



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Dominios de John en superficies mínimas

Por

Willy Sierra

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al grado de
Doctor en Ciencias Exactas mención Matemática.

Profesor Guía : Martin Chuaqui - Universidad Católica de Chile.

Comisión Informante : Martin Chuaqui - Universidad Católica de Chile.
Manuel Elgueta - Universidad Católica de Chile.
Rodrigo Hernández - Universidad Adolfo Ibáñez.
Gonzalo Riera - Universidad Católica de Chile.

2010
Santiago - Chile

Agradecimientos

Durante mis estudios de doctorado que finalizan con la presentación de este trabajo, son varias las personas e instituciones cuya colaboración ha sido importante. A todas ellas quiero expresar mi mas sincero agradecimiento.

En primero lugar, a mi esposa Roxana y a mi hija Catalina a quienes les debo el tiempo dedicado a este trabajo y que espero poder compensarlo. Ellas además brindaron ese apoyo emocional indispensable en algunos momentos.

En segundo lugar, quiero agradecer al Profesor Martín por sus valiosas sugerencias con respecto al problema de la tesis y su apoyo en las etapas finales de mis estudios. También expreso mi gratitud a María J. Martín por sus comentarios sobre la redacción de algunos capítulos de la tesis. Ella hizo la primera lectura de este escrito, sus sugerencias se reflejan en el cuerpo de este documento. Así mismo, Rodrigo me colaboró con las gráficas que aparecen en esta tesis y la revisión de algunos cálculos. A él mi especial gratitud.

Me gustaría agradecer también a las instituciones que me colaboraron en este proyecto. A la Universidad del Cauca, a la Pontificia Universidad Católica de Chile y a CONICYT, quienes me financiaron durante algunas etapas del doctorado. Sin su apoyo, habría sido muy difícil la realización de mis estudios. Agradezco además a la Facultad de Matemáticas que a través de MECESUP me apoyó en realización de una pasantía.

Indudablemente, mi estadía en la PUC no habría sido tan agradable de no haber sido por la compañía de mis amigos y compañeros del postgrado con quienes pasé muy buenos momentos, tomando un café, jugando un partido de fútbol(si así se le puede llamar), entre otros espacio lejos de la monotonía de los estudios. A todos ellos, mi agradecimiento y deseos de éxito.

Índice general

Agradecimientos

Índice general	i
1. Introducción	1
1.1. La derivada Schwarziana	1
1.1.1. Derivada Schwarziana de curvas en el espacio	5
1.2. Dominios de John	7
1.3. Funciones armónicas en el plano y superficies mínimas	10
2. Resultados básicos	21
3. Resultados sobre dominios de John	36
3.1. Dominios de John sobre superficies mínimas	36
3.2. Dominios de John sobre curvas holomorfas	45
4. Dominios linealmente conexos	56
Bibliografía	71

Capítulo 1

Introducción

1.1. La derivada Schwarziana

Si f es analítica y localmente univalente en un dominio Ω , se define la derivada Schwarziana de f por la expresión

$$S_f = \left(\frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2.$$

La derivada Schwarziana fue llamada así por Cayley en un artículo de 1880, aunque ya antes había aparecido en un trabajo de Kummer sobre ecuaciones hipergeométricas en 1836. En su artículo, Kummer notó que si u_1 y u_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$u'' + pu' + qu = 0,$$

entonces $f = u_1/u_2$ satisface

$$S_f = 2q - \frac{1}{2}p^2 - p'.$$

En particular, si u_1 y u_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Sturm-Liouville

$$u'' + pu = 0, \tag{1.1}$$

entonces $f = u_1/u_2$ satisface $S_f = 2p$. Recíprocamente, si $S_f = 2p$, entonces f es el cociente de dos soluciones linealmente independientes de (1.1). Esto

se puede ver como consecuencia de la igualdad

$$\frac{d^2}{dz^2}(f')^{-1/2} = -\frac{1}{2}(f')^{-1/2}S_f,$$

esto es, $(f'(z))^{-1/2}$ soluciona la ecuación diferencial (1.1). Como consecuencia, se sigue que $S_f = 0$ si y sólo si f es una transformación de Möbius. Otra importante propiedad de la derivada Schwarziana es la relación

$$S_{f \circ g} = (S_f \circ g)(g')^2 + S_g \quad (1.2)$$

que se demuestra por cálculo directo. Como caso particular, se sigue que $S_{T \circ f} = S_f$ para toda transformación de Möbius T . Además se obtiene que $S_f = S_g$ si y sólo si $f = T \circ g$ para alguna transformación de Möbius T .

La conexión con ecuaciones diferenciales y la igualdad (1.2) han hecho de la derivada Schwarziana una herramienta importante en el estudio de propiedades analíticas y geométricas de funciones holomorfas. Un primer resultado, probado por Nehari, que explota la relación entre la Schwarziana y el problema (1.1) establece que si una función f es localmente univalente en un dominio simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces f es univalente si y sólo si toda solución no trivial de la ecuación diferencial

$$u'' + \frac{S_f}{2}u = 0$$

tiene a lo más un cero. Otros criterios de univalencia que involucran estimativos sobre la derivada Schwarziana fueron dados por Nehari [26]. Él probó que si f es analítica, localmente univalente en \mathbb{D} y su derivada Schwarziana satisface

$$|S_f(z)| \leq \frac{2}{(1 - |z|^2)^2}, \quad (1.3)$$

entonces f es univalente. También demostró que la condición

$$|S_f(z)| \leq \frac{\pi^2}{2}$$

para una función f analítica y localmente univalente en el disco, implica univalencia global. En el mismo artículo está probado que si f es analítica y univalente en \mathbb{D} , entonces

$$|S_f(z)| \leq \frac{6}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Esta condición necesaria para la univalencia fue probada antes por Krauss [23]. La condición es óptima dado que la transformación de Koebe

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$$

satisface

$$S_k(z) = -\frac{6}{(1-z^2)^2}.$$

Así mismo, la condición suficiente (1.3) es óptima como lo demuestra la función

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{i\epsilon}, \quad \epsilon > 0,$$

que no es univalente en \mathbb{D} y tiene derivada Schwarziana

$$S_f(z) = 2\frac{1+\epsilon^2}{(1-z^2)^2}.$$

Este ejemplo fue dado por Hille en [21].

Nehari en un trabajo posterior [25] generaliza los criterios dados anteriormente. Él demostró que una función f analítica y localmente univalente en \mathbb{D} , es univalente si

$$|S_f(z)| \leq 2p(|z|), \quad (1.4)$$

donde $p : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisface las condiciones:

- i) p es continua y par;
- ii) $(1-x^2)^2 p(x)$ es decreciente en $(0, 1)$;
- iii) ninguna solución no trivial de la ecuación diferencial $u'' + pu = 0$ tiene más de un cero en $(-1, 1)$.

Una función p que satisface las condiciones anteriores la llamaremos una función de Nehari. En adelante, salvo que se especifique lo contrario, p denotará una función de Nehari y N la familia de funciones analíticas y localmente univalentes que satisfacen (1.3). El criterio (1.4), conocido como p -Criterio de Nehari, incluye un resultado estudiado por Pokornyi en [28]. Éste dice que la condición

$$|S_f(z)| \leq \frac{4}{1-|z|^2},$$

donde f es analítica y localmente univalente en \mathbb{D} , implica la univalencia de f .

En otra dirección, la derivada Schwarziana también ha sido una herramienta básica para el estudio de propiedades geométricas de funciones univalentes, un primer resultado en esta línea fue dado por Ahlfors y Weill en [4]. Ellos relacionaron estimativos sobre la derivada Schwarziana de una función analítica en el disco unidad con el comportamiento de la frontera de su imagen. Específicamente probaron que si f pertenece a N^μ , la familia de funciones analíticas y localmente univalentes que satisfacen

$$|S_f(z)| \leq \frac{2\mu}{(1 - |z|^2)^2}, \quad 0 < \mu < 1, \quad (1.5)$$

entonces, no sólo f es univalente (que es consecuencia inmediata de (1.3)) si no que $f(\mathbb{D})$ es un cuasidisco. De aquí se sigue que f tiene una extensión cuasiconforme a la esfera [3]. Mas recientemente, en 1984, Gehring y Pommerenke [30] generalizan el teorema de Ahlfors-Weill. Entre otros resultados, los autores demuestran que si una función f meromorfa y localmente univalente en \mathbb{D} satisface (1.3) y

$$\limsup_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2)^2 |S_f(z)| < 2, \quad (1.6)$$

entonces $f(\mathbb{D})$ es un cuasidisco. En el mismo trabajo, está probado que la condición (1.3) implica que f tiene una extensión esféricamente continua a la clausura del disco y que $f(\mathbb{D})$ es un dominio de Jordan, excepto en el caso en que $f = T \circ L \circ \varphi$ donde T es una transformación de Möbius, φ es un automorfismo del disco y

$$L(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}.$$

De aquí, (1.2) y el hecho que $(1 - z^2)S_L(z) = 2$ para todo $z \in \mathbb{D}$, se sigue como corolario que la condición

$$(1 - |z|^2)^2 |S_f(z)| < 2$$

implica que $f(\mathbb{D})$ es un dominio de Jordan.

Además de las propiedades analíticas y geométricas que satisfacen las funciones en N y en N^μ , para estas familias de funciones se han probado importantes teoremas de crecimiento y distorsión, además de propiedades geométricas de la densidad de Poincaré

$$\lambda(f(z)) = \frac{1}{(1 - |z|^2)|f'(z)|^2} \quad (1.7)$$

del dominio $\Omega = f(\mathbb{D})$. Para mas detalles al respecto, ver por ejemplo [5], [13] y [14]. En particular, en el último trabajo los autores demuestran que

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq 2\mu \frac{|z|}{1-|z|^2}, \quad 0 < \mu \leq 1 \quad (1.8)$$

se cumple si f pertenece a la familia $N_0^\mu = \{f \in N^\mu / f''(0) = 0\}$. Esta desigualdad la retomaremos en el próximo capítulo en un contexto mas general.

Otros resultados importantes en teoría geométrica de funciones para las clases definidas arriba, fueron probadas por Chuaqui, Osgood y Pommerenke [15]. En este trabajo, a diferencia del enfoque expuesto antes, los autores relacionan el crecimiento de la derivada Schwarziana de una función con propiedades geométricas de la densidad de Poincaré dada por (1.7). Para una función f meromorfa y localmente univalente en \mathbb{D} , en este artículo se prueba que las condiciones

- i) $f \in N$;
 - ii) Para todo $\alpha \geq 1/2$ la función $\lambda_{T(\Omega)}^\alpha$ es hiperbólicamente convexa para toda transformación de Möbius T ;
 - iii) existe un $\alpha \geq 1/2$ tal que la función $\lambda_{T(\Omega)}^\alpha$ es hiperbólicamente convexa para toda transformación de Möbius T ;
 - iv) para todo $z_0 \in \mathbb{D}$ existe una transformación de Möbius T tal que $\infty \notin T(\Omega)$ y $\lambda_{T(\Omega)}$ tiene un mínimo global en $T(f(z_0))$;
 - v) para todo $z_0 \in \mathbb{D}$ existe una transformación de Möbius T tal que $\infty \notin T(\Omega)$ y $\lambda_{T(\Omega)}$ tiene un mínimo local en $T(f(z_0))$,
- son equivalentes.

En el capítulo 3 daremos generalizaciones de algunos resultados obtenidos en [15]. Antes revisemos las definiciones y teoremas que utilizaremos a lo largo de nuestro estudio, comenzando con un concepto introducido por Ahlfors sobre derivada Schwarziana de curvas, seguido de una breve introducción a dominios de John.

1.1.1. Derivada Schwarziana de curvas en el espacio

Como una generalización de la parte real de S_f para f holomorfa, Ahlfors [2] define la derivada Schwarziana de una curva en el espacio. La definición es motivada por la igualdad

$$\operatorname{Re} \{S_f\} = \frac{\operatorname{Re} \{f''' \overline{f'}\}}{|f'|^2} - 3 \frac{\operatorname{Re} \{f'' \overline{f'}\}^2}{|f'|^4} + \frac{3|f''|^2}{2|f'|^2}$$

y el hecho que para números complejos a, b , $\operatorname{Re} \{a\bar{b}\}$ representa el producto interior de los vectores \vec{a}, \vec{b} .

Para una curva regular $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^3 , se define su derivada Schwarziana, también llamada Schwarziana de Ahlfors, por la expresión

$$S_1\varphi = \frac{\langle \varphi', \varphi''' \rangle}{|\varphi'|^2} - 3 \frac{\langle \varphi', \varphi'' \rangle^2}{|\varphi'|^4} + \frac{3 |\varphi''|^2}{2 |\varphi'|^2}.$$

En el mismo trabajo, Ahlfors también definió un análogo a la parte imaginaria de S_f , pero dado que en este trabajo no lo utilizaremos, solo haremos referencia al operador S_1 definido antes. La Schwarziana de Ahlfors satisface propiedades similares a la Schwarziana analítica, una de las más importantes y que utilizaremos en nuestro estudio, es su invariancia bajo postcomposición con transformaciones de Möbius en \mathbb{R}^2 . También satisface el análogo real de (1.2), más precisamente, si x es de clase C^3 con $x'(t) \neq 0$, entonces

$$S_1(\varphi \circ x)(t) = S_1\varphi(x(t))x'(t)^2 + S_1x(t).$$

En [16] se proporciona una expresión para $S_1\varphi$ que será más útil para nuestros propósitos, a saber

$$\begin{aligned} S_1\varphi &= \left(\frac{v'}{v}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{v'}{v}\right)^2 + \frac{1}{2}v^2k^2 \\ &= Ss + \frac{1}{2}v^2k^2, \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde v es la velocidad de φ , k su curvatura y s su longitud de arco. En el mismo artículo, los autores demuestran un criterio de inyectividad y extendibilidad de la curva. Los dos teoremas que siguen resumen los hechos que nos interesan del artículo, éstos serán de gran utilidad en el último capítulo. Notese la semejanza con los criterios estudiados en el caso analítico.

Teorema 1.1. *Sea P una función continua definida en $(-1, 1)$ tal que ninguna solución no trivial u de $u'' + Pu = 0$ tiene más de un cero. Sea $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ una curva regular de clase C^3 . Si $S_1\varphi(x) \leq 2P(x)$ en $(-1, 1)$ entonces φ es inyectiva.*

Teorema 1.2. *Sean φ y P como en teorema anterior. Supongamos además que P es par y φ satisface $\varphi(0) = 0$, $|\varphi'(0)| = 1$, $\varphi''(0) = 0$ y $S_1\varphi(x) \leq 2P(x)$.*

Sea u la solución de la ecuación $u'' + Pu = 0$ con las condiciones iniciales $u(0) = 1$ y $u'(0) = 0$ y definamos la función

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{u^2(t)}.$$

Entonces

a.) $|\varphi'(x)| \leq F'(|x|)$ en $(-1, 1)$ y φ admite una extensión esféricamente continua a $[-1, 1]$.

b.) Si $F(1) < \infty$, entonces φ es inyectiva en $[-1, 1]$ y φ tiene longitud finita.

c.) Si $F(1) = \infty$, entonces φ es inyectiva en $[-1, 1]$ o salvo una rotación, $\varphi = F$.

1.2. Dominios de John

Sea $b > 1$ y p, q en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Un arco rectificable γ se dice que es un b -arco cono de John desde p hasta q , si γ une los puntos p y q y satisface

$$\ell(\gamma(y, q)) \leq b d(y, \partial\Omega) \text{ para todo } y \in \gamma, \quad (1.10)$$

donde $\gamma(y, q)$ denota el subarco de γ desde y hasta q y $\ell(\gamma(y, q))$ su longitud euclidiana. Un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un b -dominio de John si existe un punto $p \in \Omega$, llamado el centro del dominio, tal que para cada $x \in \Omega$, existe un b -arco cono de John $\gamma \in \Omega$ desde p a x . Diremos que un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio de John, si es un b -dominio de John para alguna constante $b > 1$. Geométricamente, un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio de John si no tiene cúspides externas.

Los dominios de John inicialmente fueron definidos para dominios en el espacio euclidiano n -dimensional por Fritz John en la década de los 60 [22], desde entonces, ha sido un tema estudiado por investigadores de diferentes áreas, ya que tales dominios aparecen en una gran variedad de problemas; algunos asociados a ecuaciones en derivadas parciales (EDP). Por ejemplo, se sabe que ciertas EDP no tienen solución en un dominio cualquiera, pero admiten solución en dominios que son dominios de John [1]. Específicamente, en este artículo se estudia la existencia de soluciones $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado) del problema

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = f,$$

para $f \in L_0^2(\Omega)$ dada. Como es habitual, $L_0^2(\Omega)$ denota el espacio de funciones medibles f tales que

$$\int_{\Omega} |f|^2 dx < \infty \quad \text{y} \quad \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} f dx = 0.$$

$H_0^1(\Omega)$ es la clausura en el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto contenido en Ω .

Está probado que existen soluciones de este problema si Ω es un dominio cuya frontera $\partial\Omega$ es “suficientemente regular”, por ejemplo si Ω es un dominio Lipschitz. En este caso tales soluciones satisfacen además

$$\|\mathbf{u}\|_{H_0^1(\Omega)^n} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

donde C es una constante que solo depende de Ω . También se conoce que el resultado no es verdad si el dominio tiene cúspides externas. Los autores demuestran que tales soluciones existen si Ω es un dominio de John.

Problemas de este tipo motivan el estudio de caracterizaciones razonables de tales dominios, no solo en \mathbb{R}^n como tradicionalmente se ha venido haciendo, si no en otros espacios como el caso de una superficie mínima que es el problema central de esta memoria.

Con las modificaciones obvias, podemos adaptar la definición anterior a subdominios de una variedad Riemanniana cualquiera. En el caso específico de una superficie que será en el que nos centraremos, usaremos a lo largo de este trabajo la siguiente definición:

Un subdominio acotado Ω de una superficie en \mathbb{R}^3 , es un b -dominio de John, si existe $p \in \Omega$ tal que para cada $x \in \Omega$, existe un arco rectificable $\gamma \subset \Omega$ desde p hasta x que satisface (1.10). Aquí, d y ℓ se determinan con la métrica de la superficie.

Como mencionamos antes, los dominios de John han sido ampliamente estudiados y aún hoy es un tema de gran actividad matemática, varios trabajos sobre la materia están dirigidos a caracterizar tales dominios. En \mathbb{R}^n , por ejemplo, hay caracterizaciones de dominios de John en términos de la métrica cuasihiperbólica, ver [19] y [20] para algunas de éstas. En el caso complejo, existen equivalencias adicionales para subdominios acotados y simplemente conexos. Algunas, en términos del mapeo de Riemann del disco al dominio en consideración, son tratadas en detalle en el capítulo 5 de [29]. El teorema de

abajo resume algunas de éstas equivalencias. Como veremos en el Capítulo 3, el Teorema 3.1 es un análogo de algunas partes de este resultado.

Teorema 1.3. *Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo acotado y f el mapeo de Riemann del disco a G . Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a.) G es dominio de John.
- b.) $\text{diam}f(B(z)) \leq M_1 d_f(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
- c.) Existe una constante $\alpha \in (0, 1]$ tal que

$$\frac{(1 - |\zeta|^2)|f'(\zeta)|}{(1 - |z|^2)|f'(z)|} \leq M_2 \left(\frac{1 - |\zeta|}{1 - |z|} \right)^\alpha, \quad \zeta \in B(z),$$

donde M_1 y M_2 son constantes absolutas.

En el teorema y en lo que sigue,

$$B(re^{it}) := \{ \rho e^{i\theta} : r \leq \rho \leq 1, |\theta - t| \leq \pi(1 - r) \}.$$

Notese que $B(0) = \overline{\mathbb{D}}$.

