PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

SOBRE LA REGULARIDAD DE LOS VECTORES PROPIOS DE UN OPERADOR UNITARIO

por

Angélica María Vega Moreno.

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesor Guía: Olivier Bourget.

Comisión Informante:
Maria Angelica Astaburuaga (Pontificia Universidad Catolica de Chile).
Rafael Tiedra de Aldecoa (Pontificia Universidad Catolica de Chile).

Santiago, Chile.

**Agradecimientos.*

Quiero dedicarles estas líneas de agradecimiento a las personas que me ayudaron de una u otra forma e hicieron posible la culminación del Magister.

En primer lugar deseo manifestar a mi tutor Olivier Bourget, porque además de ser mi guía académico ha sido un amigo. Mi entera gratitud por enseñarme, apoyarme y creer en mí.

A la Facultad de Matemáticas de la Universidad Católica de Chile le agradezco enormemente por la oportunidad que me brindaron al aceptarme como alumna del postgrado brindándome todas las condiciones adecuadas para desarrollar mis estudios sin tener que preocuparme por los percances económicos y permitiéndome utilizar sus recursos materiales y humanos. En particular manifiesto mi gratitud hacia los profesores de la facultad por su disposición y calidez.

Le estoy totalmente agradecida al Laboratorio de Análisis Estocástico (ANESTOC) por el apoyo económico que me brindo en una época de dificultad.

A Martha Romero y Claudio Rivera por brindarme su amistad, apoyo y conocimiento. Aún recuerdo esos días enteros de estudio y estrés que se me hacían llevaderos y alegres por ustedes.

A Katia Vogt y Claudia Bahamondes, mujeres extraordinarias que con sus charlas y ternura hicieron que me reencontrara conmigo misma y encontrara de nuevo mi camino hacia mis sueños.

A Julián Agredo, mi amor, mi amigo incondicional, mi cómplice. Con tu apoyo, conocimiento, ternura y sinceridad, floreces en mi alma y espíritu la libertad, el entusiasmo y la alegría de quien ama como un niño, gracias por estar a mi lado todos estos años.

A mi padre, porque has sido mi artesano. Me obsequiaste todos los conocimientos y bases necesarias para sobrepasar obstáculos manteniendo intactos mis principios, las ganas de seguir aprendiendo y amar a las personas por sus virtudes, algo que en cualquier parte del mundo me hace sentir como en casa.

A mis familiares y amigos en Colombia que pese a la distancia están presentes en mi corazón y son mi inspiración.

Por último, a todos mis compañeros del postgrado y funcionarios de la Facultad de Matemáticas gracias por hacer de mi estancia en este hermoso país una grata experiencia.

1. Introducción

El estudio de las propiedades espectrales de un operador auto-adjunto o unitario proporciona información sobre la dinámica del sistema cuántico descrito por ejemplo en [EV]. Por esta razón cuando se desea obtener información sobre la regularidad de los vectores propios de un operador auto-adjunto H sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es natural enfocarnos en el estudio del espectro de dicho operador. En esa dirección Mourre [M] probó que si se satisfcace la siguiente estimación

$$E_{\Delta}(H)i[H,A]E_{\Delta}(H) \geq \theta E_{\Delta}(H) + K,$$

conocida como la desigualdad de Mourre, donde $E_{\Delta}(H)$ es la proyección espectral de H en un intervalo abierto Δ, A es algún operador auto-adjunto, θ es una constante estrictamente positiva y K algún operador compacto, y si adicionalmente se satisfacen condiciones de acotamiento relativo a H para los conmutadores de primer y segundo orden de H y A, entonces en ese intervalo el espectro carece de componente singular continuo. Además, el espectro puntual tiene multiplicidad finita en todo subintervalo compacto de Δ. Más información sobre la evolución de la teoria de Mourre se puede encontrar en [ABG].

Posteriormente en el año 2005 Cattaneo probó en [C] que al satisfacerse la desigualdad de Mourre y al tener los conmutadores de ordenes superiores de H y A H-acotados al menos hasta un orden $n+2$ para n un entero positivo, se obtiene que el operador A^nP esta bien definido y es acotado, o equivalentemente, $\|A^n\varphi\| \leq C_n\|\varphi\|$ para cualquier vector propio φ de P asociado al valor propio 1 con P proyección ortogonal de H definido sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con imágen sobre el espacio propio asociado al valor propio 1. Para avances recientes orientados al mejoramiento de este resultado ver [MW].

Por otra parte, ese mismo año se desarrolló una técnica de conmutadores en [ABCF] que permitió estudiar el espectro de un operador unitario U definido sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ que satisface una adaptación de la desigualdad de Mourre al caso unitario:

$$E_{\Delta}(U)(U^*AU - A)E_{\Delta}(U) \geq \theta E_{\Delta}(U) + K,$$

donde $E_{\Delta}(U)$ es la proyección espectral de U en un arco abierto de S^1, A es algún operador auto-adjunto, θ una constante estrictamente positiva y K algún operador compacto. El método les permitió tener condiciones suficientes para concluir al igual que en el caso auto-adjunto las propiedades del espectro en Δ.

El propósito de ésta tesis es realizar una adaptación del trabajo de [C] al caso unitario para $n = 1$ usando las técnicas de conmutadores, la estimación de [ABCF] y las hipótesis de acotamiento de los primeros conmutadores entre U y A.

En los Preliminares se realizará un breve resumen acerca de la formula de Helffer y Sjöstrand la cual se usará a lo largo de éste trabajo. En la sección 3 se enunciará el teorema principal y se hará su demostración usando dos proposiciones cuyas demostraciones se realizarán en las secciones 4 y 5. En los Apendices se detallarán todos los cálculos de las estimaciones necesarias de términos que involucran los conmutadores de orden superior y la formula de Helffer y Sjöstrand.

2. Preliminares.

Existe una forma conveniente y explicita para el calculo funcional de un operador auto-adjunto A definido sobre un espacio separable de Hilbert $\mathcal{H}$, publicada en 1989 por Helffer y Sjöstrand [D], la cual se usará a lo largo de éste trabajo y se describirá a continuación:

Si f es una función compleja en $C^{n+2}(\mathbb{R})$ para algún $n \geq 0$, $\langle x \rangle := (1+x^2)^{1/2}$, $\partial_{\overline{z}} = \partial x + i\partial y$ y $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ con $\chi = 1$ en algún intervalo abierto que contenga al cero, entonces siguiendo la notacion de [C]

$$\widetilde{f}(z) := \chi\left(\frac{y}{\langle x \rangle}\right) \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(x) \frac{(iy)^k}{k!} \tag{1}$$

es una extensión casi analitica de f, es decir, $\partial_{\overline{z}} \widetilde{f}(z) = 0$ para $z \in \mathbb{R}$. De este modo el operador $f(A)$ se puede escribir usando la fórmula de Helffer y Sjöstrand

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{\overline{z}} \widetilde{f}(z))(z-A)^{-1} dxdy. \tag{2}$$

Para simplificar la notación se usará $f_{0,n+1}(z)$ para denotar $\sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(x) \frac{(iy)^k}{k!}$ y $d\widetilde{f}(z)$ para denotar $-\frac{1}{2\pi} \partial_{\overline{z}} \widetilde{f}(z) dxdy$ con lo que las ecuaciones (1) y(2) quedan respectivamente

$$\widetilde{f}(z) = \chi\left(\frac{y}{\langle x \rangle}\right) f_{0,n+1}(z)$$

y

$$f(A) = \int_{\mathbb{R}^2} d\widetilde{f}(z)(z-A)^{-1}.$$

Adicionalmente la fórmula de Helffer y Sjöstrand se puede extender para las derivadas de orden superior de f obteniendo:

$$f^{(p)}(A) = p\,! \int d\widetilde{f}(z)(z-A)^{-p-1}, \tag{3}$$

la cual se acota uniformemente en A por

$$\int |d\widetilde{f}(z)||Im(z)|^{-p-1} \leq cte \sum_{k=0}^{n+2} \|f^k\|_{k-p-1} \tag{4}$$

para $p = 0, \cdots, n$ siempre y cuando

$$\|f^k\|_{k-p-1} < \infty \quad \text{para} \quad k = 0, \cdots, n+2 \tag{5}$$

definiendo las normas

$$\|f\|_m := \int dx \langle x \rangle^m |f(x)|. \tag{6}$$

Para mayor información ver [HS].

Con esto se terminan los preliminares y se da inicio al desarrollo de la temática principal de este trabajo.

3. El Teorema Principal.

Sean $\mathcal{H}$ un espacio complejo de Hilbert de dimensión infinita, U un operador unitario, P una proyección ortogonal en $\mathcal{H}$, A un operador auto-adjunto , $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda := e^{i\mu}$, J un intervalo abierto y acotado en $\mathbb{R}$ y $\Delta := \{e^{i\theta}/\theta \in J\}$ cumpliendo las siguientes condiciones:

C-1 U es un operador unitario con λ valor propio de U inmerso en el espectro continuo de U y P autoproyección de U sobre $\mathcal{H}$ con imágen sobre el espacio propio asociado a λ.

C-2 Δ está contenido en el espectro continuo de U y $\lambda \in \Delta$.

C-3 A es un operador auto-adjunto con dominio $\mathcal{D}(A)$ denso en $\mathcal{H}$ tal que

C-4 $U(\mathcal{D}(A)) \subseteq \mathcal{D}(A)$

- La forma sesquilineal $F : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$

$$F(\varphi, \phi) := \langle U\varphi, AU\phi\rangle \ - \langle \varphi, A\phi\rangle$$

define al operador $U^*AU - A$ acotado en $\mathcal{D}(A)$ y por lo tanto extendible continuamente a todo $\mathcal{H}$.

