_0,\beta_0\rangle),\ldots,\rho(\langle\alpha_{n-1},\beta_{n-1}\rangle)\})$ *para todo conectivo n-ario t y todo* $\{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_0,\ldots,\beta_{n-1}\} \subseteq \mathfrak{Fm}$

5. $Th_{\mathcal{S}^k}(\alpha) = Th_{\mathcal{S}^k}(\rho\nu(\alpha))$ *para toda* $\alpha \in \mathfrak{Fm}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\mathcal{S}^k$ es HR-algebrizable el sistema proposicional de congruencias $\mathcal{G}$ equivalente con $\mathcal{S}^k$ contiene en su axiomatización a aquella dada a $\mathcal{C}^{op}$, y como ρ es $(2,1)$-traducción, por la equivalencia 4.2 dada a continuación de la definición de sistemas equivalentes se obtienen las primeras cuatro condiciones del enunciado. La última de ellas se obtiene por definición de equivalencia.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{G}$ el sistema 2-dimensional sobre $\mathfrak{Fm}$ definido por

$$\langle\alpha,\beta\rangle \in Th_{\mathcal{G}}(\Delta) \text{ si y sólo si } \rho(\langle\alpha,\beta\rangle) \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\rho[\Delta])$$

para todo $\Delta \cup \{\langle\alpha,\beta\rangle\} \subseteq \mathfrak{Fm}^2$.

Es fácil verificar que $\mathcal{G}$ es un sistema 2-dimensional, y trivialmente se cumple que ρ es una interpretación de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{S}^k$ y ello, junto a la quinta condición del enunciado y la proposición 4.1.1, implican que $\mathcal{S}^k$ y $\mathcal{G}$ son equivalentes. Pero por las cuatro primeras condiciones del enunciado se obtiene que $\mathcal{G}$ es un sistema proposicional de congruencias, y por lo tanto $\mathcal{S}^k$ es HR-algebrizable.

□

Los comentarios previos a la definición de HR-algebrizable permiten establecer algunas propiedades del operador de Leibnitz sobre los cerrados de un modelo principal que son enteramente análogas a las que ocurren en Lógica Algebraica Abstracta cuando una lógica proposicional es algebrizable:

Proposición 4.2.3. *Si* $\mathcal{S}^k$ *es un sistema proposicional k-dimensional HR-algebrizable, con* $1 \leq k < \omega$, *entonces para todo* $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$, $\Omega_{\mathbb{L}}$ *es isomorfismo de retículos de* $C.\mathbb{L}$ *en un subretículo de* $\mathrm{Con}\, A.\mathbb{L}$ *que conmuta por imagen y preimagen con endomorfismos. En particular,* $\widetilde{\Omega}(\mathbb{L}) = \Omega_{\mathbb{L}}(C_{\mathbb{L}}(\emptyset))$.

Veamos ahora un ejemplo, que es el que motiva esta tesis:

Ejemplo 9.

Las Lógicas Anotadas fueron tratadas desde el punto de vista de algebrizabilidad (no HR-algebrizabilidad) por Lewin, Mikenberg, y Schwarze en [19], mediante la creación de una versión estructural de ellas $SP_{\mathcal{T}}$ para cada $P_{\mathcal{T}}$. El tipo del lenguaje de $SP_{\mathcal{T}}$ contiene propiamente al de $P_{\mathcal{T}}$, y hay una doble transferencia entre consecuencia lógica entre uno y el otro. De acuerdo a ese trabajo, $SP_{\mathcal{T}}$ es algebrizable (o pi-algebrizable según B. Herrmann [12]) con interpretaciones similares a las que se dan a continuación:

Teorema 1. *Toda lógica anotada* $P_{\mathcal{T}}$ *es HR-algebrizable con la* $(1,2)$*-interpretación*

$$\nu := \{\langle x_0 \wedge x_0, x_0 \to x_0\rangle\}$$

y la $(2,1)$*-interpretación*

$$\rho := \{\neg^k x_0 \leftrightarrow \neg^k x_1 \ : k \in \omega\}$$

La demostración explícita se encuentra en el apéndice A, en los lemas A.0.6 y A.0.7, y la proposición A.0.8, y se basa en la proposición 4.2.2.

Nótese que para todo $\alpha \in \mathfrak{Fm}$ la segunda coordenada de $\nu(\alpha)$ es un teorema, y que la primera coordenada es siempre compleja. Más aún, para toda $\alpha \in \mathfrak{Fm}$ se cumple que $\alpha \leftrightarrow (\alpha \wedge \alpha) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$, como en CPC, pero ello no implica que $\neg\alpha \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \alpha) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$.

Más detalladamente:

Lema 4.2.4. *Si $P_\mathcal{T}$ es una lógica anotada y $\alpha \in \mathfrak{Fm}$, entonces*

$$\neg\alpha \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \alpha) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset) \text{ si y sólo si } \alpha \text{ es compleja.}$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Si α es compleja, también lo es $(\alpha \wedge \alpha)$, y por lema A.0.6 se tiene que $Th_{P_\mathcal{T}}(\neg\alpha \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \alpha)) \subseteq Th_{P_\mathcal{T}}(\alpha \leftrightarrow (\alpha \wedge \alpha)) \subseteq Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$

($\Rightarrow$) Si α no es compleja, entonces $\alpha = \neg^k(p : \mu)$ para $k \in \omega$, $p \in \underline{le}$ y $\mu \in \tau$.

Pero si $I : \underline{le} \longmapsto \tau$ es tal que $I(p) = \top$, entonces $v_I(\alpha) = v_I(\neg\alpha) = 1$ y $v_I(\neg\alpha \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \alpha)) = 0$, lo que implica que $\neg\alpha \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \alpha) \notin Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$. □

Eso implica que la $(1,2)$-traducción $\{\langle x_0, x_0 \to x_0 \rangle\}$ no es interpretación de $P_\mathcal{T}$ en su sistema proposicional de congruencias equivalente.

La interpretación $\boldsymbol{\rho}$ permite capturar respecto de congruencias la negación de τ, sin importar la estructura de éste o el comportamiento de su negación.

Por los comentarios previos a la definición 17 se puede enunciar sin demostración la siguiente proposición:

Proposición 4.2.5. *Si $\mathcal{S}^k$ es un sistema proposicional k-dimensional HR-algebrizable con $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftharpoons} \mathcal{G}$, entonces*

- *Para todos $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$, y $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$*

$$\Omega_\mathbb{L}(\mathbf{F}) = \{\langle a, b \rangle \in |A.\mathbb{L}|^2 \ : \boldsymbol{\rho}(\langle a, b \rangle) \subseteq \mathbf{F}\},$$

- *para todo $\mathbb{L} \in PM^*_{\mathcal{S}^k}$*

$$C_\mathbb{L}(\emptyset) = \{\mathbf{a} \in |A.\mathbb{L}|^k \ : \boldsymbol{\nu}(\mathbf{a}) \subseteq \mathbf{id}_{\mathbf{A}.\mathbb{L}}\} = \widehat{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{id}_{\mathbf{A}.\mathbb{L}}).$$

4.3. Sistemas algebraicamente unívocos.

Una característica destacable del proceso de algebrización, en todas sus versiones, es que desde la clase de álgebras asociadas a una lógica algebrizable se puede formar la clase de sus modelos reducidos, es decir, se puede revertir el paso desde un modelo reducido hacia su reducto algebraico. En [12], Herrmann lo establece diciendo que la función "E" que lleva fórmulas en ecuaciones "define verdad" en la clase de modelos (matriciales) reducidos; en rigor, E define verdad en la clase de álgebras asociadas, lo que establece la reversibilidad citada.

En el lema 4.1.6 se establece que para todo sistema proposicional finito-dimensional se puede revertir el paso desde un modelo principal reducido a su reducto HR-algebraico, aunque no sea HR-algebrizable. Sin embargo, suponiendo más condiciones para un sistema proposicional finito-dimensional, se puede establecer la reversibilidad del paso desde modelos principales reducidos a las *álgebras* asociadas a ellos.

Se dirá que un sistema proposicional k-dimensional $\mathcal{S}^k$ tiene *reglas de inferencia estructurales* si para todo $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ y toda $\langle \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \in \bigcup Inf(\mathcal{S}^k)$

$$\langle \sigma[\mathbf{\Gamma}], \sigma(\boldsymbol{\alpha}) \rangle \subseteq \bigcup Inf(\mathcal{S}^k).$$

Por simplicidad, las reglas de inferencia estructuralesserán de la forma $R = \{\langle \sigma[\mathbf{\Gamma}], \sigma(\boldsymbol{\alpha}) \rangle : \sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})\}$, con $\langle \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$ llamado *generador* de R. Si además $\mathbf{A}$ es un álgebra del tipo de $\mathfrak{Fm}$, para cada $R \in Inf(\mathcal{S}^k)$ sea $R_{\mathbf{A}} := \{\langle h[\mathbf{\Gamma}], h(\boldsymbol{\alpha}) \rangle : h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})\}$, con $\langle \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$ el generador de R.

