



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

## Dinámica en Billares Hiperbólicos

*Autor:*

Anibal VELOZO RUIZ

12 de agosto de 2013



# Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mis tutores Godofredo Iommi y Mario Ponce por todo su apoyo y motivación en este trabajo de tesis. En ustedes no solo encuentre buenos matemáticos, también grandes personas. Fueron para mí un pilar en un periodo importante de mi vida, me aconsejaron y brindaron apoyo desinteresado en todo lo relacionado a mis postulaciones para el doctorado, les estaré siempre muy agradecido. Quiero agradecer a los miembros de la comisión correctora Jan Kiwi y Carlos Vasquez por sus comentarios y correcciones, más allá de reglas ortográficas, aprendí algo que parece obvio, pero que es fácil olvidar: *se escribe con el objetivo de que alguien lea*, espero nunca olvidarlo.

Quiero agradecer a mis amigos, por darme cariño, distracción y apoyo en momentos muchas veces tensos. Siempre que los necesité estuvieron para mí, los voy a echar de menos.

Por último y de la manera más sincera, quiero dedicar esta tesis a mi familia en símbolo de agradecimiento por su amor incondicional durante estos 21 años. Sin importar donde nos encontremos, siempre estarán en mis pensamientos.

Este trabajo fue parcialmente financiado por el Proyecto Fondecyt 1110040 y el Center of Dynamical Systems and Related Fields (ACT project 1103 PIA-CONICYT).

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>4</b>
<b>1 Conceptos básicos</b>	<b>5</b>
1.1. Flujo del billar . . . . .	9
1.2. Flujo de suspensión . . . . .	12
1.3. Exponentes de Lyapunov de $\mathcal{F}$ . . . . .	14
1.4. Acción del flujo en $T\Omega$ . . . . .	17
1.5. Exponentes de Lyapunov del flujo . . . . .	20
1.6. Curvatura y frentes de onda . . . . .	23
1.7. Continuidad del flujo . . . . .	26
<b>2 Billares dispersores</b>	<b>29</b>
2.1. Estructura de las Singularidades . . . . .	33
2.2. Variedades inestables y estables . . . . .	35
2.3. Dinámica en las curvas singulares . . . . .	36
<b>3 Nuevo espacio de colisiones</b>	<b>39</b>
3.1. Control de distorsión . . . . .	43
<b>4 Teorema fundamental de Billares dispersivos</b>	<b>47</b>
4.1. Lemmas de crecimiento . . . . .	48
4.2. Demostración TFBd . . . . .	52
<b>5 Propiedades dinámicas</b>	<b>55</b>
5.1. El argumento de Hopf . . . . .	59
5.2. Ergodicidad . . . . .	60
5.3. Particiones de Markov . . . . .	64
<b>Bibliografía</b>	<b>67</b>

# Capítulo 1

## Conceptos básicos

Esta primera parte del manuscrito consta de definiciones generales, presentaremos los objetos a estudiar y las hipótesis básicas sobre ellos. Tal como lo dice el nombre de esta tesis, estamos estudiando *billares*. A continuación definimos lo que es un billar, su clase de regularidad y también el sistema dinámico que nos interesa estudiar a partir de este objeto geométrico (ver [8], cap. 1).

Consideremos un abierto conexo acotado  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}_0}$  su clausura. En este contexto  $\mathcal{D}$  es nuestro *billar*. Las hipótesis sobre las que trabajaremos son las siguientes:

1. La frontera de  $\mathcal{D}$ ,  $\partial\mathcal{D}$ , que llamaremos *pared del billar* es una unión finita de curvas compactas  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, r$  de clase  $\mathcal{C}^l$  para cierto  $l \geq 3$ . Es decir,

$$\partial\mathcal{D} = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_r.$$

Más precisamente,  $\Gamma_i$  es el gráfico de una función  $f_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $\mathcal{C}^l$  que es inyectiva en  $[a_i, b_i]$  y que tiene derivadas laterales hasta orden  $l$  en  $a_i$  y  $b_i$ . Llamamos a  $\Gamma_i$  una *componente* de  $\partial\mathcal{D}$  y denotamos por  $\{f_i(a_i), f_i(b_i)\} = \partial\Gamma_i$ .

2. Distintas componentes solo se intersectan en sus puntos extremos

$$\Gamma_i \cap \Gamma_j \subset \partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma_j, \text{ cuando } i \neq j.$$

Definimos  $\Gamma_* = \partial\Gamma_1 \cup \dots \cup \partial\Gamma_r$  y  $\tilde{\Gamma} = \partial\mathcal{D} \setminus \Gamma_*$ . Un punto  $x \in \Gamma_*$  se dice una *esquina* de  $\mathcal{D}$  y un punto  $x \in \tilde{\Gamma}$  se dice un *punto regular*.

3. Siguiendo la notación de 1.  $f_i''$  no se anula o bien es idénticamente cero. En otras palabras  $\Gamma_i$  no tiene puntos de inflexión o bien es un segmento.

Podemos asumir que  $\|f_i'\|^2 = 1$  (mediante alguna reparametrización si fuera necesario), luego derivando esta ecuación observamos que  $f_i' \perp f_i''$  cuando  $f_i'' \neq 0$ . Dependiendo de cuando  $f_i''$  apunta al interior o al exterior del billar podemos distinguir los siguientes tipos de componentes:

- Componente plana: Cuando  $f_i'' \equiv 0$ .
- Componente que concentra (o enfoca): Cuando  $f_i'' \neq 0$  apunta al interior de  $\mathcal{D}$ .
- Componente que disipa (o dispersa): Cuando  $f_i'' \neq 0$  apunta al exterior de  $\mathcal{D}$ .

**Definición.** Consideremos  $q \in \tilde{\Gamma}$ , donde  $q \in \Gamma_i$  para cierto  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Se define como la normal en  $q$ , al vector  $n(q)$  perpendicular a la tangente a  $\Gamma_i$  en  $q$  que apunta al interior de  $\mathcal{D}$ . Denotaremos por  $(\cdot, \cdot)$  al producto interno usual de  $\mathbb{R}^2$ . Para una curva rectificable  $A \subset \mathbb{R}^2$  (con la métrica usual), se define  $|A|$  a su longitud. Si  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$  es un abierto, denotamos por  $|\mathcal{O}|$  a su área (o medida de Lebesgue).

Con toda esta notación estamos en condiciones de definir la dinámica que nos interesará estudiar. Escojamos un punto  $q \in \text{int } \mathcal{D}$  y un vector unitario  $v$ , el movimiento al que restringiremos  $q$  es avanzar con velocidad constante en la dirección de  $v$  mientras no haya colisión con  $\partial\mathcal{D}$ , en otras palabras  $\dot{q} = v, \dot{v} = 0$ , siempre que estemos en  $\text{int } \mathcal{D}$ .

Cuando la partícula  $q$  choca con parte regular del borde, i.e.  $q \in \tilde{\Gamma}$ , la velocidad es reflejada por la normal al borde en ese punto, de manera más precisa

$$v_+ = v_- - 2(v, n(q))n(q),$$

donde  $v_-$  y  $v_+$  representan las velocidades antes y después del choque.

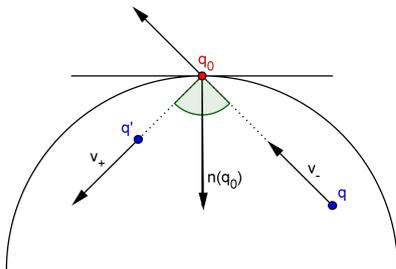


Figura 1.1: Ejemplo de un choque elástico

La segunda posibilidad es que  $q$  choque con una de las esquinas, i.e.  $q \in \Gamma_*$ . En este caso el movimiento se detiene. Posteriormente veremos que en ciertos casos es posible continuar el movimiento de modo de no perder la continuidad, aunque no podamos asegurar la diferenciabilidad del flujo.

Es importante tener presente que la velocidad del movimiento está normalizada en todo tiempo, i.e.  $\|v_t\| \equiv 1$ , donde  $v_t$  es el vector dirección al tiempo  $t$ . Un cálculo directo muestra que  $\|v_+\| = \|v_-\|$ .

Observe que nuestro billar está determinado por las curvas  $\Gamma_i$  y su disposición en el plano. La forma de nuestras curvas frontera  $\Gamma_i$  evidentemente tendrá un rol que cumplir en el estudio de la dinámica que acabamos de definir. La función que nos da información respecto a la forma de curvas es la *curvatura*.

**Definición.** La curvatura es una función de  $\partial\mathcal{D}$ . Si  $q \in \Gamma_i$  y  $f_i(t) = q$  se define

$$\mathcal{K}(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Gamma_i \text{ es plana,} \\ -\|f_i''(t)\| & \text{si } \Gamma_i \text{ concentra (o enfoca),} \\ \|f_i''(t)\| & \text{si } \Gamma_i \text{ dispersa (o disipa).} \end{cases}$$

Donde las funciones  $f_i$  son las definidas anteriormente (recordar que las suponemos arco-parametrizadas).

Vamos a agrupar las componentes dependiendo de su curvatura, usaremos la notación:

$$\Gamma_0 = \bigcup_{\mathcal{K}=0} \Gamma_i, \Gamma_- = \bigcup_{\mathcal{K}<0} \Gamma_i, \Gamma_+ = \bigcup_{\mathcal{K}>0} \Gamma_i.$$

Observe que la curvatura involucra dos derivadas se tiene que  $\mathcal{K} \in \mathcal{C}^{l-2}$ . A partir de la tercera hipótesis sobre el billar, se tiene que la curvatura siempre se mantiene lejos del cero y del infinito para billares sin componentes planas.

Otra propiedad geométrica del billar que será importante para el estudio de esta dinámica es el ángulo que se forma entre las componentes que se intersectan.

**Definición.** Un punto  $q = \Gamma_i \cap \Gamma_j$  para ciertos  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  se dice una *cúspide* si las pendientes de las rectas tangentes en  $q$  a  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_j$  (definidas por límites laterales) son iguales, i.e. el ángulo de incidencia es cero.

### Ejemplos.

(a) Consideremos  $\mathbb{D}$  el disco unitario, i.e.

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| = 1\}.$$

Tomemos nuestro billar  $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{D}}$ . Con nuestra definición de curvatura, tenemos un billar donde  $\mathcal{K} < 0$  en todos los puntos, de hecho  $\mathcal{K} \equiv -1$ .

(b) Sea

$$D_{(i,j)}(r) = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z - (i, j)\| < r\}.$$

Consideremos el billar

$$\mathcal{D} = [0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i,j \in \{0,1\}} D_{(i,j)}(1/2).$$

En este billar tenemos 4 componentes  $\Gamma_i$  y todas tienen curvatura constante  $\mathcal{K} \equiv +1$ . También observar que en este caso tenemos 4 cúspides. Más tarde veremos que en billares donde  $\mathcal{K} > 0$  tenemos hiperbolicidad.

**Definición.** Sea  $q \in \mathcal{D}$  y  $v$  un vector unitario. Consideremos  $q_0$  el primer punto donde el flujo a partir de esa condición inicial colisiona con  $\partial\mathcal{D}$ . La colisión se dice *regular* si  $q_0 \in \tilde{\Gamma}$  y si la velocidad de incidencia es distinta a la tangente en el punto de choque, i.e.  $v_- \neq v_+$ . Cuando  $v_- = v_+$  la colisión se dice *tangencial*.

Mas adelante veremos que los distintos tipos de colisiones tienen intima relación con continuidad y diferenciabilidad del flujo del billar.