- Haciendo $B_1 := U^*AU - A$ $(= U^*[A, U])$, la forma sesquilineal $F_k : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$

$$F_k(\varphi, \phi) := i\langle B_{k-1}\varphi, A\phi\rangle \ - i\langle A\varphi, B_{k-1}\phi\rangle$$

define al operador $B_k := i[B_{k-1}, A]$ acotado en $\mathcal{D}(A)$ y por lo tanto extendible continuamente a todo $\mathcal{H}$.

C-5 **Desigualdad de Mourre.** Existen una constante estrictamente positiva θ y un operador compacto K para los cuales en Δ se satisface

$$E_\Delta(U)B_1E_\Delta(U) \geq \theta E_\Delta(U) + K$$

donde $E_\Delta(U)$ es la proyección espectral de U en Δ.

En lo que sigue se mantendrán estas notaciones y condiciones con las cuales se puede enunciar el teorema principal.

Teorema 3.1. ***Teorema Principal.*** *Supóngamos que $\mathcal{H}$, A, P, λ y Δ satisfacen las condiciones (C-1)-(C-5). Entonces $RanP \subseteq \mathcal{D}(A)$, lo cual debido a que P tiene rango finito, equivale a decir que el operador AP es acotado, es decir, $\|A\varphi\| \leq c\|\varphi\|$ para cualquier vector propio φ de U asociado al valor propio λ.*

Se procederá a la demostración enunciando un lema y dos proposiciones. La prueba del lema se encuentra en [C] y las demostraciones de las proposiciones se presentarán en las siguientes secciones.

Definamos

$$\langle x\rangle := (1 + x^2)^{1/2} \qquad \text{y} \qquad f_\varepsilon(x) := \frac{x}{\langle \varepsilon x\rangle}$$

para $0 < \varepsilon < 1$.

Como $f_\varepsilon(x)$ tiende a x puntualmente cuando ε tiende a cero, $f_\varepsilon(A)$ nos da una aproximación continua de A. De esta forma si probamos que para algún $\delta > 0$ $\|f_\varepsilon(\delta A)\varphi\|$ está uniformemente acotado en ε para cualquier $\varphi \in \mathrm{Ran}P$ y usamos el siguiente lema obtenemos lo deseado.

Lema 3.2. *Sea $\psi \in \mathcal{H}$. Si $f_\varepsilon(A)\psi$ está uniformemente acotado en ε, entonces $\psi \in \mathcal{D}(A)$ y $A\psi = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(A)\psi$.*

Ahora, si se define $\langle B_1\rangle_\rho := \langle \rho, B_1\rho\rangle$ para cualquier $\rho \in \mathcal{H}$, la acotación uniforme que se necesita se obtiene de las siguientes proposiciones:

Proposición 3.3. *(Cota inferior).Bajo las mismas hipótesis del teorema 3.1 existen constantes estrictamente positivas $\widetilde{\theta}$ y δ_1 tales que*

$$\langle B_1\rangle_{f_\varepsilon(\delta A)\varphi} + \langle B_1\rangle_{f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi} \geq \widetilde{\theta}(\|f_\varepsilon(\delta A)\varphi\|^2 + \|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\|^2) - c_1$$

para $0 < \delta \leq \delta_1$ y alguna constante $c_1 > 0$.

Proposición 3.4. *(Cota superior).Bajo las mismas hipótesis del teorema 3.1 existen constantes estrictamente positivas c_2 y δ_2 tales que*

$$\langle B_1\rangle_{f_\varepsilon(\delta A)\varphi} + \langle B_1\rangle_{f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi} \leq c_2(\|f_\varepsilon(\delta A)\varphi\| + \|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\| + 1)$$

para $0 < \delta \leq \delta_2$.

Con estos resultados se procede a la demostración del teorema principal.

Demostración. De las proposiciones 3.3 y 3.4 se tiene que para $0 < \delta \leq min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\widetilde{\theta}(\|f_\varepsilon(\delta A)\varphi\|^2 + \|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\|^2) - c_1 \leq c_2(\|f_\varepsilon(\delta A)\varphi\| + \|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\| + 1)$$

y así la desigualdad

$$\frac{\widetilde{\theta}}{2}(\|f_\varepsilon(\delta A)\varphi\| + \|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\|)^2 - c_2(\|f_\varepsilon(\delta A)\varphi\| + \|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\|) - (c_1 + c_2) \leq 0$$

que nos permite acotar uniformemente a $\|f_\varepsilon(\delta A)\varphi\| + \|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\|$ con lo que el teorema queda demostrado.

$\square$

En la siguente sección se proseguíra con la demostración de la proposición 3.3, dejando la prueba de la proposición 3.4 para la sección 5.

4. Demostración de la proposición 3.3.

Observación: Sin perdida de generalidad se puede suponer que $\lambda = 1$. En efecto:

1. Si se satisface la desigualdad de Mourre en Δ y si B_1 y $[U^*AU, A]$ admiten extensiones continuas sobre $\mathcal{H}$ se tiene:

   (I) El espectro del operador U no tiene componente singular continuo en Δ

(ii) U tiene un número finito de valores propios de multiplicidad finita en cada subconjunto compacto de Δ (Condiciones que se cumplen notando que $[U^*AU, A] = [B_1, A]$).

Para la prueba de éstas afirmaciones ver [ABCF].

2. Podemos entonces asumir que λ es el único valor propio de U para Δ tomando un $\Delta^{'} \subseteq \Delta$ en donde λ sea el único valor propio, pues se sigue cumpliendo la desigualdad de Mourre en $\Delta^{'}$

3. λ valor propio de U equivale a que 1 es valor propio de $\lambda^{-1}U$ de lo cual se sigue que en $\Delta^{'} := \lambda^{-1}\Delta$ se tiene a 1 como único valor propio de $\lambda^{-1}U$ y dado que

$$E_{\Delta'}(\lambda^{-1}U) = \int_{S^1} \mathbb{1}_{\Delta'}(\lambda^{-1}w)\, dE_U(w) = E_\Delta(U)$$

la desigualdad de Mourre queda intacta al remplazar $E_\Delta(U)$ y U por $E_{\Delta'}(\lambda^{-1}U)$ y $\lambda^{-1}U$ respectivamente.

Así, en el resto del trabajo se supondrán válidas todas las condiciones del teorema, se asumirá que 1 es el único valor propio de U en Δ, se tomará $\|\varphi\| = 1$ y se dará por entendido que todas las constantes son independientes de ε.

La idea de la prueba para acotar inferiormente a $\langle B_1\rangle_{f_\varepsilon(\delta A)\varphi} + \langle B_1\rangle_{f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi}$ (proposición 3.3) es:

Acotar primeramente el término $\langle B_1\rangle_\psi$ inferiormente para cualquier $\psi \in \mathcal{H}$ hasta que sea necesario maniobrar con cada uno de los términos $\psi = f_\varepsilon(\delta A)\varphi$ y $\psi' = f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi$ por separado. Despues, una vez se tengan las dos cotas inferiores, se juntarán para lograr la cota deseada.

Con esto en mente, denotando por E_Δ la proyección espectral de U para el intervalo de Mourre Δ y haciendo $\overline{E}_\Delta := \mathbb{1} - E_\Delta$ se puede escribir para todo $\psi \in \mathcal{H}$

$$\langle B_1\rangle_\psi = \langle E_\Delta B_1 E_\Delta\rangle_\psi + \langle B_1 \overline{E}_\Delta\rangle_\psi + \langle \overline{E}_\Delta B_1\rangle_\psi + \langle \overline{E}_\Delta B_1 \overline{E}_\Delta\rangle_\psi$$

y así se tendrá

$$\langle B_1\rangle_\psi \geq \langle E_\Delta B_1 E_\Delta\rangle_\psi - 2\,\|B_1\|\,\left\|\overline{E}_\Delta\psi\right\|\,\|\psi\| - \|B_1\|\,\left\|\overline{E}_\Delta\psi\right\|^2 \tag{7}$$

para todo $\psi \in \mathcal{H}$.

Siguiendo con el propósito, a continuación se enunciarán y probarán los lemas 4.1 y 4.2 para acotar por debajo al primer término de (7), $\langle E_\Delta B_1 E_\Delta\rangle_\psi$. Luego, de la misma forma, por medio del lema 4.3, se acotará inferiormente el segundo término y cuando se tengan estos resultados probados se hará la demostración de la proposición.