Finalmente, si $\mathcal{S}$ de dimensión $1 \leq k < \omega$ tiene reglas de inferencia estructurales y $\mathbf{A}$ es un álgebra, se dirá que $\mathbf{F} \subseteq |\mathbf{A}|^k$ es *cerrado bajo* $Inf(\mathcal{S}^k)$ si para todos $R \in Inf(\mathcal{S}^k)$ y $\langle \mathbf{G}, \mathbf{a} \rangle \in R_{\mathbf{A}}$, $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$ implica $\mathbf{a} \in \mathbf{F}$.

Lema 4.3.1. *1. Si $\mathfrak{A}$ es localmente cubierta, entonces para todo $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A.\mathfrak{A})$ existen $g \in H.\mathfrak{A}$ y $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ tales que $h = g \circ \sigma$.*

2. Si $\mathcal{S}^k$ es un sistema proposicional k-dimensional con reglas de inferencia estructurales y $\mathbb{L} \in {}^{LC}M_{\mathcal{S}^k}$, entonces todo $\mathbf{F} \in C.\mathbb{L}$ es cerrado bajo $Inf(\mathcal{S}^k)$.

3. Si $\mathcal{S}^k$ es un sistema proposicional k-dimensional con reglas estructurales, $\mathbf{A}$ es un álgebra del tipo de $\mathfrak{Fm}$, $\mathbf{F} \subseteq |\mathbf{A}|^k$ y $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ son tales que $Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset) \subseteq h^{-1}[\mathbf{F}]$ y $\mathbf{F}$ es cerrado bajo $Inf(\mathcal{S}^k)$, entonces h es compatible con $\mathbf{F}$.

Demostración. 1. Claramente la cardinalidad de $h[\underline{At}]$ es menor o igual a la cardinaidad de $\underline{At}$, y como $\mathfrak{A}$ es localmente cubierta, existe $g \in H.\mathbb{L}$ tal que $h[\underline{At}] \subseteq g[|\mathfrak{Fm}|]$, es decir, para cada $\beta \in \underline{At}$ existe $\gamma_\beta \in |\mathfrak{Fm}|$ tal que $h(\beta) = g(\gamma_\beta)$.

Sea $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ determinado por $\sigma(\beta) = \gamma_\beta$ para todo $\beta \in \underline{At}$. Luego $h = g \circ \sigma$, ya que h y $g \circ \sigma$ coinciden sobre $\underline{At}$.

2. Si $R \in Inf(\mathcal{S}^k)$ está generada por $\langle \mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\alpha} \rangle$, y $\langle \mathbf{G}, \mathbf{a} \rangle \in R_{A.\mathbb{L}}$ es tal que $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$, con $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$, entonces por definición existe $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A.\mathbb{L})$ tal que $\langle \mathbf{G}, \mathbf{a} \rangle = \langle h[\Gamma], h(\boldsymbol{\alpha}) \rangle$.

   Por ítem anterior se obtiene (aplicado a $\mathbb{L}$) que existen $g \in H.\mathbb{L}$ y $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ tales que $h = g \circ \sigma$, y entonces $\sigma[\mathbf{\Gamma}] \subseteq g^{-1}[h[\mathbf{\Gamma}]] \subseteq g^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$. Luego, por ser R estructural y por tanto $\langle \sigma[\mathbf{\Gamma}], \sigma(\boldsymbol{\alpha}) \rangle \in R$, se obtiene $\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in g^{-1}[\mathbf{F}]$, es decir, $\mathbf{a} = h(\boldsymbol{\alpha}) = g \circ \sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbf{F}$. $\mathbf{F}$ es entonces cerrado por R, lo que prueba que todo $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ es cerrado bajo $Inf(\mathcal{S}^k)$.

3. Si $\boldsymbol{\alpha} \in Th_{\mathcal{S}^k}(h^{-1}[\mathbf{F}])$, existe una demostración $\langle \beta_i : i \leq \eta \rangle$ de $\boldsymbol{\alpha}$ desde $h^{-1}[\mathbf{F}]$. Pero $Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset) \subseteq h^{-1}[\mathbf{F}]$ implica que para todo $i \leq \eta$ o bien $\beta_i \in h^{-1}[\mathbf{F}]$, o bien existen J_I no vacío y $\langle \{\beta_{i_j} \ : \forall j \in J_I \quad i_j < i\}, \beta_i \rangle \in R \in Inf(\mathcal{S}^k)$.

   Luego, en $\mathbf{A}$, para todo $i \leq \eta$ o bien $h(\beta_i) \in \mathbf{F}$, o bien existen J_I no vacío y
   $\langle \{h(\beta_{i_j}) \ : \forall j \in J_I \quad i_j < i\}, h(\beta_i) \rangle \in R_{\mathbf{A}}$, $R \in Inf(\mathcal{S}^k)$. Pero $\mathbf{F}$ es cerrado bajo $Inf(\mathcal{S}^k)$, y por lo tanto, por inducción, $\forall i \leq \eta \quad h(\beta_i) \in \mathbf{F}$, es decir, $\boldsymbol{\alpha} = \beta_\eta \in h^{-1}[\mathbf{F}]$. Ello implica $h^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$.

□

Proposición 4.3.2. *Si $\mathcal{S}^k$ es un sistema proposicional k-dimensional HR-algebrizable con reglas de inferencia estructurales, entonces*

$$\textit{para todos } \mathbb{L},\ \mathbb{L}' \in PM^*_{\mathcal{S}^k} \quad A.\mathbb{L} = A.\mathbb{L}' \textit{ implica } \mathbb{L} = \mathbb{L}'.$$

Demostración. Sean $\mathbb{L}$ y $\mathbb{L}'$ en $PM^*_{\mathcal{S}^k}$, tales que $A.\mathbb{L} = A.\mathbb{L}'$. Probaremos primero que $H.\mathbb{L}'$ es compatible con $\mathcal{C}.\mathbb{L}$.

Si $h \in H.\mathbb{L}'$ y $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$, como $C_{\mathbb{L}'}(\emptyset) = \widehat{\nu}(\mathbf{id}_{\mathbf{A}.\mathbb{L}}) = C_{\mathbb{L}}(\emptyset) \subseteq \mathbf{F}$, se tiene $Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset) \subseteq h^{-1}[C_{\mathbb{L}'}(\emptyset)] \subseteq h^{-1}[\mathbf{F}]$, ya que $h^{-1}[C_{\mathbb{L}'}(\emptyset)] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$. Además, como $\mathcal{S}^k$ tiene reglas estructurales y $\mathbb{L}$ es modelo principal, $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ es cerrado bajo $Inf(\mathcal{S}^k)$. Entonces $h^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$, lo que implica que $H.\mathbb{L}'$ es compatible con $\mathcal{C}.\mathbb{L}$.

Como $\mathbb{L}$ y $\mathbb{L}'$ son modelos principales de $\mathcal{S}^k$, es claro que $H.\mathbb{L}' \subseteq H.\mathbb{L}$, y por un argumento simétrico se obtiene $H.\mathbb{L} = H.\mathbb{L}'$, lo que finalmente implica $\mathbb{L} = \mathbb{L}'$.

□

Claramente todo sistema proposicional finito-dimensional estructural tiene reglas de inferencia estructurales. Por su parte, las Lógicas Anotadas con retículo finito tienen como única regla de inferencia a Modus Ponens, que es estructural.

Esto tiene algunas consecuencias que son mejor presentadas usando algo de notación extra:

Definición 18. *Para todo sistema proposicional* $\mathcal{S}^k$, $1 \leq k < \omega$, *sean*

- ${}^{HR}Alg\, \mathcal{S}^k := \overline{PM^*_{\mathcal{S}^k}}$
- $\mathbf{Alg}\, \mathcal{S}^k := \{A.\mathfrak{A} \ : \mathfrak{A} \in {}^{HR}Alg\, \mathcal{S}^k\}$

■

Ya se sabe que siempre existe una biyección entre ${}^{HR}Alg\, \mathcal{S}^k$ y $PM^*_{\mathcal{S}^k}$, pero la proposición 4.3.2 implica que bajo el supuesto de que el sistema $\mathcal{S}^k$ sea HR-algebrizable y tenga reglas de inferencia estructurales, se obtiene también una biyección entre ${}^{HR}Alg\, \mathcal{S}^k$ y $\mathbf{Alg}\, \mathcal{S}^k$.