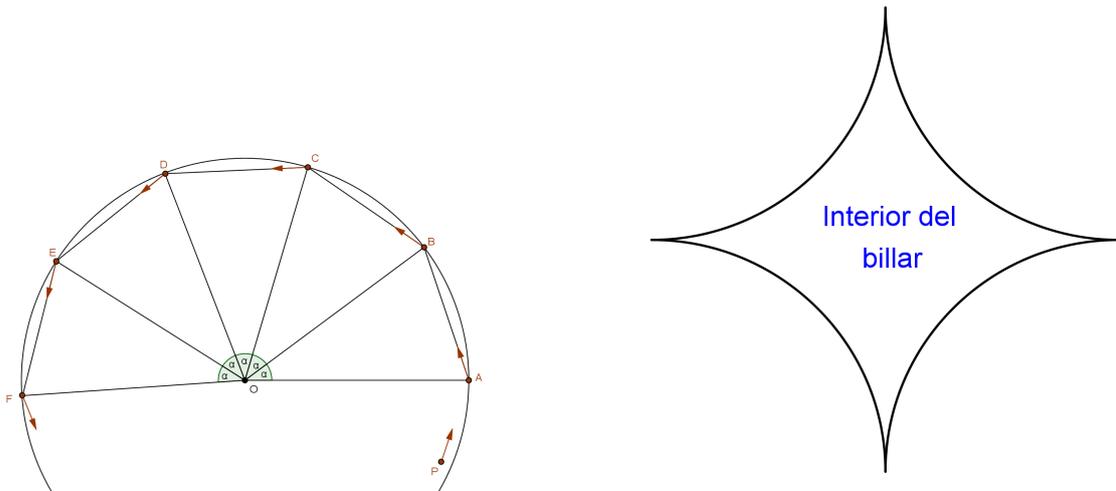


Figura 1.2: La primera (resp. segunda) figura corresponde al ejemplo (a) (resp. (b)).

**Comentario.** Se puede demostrar fácilmente que las colisiones tangenciales solo ocurren en componentes que dispersan. También es evidente que luego de una colisión regular hay un intervalo de tiempo que la partícula se mantiene en  $\text{int } \mathcal{D}$ .

Nuestra primera proposición es evidente a partir de la segunda parte del Comentario. Recordemos que un flujo se dice *completo* si para cualquier punto del espacio se puede definir su evolución para cualquier tiempo real.

**Proposición 1.1.** Sea  $(q(t), v(t))$  el flujo dado por la condición inicial  $q(0) = q, v(0) = v$ . Las únicas obstrucciones para que el flujo anterior sea completo son

1. La partícula  $q(t)$  choque con una esquina en cierto tiempo  $t \in \mathbb{R}$ .
2. Los tiempos de colisión  $\{t_n\}$  se acumulen.

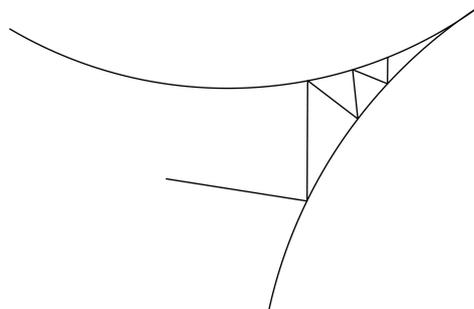


Figura 1.3: Ejemplo de choques acumulandose

Para nuestro estudio será importante poder descartar la segunda posibilidad de incompletitud del billar, claramente puede ser más patológica y dinámicamente caótica (una sin-

gularidad en tiempo finito). Si los tiempos de colisión son  $\{t_n\}$  con  $t_n \rightarrow t_\infty \in \mathbb{R}$  claramente  $q(t_n) \rightarrow q_\infty \in \partial\mathcal{D}$ . Hay dos casos a considerar dependiendo de donde se encuentra  $q_\infty$ .

1.  $q_\infty \in \Gamma_*$ .
2.  $q_\infty \in \tilde{\Gamma}$ .

Tratemos el primer caso. Vamos a suponer que  $q_\infty$  es una esquina. Como bien sabemos hay varias posibilidades respecto a las componentes que forman la esquina. Hay dos casos que podemos descartar por métodos elementales. El primero es cuando el ángulo que se forma en la esquina es positivo, aquí se puede estimar la cantidad máxima de choques posibles antes de que la partícula en movimiento empiece a alejarse de la esquina. El segundo caso es cuando el ángulo es cero (una cúspide), pero ambos lados dispersan o bien uno dispersa y el otro es plano, la posibilidad de que los choques se acumulen también puede descartarse de una manera bastante simple. El único caso que quedaría por tratar es cuando tenemos una cúspide formada por una componente que enfoca y otra que dispersa (hay una trayectoria en que los tiempos de colisión se acumulan). Hasta el momento no hay conocimiento de ejemplo de este tipo [8]. Por ahora obviaremos la posible existencia de algo así.

**Supuesto:** Los billares que consideraremos no tienen cuspidas formadas por una componente que dispersa y otra que enfoca.

Supongamos ahora que nos encontramos en el segundo caso, i.e.  $q_\infty$  es un punto regular del borde del billar. Se puede probar con facilidad que en el caso de que la componente en cuestión disperse o sea plana esto no es posible.

**Teorema 1.2.** (Halpern) *El segundo tipo de singularidad no es posible cuando nos encontramos en una componente que enfoca con tercera derivada acotada y sin puntos de inflexión.*

Este teorema se aplica directamente en nuestro caso ya que al borde le pedimos regularidad  $\mathcal{C}^l, l \geq 3$ . Con esto se descarta por completo el segundo tipo de indefinición del flujo. Ahora sabemos que el *único problema posible para definir el flujo del billar en todo tiempo, es la colisión con una esquina.*

## 1.1. Flujo del billar

De manera ingenua podríamos pensar que el flujo que estudiamos es sobre el dominio  $\mathcal{D}$ , esta confusión es entendible si asociamos el movimiento como algo que ocurre sobre el billar que vemos en el plano. Para nosotros un flujo es una ley que define el movimiento de puntos en un espacio abstracto  $X$ . Para ser más preciso tenemos una familia  $\Phi^t : X \rightarrow X$  de transformaciones con cierta regularidad (continuas, diferenciables, etc) tales que  $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s}$  (son transformaciones parametrizadas por  $\mathbb{R}$ ). La órbita del punto  $x$  es el conjunto  $\mathcal{O}(x) = \{\Phi^t(x) : t \in A_x\}$  (donde  $A_x$  son los  $t$  para los que está definido  $\Phi^t(x)$ ). Claramente si tomo un  $q \in \mathcal{D}$  no puedo definir el movimiento, me falta conocer la dirección.

**Definición.** Sea  $\Omega := \mathcal{D} \times S^1$ . Esta es una variedad con borde donde  $\partial\Omega = \Gamma \times S^1$ .

Queremos definir el flujo del billar en  $\Omega$ . Como ya vimos anteriormente no es posible hacer esto para todos los puntos del billar, no es claro que se pueda extender el flujo luego de una colisión con una esquina. Discutiremos más adelante (brevemente) cuando es posible hacer tal cosa, por ahora nos limitaremos a trabajar en el conjunto donde el flujo sea completo.

**Definición.** Sea  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  el conjunto de puntos donde el flujo  $\Phi^t$  dado por el billar está definido para todo tiempo, la dinámica que nos interesa es la dada por la familia de aplicaciones

$$\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}.$$

Nuestro sistema dinámico es conservativo, en efecto, la medida de lebesgue natural en  $\Omega$  es invariante para el flujo del billar. Demostraremos por un método clásico que esto efectivamente sucede.

Consideremos las coordenadas  $(x, y, w) \in \Omega$  para nuestro espacio de fase del flujo, donde  $q = (x, y) \in \mathcal{D}, w \in S^1$ . Asumiremos la notación  $\Phi^t(x^-, y^-, w^-) = (x^+, y^+, w^+)$  para distinguir entre los puntos de origen y término luego de la acción a tiempo  $t$  del flujo. Consideremos los dos posibles casos dependiendo de si hay colisión o no.

(1) Si no hay colisión entre los puntos de origen y término, entonces

$$x^+ = x^- + t \cos(w), y^+ = y^- + t \sin(w), w^+ = w^-.$$

(2) Supongamos que hay exactamente una colisión entre el tiempo 0 y  $t$  del flujo a partir de  $(x^-, y^-, w^-)$ . Sea  $P = (a, b) \in \Gamma_*$  el punto de colisión,  $V$  es el vector de tangencia en  $P$ ,  $\gamma$  el ángulo entre el eje  $x$  y  $V$ , denotaremos por  $s^-$  el tiempo en que ocurre la colisión y  $s^+ = t - s^-$ . Sea  $\psi$  el ángulo entre  $v^+$  y  $V$ .

Sea  $r$  el arcoparametro en  $\Gamma$  y  $\alpha : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una parametrización de la componente donde está  $P$ . Observar que  $r : [p, q] \rightarrow [0, L]$ , donde  $L$  es el largo de la componente. Si  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  y  $\tilde{\alpha} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva arcoparametrizada entonces se tiene la relación  $\alpha = \tilde{\alpha} \circ r$ . Derivando esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} x'(t) &= \tilde{x}'(r(t))r'(t), \\ y'(t) &= \tilde{y}'(r(t))r'(t). \end{aligned}$$

Como  $\tilde{x}'(r) = \cos(\gamma), \tilde{y}'(r) = \sin(\gamma)$  (por ser arcoparametro y  $\gamma$  el ángulo tangente), se sigue que

$$\begin{aligned} da &= \cos(\gamma)dr, \\ db &= \sin(\gamma)dr. \end{aligned}$$

Considerando la ecuación  $\tilde{x}'(r) = \cos(\gamma), \tilde{y}'(r) = \sin(\gamma)$ , derivando y manipulando se llega a  $\gamma' = (\tilde{x}'\tilde{y}'' - \tilde{x}''\tilde{y}')r' = -\mathcal{K}r'$  (usando una formula conocida para la curvatura). Finalmente

$$d\gamma = -\mathcal{K}dr.$$

Las variables que hemos definido anteriormente están sujetas a las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^- &= a - s^- \cos(w^-), y^- = b - s^- \sin(w^-), w^- = \gamma - \psi, \\ x^+ &= a + s^+ \cos(w^+), y^+ = b + s^+ \sin(w^+), w^+ = \gamma + \psi. \end{aligned}$$

Sacando diferenciales de estas ecuaciones obtenemos

$$dx^+ = \cos \gamma dr + \cos w^+ ds^+ - s^+ \sin w^+ dw^+, \quad (1.1)$$

$$dy^+ = \sin \gamma dr + \sin w^+ ds^+ + s^+ \sin w^+ dw^+, \quad (1.2)$$

$$dw^+ = -\mathcal{K}dr + d\psi, \quad (1.3)$$

$$dx^- = \cos \gamma dr - \cos w^- ds^- + s^- \sin w^- dw^-, \quad (1.4)$$

$$dy^- = \sin \gamma dr - \sin w^- ds^- - s^- \sin w^- dw^-, \quad (1.5)$$

$$dw^- = -\mathcal{K}dr - d\psi. \quad (1.6)$$

Haciendo producto cuña entre estas ecuaciones obtenemos

$$dx_- \wedge dy_- \wedge dw_- = -\sin(\phi) dr \wedge ds_- \wedge d\psi,$$

$$dx_+ \wedge dy_+ \wedge dw_+ = \sin(\phi) dr \wedge ds_+ \wedge d\psi.$$

Observemos que  $s_- + s_+ = t$ , siendo  $t$  una constante que hemos fijado previamente, en otras palabras  $ds_- + ds_+ = 0$ . Se sigue que

$$dx_+ \wedge dy_+ \wedge dw_+ = dx_- \wedge dy_- \wedge dw_-.$$

Puede verificarse directamente que en el caso (1) la 3-forma  $dx \wedge dy \wedge dw$  se preserva, finalmente concluimos que

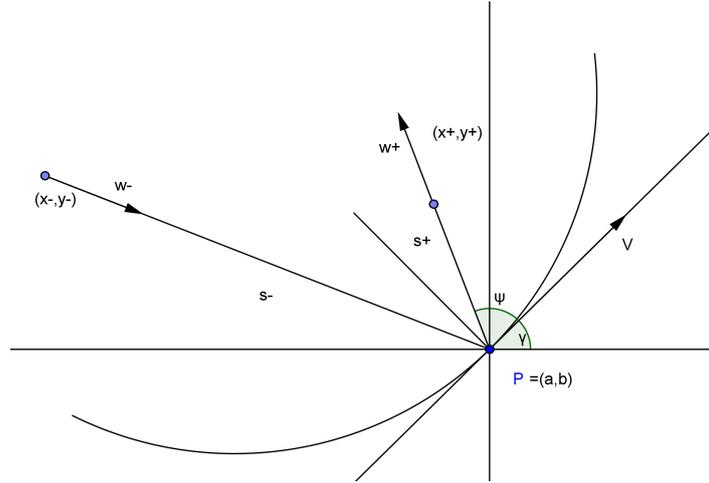


Figura 1.4: Explicación caso (2)

**Teorema 1.3.** *Mediante el flujo del billar la 3-forma  $dx \wedge dy \wedge dw$  es preservada, siendo  $(x, y, w)$  las coordenadas usuales de  $\Omega$ . La medida de Lebesgue normalizada en  $\Omega$*

$$d\mu_\Omega = (2\pi|\mathcal{D}|)^{-1} dx dy dw,$$

*es una medida de probabilidad invariante para  $\Phi^t$ .*

**Comentario.** En los cálculos hechos para demostrar el Teorema 1.3 hemos intercambiado derivadas por 1-formas sin explicación aparente. Observar que todas las funciones involucradas son reales, en general si  $f : [s, s'] \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable, la 1-forma  $df$  toma un vector  $v \in T_x[s, s']$  y lo manda a  $f'(x)v \in T_x[s, s'] \cong \mathbb{R}$ , en particular ecuaciones que involucren las derivadas también son ecuaciones para las 1-formas asociadas a los diferenciales de estas funciones.