Lema 4.1. $s-\text{lím}_{\varepsilon\to 0}(U^* f_\varepsilon(A)U - f_\varepsilon(A)) = B_1$

Demostración. Para cualquier $\chi \in \mathcal{D}(A)$ por el teorema espectral [RS]

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(U^* f_\varepsilon(A)U - f_\varepsilon(A))\chi = U^* \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(A)(U\chi) - \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(A)\chi = B_1\chi.$$

Entonces si se prueba que $U^* f_\varepsilon(A)U - f_\varepsilon(A)$ esta uniformemente acotado en ε, se prueba que $U^* f_\varepsilon(A)U - f_\varepsilon(A)$ converge fuertemente a B_1 en $\mathcal{H}$. Esto se puede inferir usando la expansión (A.4) para la función $f_\varepsilon(x)$ con $n=2$ y (A.1) (ver apéndice) como sigue:

$$\begin{aligned}
\|U^* f_\varepsilon(A)U - f_\varepsilon(A)\| &\le \left\| -i\int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1}B_1 + i\int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-A)^{-2}B_1 \right\| \\
&\quad + \|f'_\varepsilon(x)\|\|B_1\| + \left\| \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1}B_2(z-A)^{-1} \right\| \\
&\le \left\| \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)\Big((z-U^*AU)^{-1} - (z-A)^{-1}\Big)(z-A)^{-1}B_1 \right\| \\
&\quad + \|B_1\|\,\|f'_\varepsilon(x)\| + \|B_2\| \int |d\widetilde{f}_\varepsilon(z)|\,|y|^{-3} \\
&\le \|B_1\|\,\|f'_\varepsilon(x)\| + (\|B_2\| + \|B_1\|^2) \int |d\widetilde{f}_\varepsilon(z)|\,|y|^{-3}
\end{aligned}$$

El término $\|B_1\|\,\|f'_\varepsilon(x)\|$ está uniformemente acotado en ε debido a que

$$f'_\varepsilon(x) = \frac{1}{(1+\varepsilon^2x^2)^{3/2}} \le 1,$$

mientras que la acotación uniforme del término $\int |d\widetilde{f}_\varepsilon(z)|\,|y|^{-3}$ con respecto a ε se puede hacer exactamente igual a como se acotaron los términos de la forma

$$\int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-A)^{-m}B_k(z-A)^{-1} \qquad \text{para} \qquad m \ge 2 \tag{8}$$

en [C], debido a que igualmente que para el operador $(z-A)^{-1}$, $\left\|(z-U^*AU)^{-1}\right\| \le |y|$ y los conmutadores B_n son acotados.

$\square$

Nótese que lo dicho en la última parte de la prueba anterior se generaliza de la siguiente forma:

Nota 1. *Si se tiene el operador*

$$\int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)S^{k_1}T_1S^{k_2}T_2\cdots S^{k_n}T_n$$

donde para $1 \le i \le n$ S es uno de los operadores $(z-A)^{-1}$ o $(z-U^*AU)^{-1}$, los T_i son operadores continuos en $\mathcal{H}$ y los k_i enteros positivos, entonces si $\sum_{i=1}^n k_i \ge 3$ el operador definido mediante dicha integral está uniformemente acotado en ε.

Nota 2. *Al considerar $f_\varepsilon(\delta A)$ en vez de $f_\varepsilon(A)$ se tiene que*

$$\|U^* f_\varepsilon(\delta A)U - f_\varepsilon(\delta A)\| \leq c_\delta \tag{9}$$

para alguna constante $c_\delta > 0$ tal que $c_\delta \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$. Esto último se sigue de la desigualdad

$$\|U^* f_\varepsilon(\delta A)U - f_\varepsilon(\delta A)\| \leq \delta\Big(\|B_1\| \, \|f'_\varepsilon(\delta x)\| + (\delta \, \|B_2\| + \|B_1\|^2) \int |d\widetilde{f}_\varepsilon(z)| \, |y|^{-3}\Big).$$

Lema 4.2. *Existen constantes $\theta' > 0$ y $c' > 0$ para las cuales*

$$\langle E_\Delta B_1 E_\Delta \rangle_\psi \geq \theta' \|E_\Delta \psi\|^2 - c'\|P\psi\|^2 \tag{10}$$

se cumple para todo $\psi \in \mathcal{H}$.

Demostración. Si $E^c_\Delta := E_\Delta - P$ es la proyección espectral de U correspondiente al espectro continuo de U en Δ, entonces sin perdida de generalidad se puede suponer que Δ no sólo tiene a 1 como único valor propio de U, sino que además se puede asumir que $\Delta = \Delta_\eta = \{e^{it} : |t| < \eta\}$ para algún $\eta > 0$ lo suficientemente pequeño para el cual

$$E^c_\Delta B_1 E^c_\Delta \geq \theta E^c_\Delta \quad \text{para un} \quad \theta > 0.$$

En efecto:

Por la desigualdad de Mourre

$$\begin{aligned} E^c_{\Delta_\eta} B_1 E^c_{\Delta_\eta} &= E_{\Delta_\eta} B_1 E_{\Delta_\eta} - PB_1 E_{\Delta_\eta} - E_{\Delta_\eta} B_1 P + PB_1 P \\ &\geq \theta E_{\Delta_\eta} + K - PB_1 E_{\Delta_\eta} - E_{\Delta_\eta} B_1 P + PB_1 P \\ &= \theta E_{\Delta_\eta} + K_1 \end{aligned}$$

siendo $K_1 = K - PB_1 E_\Delta - E_\Delta B_1 P + PB_1 P$ un operador compacto, pues P tiene rango finito.

De la desigualdad anterior se deduce que $E^c_{\Delta_\eta} B_1 E^c_{\Delta_\eta} \geq \theta E^c_{\Delta_\eta} + E^c_{\Delta_\eta} K_1 E^c_{\Delta_\eta}$, pero como

$$s - \lim_{\eta\to 0}(E^c_{\Delta_\eta}) = 0$$

entonces $\left\| E^c_{\Delta_\eta} K_1 E^c_{\Delta_\eta} \right\| \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0$ de donde se sigue que existe un $\eta > 0$ para el cual

$$E^c_{\Delta_\eta} B_1 E^c_{\Delta_\eta} \geq -\frac{\theta}{2} E^c_{\Delta_\eta}.$$

Ahora, como

$$\langle E_\Delta B_1 E_\Delta \rangle_\psi = \langle PB_1 P \rangle_\psi + \langle E^c_\Delta B_1 E^c_\Delta \rangle_\psi + \langle PB_1 E^c_\Delta \rangle_\psi + \langle PB_1 E^c_\Delta \rangle_\psi$$

se tiene que:

Para el primero de estos términos $\langle E^c_\Delta B_1 E^c_\Delta \rangle_\psi \geq \theta \, \|E^c_\Delta \psi\|^2$ para un $\theta > 0$.

Para el segundo término se usará el lema 4.1 y el hecho de que

$$UP = \int_{S^1} w\mathbb{1}_{\{1\}}(w)\, dE_U(w) = P$$

quedando

$$\langle PB_1P\rangle_\psi = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle \psi, (UP)^* f_\varepsilon(A) UP\psi - Pf_\varepsilon(A)P\psi\rangle = 0.$$

Los otros dos términos se acotan asi:

$$\langle PB_1E^c_\Delta\rangle_\psi + \langle PB_1E^c_\Delta\rangle_\psi \leq 2\|B_1\|\,\|E^c_\Delta\psi\|\,\|P\psi\|.$$

Resumiendo todo lo anterior queda

$$\langle E_\Delta B_1 E_\Delta\rangle_\psi \geq \theta\|E^c_\Delta\psi\|^2 - 2\|B_1\|\,\|E^c_\Delta\psi\|\,\|P\psi\|.$$

Ahora bien, para cualquier $\alpha > 0$

$$\Big(\|P\psi\| - \alpha\|E^c_\Delta\psi\|\Big)^2 \geq 0 \quad \longleftrightarrow \quad 2\,\|P\psi\|\,\|E^c_\Delta\psi\| \leq \frac{1}{\alpha}\,\|P\psi\|^2 + \alpha\,\|E^c_\Delta\psi\|^2$$

entonces

$$\begin{aligned}\langle E_\Delta B_1 E_\Delta\rangle_\psi &\geq (\theta - \alpha\,\|B_1\|)\,\|E^c_\Delta\psi\|^2 - \frac{\|B_1\|}{\alpha}\,\|P\psi\|^2\\ &\geq \theta'\|E_\Delta\psi\|^2 - c'\|P\psi\|^2\end{aligned}$$

haciendo $\theta' := \theta - \alpha\,\|B_1\|$ y $c' := \dfrac{\|B_1\|}{\alpha}$ con α lo suficientemente pequeño para obtener $\theta' > 0$. $\square$

Observación: Se hará hincapie en que lo que se ha encontrado hasta el momento no depende de la asignación en particular que se le dé a ψ, pero de ahora en adelante si se tendrá en cuenta.

Antes de empezar con la demostración de la proposición 3.3 se necesita otro lema más.

Lema 4.3. *$\|P\psi\| \leq 1 + N_\delta\,\|\psi\|$, donde ψ es $f_\varepsilon(\delta A)\varphi$ o $f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi$ y $N_\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.*

Demostración. La prueba de éste lema es idéntica a la prueba del lema 10 en [C] tanto para $f_\varepsilon(\delta A)\varphi$ como para $f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi$, pues las proyecciones P en ambos casos son continuas y $|f_\varepsilon(x)| \leq 1$ para $|x| \leq 1$. Ver [C]. $\square$

Ahora sí como se mencionó anteriormente se procederá a demostrar la proposición 3.3.