En esta misma dirección, en [15] los autores estudian caracterizaciones de dominios de John cuando son imagen de funciones en la clase N . Específicamente, ellos demuestran que si $f \in N_0$, entonces $f(\mathbb{D})$ es un dominio de John si y solo si

$$\limsup_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) \left| \frac{f''}{f'}(z) \right| < 2. \quad (1.11)$$

En el contexto de superficies mínimas, un resultado análogo al anterior es uno de los objetivos del presente trabajo. Para ello, utilizaremos la definición de derivada Schwarziana dada en [12] para mapeos armónicos, que como veremos mas adelante, generaliza la definición dada para funciones analíticas. En [27] se presenta una definición de Schwarziana para funciones entre variedades Riemannianas que contiene como caso particular las dadas aquí para mapeos analíticos y armónicos.

Otro aspecto geométrico importante de dominios de John en el plano es su relación con cuasidiscos. Esto es, dominios acotados por una curva de Jordan $J \subset \mathbb{C}$ con la siguiente propiedad: existe una constante M tal que

$$\text{diam}J(a, b) \leq M|a - b| \quad \text{para} \quad a, b \in J,$$

donde $J(a, b)$ es el arco mas pequeño de J entre a y b . Una curva de Jordan J con esta propiedad se denomina un cuasicírculo. Así, un cuasidisco es un

dominio acotado por un cuasicírculo. Geométricamente un cuasicírculo es un dominio que no tiene cúspides ni internas ni externas. Así, un cuasicírculo es en particular un dominio de John. También es un dominio linealmente conexo, concepto que estudiaremos mas adelante.

1.3. Funciones armónicas en el plano y superficies mínimas

Una función $f = u + iv$ de un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ en el plano es armónica si las funciones reales u y v lo son, esto es, si

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

Usando los operadores diferenciales

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

f es armónica si y solo si

$$\Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

Si Ω es simplemente conexo, existen funciones analíticas h, g tales que $f = h + \bar{g}$ y esta representación es única salvo una constante aditiva. Si $0 \in \Omega$, por conveniencia asumiremos la representación única $f = h + \bar{g}$ con $g(0) = 0$.

Si bien las funciones armónicas no son necesariamente analíticas, ellas satisfacen propiedades análogas a las funciones analíticas. En particular, se sabe que si f es armónica, f es localmente univalente en Ω si y solo si su jacobiano $J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$ es diferente de cero para todo $z \in \Omega$. Este teorema fue probado por Hans Lewy en 1936 [24]. Como consecuencia, se sigue que si f es armónica y localmente univalente en un dominio Ω , entonces $J_f > 0$ o $J_f < 0$ en Ω . En el primer caso diremos que f preserva orientación y en el segundo que invierte la orientación. Notese que en particular, h' y g' no se anulan simultáneamente si f es localmente univalente.

Además del teorema de Lewy, son muchas las propiedades de funciones analíticas que tienen su análogo en las funciones armónicas. Por mencionar algunas, la propiedad del valor medio se satisface y por tanto el principio del

máximo. Existe también una versión del principio del argumento para funciones armónicas que preservan orientación, donde hay que definir adecuadamente lo que se entiende por orden de un cero. Con el principio del argumento disponible y siguiendo las demostraciones conocidas para el caso analítico, se demuestran análogos a los bien conocidos teorema de Rouché y teorema de Hurwitz, entre otros corolarios. Con respecto a funciones armónicas univalentes, también se han probado importantes resultados que generalizan teoremas conocidos para funciones analíticas. Por ejemplo, se sabe que un mapeo conforme del plano necesariamente es un polinomio lineal. Consecuencia de este hecho y el teorema de Liouville, en el caso armónico se demuestra que toda función f armónica y univalente del plano en el plano, tiene la forma $f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \bar{z}$, donde α , β y γ son constantes con $|\alpha| \neq |\beta|$. En particular, f es univalente del plano sobre el plano. Se concluye además que no existen funciones armónicas univalentes del plano sobre un subdominio propio de \mathbb{C} . Así mismo, como en el caso analítico, también se puede probar que no existe un mapeo armónico univalente del disco sobre el plano. Este resultado es conocido como el teorema de Radó.

Continuando con mapeos armónicos univalentes, un teorema estudiado por Tibor Radó y probado independientemente por Helmut Kneser y Gustave Choquet, establece que la colección de mapeos armónicos univalentes entre dos dominios puede ser bastante amplia. Esto contrasta con el caso analítico, donde se sabe que un mapeo conforme entre dos dominios de Jordan, está determinado por sus valores en tres puntos de la frontera. El enunciado preciso en el caso armónico es el siguiente:

Teorema 1.4 (Radó-Kneser-Choquet). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio convexo acotado cuya frontera es una curva de Jordan Γ . Sea φ un homeomorfismo de \mathbb{T} sobre Γ . Entonces su extensión armónica*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} \varphi(e^{it}) dt$$

es univalente en \mathbb{D} y define un mapeo armónico de \mathbb{D} sobre Ω .

El teorema permite construir un mapeo armónico univalente del disco sobre un dominio convexo acotado, pre-escribiendo sus valores en \mathbb{T} . En esta misma línea, en [17], los autores desarrollaron un método que permite construir un mapeo armónico univalente del disco sobre un dominio convexo en una dirección, con dilatación analítica dada. Este método que es conocido como “shear construction”, está basado en el siguiente teorema:

Teorema 1.5. *Sea $f = h + \bar{g}$ una función armónica y localmente univalente en el disco. Entonces f es univalente y su rango es convexo en la dirección horizontal[vertical] si y solo si $h - g$ [$h + g$] es una función analítica univalente cuyo rango es convexo en la dirección horizontal[vertical].*

Recordemos que un dominio del plano complejo es convexo en la dirección horizontal[vertical], si su intersección con cualquier recta horizontal[vertical] es conexo.

Para ilustrar el método, consideremos la función convexa ℓ definida por

$$\ell(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$$

y $w(z) = -z$. Por el teorema, la función $L = h + \bar{g}$ tal que

$$h + g = \ell \quad \text{y} \quad w_L(z) = w(z) = \frac{g'}{h'} = -z,$$

será armónica, univalente y convexa en la dirección vertical. Notese que L es localmente univalente porque $|w_L| < 1$. Al resolver el sistema de ecuaciones bajo las condiciones $h(0) = g(0) = 0$, se obtiene

$$h(z) = \frac{\ell(z) + k(z)}{2} \quad \text{y} \quad g(z) = \frac{\ell(z) - k(z)}{2}.$$

Así, la función armónica $L(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ es univalente y convexa en la dirección vertical. Se puede probar que L realmente es convexa, mas aún, su rango es el semiplano $\operatorname{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$.

Otro ejemplo importante se obtiene al considerar la función de Koebe

$$k(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$$

que sabemos es univalente en el disco y convexa en la dirección horizontal. El Teorema 1.5 asegura que la función $K = h + \bar{g}$ donde

$$h - g = k \quad \text{y} \quad \frac{g'}{h'} = z,$$

es armónica, univalente, preserva orientación y es convexa en la dirección horizontal. Al resolver el sistema de ecuaciones, nuevamente bajo las condiciones $h(0) = g(0) = 0$, se obtiene

$$h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \quad \text{y} \quad g(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}.$$

La función $K = h + \bar{g}$ con h, g dadas como arriba, es conocida como la función armónica de Koebe, fue estudiada inicialmente en [17]. De ella se sabe además que mapea el disco sobre el plano menos el segmento $(-\infty, -\frac{1}{6}]$. Haremos referencia tanto a L como a K mas adelante.

De otro lado, en la teoría clásica de funciones se ha explotado la relación entre propiedades geométricas de funciones analíticas univalentes y cotas sobre sus coeficientes de Taylor. Estos resultados han dado lugar a preguntas análogas para el caso armónico, en el cual se han probado resultados parciales en algunos casos. Otros permanecen abiertos.

Sea S la clase de funciones analíticas univalentes del disco con expansión de Taylor

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

El teorema de Bieberbach publicado en 1916 asegura que $|a_2| \leq 2$. Una consecuencia de este teorema, es el teorema de cubrimiento de Koebe que establece que la imagen de cada función en S contiene el disco $|w| < \frac{1}{4}$. La función de Koebe que mapea el disco conformemente sobre el plano menos el segmento $(-\infty, -\frac{1}{4}]$, demuestra que tanto el teorema de Bieberbach como el teorema de cubrimiento son óptimos. De aquí se concluyen importantes teoremas de crecimiento y distorsión para la clase S . Más precisamente, se demuestra que si $f \in S$, entonces

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1.$$

Integrando obtenemos que

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |z| = r < 1,$$

para toda $f \in S$. En consecuencia, la clase S es compacta.

La cota $|a_2| \leq 2$ para toda $f \in S$ y las características de función extremal de la función de Koebe, dieron lugar a la conjetura de Bieberbach que dice que $|a_n| \leq n$ para todo n y toda $f \in S$. De nuevo la función de Koebe demuestra que la conjetura, hoy teorema, es óptima. Tanto este teorema (probado por Louis de Branges en 1985), conocido hoy como el Teorema de Bieberbach-de Branges, como el teorema de cubrimiento, han sido mejorados en subclases de la clase S . Por ejemplo, en la clase $C \subset S$ de funciones convexas, puede ser probado que la imagen de cada función contiene el disco $|w| < \frac{1}{2}$. Además, los

coeficientes de Taylor de cada función en C satisfacen la desigualdad $|a_n| \leq 1$. Ambos resultados son óptimos dado que la función

$$\ell(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$$

está en C y transforma el disco sobre el semiplano $\operatorname{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$.

Algunos de los teoremas de cubrimiento y cotas sobre los coeficientes citados anteriormente, se extienden a las clases correspondientes de funciones armónicas. Resumiremos abajo algunos de estos, pero antes definamos las familias de funciones armónicas donde se han estudiado tales teoremas y donde han surgido preguntas que aún permanecen abiertas. Dada una función armónica localmente univalente del disco $f = h + \bar{g}$ que preserva orientación, sabemos que su jacobiano $J_f = |h'| - |g'|$ es positivo en todo punto del disco, por lo que h es localmente univalente en \mathbb{D} . Así, si consideramos funciones armónicas univalentes en el disco $f = h + \bar{g}$ que preservan orientación, como una generalización natural de funciones analíticas univalentes, no se pierde generalidad si asumimos $g(0) = h(0) = 0$ y $h'(0) = 1$. Esta clase de funciones que contiene a la clase S , la denotaremos por S_H . Se puede probar que esta familia es normal pero no es compacta, por lo que no proporciona una generalización apropiada de la clase S . Con la normalización adicional $g'(0) = 0$, obtenemos una familia de funciones armónicas univalentes que preservan orientación, la cual es compacta. Esta familia que también contiene a la clase S , la denotaremos por S_H^0 . Análogamente, C_H denotará la subclase de S_H de funciones cuya imagen es convexa y C_H^0 denotará la subclase de C_H con $g'(0) = 0$. Notese que C_H^0 contiene a C . Un ejemplo importante de una función en C_H^0 , es la función armónica $L(z)$ del ejemplo posterior al Teorema 1.5. En [17] está probado que para funciones en esta familia,

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2} \quad \text{y} \quad |b_n| \leq \frac{n-1}{2}.$$

Además, su rango contiene el disco $|w| < \frac{1}{2}$. Ambos resultados, que generalizan los citados anteriormente para funciones en la clase C , son óptimos como lo demuestra la función L . Recordemos que la imagen del disco bajo L es el semiplano $\operatorname{Re}\{w\} > -\frac{1}{2}$, además sus coeficientes están dados por

$$a_n = \frac{n+1}{2} \quad \text{y} \quad b_n = \frac{n-1}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Aún no se ha probado un análogo óptimo en la clase S_H^0 al teorema de Bieberbach-de Branges ni al teorema de cubrimiento, válido para funciones

analíticas de la clase S . Un resultado parcial está dado en la familia C_H , donde se sabe que los coeficientes de cada función $f \in C_H$ satisfacen las desigualdades óptimas $|a_n| < n$ y $|b_n| < n$, $n = 2, 3, \dots$. Se cree que la función armónica de Koebe K estudiada arriba juega el papel de función extremal en la clase S_H^0 , en analogía al papel que juega la función de Koebe k en la clase S .

Como se dijo anteriormente, K mapea el disco sobre el plano menos el segmento $(-\infty, -\frac{1}{6}]$. Además, sus coeficientes A_n, B_n , están dados por

$$A_n = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1) \quad \text{y} \quad B_n = \frac{1}{6}(2n-1)(n-1).$$

Estas igualdades sugieren las conjeturas

$$|a_n| \leq \frac{1}{6}(2n+1)(n+1) \quad \text{y} \quad |b_n| \leq \frac{1}{6}(2n-1)(n-1),$$

para todo $n \geq 1$ y toda $f \in S_H^0$. Así mismo, la igualdad $A_n - B_n = n$, sugiere la conjetura

$$||a_n| - |b_n|| \leq n, \quad n \geq 2$$

para $f \in S_H^0$. Esta sería una generalización del teorema de Bieberbach-de Branges. Ambas conjeturas han sido probadas para funciones con coeficientes reales en S_H^0 [17] y para funciones estrelladas en S_H^0 [31], la conjetura aún está abierta en toda la clase S_H^0 . Con respecto a las cotas para $|a_n|$ y para $|b_n|$, también se han dado resultados parciales. Por ejemplo, está probada la conjetura $|b_2| \leq \frac{1}{2}$ y la mejor cota que se ha podido establecer para $|a_2|$ es $|a_2| < 49$, muy lejos aún de lo esperado.

Con respecto a teoremas de cubrimiento, motivado por el hecho que la imagen del disco bajo la función armónica de Koebe es el plano menos el segmento $(-\infty, -\frac{1}{6}]$, se ha conjeturado que la imagen de toda función en S_H^0 contiene el disco $|w| < \frac{1}{6}$, la función K probaría que el resultado es óptimo. Este problema aún permanece abierto y solo un resultado parcial ha sido probado por Clunie y Sheil-Small [17], quienes lograron establecer que el disco $|w| < \frac{1}{16}$ está contenido en la imagen de toda función en la familia S_H^0 .

Como hemos visto, son muchos los teoremas clásicos de la teoría de funciones analíticas univalentes que pueden ser generalizados a funciones armónicas en el plano. Así mismo, también hay muchas preguntas aún por resolver. Para otras extensiones de resultados al caso armónico y otros problemas abiertos, en particular sobre crecimiento, distorsión y problemas de

mapeo, ver [18]. En este libro se hace un estudio detallado de lo expuesto aquí y de otros problemas relacionados.

Otro aspecto importante de la teoría de mapeos armónicos planos, es su estrecha relación con superficies mínimas, es decir, aquellas superficies cuya curvatura media es cero en cada uno de sus puntos. Brevemente, las coordenadas de una superficie mínima descrita por parámetros conformes son funciones armónicas reales y por lo tanto, la proyección al plano de una superficie mínima define un mapeo armónico complejo. Recíprocamente, si $f = h + \bar{g}$ es una función armónica en \mathbb{D} cuya dilatación $w_f = \frac{g'}{h'}$ es el cuadrado de una función analítica, entonces f se levanta localmente a una superficie mínima Σ . Las coordenadas de un levantamiento \tilde{f} están dadas por

$$u = \operatorname{Re} f, \quad v = \operatorname{Im} f, \quad t = 2\operatorname{Im} \left\{ \int_0^z q(\zeta) h'(\zeta) d\zeta \right\},$$

y \tilde{f} determina una parametrización conforme de una superficie mínima cuya proyección al plano es f . El factor conforme de la primera forma fundamental de Σ está dado por

$$\begin{aligned} \lambda &= |h'| + |g'| \\ &= |h'| (1 + |q|^2) \end{aligned} \tag{1.12}$$

y la curvatura gaussiana de un punto $\tilde{f}(z)$ en Σ es

$$\begin{aligned} K &= -\frac{4|q'|^2}{|h'|^2(1 + |q|^2)^4} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} \frac{4|q'|^2}{(1 + |q|^2)^2}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Para otras propiedades de funciones armónicas así como su conexión con superficies mínimas, ver [18].

Sea $f = h + \bar{g}$ armónica, localmente univalente en el disco y supongamos que su dilatación es el cuadrado de una función meromorfa q . Se tiene que f se levanta localmente a una superficie mínima con factor conforme λ dado por (1.12). La univalencia local de f garantiza que λ no se anula en el disco por lo que $\log \lambda$ está bien definido. La derivada Schwarziana de f se define por

$$\mathcal{S}f = 2 \left(\partial_{zz}(\log \lambda) - (\partial_z \log \lambda)^2 \right). \tag{1.14}$$

Esta definición que fue propuesta en [12], proviene de una definición mas general dada por Osgood y Stowe en [27]. En este trabajo los autores proponen una definición de derivada Schwarziana para funciones conformes entre dos variedades Riemannianas. Al aplicar esta definición, no al mapeo armónico f , si no a su levantamiento \tilde{f} , que sabemos es conforme entre el disco y la superficie mínima $\tilde{f}(\mathbb{D})$, se obtiene la expresión dada en (1.14).

En [12] se demuestran algunas propiedades de la Schwarziana armónica, donde se observa que es una generalización adecuada de la Schwarziana analítica, resumimos algunas de estas. En primer lugar, si f es analítica, entonces $\lambda = |f'|$ y por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{S}f &= 2 \left(\partial_{zz}(\log |f'|) - (\partial_z \log |f'|)^2 \right) \\ &= \left(\frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \\ &= S_f. \end{aligned}$$

Otra propiedad importante y que utilizaremos con frecuencia en este trabajo, es la igualdad

$$\mathcal{S}(f \circ \varphi) = (\mathcal{S}f \circ \varphi)(\varphi')^2 + S_\varphi, \quad (1.15)$$

válida para φ analítica y localmente univalente en el disco y f armónica con las propiedades citadas antes. Esto generaliza (1.2). De la definición de Schwarziana y (1.12), obtenemos la igualdad

$$\mathcal{S}f = S_h + \frac{2\bar{q}}{1 + |q|^2} \left(q'' - \frac{q'h''}{h'} \right) - 4 \left(\frac{q'\bar{q}}{1 + |q|^2} \right)^2 \quad (1.16)$$

que será útil en la prueba del Lema 2.1.

Los dos teoremas siguientes resumen otras propiedades de la Schwarziana armónica. El primero proporciona condiciones equivalentes a $\mathcal{S}f$ analítica. Recordemos que esto siempre es el caso cuando f es holomorfa y localmente univalente. El segundo teorema establece una relación entre funciones armónicas con la misma derivada Schwarziana.

Teorema 1.6. *Sea f una función armónica, localmente univalente en el disco y supongamos que su dilatación es el cuadrado de una función meromorfa. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- a.) $\mathcal{S}f$ es analítica.
- b.) La curvatura gaussiana K dada por (1.13) es constante.

c.) K es idénticamente cero.

d.) f tiene la forma $f = h + \alpha\bar{h}$, donde h es una función analítica y localmente univalente y α es una constante con $|\alpha| < 1$.

Teorema 1.7. Sean $f = h + \bar{g}$ y $F = H + \bar{G}$ funciones armónicas tales que $\mathcal{S}f = \mathcal{S}F$. Entonces

a.) Las curvaturas de las métricas conformes asociadas λ_f y λ_F son iguales.

b.) Si las curvaturas no son constantes, existe una constante positiva c tal que $\lambda_f = c\lambda_F$.

c.) Si las curvaturas son constantes, entonces deben ser cero. En tal caso, $f = h + \alpha\bar{h}$, $F = H + \beta\bar{H}$ y $H = T(h)$, donde h, H son funciones analíticas localmente univalentes, T es una transformación de Möbius y α, β son constantes con $|\alpha|, |\beta| < 1$.

Un caso particular del teorema anterior es el hecho que si $\mathcal{S}f = 0$, entonces $f = h + \alpha\bar{h}$ para alguna transformación de Möbius h y alguna constante α con $|\alpha| < 1$ y recíprocamente.