## 1.2. Flujo de suspensión

Una técnica clásica para estudiar la dinámica de un flujo es buscar secciones transversales a un flujo y definir la función de primer retorno, esta idea fué introducida en primera instancia por Poincaré cuando intentaba reducir el trabajo que requería entender la dinámica de los 3 cuerpos restringidos. Generalmente consideramos un flujo  $W^t : S \rightarrow S$  donde  $S$  es una variedad cualquiera y  $L$  una subvariedad de codimensión 1. Asumiremos que para cada  $x \in S$  se tiene que  $\mathcal{O}(x) \cap L \neq \emptyset$ . Podemos inducir el mapa  $H : L \rightarrow L$ , donde  $H(x) = W^{t(x)}(x)$  con  $t(x) = \inf\{t' > 0 : W^{t'}(x) \in L\}$ , el valor  $t(x)$  es llamado el tiempo de primer retorno de  $x$ .

Una manera de modelar este tipo de flujos con secciones transversales es por medio de flujos de suspensión. Consideremos una función  $T : X \rightarrow X$  con  $X$  compacto y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Sea  $X' = X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ , se define

$$\begin{aligned} \psi^t : X' &\rightarrow X' \\ (x, s) &\mapsto (x, s + t). \end{aligned}$$

Consideremos  $\tilde{X} = X' / \sim$  donde  $(x, f(x) + s) \sim (T(x), s)$ , con  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  y  $x \in X$ . El flujo  $\psi^t$  se puede definir en el cociente  $\tilde{X}$ , obteniendo el flujo de suspensión con base  $T$  y función techo  $f$  (referencias para aspectos generales de flujos de suspensión son [1],[9],[12]). En este contexto el rol de la sección de primer retorno lo cumple  $X \times \{0\} \subset \tilde{X}$ . Como pedimos que  $f$  sea continua todos los tiempos de primer retorno son finitos.

Sabemos que hay una correspondencia entre las medidas invariantes por el flujo de suspensión y las medidas de la base. De manera más precisa, sabemos que las medidas de probabilidad invariantes por el flujo de suspensión son de la forma  $Cd\mu \times d\lambda$  donde  $C = (\int fd\mu)^{-1}$  para cierta medida de probabilidad  $\mu$  en  $X$  invariante por  $T$  y  $d\lambda$  es la medida de Lebesgue (usaremos esta notación para el resto del manuscrito).

En este momento es conveniente considerar la posibilidad de que nuestro billar esté en el toro. Con esto aceptamos la posibilidad de que haya una disposición periodica en  $\mathbb{R}^2$  de nuestras curvas  $\Gamma_i$ .

**Comentario.** En general en el toro hay dos fenomenos posibles, un punto choca infinitas veces con  $\partial\mathcal{D}$  o nunca lo hace. Si una partícula en el toro desde cierto momento ya no presenta choque con  $\partial\mathcal{D}$ , su vector dirección no puede ser irracional (ya que su órbita sería densa y no es difícil convencerse de que en este caso toda curva en el toro es atravesada por el flujo), solo queda la posibilidad de que la pendiente sea racional, pero esto quiere decir que la órbita es periodica, o sea que nunca hubo choque siquiera.

Recordar que nuestro billar  $\mathcal{D}$  está dado por una familia finita de componentes  $\Gamma_i$  con regularidad de orden  $l$ , en otras palabras tenemos curvas  $f_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^l$  arco-parametrizadas. Se define  $\mathcal{M} = \cup \mathcal{M}_i$  siendo  $\mathcal{M}_i = [a_i, b_i] \times [-\pi/2, \pi/2]$ , donde el índice  $i$  hace referencia a la componente  $\Gamma_i$  que es gráfico de la curva  $f : [a_i, b_i] \rightarrow \mathcal{D}$  de clase  $\mathcal{C}^l$  y con derivadas laterales hasta ese orden en los extremos (cuando  $\Gamma_i$  es una curva cerrada suave, entonces  $\mathcal{M}_i$  es un cilindro). La componente angular en el punto  $(r, \varphi) \in \mathcal{M}_i$  hace relación a la dirección del vector que está parado en  $f_i(r)$  apuntando en ángulo  $\varphi$  desde la normal en  $f_i(r)$  a  $\Gamma_i$ . Nuestra función de primer retorno está definida en  $\mathcal{M}_i$  (sacando las esquinas, i.e. los puntos de la forma  $\{a_i, b_i\} \times [-\pi/2, \pi/2]$ ) como el primer choque desde el punto  $f_i(r)$  en dirección  $\varphi$  desde la normal a  $\Gamma_i$ , evidentemente aceptamos el hecho de que esta colisión

esté en un cierto  $\mathcal{M}_j$  con  $i \neq j$ . Más concretamente,

**Definición.** Sea  $(r, \varphi) \in \mathcal{M}_i$ ,  $q := f_i(r)$  y  $v$  el vector unitario que está a ángulo  $\varphi$  de  $n(q)$ . Asumimos que  $r \notin \{a_i, b_i\}$ . Sea  $q' = f_j(r')$  el primer punto de incidencia con  $\partial\mathcal{D}$  del flujo a partir de  $(q, v)$  (en este caso  $q' \in \Gamma_j$ ) y  $\varphi'$  el ángulo que se forma con  $n(q')$ . Por convención en  $\partial\Omega$  identificamos los vectores de incidencia y de salida de una colisión, o sea podemos considerar  $\varphi' \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Se define

$$\mathcal{F}(r, \varphi) = (r', \varphi').$$

De esta forma tenemos un mapa  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  que no está definido en los puntos

$$S' = \bigcup_i \{a_i, b_i\} \times [-\pi/2, \pi/2],$$

donde esta unión corre sobre los  $i \in \{1, \dots, r\}$  tal que la componente  $\Gamma_i$  no sea cerrada y suave en sus extremos, i.e. en  $f_i(a_i) = f_i(b_i)$  pero no hay igualdad en las derivadas laterales hasta orden  $l$  o bien  $f_i(a_i) \neq f_i(b_i)$ .

**Definición.** Se define como el conjunto de singularidades de  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  al conjunto

$$\mathcal{S}_0 = \partial\mathcal{M} = \bigcup_i ([a_i, b_i] \times \{-\pi/2, \pi/2\}) \cup S'.$$

Mediante calculos similares a los hechos para probar que la forma de volumen  $dx \wedge dy \wedge dw$  es invariante bajo el flujo en  $\Omega$  podemos calcular la derivada del mapa de primer retorno  $\mathcal{F}$ . Para ver los calculos explícitos puede revisarse [8].

**Definición.** Sea  $x \in \mathcal{M}$ , denotamos por  $\tau(x)$  al tiempo de primer retorno a partir de  $x$ , i.e. el menor tiempo positivo que tiene que recorrer  $x$  en el flujo del billar para volver a chocar con  $\mathcal{M}$ .

**Teorema 1.4.** Consideremos un punto  $x = (r, \varphi) \in \text{int}(\mathcal{M})$  con  $\mathcal{F}(x) = (r_1, \varphi_1) \in \text{int}(\mathcal{M})$ . Sea  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}_1$  la curvatura en  $x$  y  $\mathcal{F}(x)$  respectivamente. La derivada de  $\mathcal{F}$  en  $x$  está dada por

$$D_x \mathcal{F} = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \begin{pmatrix} \tau \mathcal{K} + \cos \varphi & \tau \\ \tau \mathcal{K} \mathcal{K}_1 + \mathcal{K} \cos \varphi_1 + \mathcal{K}_1 \cos \varphi & \tau \mathcal{K}_1 + \cos \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Como corolario de este teorema se tiene que

$$\det D_x \mathcal{F} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1}.$$

Por teorema de cambio de variable

$$\int \int_{\mathcal{F}(A)} \cos \varphi_1 dr_1 d\varphi_1 = \int \int_A \cos \varphi dr d\varphi,$$

en otras palabras la medida  $\cos \varphi dr d\varphi$  es invariante por  $\mathcal{F}$ . Observar que

$$\int \int_M \cos \varphi dr d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_{\Gamma} dr = 2|\Gamma|,$$

de esta forma obtenemos que

$$d\mu = (2|\Gamma|)^{-1} \cos\varphi d\varphi dr,$$

es una medida de probabilidad invariante por  $\mathcal{F}$ . Como hemos mencionado anteriormente podemos levantar esta medida a  $\Omega$  haciendo un producto con Lebesgue.

A partir de lo discutido anteriormente de los flujos de suspensión sabemos que la medida

$$d\mu_1 = \bar{\tau}^{-1} d\mu \times ds = (2|\Gamma|)^{-1} \bar{\tau}^{-1} \cos\varphi d\varphi dr ds,$$

es invariante donde

$$\bar{\tau} = \int_M \tau(x) d\mu(x).$$

Llamaremos a  $\bar{\tau}$  el *tiempo promedio de trayectoria libre*. Ahora recordando que

$$dx \wedge dy \wedge dw = \sin(\psi) dr \wedge ds \wedge d\psi = \cos(\varphi) dr \wedge ds \wedge d\varphi,$$

(ya que  $\sin(\psi) = \cos(\varphi)$ ), nos quedamos con la igualdad

$$d\mu_1 = (2|\Gamma|)^{-1} \bar{\tau}^{-1} dx dy dw,$$

como el volumen que genera la medida  $dx dy dw$  es  $2\pi|\mathcal{D}|$  se sigue que

$$2\pi|\mathcal{D}| = 2|\Gamma|\bar{\tau}.$$

Lo que nos da una fórmula para el tiempo promedio de trayectoria libre de un  $\mu$ -punto genérico de  $\mathcal{M}$ .

### 1.3. Exponentes de Lyapunov de $\mathcal{F}$

Los exponentes de Lyapunov son una herramienta fundamental para entender sistemas dinámicos diferenciables, tengan o no singularidades (en nuestro caso si hay singularidades, lo que hace técnicamente más complicado su estudio). El teorema de Oseledets nos da un criterio para probar la existencia de tales exponentes.

Supongamos que tenemos  $F : M \rightarrow M$  de clase  $\mathcal{C}^r$  y sea  $\tilde{M} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} F^n(M)$  el conjunto donde la dinámica está definida. Asumir que  $F$  preserva una medida de probabilidad  $\mu$  y que  $\mu(\tilde{M}) = 1$ .

**Teorema 1.5.** (Oseledets [17],[25]) *Supongamos que*

$$\int_M \log^+ \|D_x F\| d\mu(x) < \infty, \int_M \log^+ \|D_x F^{-1}\| d\mu(x) < \infty,$$

donde  $\log^+(x) = \max\{\log(x), 0\}$ . *Entonces existe un conjunto  $F$  invariante  $H \subset \tilde{M}$  tal que  $\mu(H) = 1$  de modo que para todo  $x \in H$  hay una descomposición  $DF$ -invariante de su espacio tangente*

$$T_x M = E_x^{(1)} \oplus \dots \oplus E_x^{(m)},$$

para algún  $m = m(x)$  tal que todo vector  $v \in E_x^{(i)}$  satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D_x F^n v\| = \lambda_x^{(i)},$$

donde  $\lambda_x^{(1)} > \dots > \lambda_x^{(m)}$ .

Los valores  $\lambda_x^{(i)}$  son los exponentes de Lyapunov del mapa  $F$  y  $k_i = \dim E_x^{(i)}$  sus multiplicidades. Es claro que estos exponentes y las dimensiones de los subespacios respectivos son invariantes. Cuando la medida que preserva  $F$  es ergódica los exponentes y las dimensiones respectivas son constantes en un conjunto de medida total.