Demostración de la proposición 3.3. Aplicando los lemas 4.2 y 4.3 a (7) con $\psi = f_\varepsilon(\delta A)\varphi$ o con $\psi = f_\varepsilon(\delta U^* AU)\varphi$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\langle B_1\rangle_\psi \geq \theta' \Big(\|\psi\|^2 - \big\|\overline{E}_\Delta \psi\big\|^2 \Big) - c' \Big(1 + N_\delta \|\psi\| \Big)^2 \\ - 2\|B_1\| \big\|\overline{E}_\Delta \psi\big\| \|\psi\| - \|B_1\| \big\|\overline{E}_\Delta \psi\big\|^2 .\end{aligned}$$

Obsérvese en éste instante que si se prueba que

$$\big\|\overline{E}_\Delta \psi\big\| \leq c'''_\delta$$

siendo c'''_δ una constante positiva tal que $c'''_\delta \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$, se tendrá la desigualdad deseada para δ lo suficientemente pequeño, pues se tendría:

$$\begin{aligned}\langle B_1\rangle_\psi &\geq \theta' \|\psi\|^2 - \theta' c'''_\delta \\ &\quad - c' - 2c' N_\delta \Big(\|\psi\|^2 + 1 \Big) - c'(N_\delta)^2 \|\psi\|^2 \\ &\quad - 2\|B_1\| c'''_\delta \Big(\|\psi\|^2 + 1 \Big) - \|B_1\| (c'''_\delta)^2 \\ &\geq \Big(\theta' - c'(N_\delta)^2 \Big) \|\psi\|^2 - c_{1,\delta} \Big(1 + \frac{d_{2,\delta}}{c_{1,\delta}} \|\psi\|^2 \Big) \\ &= \theta''_\delta \|\psi\|^2 - c_{1,\delta}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} c_{1,\delta} &:= \theta' c'''_\delta + c' + 2c' N_\delta + 2\|B_1\| c'''_\delta - \|B_1\| (c'''_\delta)^2 > 0, \\ d_{2,\delta} &:= 2c' N_\delta + 2\|B_1\| c'''_\delta > 0 \qquad \text{y} \\ \theta''_\delta &:= \theta' - c'(N_\delta)^2 - d_{2,\delta}\end{aligned}$$

con

$$c_{1,\delta} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} c' > 0, \qquad d_{2,\delta} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{y} \qquad \theta''_\delta \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \theta' > 0,$$

es decir, existirian $\delta_1 > 0$, $\widetilde{\theta} > 0$ y $c_1 > 0$ tales que

$$\langle B_1\rangle_\psi \geq \widetilde{\theta} \|\psi\|^2 - \frac{c_1}{2}.$$

Resta entonces probar que

$$\big\|\overline{E}_\Delta \psi\big\| \leq c'''_\delta \qquad \text{con} \qquad c'''_\delta > 0 \qquad \text{tal que} \qquad c'''_\delta \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Para esto se pone en evidencia que $1 \in \rho(U^*|_{Rec\overline{E}_\Delta})$ pues

$$(U^* - 1)\overline{E}_\Delta = \int_{S^1} \Big(\frac{1}{w} - 1\Big) \mathbb{1}_{\Delta^c}(w)\, dE_U(w)$$

es un operador invetible en Δ^c con inversa

$$\overline{E}_\Delta (U^* - 1)^{-1} = -\int_{S^1} \Big(1 + \frac{1}{w-1}\Big) \mathbb{1}_{\Delta^c}(w)\, dE_U(w).$$

Así,

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{E}_\Delta \psi\right\| &= \left\|\overline{E}_\Delta (U^* - 1)^{-1} \overline{E}_\Delta (U^* - 1) \overline{E}_\Delta \psi\right\| \\
&\leq \left\|\overline{E}_\Delta (U^* - 1)^{-1} \overline{E}_\Delta\right\| \|(U^* - 1)\psi\| \\
&\leq \frac{1}{d(1, \sigma(E_\Delta U^* E_\Delta))} \|(U^* - 1)\psi\| \\
&\leq cte\ \|(U^* - 1)\psi\|\,.
\end{aligned}$$

Ahora, para $\psi = f_\varepsilon(\delta A)\varphi$

$$\left\|\overline{E}_\Delta f_\varepsilon(\delta A)\varphi\right\| \leq cte\ \|U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\| \leq c_\delta'''$$

y para $\psi = f_\varepsilon(\delta U^* A U)\varphi$

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{E}_\Delta f_\varepsilon(\delta U^* A U)\varphi\right\| &\leq cte\ \|U^* f_\varepsilon(\delta U^* A U) U - f_\varepsilon(\delta U^* A U)\| \\
&= cte\ \left\|U^* \Big(U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\Big) U\right\| \\
&\leq cte\ \|U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\| \leq c_\delta'''
\end{aligned}$$

con $c_\delta''' \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0$ por la nota 2.

Luego la proposición 3.3 queda demostrada.

$\square$

La siguiente sección esta dedicada a la cota superior de $\langle B_1 \rangle_{f_\varepsilon(\delta A)\varphi} + \langle B_1 \rangle_{f_\varepsilon(\delta U^* A U)\varphi}$.

5. Demostración de la proposición 3.4.

El trabajo en ésta sección seguirá un esquema diferente al presentado en la sección anterior debido a su complejidad y se expondrá en tres pasos.

El primero de los pasos es manipular la expresión $\langle B_1 \rangle_{f_\varepsilon(\delta A)\varphi} + \langle B_1 \rangle_{f_\varepsilon(\delta U^* A U)\varphi}$ y llevarla a una forma más conveniente para proceder posteriormente a su acotación. Dicha manipulación requiere del lema 5.1 el cual en primera instancia sólo se enunciará.

El segundo es hacer la demostración de la proposición 3.4 usando los lemas 5.2 a 5.7 cuyas pruebas se dejan para el tercer paso.

El tercer y último paso es demostrar los lemas requeridos a lo largo de la sección.

$f_\varepsilon(\delta U^*AU)B_1 f_\varepsilon(\delta U^*AU) + f_\varepsilon(\delta A)B_1 f_\varepsilon(\delta A)$ se puede escribir como:

$$\begin{gathered} f_\varepsilon(\delta A)U^*AUf_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) \\ - \{f_\varepsilon(\delta U^*AU)Af_\varepsilon(\delta U^*AU) - f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)\} \\ + 2\{f_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) - f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)\}. \end{gathered}$$

De forma más precisa, la igualdad

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(\delta U^*AU)B_1 f_\varepsilon(\delta U^*AU) + f_\varepsilon(\delta A)B_1 f_\varepsilon(\delta A) = & \\ = \quad & f_\varepsilon(\delta A)U^*AUf_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) \\ & - \{f_\varepsilon(\delta U^*AU)Af_\varepsilon(\delta U^*AU) - f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)\} \end{aligned} \tag{11}$$

se da como consecuencia del siguiente lema.

Lema 5.1.

$$s - \lim_{\tau\to 0}(U^*f_\varepsilon(\delta A)f_\tau(A)f_\varepsilon(\delta A)U - f_\varepsilon(\delta A)f_\tau(A)f_\varepsilon(\delta A)) = (U^*f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)U - f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A))^\sim$$

donde $(U^*f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)U - f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A))^\sim$ *es la extensión continua a todo* $\mathcal{H}$ *del operador* $U^*f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)U - f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)$ *acotado en* $\mathcal{D}(A)$*.*

Apartir de (11) se llega a la forma conveniente para $\langle B_1\rangle_{f_\varepsilon(\delta A)\varphi} + \langle B_1\rangle_{f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi}$ que se mencionó anteriormente:

$$\begin{aligned} \big\langle B_1\big\rangle_{f_\varepsilon(\delta A)\varphi} + \big\langle B_1\big\rangle_{f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi} = & \\ = \quad & \big\langle (f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU))\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\big\rangle_\varphi \\ & + \big\langle \big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big\rangle_\varphi \\ & + \big\langle \big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)B_1\big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big\rangle_\varphi \end{aligned} \tag{12}$$

Demostración de la proposición 3.4. El objetivo ahora es acotar superiormente los términos

$$\begin{gathered} \big\langle \big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\big\rangle_\varphi \\ + \big\langle \big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big\rangle_\varphi \end{gathered}$$

y

$$\big\langle \big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)B_1\big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big\rangle_\varphi$$

para obtener la cota deseada.

Para el primer término

$$\begin{aligned} &\Big\langle \big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^* AU)\big)\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\Big\rangle_\varphi \\ &+ \Big\langle \big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^* AU)\big)\Big\rangle_\varphi \end{aligned} \tag{13}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} &\big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^* AU)\big)\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)+ \\ &\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^* AU)\big)= \\ &-\frac{\delta}{4}\big\{B_1\big(f'_\varepsilon(\delta U^*AU) + f'_\varepsilon(\delta A)\big)+\big(f'_\varepsilon(\delta U^*AU) + f'_\varepsilon(\delta A)\big)B_1\big\}\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big) \\ &-\frac{\delta}{4}\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\big\{B_1\big(f'_\varepsilon(\delta U^*AU) + f'_\varepsilon(\delta A)\big)+\big(f'_\varepsilon(\delta U^*AU) + f'_\varepsilon(\delta A)\big)B_1\big\} \\ &-\frac{\delta^3}{4}\int d\widetilde{f_\varepsilon}(z)Q_1\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big) \\ &-\frac{\delta^3}{4}\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\int d\widetilde{f_\varepsilon}(z)Q_1 \end{aligned} \tag{14}$$

donde

$$\begin{aligned} Q_1 := \quad & i(z-U^*AU)^{-1}B_2(z-A)^{-1}B_1(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1} \\ &+ (z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1}B_3(z-A)^{-2} \\ &- i(z-A)^{-1}B_2(z-A)^{-1}B_1(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1} \\ &+ (z-A)^{-1}(z-U^*AU)^{-1}B_3(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1} \\ &- (z-A)^{-1}B_1(z-U^*AU)^{-2}B_1(z-A)^{-1}B_1 \\ &- B_1(z-A)^{-1}B_1(z-U^*AU)^{-2}B_1(z-A)^{-1} \end{aligned}$$

debido al siguiente lema:

Lema 5.2. *Sea h una función compleja en $C^{n+2}(\mathbb{R})$ para algún $n \geq 0$ satisfaciendo (5) y (6). Entonces*

$$\begin{aligned}
h(U^*AU) - h(A) = \frac{1}{4}\Big\{&\big(h'(U^*AU) + h'(A)\big)B_1 + B_1\big(h'(U^*AU) + h'(A)\big) \\
&+ i\int d\widetilde{h}(z)(z - U^*AU)^{-1}B_2(z - A)^{-1}B_1(z - U^*AU)^{-1}(z - A)^{-1} \\
&+ \int d\widetilde{h}(z)(z - U^*AU)^{-1}(z - A)^{-1}B_3(z - A)^{-2} \\
&- i\int d\widetilde{h}(z)(z - A)^{-1}B_2(z - A)^{-1}B_1(z - U^*AU)^{-1}(z - A)^{-1} \\
&+ \int d\widetilde{h}(z)(z - A)^{-1}(z - U^*AU)^{-1}B_3(z - U^*AU)^{-1}(z - A)^{-1} \\
&- \int d\widetilde{h}(z)(z - A)^{-1}B_1(z - U^*AU)^{-2}B_1(z - A)^{-1}B_1 \\
&- \int d\widetilde{h}(z)B_1(z - A)^{-1}B_1(z - U^*AU)^{-2}B_1(z - A)^{-1}\Big\}.
\end{aligned}$$

Pero reescribiendo (14) se tiene:

$$\begin{aligned}
&\big\langle\big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\big\rangle_\varphi \\
&+ \big\langle\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big\rangle_\varphi = \\
&- \big\langle\frac{\delta}{2}\big(B_1 f'_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + f_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUf'_\varepsilon(\delta U^*AU)B_1\big)\big\rangle_\varphi \\
&- \big\langle\frac{\delta}{2}\big(f'_\varepsilon(\delta U^*AU)B_1U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + f_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUB_1 f'_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big\rangle_\varphi \\
&- \big\langle\frac{\delta}{2}\big(B_1 f'_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A) + f_\varepsilon(\delta A)Af'_\varepsilon(\delta A)B_1\big)\big\rangle_\varphi \\
&- \big\langle\frac{\delta}{2}\big(f'_\varepsilon(\delta A)B_1Af_\varepsilon(\delta A) + f_\varepsilon(\delta A)AB_1 f'_\varepsilon(\delta A)\big)\big\rangle_\varphi \\
&- \big\langle\frac{\delta}{4}B_1\big(f'_\varepsilon(\delta U^*AU) - f'_\varepsilon(\delta A)\big)\big(Af_\varepsilon(\delta A) - U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big\rangle_\varphi \\
&- \big\langle\frac{\delta}{4}\big(f'_\varepsilon(\delta U^*AU) - f'_\varepsilon(\delta A)\big)B_1\big(Af_\varepsilon(\delta A) - U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big\rangle_\varphi \\
&- \big\langle\frac{\delta}{4}\big(Af_\varepsilon(\delta A) - U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)B_1\big(f'_\varepsilon(\delta U^*AU) - f'_\varepsilon(\delta A)\big)\big\rangle_\varphi \\
&- \big\langle\frac{\delta}{4}\big(Af_\varepsilon(\delta A) - U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big(f'_\varepsilon(\delta U^*AU) - f'_\varepsilon(\delta A)\big)B_1\big\rangle_\varphi \\
&- \big\langle\frac{\delta^3}{4}\int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)Q_1\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\big\rangle_\varphi \\
&- \big\langle\frac{\delta^3}{4}\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)Q_1\big\rangle_\varphi .
\end{aligned} \tag{15}$$

Nótese que los primeros términos en (15) son similares a los términos definidos en [C] como

$$E_1 = \frac{\delta}{2}(f_\varepsilon(\delta A)Af'_\varepsilon(\delta A)B_1 + B_1 f'_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A))$$

y

$$E_2 = \frac{\delta}{2}(f'_\varepsilon(\delta A)B_1 A f_\varepsilon(\delta A) + f_\varepsilon(\delta A)AB_1 f'_\varepsilon(\delta A)),$$

razón por la cual se enuncian los siguientes dos lemas, análogos a los lemas 13 y 14 de [C] (recuérdese que $0 < \varepsilon < 1$). Inmediatamente después de enunciar esos dos lemas, también se enunciarán otros dos lemas los cuales nos conducirán a la acotación uniforme de 13.

Lema 5.3. *Existe una constante positiva c' tal que*

$$-\Big\langle \frac{\delta}{2}\big(B_1 f'_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A) + f_\varepsilon(\delta A)Af'_\varepsilon(\delta A)B_1\big)\Big\rangle_\varphi \leq c'(\|f_\varepsilon(\delta A)\| + 1) \quad y$$

$$-\Big\langle \frac{\delta}{2}\big(B_1 f'_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + f_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUf'_\varepsilon(\delta U^*AU)B_1\big)\Big\rangle_\varphi \leq c'(\|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\| + 1)$$

para $0 < \delta \leq \delta_2$.

Lema 5.4. *Existen constantes positivas c'' y δ_2 tales que*

$$-\Big\langle \frac{\delta}{2}\big(f'_\varepsilon(\delta A)B_1 Af_\varepsilon(\delta A) + f_\varepsilon(\delta A)AB_1 f'_\varepsilon(\delta A)\big)\Big\rangle_\varphi \leq c''(\|f_\varepsilon(\delta A)\| + 1) \quad y$$

$$-\Big\langle \frac{\delta}{2}\big(f'_\varepsilon(\delta U^*AU)B_1 U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + f_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUB_1 f'_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\Big\rangle_\varphi \leq c''(\|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\| + 1)$$

para $0 < \delta \leq \delta_2$.

Lema 5.5. $\|f'_\varepsilon(\delta U^*AU) - f'_\varepsilon(\delta A)\| \leq cte\, \varepsilon$

Lema 5.6. $\|U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) - Af_\varepsilon(\delta A)\| \leq cte/\varepsilon$

Así valiendonos de los lemas 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 y las notas 1 y 2, el término (13) se acota superiormente de la siguiente forma:

Existen dos constantes positivas c'' y δ_2 para las cuales

$$\begin{aligned} &\Big\langle \big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\Big\rangle_\varphi \\ &+ \Big\langle \big(U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) + Af_\varepsilon(\delta A)\big)\big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\Big\rangle_\varphi \\ &\leq c'''(\|f_\varepsilon(\delta A)\| + \|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\| + 1) \end{aligned} \tag{16}$$

para $0 < \delta \leq \delta_2$.

Ahora, para el segundo término

$$\Big\langle \big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)B_1\big(f_\varepsilon(\delta A) - f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\Big\rangle_\varphi \tag{17}$$

se tiene que

$$\Big\langle \big(f_\varepsilon(\delta A)-f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)B_1\big(f_\varepsilon(\delta A)-f_\varepsilon(\delta U^*AU)\big)\Big\rangle_\varphi \leq cte\,\|B_1\| \tag{18}$$

debido al siguiente lema

Lema 5.7. $\|f_\varepsilon(\delta U^*AU)-f_\varepsilon(\delta A)\|$ *está uniformemente acotado en* ε*. Más aún,*

$$\|f_\varepsilon(\delta U^*AU)-f_\varepsilon(\delta A)\|\leq c\delta$$

para una constante positiva c.

Luego de (16) y (18) se tiene

$$\langle B_1\rangle_{f_\varepsilon(\delta A)\varphi}+\langle B_1\rangle_{f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi}\leq c_2(\|f_\varepsilon(\delta A)\varphi\|+\|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\|+1)$$

para $0<\delta\leq\delta_2$. como se queria probar.

□

Por último, antes de terminar con ésta sección veamos las pruebas de los lemas usados en la demostración de la proposición 3.4.

5.1. Demostración del lema 5.1

Este lema es similar al lema 4.1 y su prueba es análoga:

Demostración. Para cualquier $\chi\in\mathcal{D}(A)$ por el teorema espectral

$$\begin{aligned}
&\lim_{\tau\to 0}\big(U^*f_\varepsilon(\delta A)f_\tau(A)f_\varepsilon(\delta A)U-f_\varepsilon(\delta A)f_\tau(A)f_\varepsilon(\delta A)\big)\chi=\\
&\qquad=U^*f_\varepsilon(\delta A)\lim_{\tau\to 0}f_\tau(A)\big(f_\varepsilon(\delta A)U\chi\big)-f_\varepsilon(\delta A)\lim_{\tau\to 0}f_\tau(A)\big(f_\varepsilon(\delta A)\chi\big)\\
&\qquad=\big(U^*f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)U-f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)\big)\chi.
\end{aligned}$$

Entonces si se prueba que $U^*f_\varepsilon(\delta A)f_\tau(A)f_\varepsilon(\delta A)U-f_\varepsilon(\delta A)f_\tau(A)f_\varepsilon(\delta A)$ está uniformemente acotado en τ, se prueba que $U^*f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)U-f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)$ es un operador acotado en $\mathcal{D}(A)$ y se cumple el límite pedido.