De otro lado, análogo al criterio de univalencia de Nehari (1.4), en [9] se demuestra que si $f = h + \bar{g}$ es armónica en \mathbb{D} , su dilatación es el cuadrado de una función meromorfa y

$$|\mathcal{S}f(z)| + \lambda^2(z)|K(z)| \leq 2p(|z|), \quad (1.17)$$

entonces el levantamiento \tilde{f} de f a la superficie mínima Σ es univalente y admite una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$. Aquí, $K(z)$ denota la curvatura de Σ en el punto $\tilde{f}(z)$ y $\lambda(z)$ es la densidad en $\tilde{f}(z)$. Notese que el resultado anterior generaliza el criterio de univalencia (1.4). En el mismo artículo está probado que si la desigualdad estricta se satisface en (1.17), entonces la extensión de \tilde{f} a $\overline{\mathbb{D}}$ es univalente, lo que garantiza que la imagen de la frontera \mathbb{T} del disco es una curva cerrada simple en la superficie mínima.

Para ilustrar, esbozemos la demostración de la univalencia de \tilde{f} bajo la condición (1.17). En primer lugar se demuestra que \tilde{f} es inyectiva en el diámetro $(-1, 1)$. Para ello, se utiliza la igualdad (probada en [9])

$$S_1\varphi = \operatorname{Re} \{ (\mathcal{S}f \circ \gamma)(\gamma')^2 \} + \frac{1}{2}(\lambda^2 \circ \gamma)(|K \circ \varphi| + |\Pi(V, V)|^2) + \frac{1}{2}k_\gamma^2,$$

donde $\varphi(t) = \tilde{f}(\gamma(t))$ y γ es una curva en el disco. Aquí, k_φ y k_γ denotan la curvatura de φ y de γ , respectivamente y V es el campo vectorial tangente

unitario (en la norma euclidea) a lo largo de φ . De esta ecuación y (1.17), tomando $\gamma(t) = t$, se obtiene

$$S_1 \tilde{f}(t) \leq 2p(t), \quad -1 < t < 1.$$

Se concluye de aquí y del Teorema 1.1 que \tilde{f} es inyectiva en el diámetro $(-1, 1)$. Para el caso general, consideremos dos puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ distintos. Luego se garantiza la existencia de un automorfismo del disco T que aplica el diámetro $(-1, 1)$ sobre la geodésica hiperbólica S que pasa por z_1 y z_2 y tal que la función armónica $F = f \circ T$ satisface (1.17). Aplicando el primer caso a F , se obtiene que \tilde{F} es inyectiva en $(-1, 1)$ de donde \tilde{f} lo es en S . Esto implica que $\tilde{f}(z_1) \neq \tilde{f}(z_2)$ lo que completa la prueba.

En adelante, salvo que se diga lo contrario, cuando nos referimos a una función armónica f , se entiende que ésta es armónica en \mathbb{D} y su dilatación es el cuadrado de una función meromorfa. La densidad asociada a f la denotaremos por λ_f o simplemente λ cuando no haya peligro de confusión. Con esta notación, observese que si φ es analítica y localmente univalente y f es armónica, entonces $f \circ \varphi$ es armónica y

$$\lambda_{f \circ \varphi} = (\lambda_f \circ \varphi) |\varphi'|. \quad (1.18)$$

Análogo a las familias de funciones analíticas tratadas anteriormente, denotaremos por NH^μ la clase de funciones armónicas f que satisfacen

$$|\mathcal{S}f(z)| + \lambda^2(z)|K(z)| \leq \frac{2\mu}{(1 - |z|^2)^2}, \quad 0 < \mu \leq 1,$$

y NH_0^μ denotará la familia de funciones armónicas $f \in NH^\mu$ tales que $\partial_z \lambda(0) = 0$. Escribiremos NH y NH_0 en lugar de NH^1 y NH_0^1 respectivamente.

Al igual que en el caso analítico, tenemos que si φ es un automorfismo del disco y $f \in NH^\mu$, entonces $f \circ \varphi \in NH^\mu$. Esto sigue directamente de las ecuaciones (1.15) y (1.18) como sigue:

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}(f \circ \varphi)(z)| + \lambda_{f \circ \varphi}^2(z)|K_{f \circ \varphi}(z)| &= |\mathcal{S}f(\varphi(z))| |\varphi'(z)|^2 \\ &\quad + \lambda_f^2(\varphi(z)) |\varphi'(z)|^2 |K_f(\varphi(z))| \\ &\leq 2\mu \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1 - |\varphi(z)|^2)^2} \\ &= 2\mu \frac{1}{(1 - |z|^2)^2}. \end{aligned}$$

La última igualdad se tiene porque φ es un automorfismo del disco. También hemos utilizado que $\mathcal{S}\varphi = 0$. Esta propiedad de invarianza de la clase NH^μ bajo composiciones internas con automorfismos del disco, la utilizaremos con frecuencia en los siguientes capítulos, será importante en nuestro estudio de dominios de John.

Capítulo 2

Resultados básicos

El presente capítulo está dedicado a presentar los resultados en que se fundamentan las demostraciones de los teoremas principales de la tesis, que se presentaran en el próximo capítulo. Comenzamos con un estimativo que generaliza (1.8).

Lema 2.1. *Si $f \in NH_0^\mu$, entonces*

$$\left| \frac{\partial \log \lambda}{\partial z}(z) \right| \leq \frac{\mu |z|}{1 - |z|^2}, \quad (2.1)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, $0 < \mu \leq 1$.

Demostración. Consideremos primero el caso $\mu = 1$.

Dado que la clase NH_0 es invariante por composición con rotaciones del disco, es suficiente probar el lema cuando $0 < z < 1$.

De (1.12) se sigue que

$$\partial_z \log \lambda = \frac{1}{2} \frac{h''}{h'} + \frac{q' \bar{q}}{1 + |q|^2}. \quad (2.2)$$

Así, si $y(t) = \partial_z \log \lambda(t)$, entonces

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \left(\frac{h''}{h'} \right)' + q'' \frac{\bar{q}}{1 + |q|^2} + q' \frac{(1 + q\bar{q})\bar{q}' - \bar{q}(q\bar{q}' + \bar{q}q')}{(1 + |q|^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} S_h + \frac{1}{4} \left(\frac{h''}{h'} \right)^2 + q'' \frac{\bar{q}}{1 + |q|^2} + \frac{|q'|^2}{(1 + |q|^2)^2} - \left(\frac{\bar{q}q'}{1 + |q|^2} \right)^2, \end{aligned}$$

de donde se sigue, usando (1.16), que

$$y' = \left(\frac{1}{2} \frac{h''}{h'} + \frac{q'\bar{q}}{1+|q|^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{S}f + \frac{|q'|^2}{(1+|q|^2)^2}.$$

De la igualdad anterior, (1.13) y (2.2) obtenemos que y satisface la ecuación diferencial

$$y' = y^2 + \left(\frac{1}{2} \mathcal{S}f - \frac{1}{4} \lambda^2 K \right). \quad (2.3)$$

De otro lado, si $\varphi(t) = |y(t)|$ entonces $\varphi' \leq |y'|$. De aquí, (1.17) y (2.3) concluimos que φ satisface

$$\varphi' \leq \varphi^2 + \frac{1}{(1-t^2)^2}. \quad (2.4)$$

Notese que por definición de NH_0 , $\partial_z \lambda(0) = 0$ y por tanto $\varphi(0) = 0$. Consideremos ahora el problema de valor inicial

$$\begin{cases} w'(t) = w^2(t) + \frac{1}{(1-t^2)^2} \\ w(0) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

cuya solución es $w(t) = \frac{t}{1-t^2}$. Comparando (2.5) con la ecuación (2.4), obtenemos que

$$\frac{d}{dt}(\varphi - w) \leq (\varphi - w)(\varphi + w),$$

lo que implica que $|y| = \varphi \leq w$ y se concluye la demostración del lema en el caso $\mu = 1$.

Ahora supongamos que $0 < \mu < 1$ y, como antes, sean $y(t) = \partial_z \log \lambda(t)$ y $\varphi(t) = |y(t)|$. Procediendo como en el caso anterior, obtenemos que y satisface la ecuación diferencial (2.3) y por lo tanto

$$\varphi' \leq \varphi^2 + \frac{\mu}{(1-t^2)^2}. \quad (2.6)$$

La diferencia con la prueba del primer caso, es que ahora se compara con el problema de valor inicial

$$\begin{cases} w'(t) = w^2(t) + \frac{\mu}{(1-t^2)^2} \\ w(0) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

cuya solución es

$$w(t) = \frac{t}{1-t^2} - \frac{2\alpha^2}{1-t^2} A_\mu(t),$$

donde $\alpha = \sqrt{1-\mu}$ y A_μ está dada por la expresión

$$A_\mu(z) = \frac{1(1+z)^\alpha - (1-z)^\alpha}{\alpha(1+z)^\alpha + (1-z)^\alpha}.$$

De (2.6) y (2.7) se sigue que $|y| \leq \varphi \leq w$.

De otro lado, un calculo directo demuestra que A_μ es convexa en $[0, 1]$ por lo tanto la función $\psi(t) = \frac{A_\mu(t)}{t}$ es decreciente aquí. Así,

$$1 - \alpha^2 \frac{A_\mu(t)}{t} \leq 1 - \alpha^2 A'_\mu(0) = 1 - \alpha^2 = \mu.$$

De esta desigualdad y la definición de w , se concluye la demostración del lema en el caso $0 < \mu < 1$. \square

Corolario 2.1. *Sea $0 < \mu \leq 1$ y $f \in NH^\mu$. Existe una constante M que solo depende de μ tal que*

$$\left| \frac{\partial \log \lambda}{\partial z}(z) \right| \leq \frac{M}{1-|z|^2},$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Primero supongamos que $\tilde{f}(\mathbb{D})$ es acotado. Está probado en [6] que si $f \in NH$ y $\tilde{f}(\mathbb{D})$ es acotado, entonces la función

$$u_f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-|z|^2)\lambda(z)}}$$

tiene un punto crítico. Sea z_0 uno de ellos. Si $\varphi(w) = \frac{z_0-w}{1-\bar{z}_0 w}$, en virtud de (1.18) se tiene que si $g = f \circ \varphi$,

$$\lambda_g(w) = \lambda_f(\varphi(w)) |\varphi'(w)|.$$

De aquí y la igualdad

$$\frac{|T'(\xi)|}{1-|T(\xi)|^2} = \frac{1}{1-|\xi|^2},$$

válida para todo automorfismo $T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, se obtiene que $u_g = u_f \circ \varphi$.

La regla de la cadena ahora implica que u_g tiene un punto crítico en cero y por tanto λ_g también. La última afirmación es consecuencia de la igualdad

$$\frac{\partial_w u_g}{u_g}(w) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\bar{w}}{1 - |w|^2} - \partial_w \log \lambda(w) \right\}.$$

De esta ecuación y lo anotado al final del Capítulo 1, se sigue que $g \in NH_0^\mu$. Concluimos a partir del lema que

$$\left| \frac{\partial \log \lambda_g}{\partial w}(w) \right| \leq \frac{\mu|w|}{1 - |w|^2} \quad (2.8)$$

para todo $w \in \mathbb{D}$.

De otro lado, es fácil ver que $\varphi = \varphi^{-1}$, de donde $f = g \circ \varphi$ y por tanto $\lambda_f(z) = \lambda_g(\varphi(z))|\varphi'(z)|$. Tomando logaritmos y aplicando el operador ∂_z , se obtiene

$$\partial_z \log \lambda_f(z) = (\partial_w \log \lambda_g(\varphi(z))) \varphi'(z) + \frac{1}{2} \frac{\varphi''}{\varphi'}(z).$$

De aquí, (2.8) y la definición de φ , se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial_z \log \lambda_f}{\partial z}(z) \right| &\leq \frac{\mu|\varphi(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2} |\varphi'(z)| + \left| \frac{\bar{z}_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| \\ &\leq \frac{\mu|\varphi(z)|}{1 - |z|^2} + \frac{2}{1 - |z|^2} \\ &\leq \frac{M}{1 - |z|^2}, \end{aligned}$$

donde $M = 2 + \mu$.

Para el caso general, fijemos $0 < r < 1$ y consideremos la función $f_r(z) = \frac{1}{r} f(rz)$, $z \in \mathbb{D}$. Un cálculo directo muestra que $f_r \in NH$ y además $\lambda_r(z) = \lambda(rz)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Como $\tilde{f}_r(\mathbb{D})$ es acotado, se sigue del caso anterior que

$$\left| \frac{\partial_z \log \lambda_r}{\partial z}(z) \right| \leq \frac{3}{1 - |z|^2}.$$

Pero $\partial_z \log \lambda_r(z) = r \partial_z \log \lambda(rz)$, entonces

$$\left| \frac{\partial_z \log \lambda}{\partial z}(rz) \right| \leq \frac{1}{r} \frac{3}{1 - |z|^2}.$$

El corolario sigue ahora tomando límite cuando $r \rightarrow 1^-$.

□

Corolario 2.2. Si $f \in NH_0$, entonces para todo $\xi \in \mathbb{T}$ y $0 \leq r < 1$,

$$\frac{1}{2}\lambda(r\xi) \leq \lambda(\rho\xi) \leq 2\lambda(r\xi),$$

$$r \leq \rho \leq \frac{1+r}{2}.$$

Demostración. Dado $\xi \in \mathbb{T}$ y $0 < r < \rho < 1$,

$$\begin{aligned} \log \frac{\lambda(\rho\xi)}{\lambda(r\xi)} &= \int_r^\rho \frac{\partial}{\partial s} \log \lambda(s\xi) ds \\ &= \int_r^\rho 2\operatorname{Re} \{ \partial_z \log \lambda(s\xi) \xi \} ds. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.1. se obtiene que

$$\left| \log \frac{\lambda(\rho\xi)}{\lambda(r\xi)} \right| \leq \int_r^\rho \frac{2s}{1-s^2} ds \leq \log 2$$

si $r \leq \rho \leq \frac{1+r}{2}$, de donde se sigue el corolario. \square

Siguiendo el procedimiento anterior, se demuestra en general que si $f \in NH_0^\mu$, $0 < \mu \leq 1$, entonces

$$\frac{1}{2^\mu}\lambda(r\xi) \leq \lambda(\rho\xi) \leq 2^\mu\lambda(r\xi)$$

para todo $\xi \in \mathbb{T}$ y $r \leq \rho \leq \frac{1+r}{2}$.

Corolario 2.3. Sea $f \in NH_0$ y $k > 0$. Si $z = re^{i\theta}$ y $\zeta = re^{i\nu}$ donde $0 < r < 1$ y $|\theta - \nu| \leq k(1-r)$, entonces

$$e^{-2k} \lambda(\zeta) \leq \lambda(z) \leq e^{2k} \lambda(\zeta).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos $\nu \leq \theta$.

$$\begin{aligned} \log \frac{\lambda(z)}{\lambda(\zeta)} &= \int_\nu^\theta \frac{\partial}{\partial s} \log \lambda(re^{is}) ds \\ &= \int_\nu^\theta 2\operatorname{Re} \{ \partial_z \log \lambda(re^{is}) ire^{is} \} ds. \end{aligned}$$

Por el lema 2.1 se obtiene que

$$\left| \log \frac{\lambda(z)}{\lambda(\zeta)} \right| \leq \int_\nu^\theta \frac{2r}{1-r^2} ds \leq \frac{2rk}{1+r} \leq 2k,$$

de donde

$$e^{-2k} \lambda(\zeta) \leq \lambda(z) \leq e^{2k} \lambda(\zeta). \quad \square$$

En el próximo corolario y en lo que sigue, dada una función f armónica, Σ denotará la superficie mínima $\tilde{f}(\mathbb{D})$ y como es costumbre, d_Σ es la métrica en la superficie. Además, $d_f(z)$ representará el número real extendido dado por

$$d_f(z) := \sup \left\{ r \geq 0 : B_\Sigma(\tilde{f}(z), r) \subset \Sigma \right\},$$

donde $B_\Sigma(\tilde{f}(z), r)$ es la bola en Σ con centro en $\tilde{f}(z)$ y radio r .

Cuando $\partial\Sigma$ tiene sentido, $d_f(z)$ es la distancia (en la superficie Σ) de $\tilde{f}(z)$ a la frontera $\partial\Sigma$ de Σ .

Corolario 2.4. *Si $f \in NH_0^\mu$, $0 < \mu < 1$, entonces existe $M > 0$ que solo depende de μ , tal que para todo $z_0 \in \mathbb{D}$,*

$$d_f(z_0) \leq M(1 - |z_0|^2)\lambda(z_0).$$

Demostración. Sea $z_0 = r\xi$, $\xi \in \mathbb{T}$ y $0 \leq r < 1$.

$$\begin{aligned} d_f(z_0) &\leq \int_r^1 \lambda(t\xi) dt \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \lambda(t\xi) dt \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde $a_0 = r$ y $a_i = \frac{1+a_{i-1}}{2}$. Por definición de la sucesión (a_i) , $a_i - a_{i-1} = \frac{1-r}{2^i}$ y por Corolario 2.2, $\lambda(a_i\xi) \leq 2^{i\mu}\lambda(a_0\xi)$. De aquí y (2.9) se sigue que

$$\begin{aligned} d_f(z_0) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i\mu}\lambda(a_0\xi)(a_i - a_{i-1}) \\ &\leq (1 - r)\lambda(r\xi) \sum_{i=1}^{\infty} (2^{\mu-1})^i \end{aligned}$$

y se obtiene el corolario con $M = \sum_{i=1}^{\infty} (2^{\mu-1})^i$. \square

Observación: el resultado del corolario anterior es un análogo al lado derecho de

$$\frac{1}{4}(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq d_f(z) \leq (1 - |z|^2)|f'(z)|,$$

válida para cualquier función f analítica y univalente en \mathbb{D} . Sería interesante obtener una desigualdad del mismo tipo al menos para la clase NH . En el

caso analítico, este tipo de estimativos son importantes para el estudio de dominios de John.

En relación con el lado izquierdo de la expresión anterior, en [8] los autores demuestran que si f satisface el criterio de univalencia (1.17), entonces

$$\min_{|z|=r} d_{\Sigma}(\tilde{f}(z), \tilde{f}(0)) \geq \frac{\lambda(0)G(r)}{1 + |(\partial_z \log \lambda)(0)| G(r)},$$

donde

$$G(r) = \int_0^r \frac{dt}{u^2(t)}$$

y u es la solución del problema

$$u'' - pu = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Cuando $p(t) = \frac{1}{(1-t^2)^2}$, se sigue como corolario que para todo $z_0 \in \mathbb{D}$,

$$\min_{\left| \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} \right|=r} d_{\Sigma}(\tilde{f}(z), \tilde{f}(z_0)) \geq \frac{\lambda(z_0)G(r)}{1 + \left| (\partial_z \log \lambda)(z_0) - \frac{\bar{z}_0}{1-|z_0|^2} \right| G(r)}.$$

Aquí,

$$G(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1+r)^{\sqrt{2}} - (1-r)^{\sqrt{2}}}{(1+r)^{\sqrt{2}} + (1-r)^{\sqrt{2}}}.$$

Como consecuencia,

$$d_f(z_0) \geq \frac{(1-|z_0|^2)\lambda(z_0)}{\frac{1-|z_0|}{G(1)} + |(1-|z_0|^2)(\partial_z \log \lambda)(z_0) - \bar{z}_0|}. \quad (2.10)$$

De esta desigualdad y el Corolario 2.1, se concluye que existe una constante C tal que si $f \in NH$, entonces

$$(1-|z_0|^2)\lambda(z_0) \leq C d_f(z_0) \quad (2.11)$$

para todo $z_0 \in \mathbb{D}$. Notese que de la definición de G , $C = 4 + \sqrt{2}$.

Recordemos que si f es analítica y univalente en el disco, entonces

$$\frac{1}{4}(1-|z|^2)|f'(z)| \leq d_f(z) \leq (1-|z|^2)|f'(z)|$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. (2.10) es entonces un análogo en la clase NH de la primera desigualdad de la expresión anterior. Aún no está probado una desigualdad del tipo

$$d_f(z) \leq M(1 - |z|^2)\lambda(z),$$

con M independiente de z , válida al menos en la familia NH . El Teorema 2.1 es una primera aproximación, muy lejana aún, de este problema. En esta misma dirección, el Teorema 2.2 da solución al problema en la familia NH^μ , $0 < \mu < 1$.