Consideremos un punto  $x \in M$  donde los exponentes de Lyapunov existen, puedo considerar la descomposición

$$T_x M = E_x^u \oplus E_x^0 \oplus E_x^s,$$

donde  $E_x^u = \bigoplus_{\lambda_x^{(i)} > 0} E_x^{(i)}$ ,  $E_x^s = \bigoplus_{\lambda_x^{(i)} < 0} E_x^{(i)}$  y  $E_x^0 = \bigoplus_{\lambda_x^{(i)} = 0} E_x^{(i)}$ . Los vectores en  $E_x^u$  se dicen inestables, los de  $E_x^s$  se dicen estables. Es claro que un vector inestable al aplicar el diferencial aumenta su largo de manera exponencial, al contrario los vectores estables disminuyen su largo exponencialmente. Si  $v \in E_x^0$  entonces su largo puede aumentar o decrecer pero a una velocidad menor que exponencial.

**Definición.** Un punto  $x \in M$  se dice hiperbólico si tiene exponentes de Lyapunov y ninguno es nulo. Dada un función  $F : M \rightarrow M$ , una medida en  $M$  se dice *hiperbólica* si  $\mu$ -casi todo punto de  $M$  es hiperbólico.

Toda esta discusión abstracta de exponentes de Lyapunov para un mapa cualquiera carecería de sentido si el sistema dinámico que estudiamos no tuviera tal propiedad. En efecto, la función de primer retorno  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  cumple la hipótesis del teorema de Oseledets para la medida  $\mu$ , por tanto existen exponentes para casi todo punto. Solo necesitamos verificar que  $\log^+ \|D_x \mathcal{F}\|$  y  $\log^+ \|D_x \mathcal{F}^{-1}\|$  son funciones integrables en  $\mathcal{M}$ .

Usando la formula que tenemos para el diferencial de  $\mathcal{F}$  llegamos a que

$$\|D_x \mathcal{F}\| \leq \frac{C}{\cos \varphi_1},$$

para cierta constante  $C > 0$  ya que  $\mathcal{K}$  es acotada en  $\partial \mathcal{D}$  (evidentemente para cada norma puede haber variaciones en la constante  $C$  que aparece). Ahora

$$\int_M \log^+ \|D_x \mathcal{F}\| d\mu \leq \int_M |\log C - \log \cos \varphi_1| d\mu \leq |\log C| + (2|\Gamma|)^{-1} \int_M |\log \cos \varphi| \cos \varphi d\varphi dr,$$

donde en el último paso reemplazamos  $\cos \varphi_1$  por  $\cos \varphi$  usando la invarianza de la medida. Por último ver que

$$\int_M |\log \cos \varphi| \cos \varphi d\varphi dr = |\Gamma| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\log \cos \varphi| \cos \varphi d\varphi = |\Gamma|(2 - \log 4),$$

y se tiene la finitud pedida (análogamente se pueden hacer cuentas para la integrabilidad de  $\log^+ \|D_x \mathcal{F}^{-1}\|$ ).

**Teorema 1.6.** *El mapa de primer retorno  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  tiene exponentes de Lyapunov para  $\mu$ -casi todo punto.*

Notar que esta función en principio ni siquiera está definida en todo  $\mathcal{M}$ , esto no es tan perjudicial teniendo presente que el conjunto  $S'$  claramente tiene medida 0 respecto a Lebesgue y por tanto también respecto a  $\mu$ . Para nosotros los conjuntos de medida cero son irrelevantes.

**Definición.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Se definen los conjuntos de singularidades

$$\mathcal{S}_n = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{F}^{-k}(\mathcal{S}_0), \quad \mathcal{S}_{-n} = \bigcup_{k=0}^n \mathcal{F}^k(\mathcal{S}_0),$$

$$\mathcal{S}_\infty = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{S}_n, \quad \mathcal{S}_{-\infty} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{S}_{-n}.$$

Es evidente que  $\mathcal{S}_n$  es el conjunto de singularidades de la función  $\mathcal{F}^n$ , donde entendemos por singularidades a aquellos puntos donde la función  $\mathcal{F}^n$  deja de ser continua. Hemos presentado una fórmula para la derivada de  $\mathcal{F}$  cuando tenemos que  $x, \mathcal{F}(x) \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_0$ , más precisamente tenemos que  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-1}$  es un difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^{l-1}$ . Con un razonamiento inductivo se tiene que  $\mathcal{F}^n : \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-n}$  es un difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^{l-1}$ . Definamos

$$\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \setminus (\mathcal{S}_\infty \cup \mathcal{S}_{-\infty}).$$

Observe que  $\mathcal{F} : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$  es una función que está bien definida. Notar que  $\mu(\mathcal{F}^k(\mathcal{S}_0)) = \mu(\mathcal{S}_0)$  para  $k \in \mathbb{Z}$  por la invarianza de  $\mu$ . Como  $\mu$  es absolutamente continua respecto a Lebesgue es concluye que  $\mu(\mathcal{S}_0) = 0$  y por tanto  $\mu(\mathcal{F}^k(\mathcal{S}_0)) = 0$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Concluimos que  $\mu(\widehat{\mathcal{M}}) = 1$  y este es el conjunto dinamicamente definido donde se mantiene la diferenciabilidad en todos los iterados de  $\mathcal{F}$ . Por tanto, se verifican las hipótesis del teorema de Oseledets.

Sin mucho esfuerzo podemos conseguir una relación importante entre los 2 exponentes de  $\mathcal{F}$  (recordar que  $\mathcal{M}$  tiene dimensión 2). Consideremos  $x \in \mathcal{M}$  donde existen exponentes de Lyapunov  $\lambda_x^{(1)}, \lambda_x^{(2)}$ . Por el teorema de Oseledets sabemos que la elección de tal  $x$  se puede hacer en un conjunto de medida total. Se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.7.**  $\lambda_x^{(1)} + \lambda_x^{(2)} = 0$  para  $\mu$ -casi todo punto de  $\mathcal{M}$ .

*Demostración.* Consideremos un punto  $x \in \widehat{\mathcal{M}}$  que tenga exponentes de Lyapunov. Sea  $v_i \in E_x^{(i)}$ ,  $i \in \{1, 2\}$  con  $\|v_i\| = a_i$ . Definimos  $a_i^{(n)} = \|\mathcal{F}^n(v_i)\|$  y  $\gamma_n$  como el ángulo entre  $\mathcal{F}^n(v_1)$  y  $\mathcal{F}^n(v_2)$ . Observar que  $|\text{Det } D_x \mathcal{F}^n| = \frac{\sin(\gamma_n)}{\sin(\gamma)} \frac{a_n}{a} \frac{b_n}{b}$ . Por la definición de los exponentes de Lyapunov sabemos que

$$\frac{1}{n} \log \left( \frac{a_i^{(n)}}{a_i} \right) \rightarrow \lambda_x^{(i)} \text{ para } i \in \{1, 2\}.$$

Por otro lado usando la fórmula que tenemos para  $D_x \mathcal{F}$  sabemos que

$$|\text{Det } D_x \mathcal{F}^n| = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_n},$$

donde  $\varphi$  y  $\varphi_n$  son las coordenadas angulares de los puntos  $x$  y  $\mathcal{F}^n(x)$ . Ahora observar que  $\log \cos \varphi$  es una función integrable (de hecho calculamos el valor de su integral cuando verificamos que  $\mathcal{F}$  satisface las hipótesis del teorema de Oseledets). El teorema ergódico de Birkhoff nos dice que  $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(\mathcal{F}^i(x))$  converge para casi todo punto  $x \in \mathcal{M}$  cuando  $g$  es integrable, en particular el término general de la suma debe converger a cero. Aplicando este último hecho a la función  $g(r, \varphi) = \cos \varphi$  tenemos que  $\frac{1}{n} \log \cos \varphi_n \rightarrow 0$  y por tanto  $\frac{1}{n} \log |\text{Det } D_x \mathcal{F}^n| \rightarrow 0$ . Finalmente aplicando  $\frac{1}{n} \log(\cdot)$  en  $|\text{Det } D_x \mathcal{F}^n| = \frac{\sin(\gamma_n)}{\sin(\gamma)} \frac{a_n}{a} \frac{b_n}{b}$  y tomando  $n \rightarrow \infty$  se tiene lo pedido.  $\square$

Evidentemente la proposición que acabamos de probar nos permite separar el análisis en dos casos. El primer caso es que ambos exponentes sean cero, el segundo es que haya uno negativo y otro positivo. Por razones técnicas es mucho más conveniente y provechoso dinámicamente el segundo caso, tendríamos un sistema hiperbólico (cuando todos los puntos de  $\widehat{\mathcal{M}}$  se encuentran en el segundo caso) y estos son sistemas relativamente bien entendidos. Más adelante probaremos que para billares donde las componentes tienen curvatura positiva se tiene hiperbolicidad, también probaremos que existen billares donde el sistema dinámico es uniformemente hiperbólico.

## 1.4. Acción del flujo en $T\Omega$

El objetivo de esta sección es presentar una descomposición del tangente de  $\Omega$  que nos permita identificar las dirección de mayor y menor expansión para la derivada del flujo  $\{\Phi^t\}$ . Recordemos que hemos definido  $\tilde{\Omega} \subset \Omega = \mathcal{D} \times S^1$  como el conjunto donde el flujo del billar está definido para todo tiempo. Seguiremos la notación de [8], generalmente nombraremos por  $dx$  (resp.  $dX$ ) a un vector de  $T_x\mathcal{M}$  (resp.  $T_X\Omega$ ), no confundirse pensando que es un elemento del cotangente. Consideramos entonces el flujo

$$\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}, t \in \mathbb{R}.$$

Fijemos  $X = (x, y, w) \in \Omega$  y un vector tangente  $(dx, dy, dw) \in T_X\Omega$ . Sea  $X_t = \Phi^t(X)$  con  $X_t = (x_t, y_t, w_t)$  y  $(dx_t, dy_t, dw_t) = D_X\Phi^t(dx, dy, dw)$ . En la proposición que sigue demostramos hay una sección del tangente invariante por el flujo, el campo generador por el flujo del billar, y que la derivada en esa sección es una isometría.

**Proposición 1.8.** *Usando la notación anterior si  $X = (x, y, w)$ , definimos*

$$T_X^0\Omega = \{(dx, dy, dw) \in T_X\Omega : \sin w dx = \cos w dy, dw = 0\}.$$

*Estos subespacios son  $D_X\Phi^t$ -invariante para todo  $t \in \mathbb{R}$ . La derivada en los vectores de  $T_X^0\Omega$  preserva largo, i.e. si  $v \in T_X^0\Omega$  entonces  $\|D_X\Phi^t v\| = \|v\|$ .*

*Demostración.* El flujo a partir de  $(x, y, w) \in \mathcal{D} \times S^1$  a tiempo  $t$  antes de una colisión está dado por  $(x, y, w) \mapsto (x + t \cos w, y + t \sin w, w)$ . La derivada de esta transformación es la matriz

$$D_X\Phi^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \sin w \\ 0 & 1 & t \cos w \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

La invarianza se sigue de

$$D_X\Phi^t \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Para analizar que sucede cuando hay una colisión recurramos a las ecuaciones que derivamos en (1.1-1.6). En este caso se tiene que

$$dr = d\psi = 0 \text{ y } ds^- = -c.$$

Recordando que  $ds^+ = -ds^-$  entonces  $ds^+ = c$ . Finalmente

$$dx^+ = c \cos w^+, dy^+ = c \sin w^+, dw^+ = 0,$$

de donde se concluye que la dirección luego de la colisión sigue siendo la paralela al flujo. Además como se preserva la constante  $c > 0$  tenemos que el largo de los vectores se mantiene.  $\square$

Otra consecuencia que podemos sacar de las formulas obtenidas en (1.1-1.6) es que

$$\cos w^- dx^- + \sin w^- dy^- = \cos \varphi dr - ds^-,$$

$$\cos w^+ dx^+ + \sin w^+ dy^+ = \cos \varphi dr + ds^+,$$

en otras palabras

$$\cos w^+ dx^+ + \sin w^+ dy^+ = \cos w^- dx^- + \sin w^- dy^-.$$

De la formula obtenida para la derivada en los tiempos donde no hay colisión se sigue que  $\cos w dx + \sin w dy$  se preserva durante ese periodo. Finalmente tenemos que para todo  $t \in \mathbb{R}$

$$\cos w_t dx_t + \sin w_t dy_t = \cos w dx + \sin w dy.$$

Definamos

$$T_X^\perp \Omega = \{(dx, dy, dw) \in T_X \Omega : \cos w dx + \sin w dy = 0\}.$$

Observar que este subespacio es de dimensión 2 y  $T_X^\perp \Omega \perp T_X^0 \Omega$ . De nuestras últimas conclusiones y la proposición anterior se concluye la siguiente proposición.