En términos generales, $\mathcal{S}^k$ es *algebraicamente unívoco* si para todos $\mathbb{L}$, $\mathbb{L}' \in PM^*_{\mathcal{S}^k}$ $A.\mathbb{L} = A.\mathbb{L}'$ implica $\mathbb{L} = \mathbb{L}'$. Equivalentemente, es algebraicamente unívoco si existe una biyección entre $\mathbf{Alg}\, \mathcal{S}^k$ y $PM^*_{\mathcal{S}^k}$.

La siguiente proposición no requiere demostración:

Proposición 4.3.3. *Si* $\mathcal{S}^k$ *es HR-algebrizable y tiene reglas de inferencia estructurales, entonces es algebraicamente unívoco.*

Teorema 2. *Si* $\mathcal{S}^k$ *es un sistema proposicional k-dimensional, estructural, y HR-algebrizable, entonces todos sus modelos principales reducidos* $\mathbb{L}$ *satisfacen*

$$H.\mathbb{L} = Hom(\mathfrak{Fm}, A.\mathbb{L}).$$

En particular con $k = 1$, $\{\widetilde{\mathbb{L}} \ : \ \mathbb{L} \in PM^*_{\mathcal{S}^k}\}$ *coincide con la clase de los modelos llenos reducidos que Font y Jansana asocian a* $\widetilde{\mathcal{S}^k}$ *en [14].*

Demostración. Si $\mathcal{S}^k$ es estructural, en particular sus reglas de inferencia son estructurales, y como es HR-algebrizable, supongamos $\mathcal{S}^k \overset{\nu,\rho}{\rightleftharpoons} \mathcal{G}$.

Sea $\mathbb{L} \in PM^*_{\mathcal{S}^k}$. De acuerdo al lema 4.3.1, es el único modelo principal reducido sobre $A.\mathbb{L}$ y todo $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ es cerrado bajo $Inf\,(\mathcal{S}^k)$. Además, $C_{\mathbb{L}}(\emptyset) = \widehat{\nu}(\mathbf{id}_{\mathbf{A}.\mathbb{L}})$.

Sea $h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A.\mathbb{L})$. El objetivo es probar que $h \in H.\mathbb{L}$, y para ello basta con probar que h es compatible con todo $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$. De acuerdo al lema 4.3.1, basta con probar que $Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset) \subseteq h^{-1}[C_{\mathbb{L}}(\emptyset)]$. Pero si $\boldsymbol{\alpha} \in Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset)$, como existen $g \in H.\mathbb{L}$ y $\sigma \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathfrak{Fm})$ tales que $h = g \circ \sigma$, se tiene

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset) \subseteq g^{-1}[C_{\mathbb{L}}(\emptyset)] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k},$$

ya que $\mathcal{S}^k$ estructural implica que $\sigma[\,Ax\,(\mathcal{S}^k)] \subseteq Th_{\mathcal{S}^k}(\emptyset)$, y por lo tanto

$$h(\boldsymbol{\alpha}) = g \circ \sigma(\boldsymbol{\alpha}) \in C_{\mathbb{L}}(\emptyset), \text{ es decir, } \boldsymbol{\alpha} \in h^{-1}[C_{\mathbb{L}}(\emptyset)].$$

Luego, $h^{-1}[C_{\mathbb{L}}(\emptyset)] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$, es decir, h es compatible con $\mathcal{C}.\mathbb{L}$. Como $\mathbb{L}$ es modelo principal, ello implica que $H.\mathbb{L} = Hom(\mathfrak{Fm}, A.\mathbb{L})$.

La última afirmación es entonces evidente.

□

Con este Teorema se puede establecer claramente que para todo sistema proposicional finito-dimensional *estructural* $\mathcal{S}^k$:

- $\mathcal{S}^k$ es HR-algebrizable si y sólo si $\widetilde{\mathcal{S}^k}$ es "algebrizable" en un sentido que extiende al dado en [4] pero sin exigir finitud.

  En [2] se considera que extender el proceso de algebrización de sistemas deductivos de dimensión finita de manera análoga a como en dimensión 1 *pi*-algebrización extiende a algebrización, es decir, que los conjuntos de fórmulas que realizan las interpretaciones no necesariamente sean finitos, ni la lógica sea finitaria, no debe presentar dificultades. Tal extensión es aquí consecuencia de HR-algebrización.

- Si $\mathcal{S}^k$ es HR-algebrizable, entonces la clase de álgebras aquí asociada, $\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k$ coincide con la asociada en Lógica Algebraica Abstracta, en los casos considerandos en [4].

4.4. Congruencia de Leibnitz y modelos principales.

En la proposición 4.2.3 se estableció que para sistemas proposicionales finito-dimensionales HR-algebrizables, si $\mathbb{L}$ es modelo principal, entonces la imagen por el operador de Leibnitz de $\mathcal{C}.\mathbb{L}$ es un subretículo de $\mathrm{Con}\,A.\mathbb{L}$. El punto ahora es determinar de qué subretículo se trata.

En Lógica Algebraica Abstracta (incluído el caso multidimensional) la imagen por Leibnitz de un $\mathcal{S}$-filtro sobre un modelo reducido $\mathbb{M}$, para un sistema deductivo $\mathcal{S}$, es una $\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}$-congruencia, es decir, el cuociente entre el álgebra de $\mathbb{M}$ y la congruencia de Leibnitz del $\mathcal{S}$-filtro pertenece a $\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}$, que es la clase de los reductos algebraicos de modelos reducidos.

Es necesario contar con algunas herramientas antes de avanzar al respecto:

Definición 19. *Sea $\mathcal{S}^k$ HR-algebrizable.*

- *Para toda álgebra* $\mathbf{A}$ *del tipo de* $\mathfrak{Fm}$ *sea*

$$PM_{\mathcal{S}^k}[\mathbf{A}] := \{\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k} \;:\; A.\mathbb{L} = \mathbf{A}\}.$$

- *Para toda álgebra* $\mathbf{A}$ *del tipo de* $\mathfrak{Fm}$ *sea*

$$\mathrm{Con}_{\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k}\,\mathbf{A} := \{\theta \in \mathrm{Con}\,\mathbf{A} \;:\; \mathbf{A}/\theta \in \mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k\}.$$

- *Si* $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$ *y* $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$, *sean* $\pi := \pi_{\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})}$ *y* $\Omega(\mathbb{L}, \mathbf{F})$ *el triple*

$$\langle A.\mathbb{L}/\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}),\, H.\Omega(\mathbb{L}, \mathbf{F}),\, \mathcal{C}.\Omega(\mathbb{L}, \mathbf{F})\rangle, \textit{ donde}$$

$$\mathcal{C}.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F}) := \{\mathbf{G} \subseteq |A.\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})|^k \ : \pi \circ H.\mathbb{L} \textit{ es compatible con } \mathbf{G}\},$$

y $H.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F}) := \{h \in Hom(\mathfrak{Fm}, A.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})) :$
h *es compatible con* $\mathcal{C}.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})\}$.

■

Lema 4.4.1. *Si* $\mathcal{S}^k$ *es HR-algebrizable y* $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$*, entonces para todo* $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ $\quad \Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F}) \in PM^*_{\mathcal{S}^k}$.

Demostración. Sea $\pi := \pi_{\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})}$. La demostración se divide en varias afirmaciones:

- $\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$ es HR^k-lógica abstracta.

  Demostración. Es claro que $\emptyset \neq \pi \circ H.\mathbb{L} \subseteq H.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$. Por otra parte, $|A.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})|^k \in \mathcal{C}.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$, y si $\{\mathbf{G}_i \in \mathcal{C}.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F}) \ : \ i \in I\} \neq \emptyset$, entonces para todo $h \in H.\mathbb{L}$

$$(\pi \circ h)^{-1}[\bigcap_{i \in I} \mathbf{G}_i] = \bigcap_{i \in I} (\pi \circ h)^{-1}[\mathbf{G}_i] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k},$$

  ya que $\pi \circ h \in H.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$ y $\forall\ i \in I \quad (\pi \circ h)^{-1}[\mathbf{G}_i] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$.

  □

- $\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F}) \in PM_{\mathcal{S}^k}$

  Demostración. Como $\pi \circ H.\mathbb{L} \subseteq H.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$, es claro que $\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$ es localmente cubierto, y por definición $H.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$ contiene a todos los morfismos compatibles con $\mathcal{C}.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$ y además $\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F}) \in M_{\mathcal{S}^k}$.