Para el siguiente resultado, utilizaremos un teorema de comparación de Sturm. Recordemos su enunciado.

Teorema. *Sean u, v funciones positivas en (a, b) tales que $u'' + pu = 0$ y $v'' + qv = 0$, donde $p \leq q$ son continuas en (a, b) . Si existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $u(x_0) = v(x_0)$ y $u'(x_0) = v'(x_0)$, entonces $u \geq v$ en (a, b) .*

Teorema 2.1. *Si $f \in NH$, entonces*

$$\min_{|z|=r} d_\Sigma(\tilde{f}(z), \tilde{f}(0)) \leq \frac{\lambda(0)L(r)}{1 + |\partial_z \log \lambda(0)|L(r)},$$

donde

$$L(r) = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r}.$$

En particular,

$$d_f(0) \leq \frac{\lambda(0)}{|\partial_z \log \lambda(0)|}.$$

Demostración. Sea $\xi \in \mathbb{T}$, $\gamma(t) = t\xi$, ($0 \leq t \leq 1$) $\varphi(t) = \tilde{f}(\gamma(t))$ y $v(t) = \lambda(\gamma(t)) = |\varphi'(t)|$. Por un lado, de (1.9)

$$S_1\varphi = \left(\frac{v'}{v}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{v'}{v}\right)^2 + \frac{1}{2}v^2k_\varphi,$$

por otro lado, en [9] está probado que

$$S_1\varphi = \operatorname{Re} \left\{ (Sf \circ \gamma)(\gamma')^2 \right\} + \frac{1}{2}(\lambda^2 \circ \gamma)(|K \circ \varphi| + |\Pi(V, V)|^2) + \frac{1}{2}k_\gamma^2.$$

Aquí, k_φ y k_γ denotan la curvatura de φ y de γ , respectivamente, K es la curvatura de la superficie mínima Σ y V es el campo vectorial tangente unitario (en la norma euclídeana) a lo largo de φ .

Dado que en nuestro caso $k_\gamma \equiv 0$ y si k_g denota la curvatura geodésica de φ , $k_\varphi^2 = k_g^2 + |\Pi(V, V)|^2$, se obtiene igualando las dos expresiones de $S_1\varphi$ que

$$\left(\frac{v'}{v}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{v'}{v}\right)^2 + \frac{1}{2}v^2k_g^2 = \operatorname{Re}\{(Sf \circ \gamma)(\gamma')^2\} + \frac{1}{2}(\lambda^2 \circ \gamma)|K \circ \varphi|.$$

De aquí y (1.17) se sigue que

$$Sh(t) \leq \frac{2}{(1-t^2)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.12)$$

donde

$$h(t) = \int_0^t v(s)ds.$$

Ahora consideremos la solución w del problema con valor inicial (PVI)

$$w'' + \frac{1}{2}(Sh)w = 0, \quad w(0) = \lambda^{-1/2}(0), \quad w'(0) = -\lambda^{-3/2}(0) \operatorname{Re}\{\partial_z\lambda(0)\xi\}$$

y la solución y del PVI

$$y'' + py = 0, \quad y(0) = \lambda^{-1/2}(0), \quad y'(0) = \lambda^{-3/2}(0) |\partial_z\lambda(0)|,$$

con $p(t) = \frac{1}{(1-t^2)^2}$, $0 < t < 1$. Tomando ξ en tal forma que $\operatorname{Re}\{\partial_z\lambda(0)\xi\} = -|\partial_z\lambda(0)|$, se tiene que las condiciones iniciales de los PVI anteriores coinciden. De aquí y (2.12) se concluye por el teorema de comparación de Sturm que $y \leq w$ en $[0, 1)$.

Las soluciones están dadas por $w = v^{-1/2}$ y

$$y(t) = u(t) \{y(0) + y'(0)L(t)\}$$

donde u es la solución del PVI

$$\begin{cases} u'' + pu = 0 \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Finalmente, como $y \leq w$ y y es no negativa, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^r v(t)dt &\leq \int_0^r \frac{1}{u^2(t)} \frac{1}{(y(0) + y'(0)L(t))^2} dt \\ &= \int_0^{L(r)} \frac{dt}{(y(0) + y'(0)t)^2} \end{aligned}$$

y obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^r \lambda(t\xi) dt &\leq \frac{1}{y'(0)} \left\{ \frac{1}{y(0)} - \frac{1}{y(0) + y'(0)L(r)} \right\} \\ &= \frac{\lambda(0)L(r)}{1 + |(\partial_z \log \lambda)(0)|L(r)} \end{aligned}$$

si $y'(0) \neq 0$. Si $y'(0) = 0$, se sigue

$$\int_0^r \lambda(t\xi) dt \leq \lambda(0)L(r).$$

El caso particular se obtiene al tomar límite cuando $r \rightarrow 1$. \square

Corolario 2.5. *Sea $f \in NH$. Para todo $z_0 \in \mathbb{D}$, existe $\xi \in \mathbb{T}$ que satisface*

$$\int_{S(\xi, z_0)} \lambda(z) dz \leq \frac{\lambda(z_0)}{\left| (\partial_z \log \lambda)(z_0) - \frac{\bar{z}_0}{1-|z_0|^2} \right|} = \frac{(1-|z_0|^2)\lambda(z_0)}{|(1-|z_0|^2)(\partial_z \lambda)(z_0) - \bar{z}_0|}$$

donde $S(\xi, z_0)$ denota el segmento no euclideo que une z_0 y ξ .

Demostración. Es suficiente notar que si $f \in NH$ y T es un automorfismo del disco, entonces $g = f \circ T \in NH$ y la imagen bajo T del segmento $[0, \xi]$ es el segmento no euclidiano $S(T(\xi), T(0))$. \square

Finalicemos este capítulo con una generalización del Corolario 2.4. En la prueba utilizaremos unos estimativos para funciones reales cuya demostración sigue la misma idea que la del Lema 2.1, por lo que omitiremos detalles.

Sea g una función real suave definida en $(-1, 1)$ tal que $g'(t) > 0$ para todo t y $g''(0) = 0$. Supongamos además que la derivada Schwarziana de g verifica la desigualdad

$$Sg(t) \leq \frac{2\mu}{(1-t^2)^2}, \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

en $(-1, 1)$. Esta condición implica que la función $y = \frac{1}{2} \frac{g''}{g'}$ satisface

$$y'(t) \leq y^2(t) + \frac{2\mu}{(1-t^2)^2},$$

de donde

$$\frac{g''}{g'}(t) \leq 2\mu \frac{t}{1-t^2}, \quad 0 \leq t < 1. \quad (2.13)$$

Procediendo como en la prueba del Corolario 2.2, obtenemos que

$$g'(\rho) \leq 2^\mu g'(r),$$

$0 \leq r \leq \rho \leq \frac{1+r}{2}$. Finalmente, como en el Corolario 2.4, concluimos que

$$\int_r^1 g'(t) dt \leq M(1-r^2)g'(r), \quad 0 \leq r < 1, \quad (2.14)$$

donde $M = \sum_{i=1}^{\infty} (2^{\mu-1})^i$.

Notando que la función $h(t) = -g(-t)$, $-1 < t < 1$, satisface las mismas condiciones que g , obtenemos

$$\frac{g''}{g'}(t) \geq 2\mu \frac{t}{1-t^2}, \quad -1 < t < 0,$$

lo que implica que

$$g'(\rho) \geq \frac{1}{2^\mu} g'(r), \quad \frac{\rho-1}{2} \leq r \leq \rho.$$

De aquí se sigue

$$\int_{-1}^r g'(t) dt \leq M(1-r^2)g'(r), \quad -1 < r \leq 0. \quad (2.15)$$

Como arriba, $M = \sum_{i=1}^{\infty} (2^{\mu-1})^i$.

Teorema 2.2. *Si $f \in NH^\mu$, $0 < \mu < 1$, entonces existe una constante $M > 0$ (que solo depende de μ) tal que para todo $z_0 \in \mathbb{D}$,*

$$d_f(z_0) \leq M(1-|z_0|^2)\lambda(z_0). \quad (2.16)$$

Demostración. Por un lado, como $0 < \mu < 1$, entonces se cumple la desigualdad estricta en (1.17) con la función de Nehari $p(t) = \frac{1}{(1-t^2)^2}$, por lo que el levantamiento \tilde{f} es univalente en $\overline{\mathbb{D}}$. Así, existe al menos un diámetro $\gamma(t) = t\xi$, $-1 < t < 1$ y $\xi \in \mathbb{T}$ tal que la curva $\varphi = \tilde{f} \circ \gamma$ tiene longitud finita. Después de una rotación si es necesario, podemos suponer que $\xi = 1$. Así,

$$\int_{-1}^1 |\varphi'(t)| dt = \int_{-1}^1 \lambda(t) dt < \infty.$$

De otro lado, siguiendo el mismo argumento de la demostración del Teorema 2.1, concluimos que

$$Sh(t) \leq \frac{2\mu}{(1-t^2)^2}, \quad (2.17)$$

donde

$$h(t) = \int_0^t |\varphi'(s)| ds$$

es la función longitud de arco de φ .

Ahora, consideremos la función

$$x(s) = \frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1}, \quad -\infty < s < \infty$$

que es una función biyectiva y creciente de \mathbb{R} sobre $(-1, 1)$ con inversa

$$s(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Además, x satisface la ecuación diferencial $x' = 1 - x^2$. Probemos que si

$$u(t) = u_h(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)h'(t)}}, \quad -1 < t < 1,$$

entonces $v = u \circ x$ es convexa.

En primer lugar, notemos que $v = (w \circ x)/\sqrt{x'}$, donde $w = 1/\sqrt{h'}$. Además, recordemos que w es solución de la ecuación diferencial

$$w'' + \frac{1}{2}(Sh)w = 0. \quad (2.18)$$

Derivando $\log v$, se obtiene

$$\frac{v'}{v} = \frac{(w' \circ x)x'}{w \circ x} - \frac{1}{2} \frac{x''}{x'}.$$

Como $x' = 1 - x^2$, entonces $x'' = -2xx'$ y se sigue que

$$\frac{v'}{v} = \frac{(w' \circ x)x'}{w \circ x} + x,$$

de donde

$$\frac{v''}{v} - \left(\frac{v'}{v}\right)^2 = \frac{(w' \circ x)x''}{w \circ x} + (x')^2 \frac{w'' \circ x}{w \circ x} - \frac{(w' \circ x)^2 (x')^2}{(w \circ x)^2} + x'.$$

De aquí, (2.18) y de nuevo la igualdad $x'' = -2xx'$, obtenemos que v satisface la ecuación diferencial

$$v''(s) = \left(1 - (1 - x^2(s))^2 \frac{1}{2} Sh(x(s)) \right) v.$$

Finalmente, (2.17) implica que la expresión que aparece dentro del parentesis es no negativa, de donde se sigue la convexidad de v .

El siguiente paso es probar que u tiene un mínimo absoluto demostrando que

$$u(t) \rightarrow +\infty \text{ cuando } |t| \rightarrow 1.$$

Como la curva φ tiene longitud finita, se sigue que la integral

$$\int_0^1 |\varphi'(t)| dt = \int_0^1 h'(t) dt = \int_0^\infty h'(x(s)) x'(s) ds = \int_0^\infty \frac{ds}{v^2(s)}$$

es finita, por tanto existe una sucesión (s_n) creciente y no acotada de números positivos tal que $v(s_n) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. La convexidad de v implica que $v(s) \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow \infty$. Como $v(s) = u(x(s))$ y $x(s) \rightarrow 1$ si y solo si $s \rightarrow \infty$, entonces $u(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 1$. Similarmente, obtenemos que $u(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow -1$.

Ahora podemos asegurar que existe $t_0 \in (-1, 1)$ tal que $u'(t_0) = 0$ y procederemos como se hizo en la prueba del Corolario 2.1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $t_0 \geq 0$ y consideremos la función $T(s) = \frac{t_0 - s}{1 - t_0 s}$ que es biyectiva de $(-1, 1)$ sobre $(-1, 1)$, decreciente y satisface

$$\frac{|T'(s)|}{1 - |T(s)|^2} = \frac{1}{1 - |s|^2}.$$

Se sigue que si $g = -h \circ T$, entonces

$$u_g(s) = \frac{1}{\sqrt{(1 - s^2)g'(s)}} = u_h(T(s))$$

y por lo tanto

$$u'_g(0) = u'_h(T(0))T'(0) = 0.$$

De aquí y la igualdad

$$\frac{u'_g(s)}{u_g(s)} = \frac{s}{1 - s^2} - \frac{1}{2} \frac{g''(s)}{g'(s)},$$

se concluye que $g''(0) = 0$.

Obeservese que de la definición de g y (2.17),

$$\begin{aligned} Sg(s) &= S(h \circ T(s)) \\ &= (Sh \circ T(s))(T'(s))^2 \\ &\leq 2\mu \frac{(T'(s))^2}{(1 - |T(s)|^2)^2} \\ &\leq \frac{2\mu}{(1 - |s|^2)^2}, \end{aligned}$$

$-1 < s < 1$. La condición sobre μ implica que g satisface (2.14), esto es,

$$\int_r^1 g'(t)dt \leq M(1 - r^2)g'(r), \quad 0 \leq r < 1,$$

donde M es una constante positiva que solo depende de μ . Notese que g también satisface (2.15).

Probemos (2.16) primero cuando z_0 es un número real r .

Caso 1: Supongamos que $r \leq t_0$. Por definición de g se tiene que

$$\begin{aligned} d_f(r) &\leq \int_{-1}^r h'(t)dt \\ &\leq \int_1^{T^{-1}(r)} h'(T(s))T'(s)ds \\ &\leq \int_{T^{-1}(r)}^1 g'(s)ds. \end{aligned}$$

Como T es decreciente, entonces $T^{-1}(r) \geq T^{-1}(t_0) = 0$, de donde en virtud de (2.14), se sigue que

$$d_f(r) \leq M(1 - |T^{-1}(r)|^2)g'(T^{-1}(r)).$$

Pero $g'(T^{-1}(r)) = h'(r)|T'(T^{-1}(r))|$ y $(1 - s^2)|T'(s)| = 1 - |T(s)|^2$, entonces

$$d_f(r) \leq M(1 - r^2)h'(r) = M(1 - r^2)\lambda(r)$$

y se sigue el Caso 1.

Caso 2: Supongamos que $r \geq t_0$ y sea $S(\zeta) = \frac{r-\zeta}{1-r\zeta}$ y $F = f \circ S$. Como S es un automorfismo del disco, $F \in NH^\mu$. Además, $\lambda_F = (\lambda_f \circ S)|S'|$ y

como r es real, S transforma el diámetro $(-1, 1)$ en si mismo. Así, la curva $\psi(t) = \tilde{F}(t)$, $-1 < t < 1$ tiene largo finito.

Si h_1 denota la función longitud de arco de ψ , entonces

$$h_1'(t) = |\psi'(t)| = \lambda_F(t) = \lambda_f(S(t))|S'(t)| = h(S(t))|S'(t)|,$$

de donde obtenemos que

$$u_{h_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)h_1'(t)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)h(S(t))|S'(t)|}} = u_h(S(t)).$$

La regla de la cadena y el hecho que t_0 es un punto crítico de u implican que $S^{-1}(t_0)$ es un punto crítico de u_{h_1} . Un cálculo directo muestra que

$$S^{-1}(t_0) = \frac{r - t_0}{1 - rt_0} \geq 0$$

porque $r \geq t_0$. Se sigue del Caso 1 que

$$d_F(s) \leq M(1 - s^2)h_1'(s)$$

para todo $s \leq S^{-1}(t_0)$. En particular, si $s = 0$, se concluye que

$$d_f(r) = d_F(0) \leq Mh_1'(0) = M(1 - r^2)h'(r)$$

y se sigue el Caso 2. Así, se ha probado (2.16) si z_0 pertenece al diámetro $(-1, 1)$.

Como comentario, se ha podido probar el Caso 2 usando (2.15) y procediendo como en el Caso 1, específicamente se obtiene que

$$d_f(r) \leq \int_r^1 h'(t)dt \leq M(1 - r^2)\lambda(r), \quad t_0 \leq r.$$

Finalmente, dado $z_0 \in \mathbb{D}$ existe $\xi \in \mathbb{T}$ tal que si γ es el segmento hiperbólico que pasa por ξ y z_0 , entonces la curva $\varphi = \tilde{f} \circ \gamma$ tiene largo finito. Esto es consecuencia del hecho que \tilde{f} es inyectiva en la clausura de \mathbb{D} . Escojamos un automorfismo T del disco que envíe el diámetro $(-1, 1)$ a γ en tal forma que $T(0) = z_0$ y $|T'(0)| = 1 - |z_0|^2$ y consideremos el mapeo armónico $F = f \circ T$. Sabemos que $F \in NH^\mu$ y la curva $\psi(t) = \tilde{F}(t)$, $-1 < t < 1$ tiene largo finito. Por lo probado anteriormente se sigue que

$$d_F(r) \leq M(1 - r^2)\lambda_F(r), \quad -1 < r \leq 1,$$

pero $\lambda_F = (\lambda \circ T)|T'|$, entonces para $r = 0$ obtenemos

$$d_f(z_0) = d_F(0) \leq M\lambda_F(0) = \lambda_f(T(0))|T'(0)| = (1 - |z_0|^2)\lambda_f(z_0),$$

lo que completa la prueba. \square

Capítulo 3

Algunos resultados sobre dominios de John

Este capítulo contiene los resultados principales de la tesis. En la primera sección demostramos algunos teoremas válidos en la clase de superficies mínimas estudiadas antes. En la segunda sección presentamos resultados análogos en una clase de curvas holomorfas que definiremos después.

3.1. Dominios de John sobre superficies mínimas

Teorema 3.1. *Si $f \in NH_0^\mu$, $0 < \mu < 1$, entonces*

a.) $\Sigma = \tilde{f}(\mathbb{D})$ es un dominio de John con centro $\tilde{f}(0) = p$ y las curvas $\gamma_\xi(t) = \tilde{f}(t\xi)$, $0 \leq t \leq 1$, son curvas de John.

b.) Existen $\alpha \in (0, 1)$ y $K > 0$ (que solo dependen de μ) tales que

$$\frac{(1 - \rho^2)\lambda(\rho\xi)}{(1 - r^2)\lambda(r\xi)} \leq K \left(\frac{1 - \rho}{1 - r} \right)^\alpha, \quad (3.1)$$

donde $\xi \in \mathbb{T}$ y $0 \leq r < \rho < 1$.

c.) Existen $\alpha \in (0, 1)$ y $K_1 > 0$ (que solo dependen de μ) tales que para todo $z = re^{it} \in \mathbb{D}$,

$$\frac{(1 - |\zeta|^2)\lambda(\zeta)}{(1 - |z|^2)\lambda(z)} \leq K_1 \left(\frac{1 - |\zeta|}{1 - |z|} \right)^\alpha, \quad \zeta \in B(z), \quad (3.2)$$

donde $B(re^{it}) := \{\rho e^{i\theta} : r \leq \rho \leq 1, |\theta - t| \leq \pi(1 - r)\}$.