**Proposición 1.9.** *Se tiene la descomposición ortogonal  $T_X \Omega = T_X^0 \Omega \oplus T_X^\perp \Omega$ , donde ambos subespacios son invariantes por  $D_X \Phi^t$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Supongamos que existe  $v \in T_X \Omega$  tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D_X \Phi^t v\| = \lambda,$$

con  $\lambda \neq 0$ . Entonces  $v \in T_X^\perp \Omega$ .

*Demostración.* Solo falta probar que el subespacio  $T_X^\perp \Omega$  contiene las posibles direcciones donde el crecimiento o decrecimiento son exponencial. Supongamos que  $\lambda_X^{(i)} > 0$ . Sea  $v$  un vector en  $E_X^{(i)}$ , escribamos  $v = v_0 + v_1$  con  $v_0 \in T_X^0 \Omega$ ,  $v_1 \in T_X^\perp \Omega$ . Notamos que

$$\|D_X \Phi^{-t} v\| = \|D_X \Phi^{-t} v_0 + D_X \Phi^{-t} v_1\| \geq \|D_X \Phi^{-t} v_0\| = \|v_0\|,$$

por el teorema de Pitágoras y la invarianza de los largos de los vectores en  $T_X^0 \Omega$ . Cuando  $t \rightarrow \infty$ , por hipótesis se tiene que  $\|D_X \Phi^{-t} v\| \rightarrow 0$  exponencialmente. Concluimos que  $v \in T_X^\perp \Omega$ . El razonamiento es análogo cuando  $\lambda_X^{(i)} < 0$  (tomando tiempos positivos).  $\square$

**Definición.** El cambio de coordenadas de Jacobi en  $T_X \Omega$  es el dado por

$$\begin{aligned} T_X \Omega &\rightarrow T_X \Omega, \\ ((x, y, w), (dx, dy, dw)) &\mapsto ((x, y, w), (d\eta, d\xi, dw)), \end{aligned}$$

donde  $d\eta = \cos w dx + \sin w dy$  y  $d\xi = -\sin w dx + \cos w dy$ .

Estas nuevas coordenadas serán muy útiles. Una de las ventajas de hacer esta elección en vez de las coordenadas clásicas, es que ahora la descripción de  $T_X^\perp\Omega$  es mucho más simple.

Consideremos el vector tangente  $dX = (d\eta, d\xi, dw)$  y su evolución a tiempo  $t$ , el vector  $dX_t = (d\eta_t, d\xi_t, dw_t)$ . De lo discutido anteriormente, sabemos que  $d\eta_t = d\eta$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Observemos que sucede con las otras coordenadas en periodos sin colisión. Por (1.7) tenemos

$$\begin{aligned} dx_t &= dx - t \sin w, \\ dy_t &= dy + t \cos w. \end{aligned}$$

Esto nos permite derivar la fórmula

$$\begin{aligned} d\xi_t &= -\sin w_t dx_t + \cos w_t dy_t \\ &= -\sin w dx_t + \cos w dy_t \\ &= d\xi + t dw, \\ dw_t &= dw. \end{aligned}$$

De esto se sigue que el la derivada del flujo en estas coordenadas para los tiempos  $t$  en que no hay colisión entre  $X$  y  $\Phi^t X$  es

$$D_X \Phi^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Observar que  $T_X^\perp\Omega = \{d\eta = 0\}$ , y que si consideramos  $D_X^\perp \Phi^t : T_X^\perp\Omega \rightarrow T_{\Phi^t X}^\perp\Omega$  (lo cual es posible por la invarianza de la descomposición del tangente), se tiene la siguiente fórmula para la derivada

$$U_t := D_X^\perp \Phi^t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

donde hemos supuesto que entre  $X$  y  $\Phi^t X$  no había colisión con  $\partial\Omega$ .

A partir de (1.1-1.6) se tienen las fórmulas

$$\begin{aligned} d\xi^- &= +\cos\varphi dr - s^- dw^-, \quad dw^- = -\mathcal{K}dr + d\varphi, \\ d\xi^+ &= -\cos\varphi dr + s^+ dw^+, \quad dw^+ = -\mathcal{K}dr - d\varphi. \end{aligned}$$

Para ver que sucede en el instante de la colisión basta tomar  $s^- = 0 = s^+$  y nos queda

$$d\xi^+ = -d\xi^-, \quad (1.11)$$

$$dw^+ = -\mathcal{R}d\xi^- - dw^-, \quad \text{donde } \mathcal{R} = \frac{2\mathcal{K}}{\cos\varphi}. \quad (1.12)$$

Luego la acción de la colisión del flujo está dado por la matriz

$$L_{\mathcal{R}} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{R} & 1 \end{pmatrix}.$$

Estos dos tipos de matrices son los ingredientes para saber como se comporta de manera general la derivada del flujo. Consideremos un punto  $X \in \Omega$  y  $t > 0$ . Sea  $t_i$  el tiempo de la  $i$ -ésima colisión en el intervalo  $(0, t)$  y  $P_i \in \partial\mathcal{D}$  el punto donde esto sucede. Definimos

$\mathcal{R}_i = \frac{2\mathcal{K}_i}{\cos \varphi_i}$ , donde  $\mathcal{K}_i$  es la curvatura en  $P_i$  y  $\varphi_i$  el ángulo respecto a la normal en el punto  $P_i$  instantaneamente después del choque. Supongamos que hay solo  $n$  choques en el periodo de tiempo  $(0, t)$ . Con esta notación se tiene que

$$D_X \Phi^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = (-1)^n U_{t-t_n} L_{\mathcal{R}_n} U_{t_n-t_{n-1}} \dots L_{\mathcal{R}_1} U_{t_1}.$$

Y por las mismas razones que se tenían anteriormente

$$D_X^\perp \Phi^t = (-1)^n U_{t-t_n} L_{\mathcal{R}_n} U_{t_n-t_{n-1}} \dots L_{\mathcal{R}_1} U_{t_1}. \quad (1.13)$$

## 1.5. Exponentes de Lyapunov del flujo

Los exponentes de Lyapunov para un flujo se definen de manera similar a como se hace para una aplicación. En nuestro caso estamos considerando el flujo  $\Phi^t : \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ , usaremos esta notación para explicar que entendemos por los exponentes en este caso.

Supongamos que existe un conjunto  $Z \subset \tilde{\Omega}$  que es  $\Phi^t$  invariante tal que para cada punto  $X \in Z$  se tiene una descomposición

$$T_X \Omega = E_X^{(0)} \oplus \dots \oplus E_X^{(m)}$$

que es  $D_X \Phi^t$ -invariante (donde  $m$  depende de  $X$ ). Supongamos además que esta descomposición satisface que si  $v \in E_X^{(i)}$ , entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|D_X \Phi^T v\| = \lambda_X^{(i)}$$

siendo  $\lambda_X^{(0)} > \dots > \lambda_X^{(m)}$  los *exponentes de Lyapunov* en tal punto. La multiplicidad  $m_i$  de cada exponente está dado por  $m_i = \dim E_X^{(i)}$ . Evidentemente las funciones  $\lambda_X^{(i)}$  y  $m_i$  son  $\Phi^t$  invariantes. Si el flujo fuera ergódico (para una cierta medida de probabilidad invariante), entonces estas funciones serán constantes casi en todas partes.

La principal diferencia con la definición previa para exponentes de Lyapunov de una aplicación, es el hecho de que los límites (que dan el crecimiento-decrecimiento exponencial de los largos de los vectores), se toman con tiempos reales que van en aumento en vez de solo sobre los naturales.

Ya tenemos información valiosa sobre los exponentes de la función  $\mathcal{F}$ . Sabemos que si los exponentes de un punto son  $\lambda_x^{(1)}$  y  $\lambda_x^{(2)}$  entonces  $\lambda_x^{(1)} + \lambda_x^{(2)} = 0$ , probaremos lo mismo en el caso del flujo del billar. Observar que  $\Omega$  tiene dimensión 3, por tanto deben haber 3 exponentes sin contar multiplicidad. Recordar la descomposición del tangente  $T_X \Omega = T_X^0 \Omega \oplus T_X^\perp \Omega$ . Usando la última afirmación de Proposición 1.8 se tiene que si  $v \in T_X^0 \Omega$ , i.e.  $v$  apunta en la dirección del flujo, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|D_X \Phi^t v\| = 0.$$

La Proposición 1.9 nos dice que los subespacios asociados a los exponentes distintos de cero están en  $T_X^\perp \Omega$ , de existir.

**Definición.** Dado  $X \in \Omega$  se define

$$\pi_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\#\{\text{colisiones de la trayectoria de } X \text{ en tiempos } [0, T]\}}{T},$$

cuando ese límite existe.

El teorema Ergódico de Birkhoff nos da la existencia de este límite para  $\mu$ -casi todo punto de  $\Omega$ .

**Definición.** Sea  $X = (q, v) \in \Omega$ , se define

$$\begin{aligned} t^+(X) &= \min\{t > 0 : \Phi^t(X) \in \mathcal{M}\}, \\ t^-(X) &= -\max\{t < 0 : \Phi^t(X) \in \mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

Podemos definir las proyecciones sobre  $\mathcal{M}$  a tiempos negativos y positivas como

$$\begin{aligned} P^+(X) &= \Phi^{t^+(X)} X, \\ P^-(X) &= \Phi^{t^-(X)} X. \end{aligned}$$

Consideremos la derivada

$$DP^+(X) : T_X \Omega \rightarrow T_z \mathcal{M},$$

donde  $z = P^+(X)$ . Afirmamos que  $T_X^0 \Omega \subset \ker DP^+(X)$ . Si  $X = (x, y, w)$ , consideraremos  $v = (\cos w, \sin w, 0) \in T_X^0 \Omega$  el vector que genera ese subespacio. Definamos

$$\begin{aligned} \gamma : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \Omega, \\ t &\mapsto (x + t \cos w, y + t \sin w, w), \end{aligned}$$

para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño de modo que  $\gamma \subset \text{int} \Omega$ . Observar que  $\gamma'(0) = v$  y que su composición  $P^+(\gamma(\cdot))$  es constante, se sigue que  $DP^+(X)(v) = 0$ . Por otro lado es evidente que  $DP^+(X)$  es sobreyectiva, luego  $\ker DP^+(X) = T_X^0 \Omega$  y es posible definir el isomorfismo

$$DP^+(X) : T_X^\perp \Omega \rightarrow T_z \mathcal{M}. \quad (1.14)$$

Nuestro objetivo es probar el siguiente teorema.

**Teorema 1.10.** *Sea un punto  $X \in \Omega$  donde hay exponentes de Lyapunov. El subespacio  $T_X^0 \Omega \subset T_X \Omega$  corresponde a exponente cero. Los otros dos exponentes son proporcionales a los dados por la aplicación de primer retorno  $\mathcal{F}$ . Más precisamente si  $\lambda_X^{(1)}, \lambda_X^{(2)}$  son los exponentes, entonces*

$$\lambda_X^{(i)} = \pi_X \lambda_z^{(i)}, \quad i \in \{1, 2\},$$

donde  $z = P^+(X)$  y  $\lambda_z^{(i)}$  son los exponentes de  $z$  para  $\mathcal{F}$ . Hay un conjunto de medida total que tiene exponentes de Lyapunov para el flujo  $\Phi^t$ .