  Por otra parte, si $H.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$ es compatible con $\mathbf{G} \subseteq |A.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})|^k$, en particular $\pi \circ H.\mathbb{L}$ es compatible con $\mathbf{G}$ y la definición de $\mathcal{C}.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$ implica $\mathbf{G} \in \mathcal{C}.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$. Luego, $\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F})$ es maximal algebraico, y por lo tanto $\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F}) \in PM_{\mathcal{S}^k}$.

  □

- $\Omega_{\Omega(\mathbb{L},\mathbf{F})}(\pi[\mathbf{F}]) = \mathbf{id}_{\mathbf{A}.\Omega(\mathbb{L},\mathbf{F})}$

  Demostración. Basta notar que un álgebra y un k-conjunto en ella determinan la respectiva congruencia de Leibnitz, así que podemos usar el resultado análogo para k-matrices de [4] página 15.

  □

- $\mathcal{C}.\Omega(\mathbb{L},\, \mathbf{F}) = \{\pi[\mathbf{F}'] \ : \mathbf{F} \subseteq \mathbf{F}' \in \mathcal{C}.\mathbb{L}\}$

Demostración. Si $\mathbf{G} \in \mathcal{C}.\,\Omega(\mathbb{L},\,\mathbf{F})$, sea

$$\mathbf{F}' := \pi^{-1}[\mathbf{G}] = \{\langle a_0, \ldots, a_{k-1}\rangle \ : \ \langle \pi(a_0), \ldots, \pi(a_{k-1})\rangle \in \mathbf{G}\}.$$

Luego, para todo $h \in H.\,\mathbb{L}$ $\quad h^{-1}[\mathbf{F}'] = (\pi \circ h)^{-1}[\mathbf{G}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$, y como $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$, entonces $\mathbf{F}' \in \mathcal{C}.\,\mathbb{L}$. Como además π es sobre $A.\,\Omega(\mathbb{L},\,\mathbf{F})$, $\pi[\mathbf{F}'] = \mathbf{G}$.

Finalmente por definición $\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})$ es compatible con $\mathbf{F}'$, y por lo tanto $\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) \leq \Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}')$, y como $\mathcal{S}^k$ es HR-algebrizable, entonces $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{F}'$.

Eso prueba que $\mathcal{C}.\,\Omega(\mathbb{L},\,\mathbf{F}) \subseteq \{\pi[\mathbf{F}'] \ : \ \mathbf{F} \subseteq \mathbf{F}' \in \mathcal{C}.\,\mathbb{L}\}$

En la otra dirección, si $\mathbf{F}'$ es tal que $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{F}' \in \mathcal{C}.\,\mathbb{L}$, entonces para todo $h \in \mathbb{L}$

$$(\pi \circ h)^{-1}[\pi[\mathbf{F}']] = h^{-1}[\pi^{-1}[\pi[\mathbf{F}']]],$$

pero $\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})$ es compatible con $\mathbf{F}'$, y por lo tanto $\pi^{-1}[\pi[\mathbf{F}']] = \mathbf{F}'$, es decir, $(\pi \circ h)^{-1}[\pi[\mathbf{F}']] = h^{-1}[\mathbf{F}'] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$.

Luego, $\pi[\mathbf{F}'] \in \mathcal{C}.\,\Omega(\mathbb{L},\,\mathbf{F})$. Eso prueba la igualdad. □

- $\Omega(\mathbb{L},\,\mathbf{F}) \in PM^*_{\mathcal{S}^k}$

Demostración. Como $\pi[\mathbf{F}] \in \mathcal{C}.\,\Omega(\mathbb{L},\,\mathbf{F})$ y $\Omega_{\Omega(\mathbb{L},\mathbf{F})}(\pi[\mathbf{F}]) = \mathbf{id}_{\Omega(\mathbb{L},\mathbf{F})}$, claramente
$\tilde{\Omega}\ (\Omega(\mathbb{L},\,\mathbf{F})) = \mathbf{id}_{\Omega(\mathbb{L},\mathbf{F})}$.

□

□

Proposición 4.4.2. *Si $\mathcal{S}^k$ es HR-algebrizable y* $\mathbf{A}$ *es un álgebra del tipo de* $\mathfrak{Fm}$*, entonces para todo* $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}[\mathbf{A}]$

$$\{\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) \ : \ \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\,\mathbb{L}\} \text{ determina un subretículo de } \mathrm{Con}_{\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k}\,\mathbf{A}.$$

Demostración. Por proposición 4.2.3, basta probar que para todos $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}[\mathbf{A}]$ y $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\,\mathbb{L}$, $\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) \in \mathrm{Con}_{\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k}\,\mathbf{A}$.

Pero por lema previo se tiene que $\Omega(\mathbb{L},\,\mathbf{F}) \in PM^*_{\mathcal{S}^k}$, y $A.\,\Omega(\mathbb{L},\,\mathbf{F}) = A.\,\mathbb{L}/\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) = \mathbf{A}/\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})$, es decir, $\Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F}) \in \mathrm{Con}_{\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k}\,\mathbf{A}$.

□

Proposición 4.4.3. *Si $\mathcal{S}^k$ es HR-algebrizable, entonces para todo* $\mathbf{A}$ *del tipo de* $\mathfrak{Fm}$ *y todo* $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k}\,\mathbf{A}$*, existen* $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}[\mathbf{A}]$ *y* $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\,\mathbb{L}$ *tales que* $\theta = \Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})$.

Más aún, $\mathrm{Con}_{\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k}\,\mathbf{A} = \bigcup_{\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}[\mathbf{A}]} \Omega[\mathcal{C}.\,\mathbb{L}]$.

Demostración. Si $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k}\,\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}/\theta \in \mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k$, es decir, existe $\mathbb{M} \in PM^*_{\mathcal{S}^k}$ tal que $\mathbf{A} = A.\mathbb{M}$.

Sea $\mathbb{L}'$ tal que $A.\mathbb{L}' = \mathbf{A}$, $H.\mathbb{L}' = \{g \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A}) \;:\; \pi_\theta \circ g \in H.\mathbb{M}\}$, y $\mathcal{C}.\mathbb{L}',= \{\pi_\theta{}^{-1}[\mathbf{F}] \;:\; \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{M}\}$

Entonces:

- $\mathbb{L}' \in M_{\mathcal{S}^k}$

  Demostración. Claramente $|\,\mathbf{A}|^k = \pi_\theta{}^{-1}[|A.\mathbb{M}|^k] \in \mathcal{C}.\mathbb{L}'$, y si $I \neq \emptyset$ y $\{\pi_\theta{}^{-1}[\mathbf{F}_i] \;:\; i \in I \text{ y } \mathbf{F}_i \in \mathcal{C}.\mathbb{M}\}$, entonces

  $$\bigcap_{i \in I} \pi_\theta{}^{-1}[\mathbf{F}_i] = \pi_\theta{}^{-1}[\bigcap_{i \in I} \mathbf{F}_i] \in \mathcal{C}.\mathbb{L}',$$

  ya que $\bigcap_{i \in I} \mathbf{F}_i \in \mathcal{C}.\mathbb{M}$. Luego, $\mathcal{C}.\mathbb{L}'$ es sistema de clausura sobre $|\,\mathbf{A}|^k$. Por Axioma de Elección y dado que $\pi_\theta : \mathbf{A} \mapsto A.\mathbb{M}$ es sobreyectiva, $H.\mathbb{L}' \neq \emptyset$. $\mathbb{L}$ es entonces HR^k-lógica abstracta.

  Si $g \in H.\mathbb{L}'$ y $\pi_\theta{}^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathcal{C}.\mathbb{L}'$, con $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{M}$, entonces

  $$g^{-1}[\pi_\theta{}^{-1}[\mathbf{F}]] = (\pi_\theta \circ g)^{-1}[\mathbf{F}] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k},$$

  ya que $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{M}$ y $(\pi_\theta \circ g) \in H.\mathbb{M}$. Luego, $\mathbb{L}' \in PM_{\mathcal{S}^k}$.

  □

- Todo $g \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ compatible con $\mathcal{C}.\mathbb{L}'$ pertenece a $H.\mathbb{L}'$.

  Demostración. Si $g \in Hom(\mathfrak{Fm}, \mathbf{A})$ es compatible con $\mathcal{C}.\mathbb{L}'$, entonces para todo $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{M}$ $\quad (\pi_\theta \circ g)^{-1}[\mathbf{F}] = g^{-1}[\pi_\theta{}^{-1}[\mathbf{F}]] =\in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$, es decir, $(\pi_\theta \circ g)$ es compatible con $\mathcal{C}.\mathbb{M} \in PM^*_{\mathcal{S}^k}$, y por lo tanto $(\pi_\theta \circ g) \in H.\mathbb{M}$, lo que implica $g \in H.\mathbb{L}'$.