Demostración. a.) Dado $q \in \Sigma$, $q \neq p$ existe un único $\xi \in \mathbb{T}$ y $\rho \in (0, 1)$ tales que $q = \tilde{f}(\rho\xi)$. La curva $\gamma_\xi(t) = \tilde{f}(t\xi)$, $0 \leq t \leq \rho$ tiene extremos en p y q y además, si y es un punto de la curva, y es de la forma $\tilde{f}(r\xi)$ para algún $r \in (0, \rho)$. Procediendo como en la prueba del Corolario 2.4, obtenemos

$$\begin{aligned} \ell(\gamma_\xi(y, q)) &= \int_r^\rho \lambda(t\xi) dt \\ &\leq \int_r^1 \lambda(t\xi) dt \\ &\leq M(1 - r^2)\lambda(r\xi), \end{aligned}$$

donde $M = \sum_{i=1}^{\infty} (2^{\mu-1})^i > 1$. De aquí y (2.11), se concluye que

$$\ell(\gamma_\xi(y, q)) \leq bd_f(r\xi) = d_\Sigma(y, \partial\Sigma),$$

con $b = MC > 1$ y se sigue a.).

b.) Sea $\xi \in \mathbb{T}$. Sabemos que la función

$$\varphi(r) = \int_r^1 \lambda(t\xi) dt$$

satisface

$$\varphi(r) \leq M(1 - r^2)\lambda(r\xi), \quad M > 1. \quad (3.3)$$

Esta desigualdad y $\varphi'(r) = -\lambda(r\xi)$, implican que si $0 < r < \rho < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \log \frac{\varphi(\rho)}{\varphi(r)} &= \int_r^\rho \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt \\ &\leq -\frac{1}{M} \int_r^\rho \frac{dt}{1 - t^2} dt \\ &\leq \frac{1}{2M} \log \frac{1 - \rho}{1 - r}. \end{aligned}$$

Así,

$$\varphi(\rho) \leq \varphi(r) \left(\frac{1 - \rho}{1 - r} \right)^{1/2M}. \quad (3.4)$$

De otro lado, por el Corolario 2.2,

$$\begin{aligned} \varphi(\rho) &\geq \int_\rho^{(1+\rho)/2} \lambda(t\xi) dt \\ &\geq \frac{1}{4}(1 - \rho)\lambda(\rho\xi), \end{aligned}$$

de donde

$$\varphi(\rho) \geq \frac{1}{8}(1 - \rho^2)\lambda(\rho\xi).$$

De aquí, (3.3) y (3.4) obtenemos

$$\frac{1}{8}(1 - \rho^2)\lambda(\rho\xi) \leq M(1 - r^2)\lambda(r\xi) \left(\frac{1 - \rho}{1 - r} \right)^{1/2M}$$

y por tanto,

$$\frac{(1 - \rho^2)\lambda(\rho\xi)}{(1 - r^2)\lambda(r\xi)} \leq K \left(\frac{1 - \rho}{1 - r} \right)^\alpha,$$

donde $\alpha = \frac{1}{2M} \in (0, 1)$ y $K = 8M$.

c.) Sea $\zeta = \rho e^{i\theta} \in B(z)$. Por Corolario 2.3, $\lambda(\zeta) < e^\pi \lambda(\rho e^{it})$. De aquí y b.), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{(1 - |\zeta|^2)\lambda(\zeta)}{(1 - |z|^2)\lambda(z)} &\leq e^\pi \frac{(1 - \rho^2)\lambda(\rho e^{it})}{(1 - r^2)\lambda(r e^{it})} \\ &\leq e^\pi K \left(\frac{1 - \rho}{1 - r} \right)^\alpha \end{aligned}$$

y se sigue (3.2) con $K_1 = e^\pi K$. □

Notese que en NH_0 , las condiciones b.) y c.) son equivalentes.

Corolario 3.1. *Sea $0 < \mu < 1$ y $f \in NH^\mu$ tal que $\tilde{f}(\mathbb{D})$ es acotado. Entonces $\tilde{f}(\mathbb{D})$ es un dominio de John.*

Demostración. Con la notación del Corolario 2.1, $g = f \circ \varphi \in NH_0^\mu$. Por tanto, por el teorema anterior, $\tilde{f}(\mathbb{D}) = \tilde{g}(\mathbb{D})$ es un dominio de John lo que prueba el corolario. □

En general, no es cierto que si $f \in NH$, Σ sea un dominio de John. Probaremos que lo es, si además f satisface (3.1). Comparese con el Teorema 1.3.

Teorema 3.2. *Sea $f \in NH$ y supongamos que existen $\alpha \in (0, 1)$ y $K > 0$ (que sólo dependen de μ) tales que se satisface (3.1), esto es,*

$$\frac{(1 - \rho^2)\lambda(\rho\xi)}{(1 - r^2)\lambda(r\xi)} \leq K \left(\frac{1 - \rho}{1 - r} \right)^\alpha,$$

donde $\xi \in \mathbb{T}$ y $0 \leq r < \rho < 1$. Entonces $\Sigma = \tilde{f}(\mathbb{D})$ es un dominio de John con centro $\tilde{f}(0) = p$ y las curvas $\gamma_\xi(t) = \tilde{f}(t\xi)$, $0 \leq t \leq 1$ son curvas de John.

Demostración. En primer lugar, probemos que Σ es acotada. La condición (3.1) con $r = 0$ implica que

$$\lambda(\rho\xi) \leq K_1 \frac{1}{(1-\rho)^{1-\alpha}},$$

$\xi \in \mathbb{T}$ y $0 < \rho < 1$. Dado $\tilde{f}(\rho\xi)$ un punto cualquiera de Σ , se sigue de la desigualdad anterior que

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(\rho\xi) - \tilde{f}(0)| &\leq \int_0^\rho \lambda(t\xi) dt \\ &\leq K_1 \int_0^1 \frac{dt}{(1-\rho)^{1-\alpha}} \\ &\leq \frac{K_1}{\alpha}, \end{aligned}$$

de donde Σ es acotada. De otro lado, en virtud del Corolario 2.1, existe una constante M independiente de f tal que

$$\left| \frac{\partial \log \lambda}{\partial z}(z) \right| \leq \frac{M}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (3.5)$$

De aquí y (2.10), obtenemos que para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$(1-|z|^2)\lambda(z) \leq C d_f(z),$$

con $C = 1 + \sqrt{2} + M$.

Para finalizar la prueba, dado $q \in \Sigma$, $q \neq p$ existe un único $\xi \in \mathbb{T}$ y $\rho \in (0, 1)$ tal que $q = \tilde{f}(\rho\xi)$. La curva $\gamma_\xi(t) = \tilde{f}(t\xi)$, $0 \leq t \leq \rho$ tiene extremos en p y q y además, si y es un punto de la curva, y es de la forma $\tilde{f}(r\xi)$ para algún $r \in (0, \rho)$. Por (3.1), se tiene que

$$\begin{aligned} \ell(\gamma_\xi(y, q)) &= \int_r^\rho \lambda(t\xi) dt \\ &\leq K(1-r)^{1-\alpha} \lambda(r\xi) \int_r^\rho \frac{dt}{(1-t)^{1-\alpha}} \\ &\leq \frac{K}{\alpha} (1-r^2) \lambda(r\xi), \end{aligned}$$

De donde concluimos que

$$\ell(\gamma_\xi(y, q)) \leq b d_f(r\xi) = d_\Sigma(y, \partial\Sigma),$$

con $b = KC/\alpha$. □

Nótese que en este caso, aún si α y K dependen de f , podemos concluir que $\Sigma = \tilde{f}(\mathbb{D})$ es un dominio de John, pero b dependerá de f .

Como lo anotamos en la Sección 1.2, en [15] está probado que para $f \in N$, la condición

$$\limsup_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) \left| \frac{f''}{f'}(z) \right| < 2$$

implica que $f(\mathbb{D})$ es un dominio de John. El siguiente teorema generaliza este resultado.

Teorema 3.3. *Sea $f \in NH$. Si*

$$\limsup_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |\partial_z \log \lambda(z)| < 1, \quad (3.6)$$

entonces $\Sigma = \tilde{f}(\mathbb{D})$ es un dominio de John con centro $p = \tilde{f}(0)$. Además las curvas $\gamma_\xi(t) = \tilde{f}(t\xi)$ son curvas de John para todo $\xi \in \mathbb{T}$.

Demostración. Por definición de limite superior, existe una constante M tal que se cumple (3.5). Así, de la prueba del Teorema 3.2, es suficiente probar que existe r_0 tal que (3.1) se satisface para $0 < r_0 \leq r < \rho < 1$. Veámoslo. Por (3.6), existe $0 < \beta < 1$ y $\beta \leq r_0 < 1$ tal que

$$(1 - |z|^2) |\partial_z \log \lambda(z)| \leq \beta < 1$$

si $r_0 \leq |z| < 1$. Así, si $r_0 \leq r < \rho < 1$ y $\xi \in \mathbb{T}$, entonces

$$\begin{aligned} \log \frac{(1 - \rho^2)^2 \log \lambda(\rho\xi)}{(1 - r^2) \log \lambda(r\xi)} &= \int_r^\rho \frac{\partial}{\partial t} \log(1 - t^2) \lambda(t\xi) dt \\ &= 2 \int_r^\rho \operatorname{Re} \left\{ \xi \partial_z \log \lambda(t\xi) - \frac{t}{1 - t^2} \right\} dt \\ &< \int_r^\rho \frac{-2\alpha}{1 - t^2} dt, \end{aligned}$$

donde $\alpha = r_0 - \beta$. De aquí,

$$\log \frac{(1 - \rho^2)^2 \log \lambda(\rho\xi)}{(1 - r^2) \log \lambda(r\xi)} \leq \log \left(\frac{1 - \rho}{1 - r} \right)^\alpha \left(\frac{1 + r}{1 + \rho} \right)^\alpha.$$

Así, (3.1) se satisface si $0 < r_0 \leq r \leq \rho < 1$. □

Sea p una función de Nehari y $c = \lim_{t \rightarrow 1} (1-t^2)^2 p(t)$. Un argumento de comparación de soluciones de ecuaciones diferenciales muestra que $c \leq 1$ [10]. En el mismo artículo se demuestra que $c = 1$ implica $p(t) = \frac{1}{(1-t^2)^2}$. Abajo probaremos que si $c < 1$ y f satisface el criterio de univalencia (1.17), entonces $\tilde{f}(\mathbb{D})$ es un dominio de John. La función $L(z)$ estudiada antes, demuestra que la conclusión es falsa si $c = 1$.

Teorema 3.4. *Suponga que f es una función armónica que satisfice*

$$|\mathcal{S}f(z)| + \lambda^2(z)|K(z)| \leq 2p(|z|)$$

y sea $c = \lim_{t \rightarrow 1} (1-t^2)^2 p(t)$. Si $c < 1$ y $\tilde{f}(\mathbb{D})$ es acotado, entonces $\tilde{f}(\mathbb{D})$ es un dominio de John con centro en $p = \tilde{f}(0)$.

Demostración. La demostración es una aplicación de los resultados probados en la clase NH^μ , $0 < \mu < 1$ e imita un argumento usado en la demostración del Teorema 4 de [30]. Usaremos la misma notación de esta prueba.

La condición sobre c implica que existen $\delta > 0$ y $0 < r_1 < 1$ tales que

$$|\mathcal{S}f(z)| + \lambda^2(z)|K(z)| \leq \frac{2-5\delta}{(1-|z|^2)^2} \quad (3.7)$$

en el anillo $r_1 < |z| < 1$. Para $\alpha > 0$, consideremos la función

$$\varphi(\xi) = e^{-i\pi\delta/2} \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{1-\delta} - i\alpha$$

cuya Schwarziana viene dada por

$$S_\varphi(\xi) = \frac{2\delta(2-\delta)}{(1-\xi^2)^2}, \quad \xi \in \mathbb{D} \quad (3.8)$$

y que transforma conformemente el disco sobre un subdominio Ω en el semiplano derecho en forma de cuña, con vértice en $-i\alpha$, uno de los lados es el rayo $[-i\alpha, -i\infty]$ y forma un ángulo de $\pi(1-\delta)$ en el vértice. Ω se ilustra en la Figura 3.1.

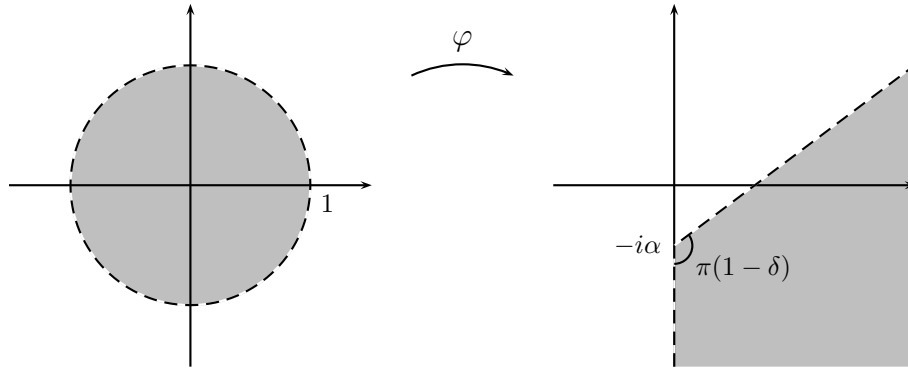


Figura 3.1

Se sigue que la aplicación

$$\psi(\xi) = e^{i\theta} \frac{\varphi(\xi) - 1}{\varphi(\xi) + 1}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

transforma el disco sobre un subdominio H de \mathbb{D} , acotado por un arco de la frontera de \mathbb{D} (la imagen del rayo $[-i\alpha, -i\infty]$ bajo ψ) y un segmento circular S en el interior del disco, S es la imagen bajo ψ del otro lado de la cuña Ω . S intersecta a \mathbb{T} en la imagen de los puntos $-i\alpha$ y ∞ bajo la transformación de Möbius $T(z) = e^{i\theta}(z-1)/(z+1)$, esto es, en los puntos $e^{i\theta}$ y $e^{i\theta}(\alpha-i)/(\alpha+i)$. H se ilustra en la Figura 3.2.

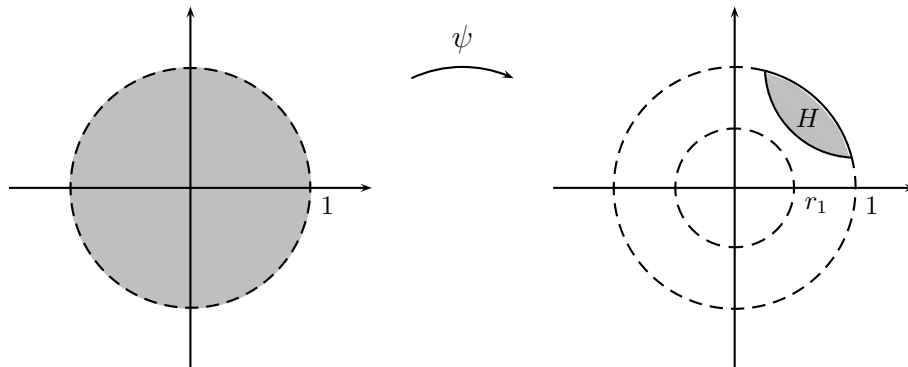


Figura 3.2

Nótese que como el argumento de $(\alpha - i)/(\alpha + i)$ es negativo, entonces la porción de la frontera de H sobre \mathbb{T} es de la forma

$$\{e^{it} : \theta - \beta \leq t \leq \theta\},$$

donde β solo depende de α . El ángulo en la intersección es $\pi(1 - \delta)$. Dado que este ángulo de intersección y uno de los puntos de corte no depende de α , podemos tomar α en tal forma que H esté contenido en el anillo $r_1 < |z| < 1$. Fijado este valor de α y el valor correspondiente de β , existen entonces un número finito de dominios congruentes $H = H(\theta)$ cuya unión cubre un anillo de la forma $r_2 < |z| < 1$, donde $r_1 < r_2 < 1$. Sean H_1, \dots, H_n tales dominios.

De otro lado, si H representa uno de los dominios H_k , y ψ la función correspondiente, obtenemos de (3.8) y de la igualdad $\psi = T \circ \varphi$ que

$$S_\psi(\xi) = S_\varphi(\xi) = \frac{2\delta(2 - \delta)}{(1 - \xi^2)^2}, \quad \xi \in \mathbb{D}. \quad (3.9)$$

Dado que $H = \psi(\mathbb{D}) \subset \{r_1 < |z| < 1\}$, se sigue de (1.15), (1.18), (3.7) y (3.9) que la función armónica $h = f \circ \psi$ satisface

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}h(\xi)| + \lambda_h^2(\xi)|K_h(\xi)| &\leq |\mathcal{S}f(\psi(\xi))||\psi'(\xi)|^2 + |S_\psi(\xi)| + \lambda_f^2(\psi(\xi))|\psi'(\xi)|^2|K_f(\psi(\xi))| \\ &\leq \frac{2 - 5\delta}{(1 - |\psi(\xi)|^2)^2}|\psi'(\xi)|^2 + \frac{2\delta(2 - \delta)}{(1 - |\xi|^2)^2}. \end{aligned}$$

Como ψ es analítica del disco en el disco, entonces

$$\frac{|\psi'(\xi)|}{1 - |\psi(\xi)|^2} \leq \frac{1}{1 - |\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbb{D},$$

de donde

$$|\mathcal{S}h(\xi)| + \lambda_h^2(\xi)|K_h(\xi)| \leq \frac{2 - \delta}{(1 - |\xi|^2)^2}$$

y por lo tanto, $h \in NH^\mu$, donde $\mu = (2 - \delta)/2 < 1$. Se sigue del Corolario 3.1 que $\tilde{f}(H) = \tilde{h}(\mathbb{D})$ es un dominio de John.

Así, hemos construido un número finito de dominios H_1, \dots, H_n que cubren un anillo de la forma $r_2 < |z| < 1$ y tal que $\tilde{f}(H_k)$ es un dominio de John para $k = 1, \dots, n$. Denotemos por $p_k = \tilde{f}(r_k \xi_k)$ el centro del dominio de John $\tilde{f}(H_k)$ y por b_k la constante de (1.10). Aquí, $0 < r_k < 1$ y $\xi_k \in \mathbb{T}$. Sea además $\Sigma_2 = \tilde{f}(\{|z| \leq r\})$ y $M = \max\{\lambda(z) : |z| \leq r\}$.

Dado $q \in \Sigma_2$, $q \neq p$, existe un único $\xi \in \mathbb{T}$ y $0 < r \leq r_2$ tales que $q = \tilde{f}(r\xi)$. Si $\gamma(t) = \tilde{f}(t\xi)$, $0 \leq t \leq r$ y $y \in \gamma$, entonces

$$\begin{aligned} \ell(\gamma(y, q)) &\leq \int_0^{r_2} \lambda(t\xi) dt \\ &\leq \frac{M}{K_1} d(y, \partial\tilde{f}(\mathbb{D})) \end{aligned}$$

donde $K_1 = \text{dist}(\Sigma_2, \partial\tilde{f}(\mathbb{D})) > 0$.

Consideremos ahora $q \notin \Sigma_2$. Existe z en algún H_k tal que $q = \tilde{f}(z)$. Sea α la curva de John desde p_k a q , $\alpha_k(t) = \tilde{f}(t\xi_k)$, $0 \leq t \leq r_k$ y $\gamma_k = \alpha_k + \alpha$. Si $y \in \alpha$, sabemos que

$$\ell(\gamma_k(y, q)) = \ell(\alpha(y, q)) \leq b_k d(y, \partial\tilde{f}(\mathbb{D})).$$

Finalmente, la compacidad de $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ garantiza la existencia de una constante positiva K_2 que satisface $d(y, \partial\tilde{f}(\mathbb{D})) \geq K_2$ para todo $y \in \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$. De aquí se sigue inmediatamente que

$$\ell(\gamma(y, q)) \leq \int_0^{r_k} \lambda(t\xi_k) dt + \ell(\alpha) \leq I + b_k d(p_k, \partial\tilde{f}(\mathbb{D})),$$

donde I es el máximo de las k integrales. Se concluye que

$$\ell(\gamma(y, q)) \leq \frac{K_3}{K_2} d(y, \partial\tilde{f}(\mathbb{D})),$$

donde K_3 es el máximo de las cantidades $I + b_k d(p_k, \partial\tilde{f}(\mathbb{D}))$. Así, $\tilde{f}(\mathbb{D})$ es un b -dominio de John con $b = \max\{M/K_1, K_3/K_2, b_k\}$, lo que completa la prueba. \square

Finalicemos esta sección con una condición necesaria para que un subdominio de una superficie sea un dominio de John.