*Demostración.* Consideremos un  $X \in \Omega$  tal que  $z = P^+(X) \in \mathcal{M}$  tiene exponentes de Lyapunov  $\lambda$ . Sea  $dz = (dr, d\varphi) \in T_z\mathcal{M}$  el vector tangente asociado a  $\lambda$ . Sea  $dX = (dx, dy, dw) \in T_X^\perp\Omega$  la preimagen de  $dz$  por (1.13). Observar que

$$\|dX\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dw)^2} = \sqrt{(d\xi)^2 + (dw)^2},$$

ya que  $d\xi = -\sin w dx + \cos w dy$  y  $0 = d\eta = \cos w dx + \sin w dy$ . Usando (1.1-1.6)

$$d\xi = \cos \varphi dr - s dw, \quad dw = -\mathcal{K} dr + d\varphi,$$

donde  $s$  es la distancia de  $X$  a  $P^+(X)$ , en otras palabras  $s = t^+(X)$ . Obtenemos

$$dr = \frac{d\xi + s dw}{\cos \varphi}, \quad (1.15)$$

$$d\varphi = \frac{\mathcal{K} d\xi + (s\mathcal{K} + \cos \varphi) dw}{\cos \varphi}. \quad (1.16)$$

Recordando que  $\|dz\| = \sqrt{(dr)^2 + (d\varphi)^2}$  y usando las fórmulas de arriba

$$\|dz\| = \frac{1}{|\cos \varphi|} \sqrt{(d\xi)^2(1 + \mathcal{K}^2) + (dw)^2(s^2 + (s\mathcal{K} + \cos \varphi)^2) + (d\xi)(dw)(2s + 2\mathcal{K}(s\mathcal{K} + \cos \varphi))}.$$

Siguiendo la notación de [8], sea  $\hat{t}_X = \max\{t^+(X), 1\}$

$$\|dz\| \leq \frac{1}{|\cos \varphi|} \sqrt{(d\xi)^2(1 + \mathcal{K}^2) + (dw)^2(1 + (1 + \mathcal{K})^2)(\hat{t}_X)^2 + 2(d\xi)(dw)(\hat{t}_X)(\mathcal{K}^2 + \mathcal{K} + 1)}.$$

Usando que  $\hat{t}_X \geq 1$  es inmediato

$$\|dz\| \leq C \frac{\hat{t}_X \|dX\|}{|\cos \varphi|},$$

con  $C > 0$  una constante que solo depende de  $\mathcal{D}$ . De igual manera podemos probar que

$$\|dX\| \leq \tilde{C} \hat{t}_X \|dz\|,$$

para cierta constante  $\tilde{C} = \tilde{C}(\mathcal{D})$ . Concluimos que

$$\log \|dX\| = \log \|dz\| + O(\log \cos \varphi) + O(\log \hat{t}_X). \quad (1.17)$$

Consideremos el flujo  $\Phi^t(X)$  cuando  $t \in [0, T]$  y llamemos

$$n(T) = \{\#\text{ colisiones de la trayectoria de } X \text{ en tiempos } [0, T]\}.$$

En el punto  $\Phi^T(X)$ , consideremos el vector  $D_X \Phi^T(dX)$ . Es claro que

$$P^+(\Phi^T(X)) = \mathcal{F}^{n(T)+1}(z), \\ DP^+(\Phi^T(X))(D_X \Phi^T(dX)) = D_z \mathcal{F}^{n(T)+1}(dz).$$

Luego de la ecuación (1.16) se tiene que

$$\log \|D_X \Phi^T(dX)\| = \log \|D_z \mathcal{F}^{n(T)+1}(dz)\| + O(\log \cos \varphi_{n(T)+1}) + O(\log \hat{t}_{\Phi^T X}),$$

donde como es usual  $\varphi_m$  es la coordenada angular de  $\mathcal{F}^m(z)$ . Finalmente observemos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|D_z \mathcal{F}^{n(T)}(dz)\| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(T) + 1}{T} \frac{1}{n(T) + 1} \log \|D_z \mathcal{F}^{n(T)+1}(dz)\| = \pi_X \lambda.$$

Observar que la función  $t^+$  es integrable, recordar que  $\int_{\mathcal{M}} \tau d\mu < \infty$  y que la medida  $\mu_{\Omega}$  se recupera como la normalización de  $\mu \times \lambda$ . Como el espacio es de probabilidad es fácil probar también que  $X \mapsto \hat{t}_X$  también es integrable. Por otro lado ya sabemos que  $(r, \varphi) \mapsto \log \cos \varphi$  es una integrable. Usando Birkhoff (la versión discreta y para flujos) tenemos que para casi todos los puntos  $z \in \mathcal{M}$  y  $X \in \Omega$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(T) + 1}{T} \frac{1}{n(T) + 1} \log \cos \varphi_{n(T)+1} &= \pi_X \cdot 0 = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(T)} \log \hat{t}_{\Phi^n(X)} &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos el límite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \|D_X \Phi^T(dX)\| = \pi_X \lambda.$$

Concluimos el teorema recordando que  $\mu$ -casi todo punto  $z \in \mathcal{M}$  tiene 2 exponentes de Lyapunov. Los puntos  $X \in \Omega$  que cumplen los 2 límites anteriores y donde  $P^+(X)$  tiene dos exponentes, forman un conjunto de medida total y se concluye el teorema.  $\square$

**Ejemplo.** Consideremos como nuestro billar a la región encerrada por un polígono. En este caso  $\mathcal{K} \equiv 0$  y por tanto la fórmula para la derivada es  $D_X^\perp \Phi^t = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Claramente el crecimiento de los largos de vectores no es exponencial en ninguna dirección, los exponentes de Lyapunov son cero en este caso.

## 1.6. Curvatura y frentes de onda

El objetivo de esta sección es estudiar como va cambiando la forma de una curva dada, al hacerla evolucionar por el flujo del billar. Nos será de particular interés ver que sucede con la curvatura a lo largo del flujo.

**Definición.** Consideremos una curva suave  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{D}$  equipada con una familia diferenciable de vectores normales, i.e. a cada punto  $x \in \gamma$  le asignamos un vector unitario  $v_x$ , normal a la curva. El *frente de onda* generado por  $\gamma$  es la curva

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \Omega, \\ t &\mapsto (\gamma(t), v_{\gamma(t)}). \end{aligned}$$

**Proposición 1.11.** Denotemos  $T_{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{\gamma}$  al espacio tangente en  $\tilde{\gamma}(t)$  a la curva  $\tilde{\gamma}$ . Se tiene que  $T_{\tilde{\gamma}(t)} \tilde{\gamma} \subset T_{\tilde{\gamma}(t)}^\perp \Omega$ . Además si  $\tilde{\gamma}'(0) = (0, d\xi, dw)$  entonces la curvatura en  $\gamma(0)$  a respecto de  $\gamma$  es  $dw/d\xi$ .

*Demostración.* Como el resultado que nos interesa probar no dependen de la parametrización de  $\gamma$  podemos suponerla arcoparametrizada. Sea  $w(t) \in S^1$  la función continua determinada por

$$\gamma'(t) = (\cos w(t), \sin w(t)),$$

esto siempre puede hacerse en una vecindad de 0. Se sigue que curvatura de  $\gamma$  en  $\gamma(t)$  está dada por  $w'$ . En otras palabras  $w'(t)$  es la curvatura (con signo) en  $\gamma(t)$  a  $\gamma$ . Podemos

suponer que el marco de vectores normales está a rotando en  $\pi/2$  en sentido horario. Tenemos  $v_{\gamma(t)} = w(t) - \pi/2$ . Observar que  $\tilde{\gamma}'(t) = (\gamma'(t), v'_{\gamma(t)}) = (\cos w(t), \sin w(t), w'(t))$ , de donde

$$\begin{aligned} d\eta &= \cos v_{\gamma(t)} dx + \sin v_{\gamma(t)} dy \\ &= \cos(w(t) - \pi/2) \cos(w(t)) + \sin(w(t) - \pi/2) \sin(w(t)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que prueba la primera afirmación. Por otro lado

$$\begin{aligned} d\xi &= -\sin v_{\gamma(t)} dx + \cos v_{\gamma(t)} dy \\ &= -\sin(w(t) - \pi/2) \cos(w(t)) + \cos(w(t) - \pi/2) \sin(w(t)) \\ &= 1, \end{aligned}$$

de donde se concluye que  $dw/d\xi = w'$ , i.e.  $dw/d\xi$  es la curvatura pedida.  $\square$

Como mencionamos anteriormente nos interesa ver que sucede con una curva  $\gamma \subset \mathcal{D}$  cuando la hacemos evolucionar por el flujo del billar, más específicamente cuando la evolución es respecto a un marco de vectores normales. Es interesante ver que sucede con la forma de nuestra curva cuando empiezan a haber colisiones con las paredes del billar, una manera canónica de hacerlo es ver que como varía la curvatura.

**Definición.** Dado un frente de onda se define como  $\mathcal{B} = dw/d\xi$  a su curvatura.

Hay distintas interpretaciones dependiendo del signo de  $\mathcal{B}$ . Consideremos una curva  $\gamma$  y un frente de onda donde los vectores normales aparecen a mano derecha de los vectores tangentes (como hemos supuesto en la demostración anterior). Observar que la curvatura de frente de onda depende de como es la variación de los vectores tangentes,  $\mathcal{B} = w'$ .

- (a) Si  $\mathcal{B} = 0$  entonces la curva es plana.
- (b) Si  $\mathcal{B} > 0$  entonces los vectores normales aumentan su argumento mientras recorro la curva, es un frente de onda divergente (la curva parece expandirse).
- (c) Si  $\mathcal{B} < 0$  entonces los vectores normales disminuyen su argumento, es un frente de onda que convergente (la curva parece encogerse).
- (d) Si  $\mathcal{B} = \infty$  entonces hay un frente de onda degenerado.

Como mencionamos anteriormente queremos ver como es la evolución de los frentes de onda. Vamos a hacer este análisis en los tangentes por medio de los diferenciales (después de todo la curvatura está dada como la pendiente de una recta en  $T_X\Omega$ ).

Consideremos una recta  $L \subset T_X^\perp\Omega$  de pendiente  $\mathcal{B}$  y definamos  $L_t = D_X\Phi^t(L) \subset T_X^\perp\Omega$  junto con su pendiente  $\mathcal{B}_t$ . Recordar que si entre  $X$  y  $\Phi^t(X)$  no hay colisiones entonces  $d\xi_t = d\xi + tdw$  y  $dw_t = dw$ . Se concluye que

$$\mathcal{B}_t = \frac{dw_t}{d\xi_t} = \frac{dw}{d\xi + tdw} = \frac{\mathcal{B}}{1 + t\mathcal{B}}. \quad (1.18)$$

**Proposición 1.12.** *Supongamos que  $X$  a tiempo  $t$  colisiona con  $\partial\Omega$ , i.e.  $\Phi^t(X) \in \mathcal{M}$ . Sea  $\mathcal{B}^-$  y  $\mathcal{B}^+$  las pendientes de  $L$  pre y post colisión respectivamente. Se tiene la ecuación*

$$\mathcal{B}^+ = \mathcal{B}^- + \mathcal{R}, \quad (1.19)$$

donde  $\mathcal{R} = \frac{2\mathcal{K}}{\cos \varphi}$ , siendo  $\mathcal{K}$  y  $\varphi$  la curvatura y ángulo de incidencia en el punto de colisión.

*Demostración.* Recordar (1.10,1.11)

$$\frac{dw^+}{d\xi^+} = \frac{dw^- + \mathcal{R}d\xi^-}{d\xi^-} = \mathcal{R} + \frac{dw^-}{d\xi^-}.$$

□

**Comentario.** Las ecuaciones (1.17,1.18) nos dan fórmulas abstractas para saber como varían las pendientes de las rectas por medio del diferencial del flujo. Como vimos en la Proposición 1.11 a cada una de estas rectas le corresponde un frente de onda. Hay una curva  $\gamma \subset \mathcal{D}$  con un marco de vectores normales donde su curvatura es precisamente  $\mathcal{B}$ . Entender la función  $t \mapsto \mathcal{B}_t$  nos dice como varía la curvatura de  $\gamma$  al hacerla evolucionar por las direcciones normales (y muchas veces pasar por colisiones, que en principio no deja claro que forma tendrá la nueva curva). En resumen  $\mathcal{B}_t$  tiene un significado geométrico muy preciso.

Consideremos  $z \in \mathcal{M}$ ,  $Z^- \in \Omega$ ,  $Z^+ \in \Omega$  tal que  $P^-(Z^+) = z$  y  $P^+(Z^-) = z$ . Recordemos que  $DP^\pm(Z)$  es un isomorfismo entre  $T_{Z^\mp}^\perp \Omega$  y  $T_z \mathcal{M}$ . Dado  $v \in T_z \mathcal{M}$ , sabemos que existe  $w^-$  y  $w^+$  tal que  $w^\mp \in T_{Z^\mp}^\perp \Omega$  y  $D_{Z^\mp} P^\pm(w^\mp) = z$ . Se define  $\mathcal{B}_t^-$  como la pendiente de  $D_{Z^-} \Phi^t(w^-)$  en los tiempos  $t \in [0, t^+(Z^-)]$ , de igual forma  $\mathcal{B}_t^+$  es la pendiente de  $D_{Z^+} \Phi^{-t}(w^+)$  en los tiempos  $t \in [0, t^-(Z^+)]$ .