  □

- $\Omega_{\mathbb{L}'}(\pi_\theta{}^{-1}[C_{\mathbf{M}}(\emptyset)]) = \theta$

  Demostración. Por lema 5.4 página 15 de [4], y considerando que π_θ : $\mathbf{A} \mapsto A.\mathbb{M}$ es sobreyectiva, se obtiene que

  $$\Omega_{\mathbb{L}'}(\pi_\theta{}^{-1}[C_{\mathbf{M}}(\emptyset)]) = \pi_\theta{}^{-1}[\Omega_{\mathbf{M}}(C_{\mathbf{M}}(\emptyset))] = \pi_\theta{}^{-1}[\mathbf{id}_{\mathbf{A}.\mathbf{M}}] = \theta$$

  □

Sea $\mathbb{L} = \mathcal{F}^o_{\mathcal{S}^k}[\mathbb{L}']$. Claramente $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$, $A.\mathbb{L} = \mathbf{A}$, $\pi_\theta{}^{-1}[C_{\mathbf{M}}(\emptyset)] \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$, y $\theta = \Omega_{\mathbb{L}}(\pi_\theta{}^{-1}[C_{\mathbf{M}}(\emptyset)])$.

Luego, para $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k}\,\mathbf{A}$ existen $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}[\mathbf{A}]$ y $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$ tales que $\theta = \Omega_{\mathbb{L}}(\mathbf{F})$.

Considerando la proposición anterior, se obtiene

$$\mathrm{Con}_{\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k}\,\mathbf{A} = \bigcup_{\mathbb{L}\in PM_{\mathcal{S}^k}[\mathbf{A}]} \Omega[\mathcal{C}.\mathbb{L}].$$

□

Proposición 4.4.4. *Si* $\mathcal{S}^k$ *es estructural y HR-algebrizable, entonces para cualquier álgebra* $\mathbf{A}$ *del tipo de* $\mathfrak{Fm}$ *se cumple:*

- *Existe un único* $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}[\mathbf{A}]$, *y cumple*

$$H.\mathbb{L} = Hom(\mathfrak{Fm},\, \mathbf{A}).$$

- $\mathrm{Con}_{\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k}\,\mathbf{A} = \Omega[\mathcal{C}.\mathbb{L}]$, *para* $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$.

Demostración.

- Sean $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}[\mathbf{A}]$ y $\pi := \pi_{\Omega_{\mathbb{L}}(C_{\mathbb{L}}(\emptyset))}$. Considerando $\mathbb{M} := \Omega(\mathbb{L},\, C_{\mathbb{L}}(\emptyset))$, se tiene que $A.\mathbb{M} = \pi[\mathbf{A}]$ y $\mathcal{C}.\mathbb{M} = \{\pi[\mathbf{F}] \;:\; \mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}\}$, y como $\mathcal{S}^k$ es estructural, $H.\mathbb{M} = Hom(\mathfrak{Fm}, A.\mathbb{M})$ por Teorema 2.

  Sea $g \in Hom(\mathfrak{Fm},\, \mathbf{A})$. Si $\mathbf{F} \in \mathcal{C}.\mathbb{L}$, como $(\pi \circ g) \in H.\mathbb{M}$ y $\Omega_{\mathbb{L}}(C_{\mathbb{L}}(\emptyset))$ es obviamente compatible con $\mathbf{F}$, entonces $g^{-1}[\mathbf{F}] = (\pi \circ g)^{-1}[\pi[\mathbf{F}]] \in \mathbf{Th}_{\mathcal{S}^k}$.

  Luego, $Hom(\mathfrak{Fm},\, \mathbf{A})$ es compatible con $\mathcal{C}.\mathbb{L}$, y como $\mathbb{L} \in PM_{\mathcal{S}^k}$, se obtiene $H.\mathbb{L} = Hom(\mathfrak{Fm},\, \mathbf{A})$. En particular, si $\mathbb{L}' \in PM_{\mathcal{S}^k}[\mathbf{A}]$, lo anterior implica $H.\mathbb{L} = H.\mathbb{L}'$, es decir, $\mathbb{L} = \mathbb{L}'$.

- Por ítem anterior $PM_{\mathcal{S}^k}[\mathbf{A}] = \{\mathbb{L}\}$, y considerando la proposición previa, se obtiene $\mathrm{Con}_{\mathbf{Alg}\,\mathcal{S}^k} = \Omega[\mathcal{C}.\mathbb{L}]$.

□

Apéndice A

Demostraciones anexas.

Consideremos las siguientes funciones sobre hiperliterales de $\mathfrak{Fm}$ definidas por:

$an(\neg^k(p:\mu)) = \mu$ y $le(\neg^k(p:\mu)) = p$.

Entonces se tiene:

Lema A.0.5. *En P_{FOUR} se cumple:*

1. *Para todos $l \in \omega$, $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$, y $\mu \in FOUR$, se tiene que $\neg^l(p:\mu) \in Th_S(\emptyset)$ si y sólo si $\mu = \bot$.*

2. *Para todos $\{p,q\} \subseteq \underline{le}(\mathfrak{Fm})$ y $\{\mu,\lambda\} \subseteq FOUR$, si $(p:\mu) \leftrightarrow (q:\lambda) \in Th_S(\emptyset)$, entonces o bien $\mu = \lambda = \bot$, o bien $\mu = \lambda \neq \bot$ y $p = q$.*

3. *Si $\sigma \in S_E$, entonces para todo átomo anotado $(p:\mu)$ se tiene que $\sigma(p:\mu)$ es hiperliteral. Luego, ninguna sustitución lleva átomos anotados en fórmulas complejas, y por ser homomorfismos, tampoco llevan fórmulas complejas en hiperliterales.*

4. *Si $\sigma \in S_E$, entonces para todo hiperliteral α tal que $an(\alpha) = \bot$ se cumple que $an(\sigma(\alpha)) = \bot$.*

Demostración. 1. Si $\neg^l(p:\mu) \in Th_S(\emptyset)$, entonces se obtiene de inmediato que $(p:\neg^l\mu) \in Th_S(\emptyset)$. Si suponemos $\mu \neq \bot$, en particular se tiene que $\neg^l\mu \neq \bot$, y tomando una interpretación tal que $I(p) = \bot$, como $\bot \sqsubseteq \neg^l\mu$, entonces $v_I(p:\neg^l\mu) = 0$. Contradicción. Luego $\mu = \bot$. En la otra dirección es por la axiomatización dada.

2. Si $(p:\mu) \leftrightarrow (q:\lambda) \in Th_S(\emptyset)$ y suponemos que $\mu = \bot$, entonces necesariamente $(q:\lambda) \in Th_S(\emptyset)$, lo que ocurre si y sólo si $\lambda = \bot$. Análogamente se tiene que suponer $\lambda = \bot$ implica $\mu = \bot$. Eso da cuenta del primer caso.

   Si ahora suponemos que $\mu \neq \bot$, por lo anterior se tiene que $\lambda \neq \bot$, y viceversa. Pero si $p \neq q$, entonces consideremos la interpretación I tal que

$I(p) = \mu$ y $I(q) = \bot$. Luego, se tiene que $v_I\big((p : \mu) \leftrightarrow (q : \lambda)\big) = 0$. Contradicción. Luego $p = q$.

Si ahora suponemos lo anterior más $\mu \neq \lambda$, entonces si $\mu \sqsubseteq \lambda$, basta tomar I tal que $I(p) = \mu$ para ver que $v_I\big((p : \mu) \leftrightarrow (p : \lambda)\big) = 0$. Contradicción. Análogamente no puede ocurrir que $\lambda \sqsubseteq \mu$. Finalmente si $\{\mu, \lambda\} = \{f, t\}$ (es decir, no relacionados por $<$ en $FOUR$), tomando I tal que $I(p) = \mu$ se obtiene $v_I\big((p : \mu) \leftrightarrow (p : \lambda)\big) = 0$. Contradicción. Es decir, necesariamente $\mu = \lambda$. Eso termina la prueba.

3. Sea $\sigma \in S_E$, y supongamos que $\sigma(p : \mu) = \psi$ es compleja. Entonces se tiene que para toda interpretación $I : \underline{le}(\mathfrak{Fm}) \mapsto FOUR$ se debe cumplir que
$$v_I(\neg\psi \leftrightarrow \psi) = v_I(\neg\psi \wedge \psi) = 0.$$
Si $\mu \in \{\bot, \top\}$, se tiene que $\neg\mu = \mu$, y considerando que entonces $\neg(p : \mu) \leftrightarrow (p : \mu) \in Th_S(\emptyset) \subseteq \sigma^{-1}[Th_S(\emptyset)] \in \mathbf{Th}_S$, se obtiene que $\neg\psi \leftrightarrow \psi \in Th_S(\emptyset)$, y por lo tanto para toda interpretación I se tendría que $v_I(\neg\psi \leftrightarrow \psi) = 1$. Contradicción

Luego, $\mu \in \{f, t\} \subseteq FOUR$.