Obsérvese primero que se puedes escribir

$$\begin{aligned}
U^*f_\varepsilon(\delta A)f_\tau(A)f_\varepsilon(\delta A)U-&f_\varepsilon(\delta A)f_\tau(A)f_\varepsilon(\delta A)=\\
=\;&\big(U^*f_\varepsilon(\delta A)U-f_\varepsilon(\delta A)\big)f_\tau(A)f_\varepsilon(\delta A)\\
&+U^*f_\varepsilon(\delta A)U\big(U^*f_\tau(A)U-f_\tau(A)\big)f_\varepsilon(\delta A)\\
&-U^*f_\varepsilon(\delta A)f_\tau(A)U\big(U^*f_\varepsilon(\delta A)U-f_\varepsilon(\delta A)\big)
\end{aligned}\tag{19}$$

y de ésta forma para acotar uniformemente a $U^* f_\varepsilon(\delta A) f_\tau(A) f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A) f_\tau(A) f_\varepsilon(\delta A)$ en τ, se acotarán por separado los términos

$$\big(U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\big) f_\tau(A) f_\varepsilon(\delta A), \quad U^* f_\varepsilon(\delta A) U \big(U^* f_\tau(A) U - f_\tau(A)\big) f_\varepsilon(\delta A)$$
$$\text{y} \quad - U^* f_\varepsilon(\delta A) f_\tau(A) U \big(U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\big)$$

de (19) con respecto a τ.

Para

$$\big(U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\big) f_\tau(A) f_\varepsilon(\delta A) \tag{20}$$

sumando (A.4) y (A.6) se obtiene

$$\begin{aligned} U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A) = & \frac{1}{2} \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z - U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1} B_1 + \\ & \frac{1}{2} \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z) B_1 (z-A)^{-1}(z - U^*AU)^{-1} + R_2^S \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} R_2^S := & \frac{i}{2} \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-A)^{-1} B_2 (z-A)^{-1}(z-U^*AU)^{-1} + \\ & \frac{i}{2} \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1} B_2 (z-A)^{-1} \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \big(U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\big) f_\tau(A) = & \frac{\delta}{2} \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1} B_1 A h_\tau(A) + \\ & \frac{\delta}{2} \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z) B_1 (z-\delta A)^{-1}(z-\delta U^*AU)^{-1} f_\tau(A) + R_2^S A h_\tau(A) \end{aligned} \tag{21}$$

donde $h_\tau(x) := \langle \tau x \rangle^{-1}$ con $|h_\tau(x)| \leq 1$ para todo τ.

Usando (A.1) y (A.2) se tiene que

$$\begin{aligned} & \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1} B_1 A = \\ & \qquad = \quad f'_\varepsilon(\delta A) A B_1 + \delta B_1 f''_\varepsilon(\delta A) A B_1 \\ & \qquad \quad - i \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1} B_2 \\ & \qquad \quad + \delta B_1 \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-1} B_1 (z-\delta A)^{-3} A B_1 \\ & \qquad \quad + i\delta^2 \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-1} B_2 (z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-2} A B_1 \end{aligned} \tag{22}$$

con cada término a la derecha de la desigualdad acotado uniformemente en ε y δ debido a que $|xf'_\varepsilon(x)| < 1/(\delta\varepsilon)$, $|\delta x f''_\varepsilon(x)| < 3$, por (4) y la nota 1.

De forma análoga también se obtiene que tanto $\int d\widetilde{f}_\varepsilon(z) B_1(z-\delta A)^{-1}(z-\delta U^*AU)^{-1}A$ como $R_2^S A$ se acotan uniformemente en ε y δ.

Ahora, el segundo término

$$U^* f_\varepsilon(\delta A) U \big(U^* f_\tau(A) U - f_\tau(A)\big) f_\varepsilon(\delta A) \tag{23}$$

de (19) está acotado uniformemente en τ pues $U^* f_\tau(A) U - f_\tau(A)$ lo está.

Finalmente,

$$U^* f_\varepsilon(\delta A) f_\tau(A) U \big(U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\big) \tag{24}$$

está acotado uniformemente en τ gracias a que se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
U^* f_\varepsilon(\delta A) f_\tau(A) U \big(U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\big) = & \\
= \quad & \big(U^* f_\varepsilon(\delta A) h_\tau(A) U\big) B_1 \big(U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\big) \\
& + \big(U^* f_\varepsilon(\delta A) h_\tau(A) U\big) A \big(U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\big)
\end{aligned}$$

pues $A\big(U^* f_\varepsilon(\delta A) U - f_\varepsilon(\delta A)\big)$ se acota uniformemente en ε y δ de forma análoga a como se hizo en (22) y $U^* f_\varepsilon(\delta A) h_\tau(A) U$ también lo está por que $|h_\tau(x)| \leq 1$.
Luego el lema queda demostrado.

□

Veamos a continuación el segundo de los lemas usados en la prueba de la proposición 3.4

5.2. Demostración del lema 5.2

Demostración. De las dos igualdades de (A.1) y de (A.2) se tiene que

$$\begin{aligned}
4\big(h(U^*AU) - h(A)\big) = & \, i \int d\widetilde{h}(z)(z-U^*AU)^{-1}B_2(z-A)^{-1}B_1(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1} \\
& + \int d\widetilde{h}(z)(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1}B_3(z-A)^{-2} \\
& - i \int d\widetilde{h}(z)(z-A)^{-1}B_2(z-A)^{-1}B_1(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1} \\
& + \int d\widetilde{h}(z)(z-A)^{-1}(z-U^*AU)^{-1}B_3(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1} \\
& + \int d\widetilde{h}(z)\big((z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1} + (z-A)^{-1}(z-U^*AU)^{-1}\big)B_1 \\
& + \int d\widetilde{h}(z)B_1\big((z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1} + (z-A)^{-1}(z-U^*AU)^{-1}\big)
\end{aligned}$$

pero

$$\int d\widetilde{h}(z)(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1} = h'(U^*AU) - \int d\widetilde{h}(z)(z-U^*AU)^{-2}B_1(z-A)^{-1}$$

y

$$\int d\widetilde{h}(z)(z-A)^{-1}(z-U^*AU)^{-1} = h'(A) + \int d\widetilde{h}(z)(z-A)^{-1}(z-U^*AU)^{-1}B_1(z-A)^{-1}.$$

Así, reagrupando terminos y volviendo a usar (A.1)

$$\begin{aligned}
4\big(h(U^*AU)-h(A)\big) =& i\int d\widetilde{h}(z)(z-U^*AU)^{-1}B_2(z-A)^{-1}B_1(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1}\\
&+\int d\widetilde{h}(z)(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1}B_3(z-A)^{-2}\\
&-i\int d\widetilde{h}(z)(z-A)^{-1}B_2(z-A)^{-1}B_1(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1}\\
&+\int d\widetilde{h}(z)(z-A)^{-1}(z-U^*AU)^{-1}B_3(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1}\\
&-\int d\widetilde{h}(z)(z-A)^{-1}B_1(z-U^*AU)^{-2}B_1(z-A)^{-1}B_1\\
&-\int d\widetilde{h}(z)B_1(z-A)^{-1}B_1(z-U^*AU)^{-2}B_1(z-A)^{-1}\\
&+\big(h'(U^*AU)+h'(A)\big)B_1+B_1\big(h'(U^*AU)+h'(A)\big)
\end{aligned}$$

como se queria probar. □

Con el propósito de seguir dando a conocer las demostraciones de los resultados aún no probados, se continuará con la prueba del lema 5.3.

5.3. Demostración del lema 5.5

Demostración. Por lo hecho en el lema 5.2

$$\begin{aligned}
&4\big(f'_\varepsilon(\delta U^*AU)-f'_\varepsilon(\delta A)\big)=\\
&\quad=\delta^3\widetilde{Q}+\delta\Big\{\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)\big((z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1}+(z-\delta A)^{-1}(z-\delta U^*AU)^{-1}\big)B_1\\
&\quad+\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)B_1\big((z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1}+(z-\delta A)^{-1}(z-\delta U^*AU)^{-1}\big)\Big\}
\end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Q} :=& i\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-1}B_2(z-\delta A)^{-1}B_1(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1}\\
&+\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1}B_3(z-\delta A)^{-2}\\
&-i\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)(z-\delta A)^{-1}B_2(z-\delta A)^{-1}B_1(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1}\\
&+\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)(z-\delta A)^{-1}(z-\delta U^*AU)^{-1}B_3(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1} = f''_\varepsilon(\delta U^*AU) - \delta\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-2}B_1(z-A)^{-1}
$$

y

$$
\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)(z-\delta A)^{-1}(z-\delta U^*AU)^{-1} = f''_\varepsilon(\delta A) + \delta\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)(z-\delta A)^{-1}(z-\delta U^*AU)^{-1}B_1(z-\delta A)^{-1}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
f'_\varepsilon(\delta U^*AU) - f'_\varepsilon(\delta A) =& \frac{\delta^3}{4}\widetilde{Q} + \frac{\delta}{4}\Big\{\Big(f''_\varepsilon(\delta U^*AU)+f''_\varepsilon(\delta A)\Big)B_1 + B_1\Big(f''_\varepsilon(\delta U^*AU)+f''_\varepsilon(\delta A)\Big)\Big\}\\
:\qquad &-\frac{\delta^3}{4}\Big\{\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)(z-\delta A)^{-1}B_1(z-\delta U^*AU)^{-2}B_1(z-\delta A)^{-1}B_1\\
&-\int d\widetilde{f}'_\varepsilon(z)B_1(z-\delta A)^{-1}B_1(z-\delta U^*AU)^{-2}B_1(z-\delta A)^{-1}.\Big\}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

la norma de cada uno de los operadores cuyos términos en el integrando tiene cuatro resolventes de la forma $(z-\delta A)^{-1}$ o $(z-\delta U^*AU)^{-1}$ en (25), se puede acotar similarmente a como se acotaron los R_n de [C] por $const(\varepsilon^3+\varepsilon^2)$, teniendo en cuenta que en vez de $f_\varepsilon(x)$ acá se tiene $f'_\varepsilon(x)$.