Teorema 3.5. *Supongamos que $\Sigma = \tilde{f}(\mathbb{D})$ es un b -dominio de John. Dada una crosscut γ de \mathbb{D} que no pasa por el origen, sean $\Gamma = \tilde{f}(\gamma)$ y $H(\Gamma) = \tilde{f}(H(\gamma))$. Existe K , independiente de γ , tal que*

$$\text{diam } H(\Gamma) \leq K \text{ diam } \Gamma.$$

Demostración. Sean $X, Y \in H(\Gamma)$, γ_x, γ_y curvas de John con extremos en p, X y p, Y respectivamente. Estas curvas intersectan a Γ en al menos un punto que denotaremos por p_x y p_y respectivamente. Por hipótesis se tiene que

$$l(\gamma_x[p_x, X]) \leq b d(p_x, \partial\Sigma) \quad \text{y} \quad l(\gamma_y[p_y, Y]) \leq b d(p_y, \partial\Sigma).$$

se sigue que,

$$d_\Sigma(X, Y) \leq d_\Sigma(X, p_x) + d_\Sigma(p_x, p_y) + d_\Sigma(p_y, Y)$$

de donde se obtiene el teorema con $K = 2b + 1$. □

3.2. Dominios de John sobre curvas holomorfas

En esta última sección probaremos que en el contexto de curvas holomorfas, todos los resultados probados a partir del Capítulo 2 se satisfacen. Antes de entrar en los detalles de las pruebas, recordemos algunas definiciones y teoremas que serán de utilidad en lo que sigue.

En primer lugar, una curva holomorfa es una función suave Ψ de un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ a \mathbb{C}^n , $n \geq 1$ tal que el límite

$$\Psi'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(z+h) - \Psi(z)}{h}, \quad h \in \mathbb{C}$$

existe para todo $z \in \Omega$.

Es claro de la definición que si Ψ es una curva holomorfa y $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, entonces $\psi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica para todo $k = 1, \dots, n$ por lo que Ψ es analítica si $n = 1$.

En el estudio que realicemos en este trabajo, solo estaremos interesados en curvas holomorfas Ψ tales que $\Psi'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo que esta condición estará implícita salvo que se especifique lo contrario. Bajo este supuesto, Ψ será localmente inyectiva, de donde podemos considerar a $\Sigma = \Psi(\mathbb{D})$ como una superficie 2-dimensional en $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. Es fácil ver que Ψ determina una parametrización conforme de Σ en la que el factor conforme de la primera forma fundamental de la superficie está dado por

$$\lambda^2 = \lambda_\Psi^2 = |\Psi'|^2 = |\psi'_1|^2 + \dots + |\psi'_n|^2.$$

Además, la curvatura Gaussiana en un punto $\Psi(z)$ de Σ puede ser calculada mediante la fórmula

$$K(\Psi(z)) = -\frac{1}{\lambda^2(z)}\Delta \log \lambda(z). \quad (3.10)$$

Notese que si f es analítica y localmente univalente, entonces $\Psi \circ f$ es una curva holomorfa que satisface $(\Psi \circ f)'(z) \neq 0$ para todo z y

$$\lambda_{\Psi \circ f} = (\lambda_\Psi \circ f)|f'|. \quad (3.11)$$

Como en el caso armónico, la derivada Schwarziana de una curva holomorfa $\Psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que $\Psi'(z) \neq 0$ para todo z , se define por

$$S\Psi = 2(\partial_{zz}(\log \lambda) - (\partial_z \log \lambda)^2)$$

y se reduce al caso analítico cuando $n = 1$.

Dada la semejanza con la definición de derivada Schwarziana para funciones armónicas, es de esperar que la derivada Schwarziana de curvas holomorfas posea las mismas propiedades algebraicas que la Schwarziana armónica, lo cual es fácilmente verificable. Una de estas propiedades es la regla de la cadena (1.15). En este caso tenemos que si f es una función analítica y localmente univalente, entonces

$$S(\Psi \circ f) = (S\Psi \circ f)(f')^2 + S_f.$$

En particular, si T es una automorfismo del disco, obtenemos la fórmula

$$S(\Psi \circ T) = (S\Psi \circ T)(T')^2. \quad (3.12)$$

Es natural preguntarse si en el caso de curvas holomorfas, el crecimiento de su derivada Schwarziana tiene implicaciones analíticas y geométricas análogas a las estudiadas en los casos anteriores, específicamente en lo relacionado con la univalencia y el compartamiento en la frontera. Con respecto a estos puntos, en [7] los autores realizan un estudio completo de estos aspectos. Ellos establecen, entre otros resultados, un criterio de univalencia análogo a (1.17) que también tiene consecuencias geométricas. Uno de los teoremas que se demuestra es el siguiente:

Teorema 3.6. *Sea p una función de Nehari y $\Psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^n$ una curva holomorfa tal que $\Psi'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Si*

$$|S\Psi(z)| + \frac{3}{4}\lambda^2(z)|K(z)| \leq 2p(|z|), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (3.13)$$

entonces Ψ es inyectiva y admite una extensión esféricamente continua a la clausura de \mathbb{D} . Si se tiene desigualdad estricta en (3.13) en un anillo de la forma $\{z : r_0 \leq |z| < 1\}$, entonces la extensión es inyectiva.

También está probado un teorema de cubrimiento análogo a (2.1) que utilizaremos con frecuencia en lo que sigue, el enunciado preciso es el siguiente:

Teorema 3.7. *Sea Ψ una curva holomorfa que satisface (3.13) y suponga que p es una función de Nehari no decreciente en $[0, 1)$. Entonces*

$$\min_{|z|=r} d_{\Sigma}(\Psi(z), \Psi(0)) \geq \frac{\lambda(0)G(r)}{1 + |(\partial_z \log \lambda)(0)| G(r)}$$

donde

$$G(r) = \int_0^r \frac{dt}{u^2(t)}$$

y u es la solución del problema

$$u'' - pu = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Aquí, d_{Σ} denota la métrica en la superficie $\Sigma = \Psi(\mathbb{D})$.

Supongamos ahora que Ψ pertenece a la clase Nh^{μ} de curvas holomorfas que satisfacen

$$|S\Psi(z)| + \frac{3}{4}\lambda^2(z)|K(z)| \leq \frac{2\mu}{(1 - |z|^2)^2}, \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (3.14)$$

Análogo a los casos analíticos y armónicos, (3.11) y (3.12) implican que $\Psi \circ T \in Nh^{\mu}$ para todo automorfismo T del disco. De aquí se obtiene como corolario del Teorema 3.7 que si $\Psi \in Nh$, entonces para todo $z_0 \in \mathbb{D}$,

$$\min_{\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right|=r} d_{\Sigma}(\Psi(z), \Psi(z_0)) \geq \frac{\lambda(z_0)G(r)}{1 + \left|(\partial_z \log \lambda)(z_0) - \frac{\bar{z}_0}{1-|z_0|^2}\right| G(r)}.$$

En este caso,

$$G(r) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1+r)^{\sqrt{2}} - (1-r)^{\sqrt{2}}}{(1+r)^{\sqrt{2}} + (1-r)^{\sqrt{2}}}.$$

Tomando el límite cuando $r \rightarrow 1$, concluimos que para todo $z \in \mathbb{D}$,

$$(1 - |z|^2)\lambda(z) \leq (1 + \sqrt{2} + (1 - |z|^2)|\partial_z \log \lambda(z)|)d_\Psi(z), \quad (3.15)$$

donde $d_\Psi(z)$, como es habitual, está definida por

$$d_\Psi(z) := \sup \{r \geq 0 : B_\Sigma(\Psi(z), r) \subset \Sigma\}.$$

En la demostración de ambos teoremas es esencial una relación entre la Schwarziana $S\Psi$ y la Schwarziana de Ahlfors S_1 definida en el Capítulo 1. Esta relación es establecida en el Lema 2 de [7] que retomamos abajo.

Lema 3.1. *Sea Ψ una curva holomorfa, γ una curva en \mathbb{D} parametrizada por longitud de arco euclidiano y $\Gamma = \Psi \circ \gamma$. Entonces*

$$S_1\Gamma(t) = \operatorname{Re} \{S\Psi(\gamma(t))(\gamma'(t))^2\} + \frac{3}{4}\lambda^2(\gamma(t))K(\Gamma(t)) + \frac{1}{2}k^2(t),$$

donde k es la curvatura de γ .

En el caso particular en que γ es un diámetro del disco, la curvatura k es nula y obtenemos la fórmula

$$S_1\Gamma = \operatorname{Re} \{S\Psi(t)\} + \frac{3}{4}\lambda^2(t)K(\Gamma(t)). \quad (3.16)$$

El lema siguiente es el análogo al Lema 2.1 y como en el caso armónico, resultará ser importante en nuestro estudio. Proporciona un estimativo de la métrica en la subclase de curvas holomorfas Ψ en Nh^μ , $0 < \mu \leq 1$ que satisfacen $\partial_z \lambda(0) = 0$. Esta subclase la denotaremos por Nh_0^μ .

Lema 3.2. *Si $\Psi \in Nh_0^\mu$, $0 < \mu \leq 1$, entonces*

$$\left| \frac{\partial \log \lambda}{\partial z}(z) \right| \leq \frac{\mu|z|}{1 - |z|^2}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. En primer lugar, como $\lambda = |\Psi'|$, entonces

$$\begin{aligned} (\log \lambda)_z &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Psi'', \overline{\Psi'} \rangle}{\lambda^2} \\ (\log \lambda)_{zz} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 \langle \Psi''', \overline{\Psi'} \rangle - \langle \Psi'', \overline{\Psi'} \rangle \langle \Psi'', \overline{\Psi'} \rangle}{\lambda^4} \\ (\log \lambda)_{z\bar{z}} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 \langle \Psi'', \overline{\Psi''} \rangle - \langle \Psi'', \overline{\Psi'} \rangle \langle \Psi', \overline{\Psi''} \rangle}{\lambda^4}. \end{aligned}$$

De otro lado, si $y(t) = \partial_z \log \lambda(t)$, entonces

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 [\langle \Psi''', \overline{\Psi'} \rangle + \langle \Psi'', \overline{\Psi''} \rangle] - \langle \Psi'', \overline{\Psi'} \rangle [\langle \Psi'', \overline{\Psi'} \rangle + \langle \Psi', \overline{\Psi''} \rangle]}{\lambda^4} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \frac{\langle \Psi''', \overline{\Psi'} \rangle}{\lambda^2} - \frac{1}{2} \frac{\langle \Psi'', \overline{\Psi'} \rangle^2}{\lambda^4} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} \frac{|\Psi''|^2}{\lambda^2} - \frac{1}{2} \frac{\langle \Psi'', \overline{\Psi'} \rangle \langle \Psi', \overline{\Psi''} \rangle}{\lambda^4} \right\} \\ &= (\log \lambda)_{zz} + (\log \lambda)_{z\bar{z}}. \end{aligned}$$

De aquí, y de la definición de $S\Psi$, obtenemos que

$$y' = \frac{1}{2} S\Psi + y^2 + (\log \lambda)_{z\bar{z}},$$

de donde se sigue que y satisface la ecuación diferencial

$$y' = y^2 + \left(\frac{1}{2} S\Psi - \frac{1}{4} \lambda^2 K \right).$$

En la última igualdad, hemos usado (3.10) y $\Delta = 4\partial_{z\bar{z}}$. Comparese con la ecuación diferencial (2.3). La prueba ahora sigue como la demostración del Lema 2.1. \square

Enseguida enunciamos algunas consecuencias del lema. Sus demostraciones son similares a las del caso armónico por lo que las omitimos en esta parte.

Corolario 3.2. Si $\Psi \in Nh_0^\mu$, $0 < \mu \leq 1$, entonces para todo $\xi \in \mathbb{T}$,

$$\frac{1}{2^\mu} \lambda(r\xi) \leq \lambda(\rho\xi) \leq 2^\mu \lambda(r\xi),$$

$$r \leq \rho \leq \frac{1+r}{2}.$$

Demostración. Análoga a la prueba del Corolario 2.2. \square

Corolario 3.3. Sea $\Psi \in Nh_0$ y $k > 0$. Si $z = re^{i\theta}$ y $\zeta = re^{i\nu}$ donde $0 < r < 1$ y $|\theta - \nu| \leq k(1 - r)$, entonces

$$e^{-2k} \lambda(\zeta) \leq \lambda(z) \leq e^{2k} \lambda(\zeta).$$

Demostración. Análoga a la prueba del Corolario 2.3. \square

Corolario 3.4. Si $\Psi \in Nh_0^\mu$, $0 < \mu < 1$, entonces existe $M > 0$ que solo depende de μ , tal que para todo $z_0 \in \mathbb{D}$,

$$d_\Psi(z_0) \leq M(1 - |z_0|^2)\lambda(z_0).$$

Demostración. Análoga a la prueba del Corolario 2.4. \square

Corolario 3.5. Si $\Psi \in Nh_0$, entonces $C = 2 + \sqrt{2}$ satisface

$$(1 - |z_0|^2)\lambda(z_0) \leq Cd_\Psi(z_0)$$

para todo $z_0 \in \mathbb{D}$.

Demostración. Es consecuencia inmediata del lema y (3.15). \square

Ahora probaremos un teorema que es una versión mas general del Corolario 3.4, análogo al Teorema 2.2.

Teorema 3.8. Si $\Psi \in Nh^\mu$, $0 < \mu < 1$, entonces existe una constante $M > 0$ que solo depende de μ tal que para todo $z_0 \in \mathbb{D}$,

$$d_\Psi(z_0) \leq M(1 - |z_0|^2)\lambda(z_0). \quad (3.17)$$

Demostración. La demostración es similar a la del Teorema 2.2 por lo que solo haremos un resumen de los puntos relevantes de la prueba sin entrar en detalles técnicos.

El Teorema 3.6 con la función de Nehari $p(t) = \frac{1}{(1-t^2)^2}$ implica que Ψ es inyectiva en $\overline{\mathbb{D}}$, de donde existe a lo mas un $\xi \in \mathbb{T}$ cuya imagen bajo Ψ es ∞ . De aquí y la invarianza de la clase Nh^μ bajo composiciones internas con automorfismos del disco, podemos suponer que la curva $\varphi(t) = \Psi(t)$, $-1 < t < 1$ tiene longitud finita.

De otro lado, (1.9) y (3.16) implican que la derivada Schwarziana de la función longitud de arco de φ ,

$$h(t) = \int_0^t |\varphi'(s)| ds,$$

satisface la desigualdad

$$Sh(t) \leq \frac{2\mu}{(1-t^2)^2}. \quad (3.18)$$

Ahora consideremos la función

$$x(s) = \frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1}, \quad -\infty < s < \infty$$

que es una función biyectiva y creciente de \mathbb{R} sobre $(-1, 1)$ con inversa

$$s(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Teniendo en cuenta que x satisface la ecuación diferencial $x' = 1 - x^2$, se demuestra que si

$$u(t) = u_h(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)h'(t)}}, \quad -1 < t < 1,$$

entonces $v = u \circ x$ satisface la ecuación diferencial

$$v''(s) = \left(1 - (1 - x^2(s))^2 \frac{1}{2} Sh(x(s)) \right) v,$$

de donde concluimos, en virtud de (3.18), que v es convexa. De aquí y de la condición

$$\int_{-1}^1 |\varphi'(t)| dt = \int_{-1}^1 \lambda(t) dt < \infty,$$

se sigue que

$$u(t) \rightarrow +\infty \text{ cuando } |t| \rightarrow 1$$

y por tanto existe $t_0 \in (-1, 1)$ tal que $u'(t_0) = 0$.

En la demostración del Teorema 2.2 se supuso $t_0 \geq 0$, aquí vamos a suponer $t_0 \leq 0$ y como se verá, la prueba no sufre mayores cambios.

Se considera la función $T(s) = \frac{t_0+s}{1+t_0s}$ que es biyectiva de $(-1, 1)$ sobre $(-1, 1)$, creciente y satisface

$$\frac{|T'(s)|}{1 - |T(s)|^2} = \frac{1}{1 - |s|^2}.$$

De aquí se concluye que si $g = h \circ T$, entonces

$$u_g(s) = \frac{1}{\sqrt{(1-s^2)g'(s)}} = u_h(T(s))$$

y por tanto,

$$u'_g(0) = u'_h(T(0))T'(0) = 0.$$

De este hecho y la igualdad

$$\frac{u'_g(s)}{u_g(s)} = \frac{s}{1-s^2} - \frac{1}{2} \frac{g''(s)}{g'(s)},$$

se obtiene que $g''(0) = 0$.

Obsérvese que de la definición de g y (3.18),

$$\begin{aligned} Sg(s) &= S(h \circ T(s)) \\ &= (Sh \circ T(s))(T'(s))^2 \\ &\leq 2\mu \frac{(T'(s))^2}{(1-|T(s)|^2)^2} \\ &\leq \frac{2\mu}{(1-|s|^2)^2}, \end{aligned}$$

donde $-1 < s < 1$. La condición $0 < \mu < 1$ implica que g satisface (2.14), es decir,

$$\int_r^1 g'(t) dt \leq M(1-r^2)g'(r), \quad 0 \leq r < 1,$$

con M una constante positiva que solo depende de μ .

Probemos (3.17) en el caso en que z_0 es un real r en $(-1, 1)$ y $r \geq t_0$. De la definición de g , se tiene que

$$\begin{aligned} d_\Psi(r) &\leq \int_r^1 h'(t) dt \\ &= \int_{T^{-1}(r)}^1 h'(T(s))T'(s) ds \\ &= \int_{T^{-1}(r)}^1 g'(s) ds \\ &\leq M(1-|T^{-1}(r)|^2)g'(T^{-1}(r)). \end{aligned}$$

En la última desigualdad utilizamos el hecho que T es creciente para garantizar que $T^{-1}(r) \geq 0$. Consecuencia de las igualdades

$$g'(T(r)) = h'(r)|T'(T(r))| \quad \text{y} \quad (1-s^2)|T'(s)| = 1-|T(s)|^2,$$

se concluye

$$d_f(r) \leq M(1 - r^2)h'(r) = M(1 - r^2)\lambda(r).$$

El caso general sigue imitando la demostración del Teorema 2.2. \square

Continuamos con la prueba de los resultados análogos a los estudiados en la sección anterior, con respecto a dominios de John. En algunos de ellos fue esencial un teorema probado en [6] que establece que la función

$$u_f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1 - |z|^2)\lambda_f(z)}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

tiene un mínimo global si $f \in NH$ y $\tilde{f}(\mathbb{D})$ es acotada. El siguiente teorema establece que lo mismo es verdad en el caso de curvas holomorfas.

Teorema 3.9. *Si $\Psi \in Nh$ y $\Psi(\mathbb{D})$ es acotado, entonces*

$$u(z) = u_\Psi(z) = \frac{1}{\sqrt{(1 - |z|^2)\lambda_\Psi(z)}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

tiene un mínimo global.

Demostración. Procediendo como en la prueba del Teorema 3.8 obtenemos que para todo $\xi \in \mathbb{T}$, la función $v_\xi = u_\xi \circ x$ es convexa, donde

$$u_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{(1 - t^2)\lambda_\Psi(t\xi)}}, \quad 0 \leq t < 1,$$

y como antes,

$$x(s) = \frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1}, \quad 0 \leq s < \infty.$$

De la convexidad de v_ξ y el hecho que las curvas $\varphi(t) = \Psi(t\xi)$ ($0 \leq t < 1$) tienen longitud finita, (puesto que $\Psi(\mathbb{D})$ es acotado) se sigue, procediendo como antes, que $v_\xi(s) \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow \infty$.