Si $\mu = f$, entonces de $\{(p : \top) \rightarrow (p : f), (p : \top) \rightarrow (p : t), (p : t) \rightarrow \neg(p : f)\} \subseteq Th_S(\emptyset)$ se obtiene como antes que $\{\sigma(p : \top) \rightarrow \psi, \sigma(p : \top) \rightarrow \neg\psi\} \subseteq Th_S(\emptyset)$, y por lo tanto $\sigma(p : \top) \rightarrow (\neg\psi \wedge \psi) \in Th_S(\emptyset)$.

Pero ya sabemos que $\sigma(p : \top)$ es hiperliteral, y por lo tanto toda interpretación I tal que $I(le(\sigma(p : \top))) = \top$ cumple que $v_I(\sigma(p : \top)) = 1$, y necesariamente $v_I(\neg\psi \wedge \psi) = 0$. Contradicción. Luego, $\mu \neq f$.

De manera análoga, $\mu \neq t$. . Contradicción.

Luego, la imagen por todo $\sigma \in S_E$ de un átomo es un hiperliteral, y por lo tanto la imagen de un hiperliteral es a su vez un hiperliteral.

4. Como $an(\alpha) = \bot$ y $\sigma(\alpha)$ es hiperliteral, se tiene que $\alpha \in Th_S(\emptyset) \subseteq \sigma^{-1}[Th_S(\emptyset)] \in \mathbf{Th}_S$ implica que $\sigma(\alpha) \in Th_S(\emptyset)$, y por lo tanto $an(\sigma(\alpha)) = \bot$.

□

Proposición 3.0.3. 1. Sea $\sigma \in S_E$ cualquier sustitución estructural. Sea $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$ una letra cualquiera. Veremos primero que necesariamente σ se debe comportar respecto de los átomos relativos a p a lo más de alguno de los tres modos enunciados:

- Sabemos que siempre deben existir una letra r y $l \in \omega$ tales que
$$\sigma(p : \bot) = \neg^l(r : \bot).$$
- Si $\sigma(p : \top) \in Th_S(\emptyset)$, entonces de $\{(p : \top) \rightarrow (p : f),\ (p : \top) \rightarrow (p : t)\} \subseteq Th_S(\emptyset) \subseteq \sigma^{-1}[Th_S(\emptyset)] \in \mathbf{Th}_S$ se obtiene que $\{\sigma(p : f),\ \sigma(p : t)\} \subseteq Th_S(\emptyset)$.

Luego, en este caso $\forall\, \mu \in FOUR \quad an(\sigma(p:\mu)) = \bot$, lo que corresponde al modo 1 del enunciado.

- Supongamos ahora que σ no actúa del modo 1 respecto de p, es decir, $\sigma(p:\top) \notin Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$.
  - Si $an(\sigma(p:\top)) \neq \top$, y consideramos que $\sigma(p:\top) = \neg^k(q:\mu)$, es decir, $\mu \in \{f,t\} \subseteq FOUR$, como de $\neg(p:\top) \leftrightarrow (p:\top) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$ se obtiene $\neg^{k+1}(p:\mu) \leftrightarrow \neg^k(p:\mu) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$, entonces $(q:\neg^{k+1}\mu) \leftrightarrow (q:\neg^k\mu) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$. Pero ello implica que $\neg^{k+1}\mu = \neg^k\mu$ y se tenía que $\mu \in \{f,t\}$. Contradicción.
    Luego, $an(\sigma(p:\top)) = \top$.
  - Si $\sigma(p:f) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$, entonces de $\neg(p:f) \leftrightarrow (p:t) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$ se obtiene que $\neg\sigma(p:f) \leftrightarrow \sigma(p:t) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$. Pero $\sigma(p:f) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$ implica que $an(\sigma(p:f)) = \bot$, y por lo tanto $\neg\sigma(p:f) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$, es decir, $\sigma(p:t) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$.
    Pero además, de $(p:f)\wedge(p:t) \to (p:\top) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$ se obtendría que $\sigma(p:\top) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$. Contradicción.
    Análogamente, $\sigma(p:t) \notin Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$.
  - Si $le(\sigma(p:\top)) \neq le(\sigma(p:f))$, entonces de $(p:\top) \to (p:f) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$ se obtiene que $\sigma(p:\top) \to \sigma(p:f) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$, pero como $\sigma(p:f) \notin Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$, entonces tomando una valuación I tal que $I(le(\sigma(p:\top))) = \top$ y $I(le(\sigma(p:f))) = \bot$ se obtiene que $v_I(\sigma(p:\top) \to \sigma(p:f)) = 0$. Contradicción.
    Luego, $le(\sigma(p:\top)) = le(\sigma(p:f))$, y por un argumento simétrico se obtiene que $le(\sigma(p:\top)) = le(\sigma(p:t))$.
    Por lo tanto, necesariamente $le(\sigma(p:\top)) = le(\sigma(p:f)) = le(\sigma(p:t))$.
  - Sean $q \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$, $\{k,m,n\} \subseteq \omega$, y $\{\lambda,\mu\} \subseteq FOUR$ tales que

$$\sigma(p:\top) = \neg^k(q:\top)$$
$$\sigma(p:f) = \neg^m(q:\lambda)$$
$$\sigma(p:t) = \neg^n(q:\mu).$$

Entonces de $\neg(p:f) \leftrightarrow (p:t) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$ se obtendría que $\neg^{m+1}(q:\lambda) \leftrightarrow \neg^n(q:\mu) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$. Pero entonces $(q:\neg^{m+1}\lambda) \leftrightarrow (q:\neg^n\mu) \in Th_{\mathcal{S}}(\emptyset)$, y por lo tanto $\neg^{m+1}\lambda = \neg^n\mu$.
Luego, $\lambda = \top$ si y sólo si $\mu = \top$, y por lo tanto, en tal caso, se tendría que σ actúa del modo 3 respecto de p.
Si ahora suponemos que $\lambda \in \{f,t\} \subseteq FOUR$, y por lo tanto $\mu \in \{f,t\}$, entonces si $m+n$ es par, se obtiene que $\neg\lambda = \neg^n\neg^{m+1}\lambda = \neg^n\neg^n\mu = \mu$, es decir, $\lambda \neq \mu$ en $\{f,t\}$. Si en cambio suponemos que $m+n$ es impar, entonces de manera análoga se obtiene que $\lambda = \mu$.
Entonces si $\{\lambda,\, \mu\} = \{f,\, t\}$, se obtiene que σ actúa del modo 2 respecto de p

- Luego se tiene que $\sigma \in S_E$ actúa a lo más de alguno de los tres modos del enunciado respecto de cada $p \in \underline{le}(\mathfrak{Fm})$. Falta determinar que esos tres modos efectivamente entregan sustituciones estructurales, para lo que basta una simple verificación.

$\square$

Lema A.0.6. *Sea $P_\mathcal{T}$ una lógica anotada, y sean $x, y, z, w \in |\mathfrak{Fm}|$. Entonces*

1. $x \leftrightarrow x \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
2. $x \wedge y \in Th_{P_\mathcal{T}}(y, x)$
3. $\{x, y\} \subseteq Th_{P_\mathcal{T}}(x \wedge y)$
4. $x \leftrightarrow y \in Th_{P_\mathcal{T}}(y \leftrightarrow x)$
5. $x \to z \in Th_{P_\mathcal{T}}(x \to y, y \to z)$
6. $x \leftrightarrow z \in Th_{P_\mathcal{T}}(x \leftrightarrow y, y \leftrightarrow z)$
7. $x \wedge z \leftrightarrow y \wedge w \in Th_{P_\mathcal{T}}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$
8. $x \vee z \leftrightarrow y \vee w \in Th_{P_\mathcal{T}}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$
9. $x \to z \leftrightarrow y \to w \in Th_{P_\mathcal{T}}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$
10. *Si x, y son complejas, entonces* $\neg x \leftrightarrow \neg y \in Th_{P_\mathcal{T}}(x \leftrightarrow y)$
11. *Si x, y son complejas, entonces* $\forall k \in \omega \;\; (\neg^k x \leftrightarrow \neg^k y) \in Th_{P_\mathcal{T}}(x \leftrightarrow y)$.