Por otra parte, $|f''_\varepsilon(x)| \le 3\varepsilon$, con lo que se concluye

$$
\|f'_\varepsilon(\delta U^*AU) - f'_\varepsilon(\delta A)\| \le cte\,\varepsilon.
$$

□

Se expondrá ahora la prueba de los lemas 5.6 y 5.7.

5.4. Demostración de los lemas 5.6 y 5.7

Demostración del lema 5.6: Esta vez se aplicará, el lema 5.2 a la función $h(x) = xf_\varepsilon(x)$ y se usarán las cotas encontradas en [C] para los operadores cuyos términos en el integrando tienen cuatro resolventes de la forma $(z-\delta A)^{-1}$ o $(z-\delta U^*AU)^{-1}$ y se tendrá en cuenta que $h^{(m)}(x) = mf_\varepsilon^{m-1}(x) + xf^m(x)$ y $\|h'(x)\| \le \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$, esto es:

$$
\begin{aligned}
\|U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) - Af_\varepsilon(\delta A)\| &\leq \frac{\delta}{4}\left\|\big(h'(\delta U^*AU)+h'(\delta A)\big)B_1 + B_1\big(h'(\delta U^*AU)+h'(\delta A)\big)\right\| \\
&\quad + cte\int dx\big(\left|h^5(x)\right|\langle x\rangle + \left|h^4(x)\right| + \left|h^3(x)\right|\langle x\rangle^{-1}\big) \\
&\leq \frac{\sqrt{2}\delta\,\|B_1\|}{\varepsilon} + cte(\varepsilon+\varepsilon^2+1) \\
&\leq \frac{cte}{\varepsilon},
\end{aligned}
$$

con lo que el lema queda probado. □

Para el siguente lema, se tiene:

Demostración del lema 5.7: Aplicando el lema 5.2 a $f_\varepsilon(x)$,

$$
\begin{aligned}
f_\varepsilon(\delta U^*AU) - f_\varepsilon(\delta A) = \frac{\delta}{4}\Big\{\big(f_\varepsilon'(\delta U^*AU)+f_\varepsilon'(\delta A)\big)B_1 + B_1\big(f_\varepsilon'(\delta U^*AU)+f_\varepsilon'(\delta A)\big)\Big\} \\
+ \frac{\delta^3}{4}\int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)Q
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
Q := \big\{&i(z-\delta U^*AU)^{-1}B_2(z-\delta A)^{-1}B_1(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1} \\
&+(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1}B_3(z-\delta A)^{-2} \\
&-i(z-\delta A)^{-1}B_2(z-\delta A)^{-1}B_1(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1} \\
&+(z-\delta A)^{-1}(z-\delta U^*AU)^{-1}B_3(z-\delta U^*AU)^{-1}(z-\delta A)^{-1} \\
&-(z-\delta A)^{-1}B_1(z-\delta U^*AU)^{-2}B_1(z-\delta A)^{-1}B_1 \\
&-B_1(z-\delta A)^{-1}B_1(z-\delta U^*AU)^{-2}B_1(z-\delta A)^{-1}\big\}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, debido a la nota 1

$$
\|f_\varepsilon(\delta U^*AU) - f_\varepsilon(\delta A)\| \leq \delta\|B_1\|\|f_\varepsilon'(x)\|_\infty + \delta^3 cte \leq c\delta.
$$

□

Restan por probar dos lemas para exponer completamente este trabajo, el primero de ello es el lema 5.3 cuya prueba se da a continuación.

Demostración del lema 5.3: Sea $g_\varepsilon(x) := \dfrac{x}{\langle\varepsilon x\rangle^2}$. Entonces $g_\varepsilon'(x) = f_\varepsilon(x)xf_\varepsilon'(x)$ y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
B_1f_\varepsilon'(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A) + f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon'(\delta A)B_1 &= g_\varepsilon^2(\delta A)B_1 + B_1g_\varepsilon^2(\delta A) \\
&= [[B_1, g_\varepsilon(\delta A)], g_\varepsilon(\delta A)] + 2g_\varepsilon(\delta A)B_1g_\varepsilon(\delta A) \qquad \text{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_1 f_\varepsilon'(\delta U^*AU)U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU) &+ f_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUf_\varepsilon'(\delta U^*AU)B_1 \\
&= g_\varepsilon^2(\delta U^*AU)B_1 + B_1 g_\varepsilon^2(\delta U^*AU) \\
&= [[B_1, g_\varepsilon(\delta U^*AU)], g_\varepsilon(\delta U^*AU)] + 2g_\varepsilon(\delta U^*AU)B_1 g_\varepsilon(\delta U^*AU).
\end{aligned}
$$

La primera afirmación que se hace es que los conmutadores $[B_1, g_\varepsilon(\delta A)]$ y $[B_1, g_\varepsilon(\delta U^*AU)]$ estan uniformemente acotados por una constante positiva C independiente de ε y δ.

En efecto, de (A.1), (A.2) y del hecho de que $i[B_2, U^*AU] = i[B_2, B_1] + i[B_2, A]$,

$$[B_1, g_\varepsilon(\delta A)] = -\delta^2 \int d\widetilde{g}_\varepsilon(z)(z - \delta U^*AU)^2 B_3 (z - \delta U^*AU)^{-1} - i\delta g_\varepsilon'(\delta A)B_2 \quad \text{y}$$

$$[B_1, g_\varepsilon(\delta U^*AU)] = \delta^2 \int d\widetilde{g}_\varepsilon(z)(z - \delta U^*AU)^2 (i[B_2, B_1] + B_3)(z - \delta U^*AU)^{-1} - i\delta g_\varepsilon'(\delta U^*AU)B_2.$$

Entonces la afirmación se sigue, observando que el último comentario realizado en la prueba del lema 4.1, la nota 1 y la nota 2 tambien son válidas para $g(x)$ y de que $\|g_\varepsilon'(\delta A)B_2\| \leq \|B_2\|$ y $\|g_\varepsilon'(\delta U^*AU)B_2\| \leq \|B_2\|$ pues $\left|g_\varepsilon'(x)\right| = \left|\dfrac{1 - \varepsilon^2 x^2}{1 + \varepsilon^2 x^2}\right| \leq 1$.

Ahora, como $|g_\varepsilon(x)| \leq |f_\varepsilon(x)|$ entonces

$$-\frac{\delta}{2}\langle \varphi, [[B_1, g_\varepsilon(\delta A)], g_\varepsilon(\delta A)]\varphi\rangle \leq \delta C \left\|f_\varepsilon(\delta A)\varphi\right\|$$

y

$$-\frac{\delta}{2}\langle \varphi, [[B_1, g_\varepsilon(\delta U^*AU)], g_\varepsilon(\delta U^*AU)]\varphi\rangle \leq \delta C \left\|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\right\|.$$

Restaria probar que $-\delta\langle B_1\rangle_{g_\varepsilon(\delta A)\varphi}$ y $-\delta\langle B_1\rangle_{g_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi}$ se acotan superiormente y para ello se hace la segunda afirmación:

Existen constantes positivas δ_2, a y a' para las cuales

$$\langle B_1\rangle_{g_\varepsilon(\delta A)\varphi} \geq a \left\|g_\varepsilon(\delta A)\varphi\right\|^2 - a'$$

y

$$\langle B_1\rangle_{g_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi} \geq a \left\|g_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\right\|^2 - a'$$

para $0 < \delta \leq \delta_2$.

Esta afirmación es cierta de acuerdo con el trabajo hecho en la sección 4 y se sigue de las siguientes observaciones:

1) (7) se cumple independientemente de A y de f

2) $s - \lim_{\varepsilon \to 0}(U^* g_\varepsilon(A)U - g_\varepsilon(A)) = B_1$ se deduce de forma análoga al lema 4.1, pues $|g_\varepsilon(x)| \leq 1$. De la misma forma las notas 1 y 2 y los lemas 4.2 y 4.3

3) La demostración de la proposición 3.3 proporciona la certeza de la afirmación si se prueba que $\left\|\overline{E}_\Delta\psi\right\| \le a_\delta$ para a_δ una constante positiva tal que $a_\delta \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$ y $\psi = g_\varepsilon(\delta A)$ o $g_\varepsilon(\delta U^*AU)$, lo cual se hace igual.

$\square$

Finalmente se expondrá la prueba del lema 5.4.