Así, existe $r = r(\xi) \geq 0$ tal que v_ξ es creciente en $[r, \infty)$. De aquí y la definición de v_ξ se concluye que $u_\xi(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow 1$ y existe $\tilde{r} = \tilde{r}_\xi$ en $[0, 1)$ tal que u_ξ es creciente en $[\tilde{r}, 1)$. La compacidad de \mathbb{T} garantiza que $u(z) \rightarrow \infty$ cuando $|z| \rightarrow 1$, de donde se obtiene el teorema. \square

Corolario 3.6. *Sea $0 < \mu \leq 1$ y $\Psi \in Nh^\mu$. Existe una constante M que solo depende de μ . tal que*

$$\left| \frac{\partial \log \lambda}{\partial z}(z) \right| \leq \frac{M}{1 - |z|^2},$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. La prueba es análoga a la del Corolario 2.1 □

Como consecuencia del corolario y (3.15), se sigue que existe una constante C tal que si $\Psi \in Nh$, entonces

$$(1 - |z|^2)\lambda(z) \leq Cd_\Psi(z), \quad (3.19)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Con esto tenemos todas las herramientas para probar el análogo holomorfo de los resultados de la sección anterior. Al igual que las demostraciones que hemos presentado hasta aquí, las de los teoremas siguientes son similares al caso armónico por lo que solo enunciamos los resultados mas importantes y damos una idea de la prueba de algunos de estos, sin entrar en mayores detalles.

Teorema 3.10. *Si $\Psi \in Nh_0^\mu$, $0 < \mu < 1$ entonces*

a.) $\Sigma = \Psi(\mathbb{D})$ es un dominio de John con centro $\Psi(0) = p$ y las curvas $\gamma_\xi(t) = \Psi(t\xi)$, $0 \leq t \leq 1$ son curvas de John.

b.) Existen $\alpha \in (0, 1)$ y $K > 0$ que solo dependen de μ tal que

$$\frac{(1 - \rho^2)\lambda(\rho\xi)}{(1 - r^2)\lambda(r\xi)} \leq K \left(\frac{1 - \rho}{1 - r} \right)^\alpha, \quad (3.20)$$

$\xi \in \mathbb{T}$ y $0 \leq r < \rho < 1$.

c.) Existen $\alpha \in (0, 1)$ y $K_1 > 0$ (que solo dependen de μ) tales que para todo $z = re^{it} \in \mathbb{D}$,

$$\frac{(1 - |\zeta|^2)\lambda(\zeta)}{(1 - |z|^2)\lambda(z)} \leq K_1 \left(\frac{1 - |\zeta|}{1 - |z|} \right)^\alpha, \quad \zeta \in B(z),$$

Demostración. La prueba es análoga a la del Teorema 3.1. En la demostración de la parte a) de este teorema fue esencial la desigualdad (2.11), válida para funciones armónicas en la clase NH_0 . Aquí hacemos uso del Corolario 3.5. Así mismo, en la prueba de la parte b) justificamos uno de los pasos con el Corolario 3.2, en lugar del Corolario 2.2 como se hizo en la prueba de la parte b) del Teorema 3.1. □

Corolario 3.7. *Sea $0 < \mu < 1$ y $\Psi \in Nh^\mu$ tal que $\Psi(\mathbb{D})$ es acotado. Entonces $\Psi(\mathbb{D})$ es un dominio de John.*

Demostración. El Teorema 3.9 garantiza que la función

$$u_\Psi(z) = \frac{1}{\sqrt{(1 - |z|^2)\lambda_\Psi(z)}}, \quad z \in \mathbb{D}$$

tiene un punto crítico (mínimo global) en algún $z_0 \in \mathbb{D}$. Concluimos de aquí que si $\Phi = \Psi \circ T$, donde T es el automorfismo del disco $T(\zeta) = \frac{z_0 - \zeta}{1 - \bar{z}_0 \zeta}$, entonces $\Phi \in Nh^\mu$ y $u_\Phi = u_\Psi \circ T$. Se sigue que u_Φ tiene un punto crítico en el origen, de donde $\Phi \in Nh_0^\mu$. Por el Teorema 3.10, $\Psi(\mathbb{D}) = \Phi(\mathbb{D})$ es un dominio de John. \square

Teorema 3.11. *Sea $\Psi \in Nh$ una curva holomorfa que satisface la parte b.) del Teorema 3.10. Entonces $\Sigma = \Psi(\mathbb{D})$ es un dominio de John con centro $\Psi(0) = p$ y las curvas $\gamma_\xi(t) = \Psi(t\xi)$, $0 \leq t \leq 1$ son curvas de John.*

Demostración. La prueba es análoga a la del Teorema 3.2. \square

Teorema 3.12. *Sea $\Psi \in Nh$. Si*

$$\limsup_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |\partial_z \log \lambda(z)| < 1,$$

entonces $\Sigma = \Psi(\mathbb{D})$ es un dominio de John con centro $p = \Psi(0)$. Además las curvas $\gamma_\xi(t) = \Psi(t\xi)$ son curvas de John para todo $\xi \in \mathbb{T}$.

Demostración. Análoga a la prueba del Teorema 3.3. \square

Teorema 3.13. *Suponga que Ψ es una curva holomorfa que satisface*

$$|S\Psi(z)| + \lambda^2(z)|K(z)| \leq 2p(|z|)$$

y sea $c = \lim_{t \rightarrow 1} (1 - t^2)^2 p(t)$. Si $c < 1$ y $\Psi(\mathbb{D})$ es acotado, entonces $\Psi(\mathbb{D})$ es un dominio de John con centro en $p = \Psi(0)$.

Demostración. Análoga a la prueba del Teorema 3.4. \square

Capítulo 4

Dominios linealmente conexos

En este último capítulo presentaremos una extensión de un teorema de Ahlfors y Weill [4] el cual establece que la imagen del disco bajo funciones en la clase N^μ ($0 < \mu < 1$), es un cuasidisco. Esto es, un dominio simplemente conexo que es linealmente conexo y dominio de John. La generalización la daremos en las clases NH^μ y Nh^μ ($0 < \mu < 1$), donde ya hemos probado que la imagen del disco bajo funciones en éstas clases, es un dominio de John. Así, solo resta demostrar que además es linealmente conexo, en un sentido que precisaremos mas adelante. Este es el resultado central del presente capítulo.

Recordemos que un dominio simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ es linealmente conexo si existe una constante positiva M tal que cualquier par de puntos $a, b \in \Omega$ pueden unirse por una curva $\gamma \subset \Omega$ con la propiedad

$$\text{diam}\gamma \leq M|a - b|.$$

Geoméricamente, un dominio simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ es linealmente conexo si no tiene cúspides internas. Notese la semejanza con la propiedad geométrica de dominios de John, los cuales no tienen cúspides externas. Mas propiedades de dominios linealmente conexos pueden ser estudiadas en [29].

Antes de enunciar y probar el teorema central del capítulo, veamos la definición de dominio linealmente conexo que utilizaremos a lo largo del capítulo. Es una adaptación directa de la dada para dominios en el plano complejo. Posteriormente se probará un lema técnico que será útil para estimaciones posteriores.

Definición 4.1. *Un dominio simplemente conexo Ω contenido en una superficie $S \subset \mathbb{R}^n$, es linealmente conexo, si existe una constante positiva M tal*

que para todo par de puntos $a, b \in \Omega$, existe una curva $\Gamma \subset \Omega$ con extremos en a y b que satisface la propiedad

$$\text{diam}\Gamma \leq M|a - b|.$$

Aquí, el diámetro es entendido con la métrica de la superficie.

Lema 4.1. Sea $a = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ y S el segmento hiperbólico ortogonal al diámetro $[-e^{i\theta}, e^{i\theta}]$ que pasa por a . Sean $e^{i\theta_1}$ y $e^{i\theta_2}$ ($\theta_1 < \theta_2$), los extremos de S . Existe una constante K (independiente de r) tal que para todo $w = r_1e^{i\alpha} \in S$,

- i) $|\theta_2 - \alpha| \leq K(1 - r_1)$, si $\theta \leq \alpha$.
- ii) $|\theta_1 - \alpha| \leq K(1 - r_1)$, si $\alpha \leq \theta$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\alpha > \theta = 0$. La figura siguiente, ilustra los primeros pasos de la prueba.

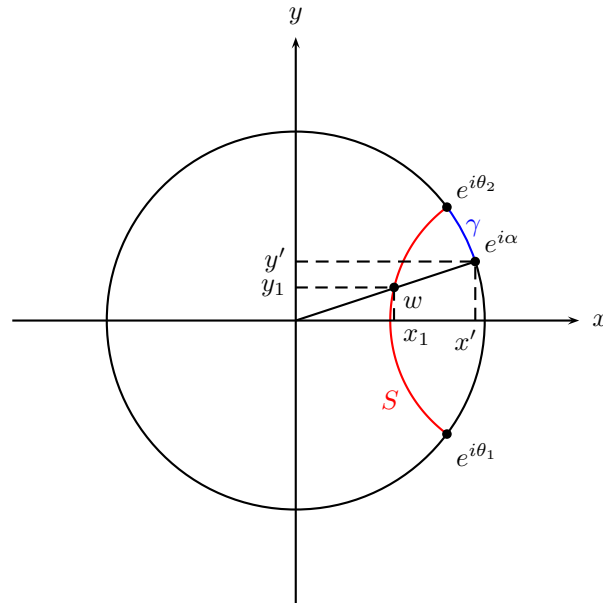


Figura 4.1

El automorfismo del disco

$$T(z) = \frac{z + r}{1 + zr}$$

aplica el diámetro $[-1, 1]$ sobre si mismo y el diámetro $[-i, i]$ sobre S , en tal forma que

$$p := e^{i\theta_2} = T(i) = \frac{2r}{1+r^2} + \frac{1-r^2}{1+r^2}i.$$

Así, la recta L tangente a \mathbb{T} en p , tiene pendiente $m = -\frac{2r}{1-r^2}$ y ecuación cartesiana

$$y - \frac{1-r^2}{1+r^2} = -\frac{2r}{1-r^2} \left(x - \frac{2r}{1+r^2} \right).$$

Se sigue que L corta al eje x en $q = \frac{1+r^2}{2r}$. Este punto es el centro de la circunferencia C que contiene a S , de donde el radio de C es

$$R = q - r = \frac{1-r^2}{2r}.$$

Sea $w = (x_1, y_1)$, $p_1 = (x', y') = e^{i\alpha}$ y γ el arco de circunferencia de p_1 a p . Ver Figura 4.1. Probaremos que

$$\ell(\gamma) \leq K(1-r_1),$$

lo que demostraría el lema.

En primer lugar, dado que $w \in C$, entonces

$$(x_1 - q)^2 + y_1^2 = R^2.$$

Se concluye de aquí y el hecho que $q^2 - R^2 = 1$, que

$$x_1 = r \frac{1+r_1^2}{1+r^2}. \quad (4.1)$$

De otro lado, por semejanza de triángulos se obtiene que

$$\frac{x'}{x_1} = \frac{1}{r_1}.$$

De aquí y (4.1) concluimos que

$$x' = \frac{r}{1+r^2} \frac{1+r_1^2}{r_1}.$$

De lo anterior, podemos considerar la parametrización de γ dada por

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}), \quad x \leq t \leq x',$$

donde $p = (x, y)$ y x' como arriba. Con esta parametrización de γ , su longitud es

$$\ell(\gamma) = \int_x^{x'} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Notese que cuando r_1 crece desde r hasta 1, x' decrece desde 1 hasta x . Consideremos dos casos:

Caso 1: Supongamos que r_1 es tal que

$$x \leq x' \leq \frac{1+x}{2} = \frac{(1+r)^2}{2(1+r^2)}.$$

Del teorema del valor medio para integrales, existe $t \in (x, x')$ tal que

$$\ell(\gamma) = \int_x^{x'} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{x' - x}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{r(1-r_1)^2}{r_1(1+r^2)}.$$

Se sigue de aquí que

$$\frac{\ell(\gamma)}{1-r_1} \leq \frac{1-r_1}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1-r}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (4.2)$$

Pero como

$$t \leq x' \leq \frac{(1+r)^2}{2(1+r^2)},$$

entonces

$$\frac{1-r}{\sqrt{1-t^2}} \leq \sqrt{2(1+r^2)} \leq 2.$$

Sustituyendo en (4.2), se obtiene

$$|\theta_2 - \alpha| = \ell(\gamma) \leq 2(1-r_1).$$

Caso 2: Sea r_1 de tal manera que

$$\frac{1+x}{2} = \frac{(1+r)^2}{2(1+r^2)} \leq x' < 1.$$

En este caso,

$$r \leq r_1 \leq c_r,$$

donde c_r está determinada por la ecuación

$$\frac{(1+r)^2}{2r} = \frac{1+c_r^2}{c_r}.$$

Por un lado, la desigualdad $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$, válida para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, implica que

$$\ell(\gamma) \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \sin \theta_2 = \frac{\pi}{2} \frac{1-r^2}{1+r^2}. \quad (4.3)$$

Por otro lado, de la desigualdad

$$\frac{(1+r)^2}{2(1+r^2)} \leq x' = \frac{r}{1+r^2} \frac{1+r_1^2}{r_1},$$

se sigue que

$$\frac{(1+r)^2}{4r} - 1 \leq \frac{1+r_1^2}{2r_1} - 1,$$

de donde

$$1-r \leq \sqrt{2}(1-r_1).$$

Sustituyendo en (4.3), se obtiene

$$\ell(\gamma) \leq \pi\sqrt{2}(1-r_1)$$

y se sigue el lema con $K = \pi\sqrt{2}$. \square

Observación: Con la notación del lema, una consecuencia inmediata del Corolario 2.3 y del lema anterior, es que existe una constante M tal que si $f \in NH_0$, entonces

- i) $\frac{1}{M}\lambda(r_1 e^{i\theta_2}) \leq \lambda(w) \leq M\lambda(r_1 e^{i\theta_2})$, si $\theta \leq \alpha$.
- ii) $\frac{1}{M}\lambda(r_1 e^{i\theta_1}) \leq \lambda(w) \leq M\lambda(r_1 e^{i\theta_1})$, si $\theta \geq \alpha$.

En la prueba del Corolario 2.3 se observa que $M = e^{\pi\sqrt{2}}$.

Lema 4.2. Con la notación del lema anterior, si $f \in NH_0^\mu$, $0 < \mu < 1$, entonces

$$\ell(\Gamma) \leq \tilde{M}(1-r^2)\lambda(a),$$

donde $\Gamma = \tilde{f}(S)$ y \tilde{M} es una constante que solo depende de μ .

Demostración. Sea $S_i \subset S$ el arco que va desde a hasta $e^{i\theta_i}$ y $\Gamma_i = \tilde{f}(S_i)$, $i = 1, 2$. Probaremos que

$$\ell(\Gamma_i) \leq \tilde{M}_i(1-r^2)\lambda(a), \quad i = 1, 2$$

donde \tilde{M}_i solo depende de μ .

Solo demostraremos el caso $i = 2$, el otro es análogo. Una parametrización de S_2 viene dada por la restricción al intervalo $[0, 1]$ del automorfismo del disco

$$\varphi(z) = \xi \frac{a\bar{\xi} - z}{1 - \bar{a}\xi z},$$

donde ξ se toma en tal forma que $\varphi'(0)$ sea ortogonal al diámetro $[-e^{i\theta}, e^{i\theta}]$, esto es, $\xi = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})} = -ie^{i\theta}$. Con esta elección de ξ , tenemos que

$$\varphi(t) = \xi \frac{ri - t}{1 + rti}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Por la observación i), posterior al Lema 4.1, se tiene que

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma_2) &= \int_{S_2} \lambda(z) |dz| \\ &= \int_0^1 \lambda(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt \\ &\leq M \int_0^1 \lambda(|\varphi(t)| e^{i\theta_2}) |\varphi'(t)| dt. \end{aligned}$$

Analizamos por separado las dos integrales

$$\int_0^{1/2} \lambda(|\varphi(t)| e^{i\theta_2}) |\varphi'(t)| dt \quad \text{y} \quad \int_{1/2}^1 \lambda(|\varphi(t)| e^{i\theta_2}) |\varphi'(t)| dt.$$

Sea $0 \leq t \leq 1/2$. Como $|\varphi(t)|$ es creciente, por definición de φ ,

$$1 - |\varphi(t)|^2 \geq 1 - |\varphi(\frac{1}{2})|^2 \geq 1 - \frac{r^2 + (\frac{1}{2})^2}{1 + (\frac{r}{2})^2}.$$

Se sigue de aquí que

$$\frac{1 - r^2}{1 - |\varphi(t)|^2} \leq 2, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

De aquí y el Corolario 2.2 se concluye que existe M_2 tal que

$$\int_0^{1/2} \lambda(|\varphi(t)| e^{i\theta_2}) |\varphi'(t)| dt \leq M_2 \int_0^{1/2} \lambda(re^{i\theta_2}) |\varphi'(t)| dt.$$

Pero de la definición de φ ,

$$|\varphi'(t)| = \frac{1 - r^2}{|1 + rti|^2} \leq 4(1 - r^2)$$

para todo $t \in [0, 1/2]$, entonces

$$\int_0^{1/2} \lambda(|\varphi(t)|e^{i\theta_2})|\varphi'(t)|dt \leq 2M_2(1 - r^2)\lambda(re^{i\theta_2}).$$

Por la observación posterior al Lema 4.1, se concluye que

$$\lambda(re^{i\theta_2}) \leq M\lambda(a),$$

de donde se sigue

$$\int_0^{1/2} \lambda(|\varphi(t)|e^{i\theta_2})|\varphi'(t)|dt \leq M_3(1 - r^2)\lambda(a). \quad (4.4)$$

Ahora supongamos $1/2 \leq t < 1$. Si $u = |\varphi(t)|$, entonces

$$\begin{aligned} uu' &= t \frac{1 - r^4}{(1 + r^2t^2)^2} \\ &= t \frac{1 + r^2}{1 + r^2t^2} |\varphi'(t)|. \end{aligned}$$

De aquí y la relación

$$t^2 = \frac{u^2 - r^2}{1 - r^2u^2},$$

se concluye que

$$|\varphi'(t)| = \frac{1}{t(1 + r^2)} \sqrt{1 + r^2t^2} \sqrt{t^2 + r^2} u' \leq 4u'.$$

Así,

$$\int_{1/2}^1 \lambda(|\varphi(t)|e^{i\theta_2})|\varphi'(t)|dt \leq 4 \int_{|\varphi(1/2)|}^1 \lambda(ue^{i\theta_2})du \leq 4 \int_r^1 \lambda(ue^{i\theta_2})du.$$

Procediendo como en la prueba del Corolario 2.4, se sigue que

$$\int_{1/2}^1 \lambda(|\varphi(t)|e^{i\theta_2})|\varphi'(t)|dt \leq M_4(1 - r^2)\lambda(re^{i\theta_2}),$$

donde M_4 solo depende de μ . Finalmente, la observación posterior al Lema 4.1 garantiza la existencia de una constante $M_5 = M_5(\mu)$ tal que

$$\int_{1/2}^1 \lambda(|\varphi(t)|e^{i\theta_2})|\varphi'(t)|dt \leq M_5(1-r^2)\lambda(a).$$

De aquí y (4.4) se concluye la prueba del lema con $\tilde{M} = M_3 + M_5$. \square

Lema 4.3. Sean M, δ y C constantes positivas. La familia \mathcal{F} de funciones armónicas $f = h + \bar{g}$ tales que $f(0) = h(0) = g(0) = 0$, $\delta \leq \lambda(0) \leq C$ y

$$\left| \frac{\partial \log \lambda}{\partial z}(z) \right| \leq \frac{M}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (4.5)$$

es compacta. Aquí, como antes, $\lambda(z) = |h'(z)| + |g'(z)| \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Dado $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, la condición (4.5) implica que para toda f en la familia,

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{\lambda(z)}{\lambda(0)} \right| &\leq \int_0^r \frac{2M}{1-t^2} dt \\ &= M \log \frac{1+r}{1-r} \\ &\leq \log \left(\frac{2}{1-r} \right)^M. \end{aligned}$$

Tomando exponencial obtenemos

$$\delta_1(1-|z|)^M \leq \lambda(z) \leq \frac{C_1}{(1-|z|)^M}. \quad (4.6)$$

Dado que $\lambda = |h'| + |g'|$, la condición anterior implica que las familias de funciones analíticas que son la parte analítica y la parte conjugada respectivamente de alguna $f \in \mathcal{F}$, son familias normales. Notese además que la condición (4.5) y (4.6) garantizan que

$$|\nabla \lambda(z)| \leq \frac{2C_1 M}{(1-|z|)^{M+1}},$$

por lo que $\{\lambda_f : f \in \mathcal{F}\}$ es una familia normal.