**Definición.** Usando la notación anterior, se define

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^+ &= \lim_{t \nearrow t^-(Z^+)} \mathcal{B}_t, \\ \mathcal{B}^- &= \lim_{t \nearrow t^+(Z^-)} \mathcal{B}_t. \end{aligned}$$

Recordando las ecuaciones (1.14,1.15) observamos que mientras nos acercamos al tiempo de choque por medio del flujo a partir de  $Z^-$  la variable  $s \nearrow 0$ . En el límite se tiene que

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\mathcal{K}d\xi + \cos \varphi dw}{d\xi} = \mathcal{K} + \cos \varphi \mathcal{B}^-.$$

Si definimos  $\mathcal{V} = \frac{d\varphi}{dr}$  obtenemos la igualdad

$$\mathcal{V} = \mathcal{K} + \cos \varphi \mathcal{B}^- = -\mathcal{K} + \cos \varphi \mathcal{B}^+. \quad (1.20)$$

**Comentario.** Es importante recalcar que a cada vector  $z \in T\mathcal{M}$  le corresponde una pendiente  $\mathcal{V}$ , a esta dirección le corresponden las pendientes límites  $\mathcal{B}^-$  y  $\mathcal{B}^+$  dadas por la ecuación (1.19). Estas pendientes serán de mucha utilidad para el estudio de las propiedades dinámicas de  $\mathcal{F}$  y para luego vincular nuestros resultados en  $\mathcal{F}$  con propiedades del flujo  $\Phi^t$ .

Consideremos la pseudo-métrica  $\|\cdot\|_p$  en  $\mathcal{M}$  dada por  $\|(dr, d\varphi)\|_p = \cos\varphi|dr|$ . Llamaremos a esta pseudo-métrica la  $p$ -métrica. Si  $q = (r, \varphi) \in \mathcal{M}$ , la matriz asociada al producto interno que genera la  $p$ -métrica es  $G_q = \cos\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Evidentemente esta métrica no es Riemanniana pero nos servirá como referencia para ver el crecimiento de los vectores por medio de  $D_q\mathcal{F}^n$ .

**Proposición 1.13.** *Sea  $x \in \mathcal{M}$  y  $dx \in T_x\mathcal{M}$ , entonces se tiene la fórmula*

$$\frac{\|D_x\mathcal{F}(dx)\|_p}{\|dx\|_p} = |1 + \tau\mathcal{B}^+|,$$

donde  $\tau$  es el tiempo de primer retorno de  $x$  a  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{B}^+$  es la pendiente asociada al vector  $dx \in T_x\mathcal{M}$ .

*Demostración.* En  $T_X^\perp\Omega$  consideremos la pseudo-métrica  $|d\xi|$ . Con esto estamos diciendo que el vector  $v = (0, d\xi, dw) \in T_X^\perp\Omega$  tendrá largo  $|d\xi|$ . Sea  $X \in \Omega$  tal que  $P^-(X) = x$ . Veamos que por medio de  $DP^-(X) : T_X^\perp\Omega \rightarrow T_x\mathcal{M}$  podemos inducir una métrica en  $T_x\mathcal{M}$ . Si  $v = (dr, d\varphi) \in T_x\mathcal{M}$  entonces definimos el largo de  $v$  como el largo de  $DP^-(X)^{-1}(v) = (d\xi, dw)$  con la métrica recién definida. Recordando que

$$(d\xi, dw) = (\cos\varphi dr - s dw, -\mathcal{K}dr + d\varphi),$$

obtenemos que la métrica que inducimos en  $T_x\mathcal{M}$  al tomar  $s \nearrow 0$  es la  $p$ -métrica (que resulta de tomar  $X$  cada vez más cercano a  $x$ ). Recordar que

$$d\xi_t = d\xi + t dw = d\xi(1 + t\mathcal{B}),$$

durante los tiempos que no hay colisión. Luego  $\frac{|d\xi_t|}{|d\xi|} = |1 + t\mathcal{B}|$ . En nuestro contexto, pensamos que el flujo está partiendo desde  $x$  con la dirección dada por la pendiente  $\mathcal{B}^+$ , el tiempo que nos demoramos en llegar a  $\mathcal{F}(x)$  es  $\tau$  y se sigue la fórmula pedida.  $\square$

En general se tiene que

$$\frac{\|D_x\mathcal{F}^n(dx)\|_p}{\|dx\|_p} = \prod_{i=0}^{n-1} |1 + \tau_i\mathcal{B}_i^+|, \quad (1.21)$$

donde  $\tau_j$  es el tiempo que transcurre entre la  $j$  y  $(j+1)$ -ésima colisión,  $\mathcal{B}_j^+$  es la pendiente post colisión en el choque  $j$ -ésimo.

## 1.7. Continuidad del flujo

Dentro de las cosas que se discutieron en la introducción de este capítulo están los tipos de eventos que podrían hacer que el flujo no esté definido. Llegamos a la conclusión de que la única posibilidad de que esto suceda es que haya colisión con una esquina. Saltan a la vista dos preguntas, la primera es que tipo de regularidad tiene nuestro flujo en los puntos donde está definido, la segunda es si existe forma alguna de poder definir el flujo luego de una colisión sin perder, al menos, la continuidad.

Fijemos  $t \in \mathbb{R}$ . Las ecuaciones (1.1-1,6) son equivalentes a las fórmulas para la derivada de  $\Phi^t$  obtenidas en la sección 1.4 (pasando por las coordenadas de Jacobi). La regularidad del flujo va a estar dada por la regularidad de esta fórmula para la derivada. Supongamos que  $x \in \Omega$  es un punto que solo presenta colisiones regulares hasta tiempo  $t$ . Podemos encontrar una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $x$  donde la función  $\tau^k|_{\mathcal{U}}$  sea diferenciable (tan diferenciable como es la curvatura de las paredes del billar, de clase  $C^{l-2}$ ) para  $k \in \{1, 2, \dots, m+1\}$  donde  $m$  es la cantidad de colisiones que sufre  $x$  hasta tiempo  $t$ . Los demás terminos que aparecen en  $D\Phi^t(x)$  dependen de la curvatura, de  $\tau$  y del coseno de los ángulos de incidencia con  $\mathcal{M}$ . Observemos que  $\cos(\varphi_n) = \cos(\pi_\varphi \circ \mathcal{F}^n(x))$  donde  $\pi_\varphi : \mathcal{M} \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$  es la proyección a la coordenada angular. Por Teorema 1.4 sabemos que, para colisiones regulares,  $\mathcal{F}$  es de clase  $C^{l-2}$ , por lo tanto  $x \mapsto \cos(\varphi_n)$  es de clase  $C^{l-2}$ . Finalmente todos los términos involucrados en la derivada  $D\Phi^t(x)$  son de clase  $C^{l-2}$ , se concluye el siguiente resultado.

**Proposición 1.14.** *La función  $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$  es de clase  $C^{l-2}$  en puntos que solo presentan colisiones regulares hasta tiempo  $t$ .*

Consideremos un punto  $x \in \text{int}(\Omega)$  tal que  $\Phi^t(x) \in \text{int}(\Omega)$  que presenta colisión tangencial para un único tiempo  $s \in (0, t)$ . Como  $x$  y  $\Phi^t(x)$  están en  $\text{int}(\Omega)$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\Phi^{-h}(x)$  y  $\Phi^{h+t}(x)$  están en  $\text{int}(\Omega)$  para todo  $h \in [0, \delta]$  (por razones técnicas asumiremos que  $\min\{s/2, (t-s)/2\} > \delta$ ). Sea  $y := \Phi^t(x)$  y  $p$  el punto en  $\Gamma_i$  donde  $x$  colisiona a tiempo  $s$ . Consideremos  $f : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \Gamma_i$  una arcoparametrización de  $\Gamma_i$  en una pequeña vecindad de  $p$  (asumimos que  $f(0) = p$ ). Se define

$$\psi : [-\epsilon, \epsilon] \times [-\delta, \delta] \rightarrow \Omega = \mathcal{D} \times S^1,$$

por la fórmula

$$\begin{aligned} \psi(z, h) &= (f(z) + (h + (t-s))f'(z), w(z)) \\ &= (x_1(z) + (h + (t-s))x_1'(z), x_2(z) + (h + (t-s))x_2'(z), w(z)), \end{aligned}$$

donde  $w(z)$  es el ángulo de la derivada de  $f$  en  $z$  y  $f(z) = (x_1(z), x_2(z))$ . Observar que

$$D\psi(z, h) = \begin{pmatrix} x_1'(z) + (h + (t-s))x_1''(z) & x_1'(z) \\ x_2'(z) + (h + (t-s))x_2''(z) & x_2'(z) \\ w'(z) & 0 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto

$$\det \begin{vmatrix} x_1'(z) + (h + (t-s))x_1''(z) & x_1'(z) \\ x_2'(z) + (h + (t-s))x_2''(z) & x_2'(z) \end{vmatrix} = (h + (t-s))(x_1''(z)x_2'(z) - x_1'(z)x_2''(z)).$$

Esta última expresión no puede ser cero porque  $x_1''(z)x_2'(z) - x_1'(z)x_2''(z)$  es la curvatura en  $f(z)$  respecto a la curva  $\Gamma_i$ . En particular, para  $z = h = 0$  tenemos que existe una vecindad  $\mathcal{U} \subset \psi([-\epsilon, \epsilon] \times [-\delta, \delta])$  de  $y$  que es una superficie suave en  $\text{int}(\Omega)$ . Por razones análogas podemos suponer que  $\mathcal{U}' := \Phi^{-t}(\mathcal{U}) \subset \text{int}(\Omega)$  es una superficie suave que contiene a  $x$ . Consideremos una vecindad  $\mathcal{U}'_0$  (resp.  $\mathcal{U}_0$ ) de  $x$  (resp.  $y$ ) tales que  $\mathcal{U}'$  (resp.  $\mathcal{U}$ ) separa  $\mathcal{U}'_0$  (resp.  $\mathcal{U}_0$ ) en dos componentes conexas abiertas. La continuidad en  $x$  ahora sigue de usar la Proposición 1.14 en las componentes conexas recién definidas con el difeomorfismo entre  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{U}'$ . La función de primer retorno deja de ser continua, no es difícil convencerse de que el flujo a pesar de ser continuo no es diferenciable.

**Proposición 1.15.** *El flujo del billar es continuo pero no diferenciable en los puntos de  $\Omega$  que presentan colisión tangencial con  $\partial\mathcal{D}$ .*

Por último, para dar respuesta a la pregunta que planteamos antes acerca de cuando es posible extender el flujo de manera continua a pesar de haber colisión con una esquina vamos a enunciar el siguiente teorema. Dejo como referencia para este último teorema el capítulo 2 de [8].

**Teorema 1.16.** *Sea  $x \in \Omega$  un punto que por el flujo del billar colisiona en una esquina. Se puede definir la dirección post colisión de  $x$  de manera de no perder la continuidad si y solo si, el ángulo que se forma en la esquina de la colisión es 0 o de la forma  $\frac{\pi}{n}$  para cierto  $n \in \mathbb{N}$ .*

## Capítulo 2

# Billares dispersores

Este capítulo está enfocado en el estudio de billares dispersores, i.e.  $\mathcal{K} > 0$ . En este y los siguientes capítulos siempre asumiremos que la curvatura del billar es positiva.

Cuando nos refiramos a este tipo de billares estamos aceptando que el billar puede ser en  $\mathbb{R}^2$  o bien en el toro (cuando tenemos una disposición periódica de las curvas  $\Gamma_i$ ).

**Definición.** Un billar se dice de *horizonte acotado* si la función de primer retorno  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada superiormente, en caso contrario el billar se dice de *horizonte no acotado*.

Hay varios tipos de billares dispersores, vamos a clasificarlos dependiendo de la existencia de esquinas o de cúspides junto con de horizonte acotado o no.

1. Tipo A: Horizonte acotado, sin esquina.
2. Tipo B: Horizonte no acotado, sin esquina.
3. Tipo C: Horizonte acotado, con esquina pero sin cúspides.
4. Tipo D: Horizonte no acotado, con esquina pero sin cúspides.
5. Tipo E: Horizonte acotado, con cúspides.
6. Tipo F: Horizonte no acotado, con cúspides.