Demostración. 1. Sea $z := (p : \perp)$. Entonces se tiene que

Ax $(p : \perp) \wedge (\neg^k(p : \mu) \leftrightarrow \neg^{k-1}(p : \neg\mu)) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
Ax $((p : \perp) \wedge (\neg^k(p : \mu) \leftrightarrow \neg^{k-1}(p : \neg\mu))) \to (p : \perp) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
MP $z = (p : \perp) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
Ax $z \to (x \to z) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
MP $x \to z \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
Ax $x \to (z \to x) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
Ax $(x \to z) \to ((x \to (z \to x)) \to (x \to x)) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
MP $(x \to (z \to x)) \to (x \to x) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
MP $x \to x \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
Ax $(x \to x) \to ((x \to x) \to (x \leftrightarrow x)) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
MP $(x \to x) \to (x \leftrightarrow x) \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$
MP $x \leftrightarrow x \in Th_{P_\mathcal{T}}(\emptyset)$

2. Ax $y \wedge x \rightarrow y \in Th_{P_T}(\emptyset)$
MP $y \in Th_{P_T}(y \wedge x)$
Ax $y \wedge x \rightarrow x \in Th_{P_T}(\emptyset)$
MP $x \in Th_{P_T}(y \wedge x)$
Ax $x \rightarrow (y \rightarrow (x \wedge y)) \in Th_{P_T}(\emptyset)$
MP $y \rightarrow (x \wedge y) \in Th_{P_T}(y \wedge x)$
MP $x \wedge y \in Th_{P_T}(y \wedge x)$

3. Ax $(x \wedge y) \rightarrow x \in Th_{P_T}(\emptyset)$
MP $x \in Th_{P_T}(x \wedge y)$
Ax $(x \wedge y) \rightarrow y \in Th_{P_T}(\emptyset)$
MP $y \in Th_{P_T}(x \wedge y)$
$\therefore \{x, y\} \subseteq Th_{P_T}(x \wedge y)$

4. $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \in Th_{P_T}((y \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow y))$

5. Ax $(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z)) \in Th_{P_T}(\emptyset)$
MP $x \rightarrow (y \rightarrow z) \in Th_{P_T}(x \rightarrow y, y \rightarrow z)$
Ax $(x \rightarrow y) \rightarrow ((x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z)) \in Th_{P_T}(\emptyset)$
MP $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \rightarrow z) \in Th_{P_T}(x \rightarrow y, y \rightarrow z)$
MP $x \rightarrow z \in Th_{P_T}(x \rightarrow y, y \rightarrow z)$

6. $x \rightarrow y \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, y \leftrightarrow z)$
$y \rightarrow z \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, y \leftrightarrow z)$
$\therefore x \rightarrow z \in Th_{P_T}(x \rightarrow y, y \rightarrow z) \subseteq Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, y \leftrightarrow z)$
$z \rightarrow y \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, y \leftrightarrow z)$
$y \rightarrow x \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, y \leftrightarrow z)$
$\therefore z \rightarrow x \in Th_{P_T}(z \rightarrow y, y \rightarrow x) \subseteq Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, y \leftrightarrow z)$
Ax $(x \rightarrow z) \rightarrow ((z \rightarrow x) \rightarrow (x \leftrightarrow z)) \in Th_{P_T}(\emptyset)$
$\therefore x \leftrightarrow z \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, y \leftrightarrow z)$

7. Ax $(x \wedge z) \rightarrow x \in Th_{P_T}(\emptyset)$
$x \rightarrow y \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y)$
$\therefore (x \wedge z) \rightarrow y \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y)$
Ax $(x \wedge z) \rightarrow z \in Th_{P_T}(\emptyset)$
$z \rightarrow w \in Th_{P_T}(z \leftrightarrow w)$
$\therefore (x \wedge z) \rightarrow w \in Th_{P_T}(z \leftrightarrow w)$

Ax $y \to (w \to (y \wedge w)) \in Th_{P_T}(\emptyset)$

$\therefore$ $(x \wedge z) \to (w \to (y \wedge w)) \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y)$

Ax $((x \wedge z) \to w) \to (((x \wedge z) \to (w \to (y \wedge w))) \to ((x \wedge z) \to (y \wedge w)) \in Th_{P_T}(\emptyset)$

$\therefore$ $(x \wedge z) \to (y \wedge w) \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$

$\therefore$ Por simetría $(y \wedge w) \to (x \wedge z) \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$

$\therefore$ $(x \wedge z) \leftrightarrow (y \wedge w) \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$

8. Ax $\{y \to (y \vee w), w \to (y \vee w)\} \subseteq Th_{P_T}(\emptyset)$

$\{x \to y, z \to w\} \subseteq Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$

$\therefore$ $\{x \to (y \vee w), z \to (y \vee w)\} \subseteq Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$

Ax $(x \to (y \vee w)) \to ((z \to (y \vee w)) \to ((x \vee z) \to (y \vee w))) \in Th_{P_T}(\emptyset)$

$\therefore$ $(x \vee z) \to (y \vee w) \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$

$\therefore$ Por simetría $(x \vee z) \leftrightarrow (y \vee w) \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$

9. Sean $T := Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w, x \to z)$, y $T' := Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w, y \to w)$

$y \to x \in T$

$x \to z \in T$

$\therefore$ $y \to z \in T$

$z \to w \in T$

$\therefore$ $y \to w \in T$

$\therefore$ $(x \to z) \to (y \to w) \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$

$x \to y \in T'$

$y \to w \in T'$

$\therefore$ $x \to w \in T'$

$w \to z \in T'$

$\therefore$ $x \to z \in T'$

$\therefore$ $(y \to w) \to (x \to z) \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$

$\therefore$ $(x \to z) \leftrightarrow (y \to w) \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y, z \leftrightarrow w)$

10. Sean x, y complejas. Entonces:

Ax $\neg y \to (x \to \neg y) \in Th_{P_T}(\emptyset)$

$\therefore$ $x \to \neg y \in Th_{P_T}(\neg y)$

$x \to y \in Th_{P_T}(x \leftrightarrow y)$

$\therefore$ $\{(x \to y), (x \to \neg y)\} \subseteq Th_{P_T}((x \leftrightarrow y), \neg y)$

Ax $(x \to y) \to ((x \to \neg y) \to \neg x) \in Th_{P_T}(\emptyset)$

$\therefore \neg x \in Th_{P_T}\left((x \leftrightarrow y), \neg y\right)$

$\therefore \neg y \to \neg x \in Th_{P_T}\left(x \leftrightarrow y\right)$

$\therefore$ Por simetría $\neg x \leftrightarrow \neg y \in Th_{P_T}\left(x \leftrightarrow y\right)$

11. Inducción sobre k: Si $k = 1$, ya está probado. Supongamos que para k se tiene $(\neg^k x \leftrightarrow \neg^k y) \in Th_{P_T}\left(x \leftrightarrow y\right)$. Entonces como $\neg^k x$ y $\neg^k y$ también son complejas, $(\neg\neg^k x \leftrightarrow \neg\neg^k y) \in Th_{P_T}\left(\neg^k x \leftrightarrow \neg^k y\right) \subseteq Th_{P_T}\left(x \leftrightarrow y\right)$, lo que termina la prueba.

□

Lema A.0.7. *Sea* $\boldsymbol{\rho} := \left\{\neg^k x_0 \leftrightarrow \neg^k x_1 \ : \ k \in \omega\right\}$. *Entonces* $\boldsymbol{\rho}$ *satisface las cuatro primeras condiciones de la proposición 4.2.2.*

Demostración. 1. Para toda $\alpha \in |\mathfrak{Fm}|$ y todo $k \in \omega$ se tiene que $(\neg^k \alpha \leftrightarrow \neg^k \alpha) \in Th_{P_T}\left(\emptyset\right)$, y por lo tanto $\boldsymbol{\rho}(\langle \alpha, \alpha \rangle) \subseteq Th_{P_T}\left(\emptyset\right)$.

2. Para todos $\alpha, \beta \in |\mathfrak{Fm}|$ y todo $k \in \omega$ se tiene que $(\neg^k \beta \leftrightarrow \neg^k \alpha) \in Th_{P_T}\left(\neg^k \alpha \leftrightarrow \neg^k \beta\right) \subseteq Th_{P_T}\left(\boldsymbol{\rho}(\langle \alpha, \beta \rangle)\right)$, y por lo tanto $\boldsymbol{\rho}(\langle \beta, \alpha \rangle) \subseteq Th_{P_T}\left(\boldsymbol{\rho}(\langle \alpha, \beta \rangle)\right)$.