5.5. Demostración del lema 5.4

Demostración.

$$
\begin{aligned}
-\Big\langle\frac{\delta}{2}\big(f_\varepsilon'(\delta A)B_1Af_\varepsilon(\delta A)+f_\varepsilon(\delta A)AB_1f_\varepsilon'(\delta A)\big)\Big\rangle_\varphi = \\
\frac{1}{2}\big\langle\delta A[f_\varepsilon'(\delta A),B_1]\varphi, f_\varepsilon(\delta A)\varphi\big\rangle - \frac{1}{2}\big\langle f_\varepsilon(\delta A)\varphi, \delta A[B_1, f_\varepsilon'(\delta A)]\varphi\big\rangle \\
-\Big\langle\frac{\delta}{2}\big(B_1f_\varepsilon'(\delta A)Af_\varepsilon(\delta A)+f_\varepsilon(\delta A)Af_\varepsilon'(\delta A)B_1\big)\Big\rangle_\varphi
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
-\Big\langle\frac{\delta}{2}\big(f_\varepsilon'(\delta U^*AU)B_1U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU)+f_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUB_1f_\varepsilon'(\delta U^*AU)\big)\Big\rangle_\varphi = \\
\frac{1}{2}\big\langle\delta U^*AU[f_\varepsilon'(\delta U^*AU),B_1]\varphi, f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\big\rangle \\
-\frac{1}{2}\big\langle f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi, \delta U^*AU[B_1, f_\varepsilon'(\delta U^*AU)]\varphi\big\rangle \\
-\Big\langle\frac{\delta}{2}\big(B_1f_\varepsilon'(\delta U^*AU)U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU)+f_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUf_\varepsilon'(\delta U^*AU)B_1\big)\Big\rangle_\varphi
\end{aligned}
$$

por lo que debido al lema 5.3 existen dos constantes positivas c' y δ_2 tales que

$$
-\Big\langle\frac{\delta}{2}\big(f_\varepsilon'(\delta A)B_1Af_\varepsilon(\delta A)+f_\varepsilon(\delta A)AB_1f_\varepsilon'(\delta A)\big)\Big\rangle_\varphi \le \delta\,\|A[f_\varepsilon'(\delta A),B_1]\|\,\|f_\varepsilon(\delta A)\varphi\| + c'(\|f_\varepsilon(\delta A)\|+1)
$$

y

$$
\begin{aligned}
-\Big\langle\frac{\delta}{2}\big(f_\varepsilon'(\delta U^*AU)B_1U^*AUf_\varepsilon(\delta U^*AU)+f_\varepsilon(\delta U^*AU)U^*AUB_1f_\varepsilon'(\delta U^*AU)\big)\Big\rangle_\varphi \\
\le \delta\,\|U^*AU[f_\varepsilon'(\delta U^*AU),B_1]\|\,\|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\varphi\| + c'(\|f_\varepsilon(\delta U^*AU)\|+1).
\end{aligned}
$$

para $0<\delta\le\delta_2$.

En consecuencia, será suficiente acotar $\|A[f_\varepsilon'(\delta A),B_1]\|$ y $\|U^*AU[f_\varepsilon'(\delta U^*AU),B_1]\|$ para terminar con la prueba.

Se tiene que:

$$\begin{aligned}[f'_\varepsilon(\delta A), B_1] = \; & \frac{i\delta}{2}(f''_\varepsilon(\delta A)B_2 + B_2 f''_\varepsilon(\delta A)) \\ & + \delta^2 \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-\delta A)^{-3}B_3, (z-\delta A)^{-1} \\ & - \delta^2 \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-\delta A)^{-1}B_3(z-\delta A)^{-3}\end{aligned} \tag{26}$$

y

$$\begin{aligned}[f'_\varepsilon(\delta U^*AU), B_1] = \; & \frac{i\delta}{2}(f''_\varepsilon(\delta U^*AU)B_2 + B_2 f''_\varepsilon(\delta U^*AU)) \\ & + i\delta^2 \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-3}[B_2, B_1](z-\delta U^*AU)^{-1} \\ & - i\delta^2 \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-1}[B_2, B_1](z-\delta U^*AU)^{-3} \\ & + \delta^2 \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-3}B_3(z-\delta U^*AU)^{-1} \\ & - \delta^2 \int d\widetilde{f}_\varepsilon(z)(z-\delta U^*AU)^{-1}B_3(z-\delta U^*AU)^{-3}\end{aligned} \tag{27}$$

gracias a (3), (A.1) y (A.2).

Como $|\delta x f''_\varepsilon(\delta x)| \leq 3$, $\delta U^*AU(z-\delta U^*AU)^{-1} = Id + z(z-\delta U^*AU)^{-1}$ y la norma de cada uno de los operadores cuyos términos en el integrando tienen cuatro resolventes de la forma $(z-\delta A)^{-1}$ o $(z-\delta U^*AU)^{-1}$ en (26) y (27) se puede acotar similarmente a como se acotaron los AR_n de [C] por una constante positiva independiente de ε y δ, se tiene que $\|A[f'_\varepsilon(\delta A), B_1]\|$ y $\|U^*AU[f'_\varepsilon(\delta U^*AU), B_1]\|$ estan uniformemente acotados.

Luego el lema queda demostrado.

□

6. Apendice A

Como se mencionó anteriormente, esta sección esta dedicada a los cálculos de las estimaciones de términos que involucran los conmutadores de orden superior y la fórmula de Helffer y Sjöstrand. En particular, para cualquier entero positivo n, se reescribirá al operador $U^*(z-A)^{-1}U-(z-A)^{-1}$ en términos de los primeros n conmutadores entre U y A para posteriormente obtener una expresión del operador $U^*f(A)U - f(A)$ en términos de dichos conmutadores mediante el uso de la fórmula de Helffer y Sjöstrand.

Se empezará por reescribir al operador $U^*(z-A)^{-1}U-(z-A)^{-1}$. Nótese que

$$\begin{aligned}U^*(z-A)^{-1}U-(z-A)^{-1} &= (z-U^*AU)^{-1}B_1(z-A)^{-1} \\ &= (z-A)^{-1}B_1(z-U^*AU)^{-1}\end{aligned} \tag{A.1}$$

pues $U^*(z-A)^{-1}U = (z-U^*AU)^{-1}$; y para los conmutadores de orden superior

$$\begin{aligned} i[B_{k-1},(z-A)^{-1}] &= (z-A)^{-1}B_k(z-A)^{-1} \\ i[B_{k-1},(z-U^*AU)^{-1}] &= (z-U^*AU)^{-1}B_k(z-U^*AU)^{-1}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Ahora, dejando $(z-U^*AU)^{-1}$ a la izquierda en (A.1) inamobible y generando conmutadores usando (A.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} U^*(z-A)^{-1}U-(z-A)^{-1} =& -i(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1}B_2 \\ &+ (z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-1}B_1. \end{aligned}$$

Continuando con este proceso reiteradas veces se obtiene para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} U^*(z-A)^{-1}U-(z-A)^{-1} =& \sum_{k=1}^{n-1}(-i)^{k-1}(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-k}B_k \\ &+ (-i)^{n-1}(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-n+1}B_n(z-A)^{-1}, \end{aligned} \tag{A.3}$$

forma conveniente que se usará para dar un cálculo explicito de $U^*f(A)U - f(A)$ en términos de los primeros n conmutadores de U y A como sigue:

$$\begin{aligned} U^*f(A)U-f(A) &= \sum_{k=1}^{n-1}(-i)^{k-1}\int d\widetilde{f}(z)(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-k}B_k + R_{1,n} \\ \text{con} \qquad R_{1,n} &:= (-i)^{n-1}\int d\widetilde{f}(z)(z-U^*AU)^{-1}(z-A)^{-n+1}B_n(z-A)^{-1} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Análogamente, dejando ahora $(z-U^*AU)^{-1}$ a la derecha en (A.1) inamobible por medio de (A.2) también se obtiene:

$$\begin{aligned} U^*(z-A)^{-1}U-(z-A)^{-1} =& \sum_{k=1}^{n-1} i^{k-1}B_k(z-A)^{-k}(z-U^*AU)^{-1} \\ &+ i^{n-1}(z-A)^{-1}B_n(z-A)^{-n+1}(z-U^*AU)^{-1}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Luego

$$\begin{aligned} U^*f(A)U-f(A) &= \sum_{k=1}^{n-1} i^{k-1}B_k\int d\widetilde{f}(z)(z-A)^{-k}(z-U^*AU)^{-1} + R_{2,n} \\ \text{con} \qquad R_{2,n} &:= i^{n-1}\int d\widetilde{f}(z)(z-A)^{-1}B_n(z-A)^{-n+1}(z-U^*AU)^{-1} \end{aligned} \tag{A.6}$$

donde además debido a (4)

$$\|R_{1,n}\|, \|R_{2,n}\| \leq cte \sum_{k=0}^{n+2}\|f^k\|_{k-n}. \tag{A.7}$$

Referencias

[ABCF] M.A. Astaburuaga, O. Bourget, V.H. Cortés, C.Fernandez *Floquet operators without singular continuous spectrum*, Journal of Functional Analysis 238 (2006) pag $489-517$.

[ABG] W.O.Amrein, A.Boutet, V. Georgescu *C_0-Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of Hamiltonians*, Birkhäuser, Basel, 1996.

[C] Laura Cattaneo *Mourre's inequality and embedded bound states*,Bull. Sci. math. 129 (2005) 591-614.

[D] E.B.Davies *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University Press, Cambridge 1995.

[EV] V.Enss, K.Veselic *Bound states and propagating states for time-dependent Hamiltonians*, Ann. Inst. Henry Poincaré A 39(2)(1983) 159-191.

[H] M.-J.Huang *On the absolutely continuous subspaces of Floquet operators*, proc. Roy.Soc.Edingburgh Sec. A 124 (1994) 703-712.

[HS] W. Hunziker, I Sigal *Time-dependent scattering theory of N-body quantum systems*, Rev. Math. Phys. 12 (8) (2000) 1033-1084.

[M] E.Mourre *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoin operators*, Comm. Math. Phys.78 (1981) 391-408.

[MW] J.S. Moller, M. Westrich *Regularity of Eigenstates in Regular Mourre Theory* preprint arXiv:1006.0410v1

[RS] M. Reed, B.Simon *Methods of Modern Mathematical Physics I*, Academic Press, New York 1980.