Así, dada una sucesión de funciones $f_n = h_n + \bar{g}_n$ en \mathcal{F} con métrica asociada λ_n , existen h, g analíticas, una función no negativa λ y subsucesiones h_{n_k}, g_{n_k} y λ_{n_k} tales que

$$h_{n_k} \rightarrow h, \quad g_{n_k} \rightarrow g \quad \text{y} \quad \lambda_{n_k} \rightarrow \lambda$$

localmente uniformemente en \mathbb{D} . Se sigue que si $f = h + \bar{g}$, entonces $\lambda_f = \lambda$ y además, por (4.6) λ_f no se anula en \mathbb{D} . Es claro también que λ_f satisface (4.5) y $f_{n_k} \rightarrow f$ localmente uniformemente en \mathbb{D} . De aquí y como $f \in \mathcal{F}$, se concluye la compacidad de \mathcal{F} . \square

Observación: Si además de las propiedades dadas en el lema anterior para la familia \mathcal{F} , suponemos que la dilatación analítica $w_f = \frac{g'}{h'}$, donde $f = h + \bar{g} \in \mathcal{F}$, es el cuadrado de una función meromorfa, entonces \mathcal{F} resulta ser una familia normal que será compacta si pedimos que las funciones en \mathcal{F} tengan jacobiano no negativo en todo punto del disco.

Lema 4.4. Sean a y S como en el Lema 4.1 y T el automorfismo del disco que aplica $(-1, 1)$ sobre S en tal forma que $T(-1) = e^{i\theta_2}$, $T(0) = z_0$ y $T(1) = e^{i\theta_1}$. Sea $f \in NH_0^\mu$, $0 < \mu < 1$ y $\lambda_1 = (\lambda \circ T)|T'|$. Si x es un punto crítico de la función

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)\lambda_1(t)}}, \quad -1 < t < 1 \quad (4.7)$$

y $|x| > \mu + \eta$, para algún $\eta > 0$, entonces existe $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{M}\lambda(y) \leq \lambda(a) \leq M\lambda(y),$$

donde $y = T(x)$.

Demostración. Primero notemos que $T(z) = -\xi \frac{ri+z}{1-ri z}$, donde $\xi = ie^{i\theta}$. Tomando logaritmo en (4.7) y derivando, se obtiene

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2t}{1-t^2} - \frac{\lambda_1'(t)}{\lambda_1(t)} \right\},$$

pero por definición de λ_1 ,

$$\frac{\lambda_1'(t)}{\lambda_1(t)} = \frac{\langle \nabla \lambda(T(t)), T'(t) \rangle}{\lambda(T(t))} + \operatorname{Re} \frac{T''(t)}{T'(t)},$$

entonces

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\langle \nabla \lambda(T(x)), T'(x) \rangle}{\lambda(T(x))} + \operatorname{Re} \frac{T''(x)}{T'(x)}.$$

De aquí, el Lema 2.1 y la igualdad $\operatorname{Re} \frac{T''(x)}{T'(x)} = -\frac{2r^2x}{1+r^2x^2}$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{|x|}{1-|x|^2} &\leq \frac{\mu|T(x)|}{1-|T(x)|^2} |T'(x)| + \frac{r^2|x|}{1+r^2x^2} \\ &\leq \frac{\mu|T(x)|}{1-|x|^2} + \frac{1}{1+r^2x^2}. \end{aligned}$$

Esta desigualdad y la condición $|x| > \mu + \eta$, implican que

$$\frac{1+r^2x^2}{1-|x|^2} \leq \frac{1}{\eta}.$$

Finalmente, de las igualdades

$$\frac{|T'(x)|}{1-|T(x)|^2} = \frac{1}{1-|x|^2} \quad \text{y} \quad |T'(x)| = \frac{1-r^2}{1+r^2x^2},$$

obtenemos

$$\frac{1-|a|^2}{1-|T(x)|^2} = \frac{1+r^2x^2}{1-|x|^2} \leq \frac{1}{\eta}. \quad (4.8)$$

El lema se concluye en virtud de la observación posterior al Lema 4.1 y una mínima variación del Corolario 2.2. \square

Una consecuencia inmediata del lema y de (4.8) es el siguiente corolario:

Corolario 4.1. *Bajo las mismas hipótesis del lema anterior, existen constantes positivas $C = C(\mu, \eta)$ y $\delta = \delta(\mu, \eta)$ tales que*

$$\delta \leq \frac{(1-|y|^2)\lambda(y)}{(1-|a|^2)\lambda(z_0)} \leq C,$$

donde $y = T(x)$.

Teorema 4.1. *Sea $0 < \mu < 1$. Si $f \in NH^\mu$ y \tilde{f} es acotado, entonces $\tilde{f}(\mathbb{D})$ es linealmente conexo.*

Demostración. Como \tilde{f} es acotado, por lo probado en los capítulos anteriores, no se pierde generalidad si suponemos que λ tiene un punto crítico en el origen. Bajo este supuesto, el Lema 2.1 establece que

$$\left| \frac{\partial \log \lambda}{\partial z}(z) \right| \leq \frac{\mu|z|}{1-|z|^2}, \quad (4.9)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Supongamos que $\Omega = \tilde{f}(\mathbb{D})$ no es linealmente conexo. Existe una sucesión de puntos $\zeta_n^\pm \in \mathbb{T}$ tales que

$$\frac{|\tilde{f}(\zeta_n^+) - \tilde{f}(\zeta_n^-)|}{\ell(\Gamma_n)} \leq \frac{|\tilde{f}(\zeta_n^+) - \tilde{f}(\zeta_n^-)|}{\text{diam}(\Gamma_n)} \rightarrow 0, \quad (4.10)$$

donde S_n es el segmento hiperbólico con extremos en ζ_n^+ y ζ_n^- y $\Gamma_n = \tilde{f}(S_n)$. Si z_n denota el punto medio(euclidiano) de S_n , (4.10) y el Lema 4.2, implican que

$$\frac{\tilde{f}(\zeta_n^+) - \tilde{f}(\zeta_n^-)}{(1-|z_n|^2)\lambda(z_n)} \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

Consideremos ahora los automorfismos del disco T_n que aplican $(-1, 1)$ sobre S_n en tal forma que $T_n(\pm 1) = \zeta_n^\pm$ y $T_n(0) = z_n$. Ya hemos visto antes que $f \circ T_n \in NH^\mu$ y

$$\lambda_{f \circ T_n} = (\lambda \circ T_n)|T_n'|.$$

Definiremos una sucesión de funciones armónicas $f_n \in NH^\mu$ que fijan el origen y $s_n''(0) = 0$, donde s_n es la función longitud de arco de la curva $\varphi_n(t) = \tilde{f}_n(t)$, $-1 < t < 1$ y \tilde{f}_n el levantamiento de f_n con $\tilde{f}_n(0) = 0$.

Dado que las curvas $(f \circ T_n)((-1, 1)) = \tilde{f}(S_n)$ tienen longitud finita, procediendo como en la prueba del Teorema 2.2, concluimos que las funciones

$$u_{f \circ T_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)\lambda_{f \circ T_n}(t)}}, \quad 0 < t < 1$$

tienen un mínimo absoluto en algún $x_n \in (-1, 1)$.

Con x_n como arriba, sea $Q_n(z) = \frac{x_n - z}{1 - \bar{x}_n z}$ y $F_n = f \circ R_n$, donde $R_n = T_n \circ Q_n$. Notese que $F_n \in NH^\mu$ y como Q_n deja fijo $(-1, 1)$, entonces R_n aplica el intervalo $(-1, 1)$ sobre S_n . Además,

$$\lambda_{F_n} = (\lambda_{f \circ T_n} \circ Q_n)|Q_n'| = (\lambda \circ R_n)|R_n'|.$$

Se sigue de aquí y de las propiedades de los automorfismos del disco que

$$\begin{aligned} u_{F_n}(t) &= \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)\lambda_{F_n}(t)}} \\ &= (u_{f \circ T_n} \circ Q_n)(t). \end{aligned}$$

La regla de la cadena y el hecho que $u_{f \circ T_n}$ tiene un punto crítico en x_n , implica que u_{F_n} tiene un punto crítico en cero y por lo tanto,

$$\frac{\partial \lambda_{F_n}}{\partial x}(0) = 0.$$

De lo anterior, la sucesión de funciones

$$f_n = \frac{f \circ R_n(z) - f(\xi_n)}{(1 - |z_n|^2)\lambda(z_n)},$$

donde $R_n(0) = T_n(x_n) = \xi_n$, satisface las siguientes propiedades:

- i) $f_n \in NH^\mu$.
- ii) $f_n(0) = 0$.
- iii) $\partial_x \lambda_n(0) := \partial_x \lambda_{f_n}(0) = 0$ puesto que

$$\lambda_n(z) = \frac{\lambda_{F_n}(z)}{(1 - |z_n|^2)\lambda(z_n)} = \frac{\lambda(R_n(z))|R'_n(z)|}{(1 - |z_n|^2)\lambda(z_n)}. \quad (4.12)$$

Además, si $f = h + \bar{g}$ y $f_n = h_n + \bar{g}_n$, entonces

$$h_n = \frac{h \circ R_n(z) - h(\xi_n)}{(1 - |z_n|^2)\lambda(z_n)} \quad \text{y} \quad g_n = \frac{g \circ R_n(z) - g(\xi_n)}{(1 - |z_n|^2)\lambda(z_n)},$$

por lo que $h_n(0) = g_n(0) = 0$. También se tiene de (4.9) y (4.12) que λ_n satisface la condición (4.5) con $M = 2 + \mu < 3$, como se prueba en el Corolario 2.1.

Ahora probaremos que existen constantes positivas δ y C tales que para n suficientemente grande,

$$\delta \leq \lambda_n(0) \leq C. \quad (4.13)$$

Dado que $|z_n| \leq |T(x_n)| < 1$ y $|z_n| \rightarrow 1$, entonces $|T(x_n)| \rightarrow 1$, por lo tanto $|x_n| \rightarrow 1$. Así, existe un entero positivo N tal que $|x_n| > \frac{1+\mu}{2}$ para todo $n \geq N$. Tomando $\eta = \frac{1-\mu}{2}$, (4.13) se sigue del Corolario 4.1 y la igualdad

$$\lambda_n(0) = \frac{(1 - |T_n(x_n)|^2)\lambda(T_n(x_n))}{(1 - |z_n|^2)\lambda(z_n)}.$$

Notese que como $\eta = \eta(\mu)$, las constantes C y δ solo dependen de μ . Sin pérdida de generalidad, supondremos que (4.13) se cumple para todo n y gracias al Lema 4.3, podemos suponer que existen funciones analíticas H, G y una función positiva σ tales que

$$h_n \rightarrow H, \quad g_n \rightarrow G \quad \text{y} \quad \lambda_n \rightarrow \sigma$$

localmente uniformemente en \mathbb{D} . Además, existen constantes positivas $K = K(\mu)$ y $M = M(\mu)$ que satisfacen

$$\lambda_n(z) \leq \frac{K}{(1 - |z|)^M}, \quad (4.14)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo n .

Consideremos la sucesión de levantamientos \tilde{f}_n de f_n con la condición $\tilde{f}_n(0) = 0$ y sean u_n, v_n, w_n sus componentes, las cuales son funciones armónicas reales. Como cada una de ellas se anulan en el origen, (4.14) implica que las sucesiones (u_n) , (v_n) y (w_n) son localmente acotadas en el disco, por lo que existen funciones armónicas reales u, v y w y una sucesión creciente de enteros positivos n_k tales que

$$u_{n_k} \rightarrow u, \quad v_{n_k} \rightarrow v \quad \text{y} \quad w_{n_k} \rightarrow w,$$

localmente uniformemente en \mathbb{D} . De aquí, la sucesión de curvas $\varphi_{n_k}(t) = \tilde{f}_{n_k}(t)$, $-1 \leq t \leq 1$ converge uniformemente en compactos de $(-1, 1)$ a la curva $\varphi(t) = (u(t), v(t), w(t))$. Notese que φ es infinitamente diferenciable por que u, v y w son armónicas en \mathbb{D} . Además, $|\varphi'(t)| = |\sigma(t)| \neq 0$ para todo $t \in (-1, 1)$. Probaremos que la convergencia es uniforme en $[-1, 1]$. Antes notemos que de la fórmula (1.9) y la desigualdad

$$S_1\varphi_n(t) = Ss_n(t) + |\varphi'_n(t)|^2 k_n^2(t) \leq \frac{2\mu}{(1 - t^2)^2}, \quad -1 < t < 1,$$

donde s_n es la función longitud de arco de φ_n y k_n su curvatura, se sigue que

$$S_1\varphi(t) \leq \frac{2\mu}{(1 - t^2)^2}, \quad -1 < t < 1. \quad (4.15)$$

Dado que $s''_n(0) = \partial_x \lambda_n(0) = 0$ y

$$Ss_n(t) \leq \frac{2\mu}{(1 - t^2)^2}, \quad -1 < t < 1,$$

entonces s_n satisface (2.13), esto es,

$$\frac{s_n''(t)}{s_n'(t)} \leq \mu \frac{2t}{1-t^2}, \quad 0 \leq t < 1.$$

Se concluye de aquí y (4.13), que

$$s_n'(t) \leq \frac{C}{(1-t^2)^\mu}, \quad 0 \leq t < 1.$$

Considerando la función $\tilde{s}_n(t) = -s_n(-t)$, $-1 < t < 1$, se obtiene que la desigualdad anterior también es válida para $-1 < t < 0$. Esto es consecuencia del hecho que \tilde{s}_n y s_n tienen la misma derivada Schwarziana y $\tilde{s}_n''(0) = s_n''(0) = 0$. Así, las velocidades $s_n'(t) = \lambda_n(t) = |\varphi_n'(t)|$ satisfacen

$$\lambda_n(t) \leq \frac{C}{(1-t^2)^\mu}, \quad -1 < t < 1.$$

Consecuencia de la condición $0 < \mu < 1$, el miembro derecho es integrable en $(-1, 1)$ y por lo tanto, la sucesión φ_n es equicontinua y localmente acotada en $[-1, 1]$. En particular, φ_{n_k} también lo es. Así, cualquiera de sus subsucesiones tiene una subsucesión que converge uniformemente en $[-1, 1]$. Se concluye que φ_{n_k} converge a φ uniformemente en $[-1, 1]$. Se sigue entonces que

$$|\varphi_{n_k}(-1) - \varphi_{n_k}(1)| \rightarrow |\varphi(-1) - \varphi(1)|.$$

Pero por definición de \tilde{f}_n ,

$$|\varphi_{n_k}(-1) - \varphi_{n_k}(1)| = |\tilde{f}_{n_k}(-1) - \tilde{f}_{n_k}(1)| = \frac{\tilde{f}(\zeta_{n_k}^+) - \tilde{f}(\zeta_{n_k}^-)}{(1 - |z_{n_k}|^2)\lambda(z_{n_k})}$$

que tiene límite cero por (4.11). Así, La curva $\varphi \in C^\infty(-1, 1)$ no es inyectiva en $[-1, 1]$, tiene longitud finita y

$$S_1\varphi(t) \leq \frac{2\mu}{(1-t^2)^2} \quad -1 < t < 1,$$

lo que contradice el Teorema 1.2. Esta contradicción demuestra que $\tilde{f}(\mathbb{D})$ es linealmente conexo. □

Siguiendo el mismo argumento, se demuestra que el Teorema 4.1 es válido en el contexto de curvas holomorfas. Tenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema 4.2. *Sea $0 < \mu < 1$. Si $\Psi \in Nh^\mu$ es acotada, entonces $\Psi(\mathbb{D})$ es linealmente conexo.*

Demostración. Análoga a la prueba del Teorema 4.1. □

Bibliografía

- [1] G. Acosta, R. Duran y M. Muschietti, *Solutions of the divergence operator on John domains*, Adv Math. **206** (2006), no. 2, 373–401.
- [2] L. V. Ahlfors, *Cross-ratios and Schwarzian derivatives in \mathbb{R}^n* , Complex Analysis, 1–15, Birkhäuser, Basel, 1988.
- [3] L. V. Ahlfors, *Quasiconformal reflections*, Acta Math. **109** (1963), 291–301.
- [4] L. V. Ahlfors y G. Weill, *A uniqueness theorem for Beltrami equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 975–978.
- [5] M. Chuaqui, *Nehari functions and rates of growth of the Poincaré density*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **27** (2002), no. 1, 7–20.
- [6] M. Chuaqui, P. Duren y B. Osgood, *Ahlfors-Weill extensions for a class of minimal surfaces*, En preparación.
- [7] M. Chuaqui, P. Duren y B. Osgood, *Injectivity Criteria for Holomorphic Curves in \mathbb{C}^n* , Pure Appl. Math. Q. **7** (2011), no. 1, 223–251.
- [8] M. Chuaqui, P. Duren y B. Osgood, *Two-point distortion theorems for harmonic mappings*, Illinois J. Math. Aceptado.
- [9] M. Chuaqui, P. Duren y B. Osgood, *Univalence criteria for lifts of harmonic mappings to minimal surfaces*, J. Geom. Anal. **17** (2007), no. 1, 49–74.
- [10] M. Chuaqui, P. Duren y B. Osgood, *Schwarzian derivative criteria for valence of analytic and harmonic mappings*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **143** (2004), no. 2, 473–486.

- [11] M. Chuaqui, P. Duren y B. Osgood, *Curvature properties of planar harmonic mappings*, Comput. Methods Funct. Theory. **4** (2004), 127–142.
- [12] M. Chuaqui, P. Duren y B. Osgood, *The Schwarzian derivative for harmonic mappings*, J. Anal. Math. **91** (2003), 329–351.
- [13] M. Chuaqui y B. Osgood, *Sharp distortion theorems associated with the Schwarzian derivative*, J. London Math. Soc. **2** 48, (1993), no. 2, 289–298.
- [14] M. Chuaqui y B. Osgood, *Ahlfors-Weill extensions of conformal mappings and critical points of the Poincaré metric*, Comment. Math. Helv. **69** (1994), no. 4, 659–668.
- [15] M. Chuaqui, B. Osgood y Ch. Pommerenke, *John domains, quasidisks, and the Nehari class*, J. Reine Angew. Math. **471** (1996), 77–114.
- [16] M. Chuaqui y J. Gevirtz, *Simple curves in \mathbb{R}^n and Ahlfors' Schwarzian derivative*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 223–230.
- [17] J. Clunie y T. Sheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **9** (1984), 3–25.
- [18] P. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 2004.
- [19] F. W. Gehring, K. Hag y O. Martio, *Quasihyperbolic geodesics in John domains*, Math Scand. **65** (1989), 75–92.
- [20] D. Herron, *John Domains and the quasihyperbolic metric*, Complex Variables Theory Appl. **39** (1999), no. 4, 327–334.
- [21] E. Hille, *Remarks on a paper by Zeev Nehari*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 552–553.
- [22] F. John, *Rotation and strain*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 391–413.
- [23] W. Kraus, *Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreissabbildung*, Mitt. Math. Sem. Giessen **21** (1932), 1–28.

- [24] H. Lewy, *On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936), 689–692.
- [25] Z. Nehari, *Some criteria of univalence*, Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 700–704.
- [26] Z. Nehari, *The Schwarzian derivative and schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 545–551.
- [27] B. Osgood y D. Stowe, *The Schwarzian derivative and conformal mapping of Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **67** (1992), no. 1, 57–99.
- [28] V. V. Pokornyi, *On some sufficient conditions for univalence*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **79** (1951), 743–746.
- [29] Ch. Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [30] Ch. Pommerenke y F. W. Gehring, *On the Nehari univalence criterion and quasicircles*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), no. 2, 226–242.
- [31] T. Sheil-Small, *Constants for planar harmonic mappings*, J. London Math. Soc. **2** 42, (1990), no. 2, 237–248.