3. Para todos $\alpha, \beta, \gamma \in |\mathfrak{Fm}|$ y todo $k \in \omega$, $(\neg^k \alpha \leftrightarrow \neg^k \gamma) \in Th_{P_T}\left(\neg^k \alpha \leftrightarrow \neg^k \beta, \neg^k \beta \leftrightarrow \neg^k \gamma\right) \subseteq Th_{P_T}\left(\boldsymbol{\rho}(\langle \alpha, \beta \rangle) \cup \boldsymbol{\rho}(\langle \beta, \gamma \rangle)\right)$, y por lo tanto $\boldsymbol{\rho}(\langle \alpha, \gamma \rangle) \subseteq Th_{P_T}\left(\boldsymbol{\rho}(\langle \alpha, \beta \rangle) \cup \boldsymbol{\rho}(\langle \beta, \gamma \rangle)\right)$.

4. Si $\diamond \in \{\wedge, \vee \to\}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in |\mathfrak{Fm}|$, entonces $(\alpha \diamond \beta) \leftrightarrow (\gamma \diamond \delta) \in Th_{P_T}\left(\alpha \leftrightarrow \gamma, \beta \leftrightarrow \delta\right)$, y como $\alpha \diamond \beta$ y $\gamma \diamond \delta$ son complejas, entonces para todo $k \in \omega$ se tiene $\neg^k(\alpha \diamond \beta) \leftrightarrow \neg^k(\gamma \diamond \delta) \in Th_{P_T}\left((\alpha \diamond \beta) \leftrightarrow (\gamma \diamond \delta)\right)$. Luego $\boldsymbol{\rho}(\langle (\alpha \diamond \beta), (\gamma \diamond \delta) \rangle) \subseteq Th_{P_T}\left(\alpha \leftrightarrow \gamma, \beta \leftrightarrow \delta\right)$, y como $Th_{P_T}\left(\alpha \leftrightarrow \gamma, \beta \leftrightarrow \delta\right) \subseteq Th_{P_T}\left(\boldsymbol{\rho}(\langle \alpha, \gamma \rangle) \cup \boldsymbol{\rho}(\langle \beta, \delta \rangle)\right)$, se obtiene que $\boldsymbol{\rho}(\langle (\alpha \diamond \beta), (\gamma \diamond \delta) \rangle) \subseteq Th_{P_T}\left(\boldsymbol{\rho}(\langle \alpha, \gamma \rangle) \cup \boldsymbol{\rho}(\langle \beta, \delta \rangle)\right)$.

5. Si $\alpha, \beta \in |\mathfrak{Fm}|$, entonces claramente $\boldsymbol{\rho}(\langle (\neg\alpha), (\neg\beta) \rangle) \subseteq \boldsymbol{\rho}(\langle \alpha, \beta \rangle) \subseteq Th_{P_T}\left(\boldsymbol{\rho}(\langle \alpha, \beta \rangle)\right)$.

Luego, $\boldsymbol{\rho}$ satisface las condiciones pedidas.

□

Proposición A.0.8. *P_T es HR-algebrizable mediante $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\nu} := \{\langle x_0 \wedge x_0, x_0 \to x_0 \rangle\}$.*

Demostración. Sólo resta verificar la quinta condición de la proposición 4.2.2.

Sea $\alpha \in \mathfrak{Fm}$. Claramente $(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow (\alpha \to \alpha) \in \boldsymbol{\rho\nu}(\alpha)$, y entonces $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \wedge \alpha) \in Th_{P_T}\left(\boldsymbol{\rho\nu}(\alpha)\right)$. Luego, como $(\alpha \to \alpha) \in Th_{P_T}\left(\emptyset\right)$, se tiene, por MP, que $(\alpha \wedge \alpha) \in Th_{P_T}\left(\boldsymbol{\rho\nu}(\alpha)\right)$, y por lo tanto $\alpha \in Th_{P_T}\left(\alpha \wedge \alpha\right) \subseteq Th_{P_T}\left(\boldsymbol{\rho\nu}(\alpha)\right)$.

Por otra parte, $\alpha \wedge \alpha \in Th_{P_T}\left(\alpha\right)$, y por lo tanto $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \wedge \alpha) \in Th_{P_T}\left(\alpha\right)$ por MP y axioma $(\to_2)$. Además, por el mismo axioma, MP, y $(\alpha \to \alpha) \in Th_{P_T}\left(\emptyset\right)$, se obtiene que $(\alpha \wedge \alpha) \to (\alpha \to \alpha) \in Th_{P_T}\left(\alpha\right)$. Luego, $(\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow (\alpha \to \alpha) \in Th_{P_T}\left(\alpha\right)$. Pero como $(\alpha \wedge \alpha)$ y $\alpha \to \alpha$ son complejas, entonces $\boldsymbol{\rho}(\langle (\alpha \wedge \alpha), (\alpha \to \alpha) \rangle) \subseteq Th_{P_T}\left((\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow (\alpha \to \alpha)\right) \subseteq Th_{P_T}\left(\alpha\right)$.

Luego, como $\rho\boldsymbol{\nu}(\alpha) = \rho(\langle(\alpha \wedge \alpha), (\alpha \rightarrow \alpha)\rangle)$, se obtiene que $Th_{P_T}(\alpha) = Th_{P_T}(\boldsymbol{\rho\nu}(\alpha))$.

□

Bibliografía

[1] H. A. Blair and V. S. Subrahmanian. Paraconsistent logic programming. *Theoretical Computer Science*, 68:135–154, 1989.

[2] W. Blok and D. Pigozzi. Abstract algebraic logic and the deduction theorem. Draft.

[3] W. Blok and D. Pigozzi. *Algebraizable Logics*, volume 77. Mem. Amer. Math. Soc., American Mathematical Society, Providence, January 1989.

[4] W. Blok and D. Pigozzi. Algebraic semantics for universal horn logic without equality. In J. D. H. Smith A. Romanowska, editor, *Universal Algebra and Quasigroups*, pages 1–56. Heldermann Verlag, 1992.

[5] D.J. Brown and R. Suszko. Abstract logics. *Disertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne)*, 102:9–42, 1973.

[6] S. Burris and H. P. Sankappanavar. *A course in universal algebra*. Springer-Verlag, New York, 1981.

[7] J. Czelakowski. Algebraic aspects of deduction theorems. *Studia Logica*, 44:369–387, 1985.

[8] J. Czelakowski. Consequence Operations. Foundational Studies. Technical report, Institute of Philosophy and Sociology, Polish Academy of Sciences. Warzawa, 1992. Reports of the Research Project "Theories, Models, Cognitive Schemata".

[9] J. M. Font and R. Jansana. On the sentential logics associated with strongly nice and semi-nice general logics. *Bull. Interest Group in Pure and Applied Logic*, 2:55–76, 1994.

[10] J. M. Font and R. Jansana. A comparison of two general approaches to the algebraization of logics. In Kluwer, editor, *Proceedings of the Summer School of Algebraic Logic*, 1999.

[11] I. Németi H. Andréka, A. Kurucz and I. Sain. Applying algebraic logic: A general methodology. In *Proceedings of Summer School of Algebraic Logic*. Kluwer. To appear.

[12] B. Herrmann. Equivalential and algebraizable logics. *Studia Logica*, 57:419–436, 1996.

[13] B. Herrmann. Characterizing equivalential and algebraizable logics by the leibnitz operator. *Studia Logica*, 58:305–323, 1997.

[14] R. Jansana J. M. Font. *A general algebraic semantics for sentential logics.* Number 7 in Lecture Notes in Logic. Spinger-Verlag, 1996.

[15] L. E. Bertossi M. Arenas and M. Kifer. Applications of annotated predicate calculus to querying inconsistent databases. *Computational Logic*, pages 926–941, 2000.

[16] Ch. Mortensen. Every quotient algebra for c1 is trivial. *Notre Dame J. Formal Logic*, 21:694–700, 1980.

[17] V. S. Subrahmanian N. C. A. da Costa and C. Vago. The paraconsistent logics pt. *Zeitschrift fur Math. Logic*, 37:139–148, 1991.

[18] B. Plotkin. *Universal Algebra, Algebraic Logic, and Databases*, volume 272 of *Mathematics and its applications*. Kluwer Academic Publishers, 1994.

[19] R. A. Lewin,I. F. Mikenberg and M. G. Schwarze. On the algebraizability of annotated logics. *Studia Logica*, 59:359–386, 1997.

[20] R. A. Lewin S. E. Bowers and D. Pigozzi. An annotated logic defined by a matrix. To appear.

[21] R. Wójcicki. Some remarks on the consequence operation on sentential logics. *Fundamenta Mathematicae*, 68, 1970.