**Ejemplo.** Cuando consideramos el ejemplo (b) anterior (capítulo 1), obtenemos un billar de horizonte acotado y con cúspides, en otras palabras un billar de tipo E. Modifiquemos ligeramente el ejemplo anterior. Fijemos  $\epsilon$  tal que  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ . Consideremos

$$\mathcal{D}' = [0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i,j \in \{0,1\}} D_{(i,j)}(1/2 + \epsilon).$$

Este billar es de horizonte finito pero ya no tiene cúspides, es de tipo C. Un último ejemplo, que será particularmente importante para lo que podamos decir más adelante es el billar

$$\mathcal{D}'' = [0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i,j \in \{0,1\}} D_{(i,j)}(1/2 - \epsilon).$$

Evidentemente  $\mathcal{D}''$  es un billar de tipo B.

**Proposición 2.1.** *En los billares de tipo A y B, la función  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada inferiormente.*

*Demostración.* En el caso de los billares que no tienen esquinas tenemos que cada componente  $\Gamma_i$  es una curva cerrada suave. Como pedimos que  $\mathcal{K} > 0$ , las regiones que encierran son convexas (las regiones que aparecen como complemento de  $\mathcal{D}$  en  $\mathbb{R}^2$  o en el toro). La segunda condición impuesta en nuestra mesa de billar (ver la primera página del manuscrito) nos dice que estas curvas  $\Gamma_i$  no se tocan entre sí. Estos conjuntos convexas son compactos disjuntos y es evidente que en  $\mathbb{R}^2$  para un par de compactos disjuntos  $K$  y  $K'$  se tiene que  $d(K, K') > 0$ . Como son finitas componentes se concluye que  $\tau$  es acotada inferiormente.  $\square$

**Comentario.** Por el Teorema 1.16 sabemos que para los billares de tipo A y B, el flujo  $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  está bien definido en todos los puntos de  $\Omega$  y es continuo.

Nuestro primer gran objetivo es probar que los billares dispersores son hiperbólicos. Para nosotros un cono  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$  es un subconjunto tal que si  $v \in \mathcal{C}$  y  $\lambda > 0$  entonces  $\lambda v \in \mathcal{C}$ . El siguiente teorema nos dice que si es que podemos encontrar una familia de conos que satisface una cierta *invarianza*, entonces hay hiperbolicidad.

**Teorema 2.2.** ([26][27]) *A cada  $x \in \mathcal{M}$  le asignamos un par de conos  $\mathcal{C}_x^s$  y  $\mathcal{C}_x^u$ , que llamaremos estable e inestable respectivamente. Si los conos son estrictamente invariantes, i.e.*

$$\begin{aligned} D_x \mathcal{F}(\mathcal{C}_x^u) &\subset \text{int } \mathcal{C}_{\mathcal{F}x}^u \cup \{0\}, \\ D_x \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{C}_x^s) &\subset \text{int } \mathcal{C}_{\mathcal{F}^{-1}x}^s \cup \{0\}, \end{aligned}$$

*entonces se tiene que el sistema dinámico es hiperbólico respecto a la medida  $\mu$ .*

**Proposición 2.3.** *Para cada  $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}'$  se define*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_x^u &= \{(dr, d\varphi) \in T_x M : \mathcal{K} \leq \frac{d\varphi}{dr} \leq \mathcal{K} + \frac{\cos \varphi}{\tau_{-1}(x)}\}, \\ \mathcal{C}_x^s &= \{(dr, d\varphi) \in T_x M : -\mathcal{K} - \frac{\cos \varphi}{\tau(x)} \leq \frac{d\varphi}{dr} \leq -\mathcal{K}\}, \end{aligned}$$

*donde  $\mathcal{K}$  es la curvatura en el punto de  $\partial \mathcal{D}$  asociado a  $x$  y  $\tau_{-1}$  la función de primer retorno a tiempos negativos. Estos conos son estrictamente invariantes.*

*Demostración.* Tenemos una fórmula explícita en términos de la curvatura para la derivada de  $\mathcal{F}$ . Como  $D_x \mathcal{F}$  es lineal solo basta verificar que las imágenes de los bordes de los conos están dentro del cono asociado a  $\mathcal{F}(x)$ . Observe que

$$D_x \mathcal{F} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathcal{K} \end{pmatrix} = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \begin{pmatrix} 2\tau\mathcal{K} + \cos \varphi \\ 2\mathcal{K}\mathcal{K}_1\tau + 2\mathcal{K} \cos \varphi_1 + \mathcal{K}_1 \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Solo nos interesa la pendiente de este vector, en este caso

$$a_1 := \mathcal{K}_1 + \frac{2\mathcal{K} \cos \varphi_1}{2\tau\mathcal{K} + \cos \varphi}.$$

Repetiendo el procedimiento para la otra dirección límite

$$D_x \mathcal{F} \left( \mathcal{K} + \frac{1}{\tau_{-1}} \right) = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \left( \begin{array}{c} 2\tau\mathcal{K} + \cos \varphi + \tau \frac{\cos \varphi}{\tau_{-1}} \\ 2\mathcal{K}\mathcal{K}_1\tau + 2\mathcal{K} \cos \varphi_1 + \mathcal{K}_1 \cos \varphi + \tau\mathcal{K}_1 \frac{\cos \varphi}{\tau_{-1}} + \frac{\cos \varphi}{\tau_{-1}} \cos \varphi_1 \end{array} \right).$$

Lo que nos da la pendiente imagen

$$a_2 = \mathcal{K}_1 + \frac{2\mathcal{K} \cos \varphi_1 + \frac{\cos \varphi \cos \varphi_1}{\tau_{-1}}}{2\tau\mathcal{K} + \cos \varphi + \tau \frac{\cos \varphi}{\tau_{-1}}}.$$

Finalmente observe que

$$\mathcal{K}_1 < a_1 < a_2 < \mathcal{K}_2 \iff 0 < \frac{2\mathcal{K} \cos \varphi_1}{2\tau\mathcal{K} + \cos \varphi} < \frac{2\mathcal{K} \cos \varphi_1 + \frac{\cos \varphi \cos \varphi_1}{\tau_{-1}}}{2\tau\mathcal{K} + \cos \varphi + \tau \frac{\cos \varphi}{\tau_{-1}}} < \frac{\cos \varphi_1}{\tau},$$

lo cual es evidente del hecho de que  $\cos \varphi, \cos \varphi_1 > 0$  ya que  $x$  y  $\mathcal{F}(x)$  están en  $\text{int}\mathcal{M}$  (todos los términos involucrados en las desigualdades son positivos).  $\square$

La conclusión evidente es que los billares dispersores, i.e. *los billares con curvatura positiva son hiperbólicos*. Posteriormente probaremos que los billares de tipo A y B son uniformemente hiperbólicos.

**Definición.** Una curva  $W$  se dice *inestable* si todos sus vectores tangentes están en el cono inestable respectivo. Una curva se dice *estable* si todos sus vectores tangentes están en el cono estable respectivo.

Llamaremos  $\mathcal{K}_{\min}$  y  $\mathcal{K}_{\max}$  al mínimo y máximo de la curvatura en  $\partial\mathcal{D}$ . Observe que

$$\mathcal{R} = \frac{2\mathcal{K}}{\cos \varphi} \geq \mathcal{R}_{\min} := 2\mathcal{K}_{\min} > 0.$$

Sea  $v \in T_X^\perp \Omega$  tal que su pendiente  $\mathcal{B} > 0$ . Observar  $D\Phi_X^t(v)$  está dado por la composición de matrices mostrada en la ecuación (1.12). En este caso todas las matrices tienen sus coordenadas positivas, además el signo no afecta cuando lo que nos interesa es la pendiente del vector imagen. Se sigue que la pendiente de  $D\Phi_X^t(v)$  sigue siendo positiva, i.e. *Los frentes de onda divergentes siguen siendo divergentes para todo tiempo en que el flujo esté definido*.

Supongamos que  $\mathcal{B}_0 > 0$ , observemos que la función  $t \mapsto \mathcal{B}_t$  es una función discontinua definida a trozos. Sean  $\tau_i$  el tiempo en ir de la  $i$  a la  $i+1$ -ésima colisión y  $\sum_{i=0}^k \tau_i = p_k$ . Observar que en los intervalos  $[p_k, p_{k+1})$  la función es de la forma  $t \mapsto \frac{\mathcal{B}}{1+t\mathcal{B}}$  y en los puntos  $p_i$  el gráfico tiene una discontinuidad, recordar la ecuación  $\mathcal{B}_i^+ = \mathcal{B}_i^- + \mathcal{K} > \mathcal{B}_i^-$ .

Otra propiedad que podemos sacar sin mucho esfuerzo es que si  $v = (d\xi, dw) \in T_X^\perp \Omega$  tiene pendiente positiva, si  $D\Phi_X^t(v) = (d\xi_t, dw_t)$  entonces las funciones  $|d\xi_t|$  y  $|dw_t|$  son crecientes en  $t > 0$ . Evidentemente  $\mathcal{B}_t = \frac{w_t}{d\xi_t} > 0$  y además se observa que

$$\int_{p_j}^{p_{j+1}} \mathcal{B}_t dt = \int_{p_j}^{p_{j+1}} \frac{1}{t + 1/\mathcal{B}_j} dt = \log \left( \frac{|d\xi_{j+1}|}{|d\xi_j|} \right),$$

de donde  $\int_0^t B_t dt = \log(|d\xi_t|/|d\xi|)$ . En los puntos de continuidad de  $\mathcal{B}_t$ , o sea para cualquier tiempo  $t \neq p_i$  se tiene que

$$\frac{d}{dt} \log(|d\xi_t|) = \mathcal{B}_t > 0. \quad (2.1)$$

En los puntos donde hay discontinuidad sabemos que  $|d\xi^+| = |d\xi^-|$ . Se concluye que  $t \mapsto |d\xi_t|$  es estrictamente creciente. Recordando que  $dw_t = dw$  cuando no hay colisiones y que  $dw^+ = -\mathcal{R}d\xi^- - dw^-$  se tiene que  $|dw_t|$  es no decreciente.

Supongamos que estamos en un billar de tipo A, C o E, en otras palabras donde la función  $\tau$  es acotada superiormente. Se define

$$\mathcal{B}_{\min} = \frac{1}{\tau_{\max} + \frac{1}{2\mathcal{K}_{\min}}}.$$

Consideremos un punto  $z \in \mathcal{M}$  y un vector inestable  $v \in T_z\mathcal{M}$  con pendiente  $\mathcal{V}$ . Por definición de  $\mathcal{C}_x^u$  se tiene que  $\cos \varphi_0 \mathcal{B}_0^+ - \mathcal{K} = \mathcal{V} \geq \mathcal{K}$ , luego  $\mathcal{B}_0^+ \geq 2\mathcal{K}$ . Observar que  $\mathcal{B}_i \geq \mathcal{B}_0 + i\mathcal{K}_{\min} \geq 2\mathcal{K}_{\min}$ , para todo  $i \in \mathbb{N}_0$ . Consideremos un tiempo  $t \in [p_i, p_{i+1})$ , entonces

$$\mathcal{B}_t = \frac{1}{(t - p_i) + \frac{1}{\mathcal{B}_i}} \geq \frac{1}{\tau_{\max} + \frac{1}{2\mathcal{K}_{\min}}} = \mathcal{B}_{\min},$$

ahora usando que la función  $\frac{d}{dt} \log(|d\xi_t|) > \mathcal{B}_t \geq \mathcal{B}_{\min}$  para  $t > 0$  se sigue que

$$\frac{|d\xi_t|}{|d\xi|} \geq e^{t\mathcal{B}_{\min}}.$$

Concluimos que *los vectores inestables aumentan su largo exponencialmente con la métrica  $|d\xi|$ .*

**Teorema 2.4.** *En billares de tipo A y B, la dinámica asociada a  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  es uniformemente hiperbólica.*

*Demostración.* Por la Proposición 2.1 sabemos que  $\tau$  es una función acotada inferiormente. Usado la Proposición (1.13) y que para vectores inestables tenemos la desigualdad  $\mathcal{B}^+ \geq 2\mathcal{K}_{\min} = \mathcal{R}_{\min}$

$$\frac{\|D_x \mathcal{F}^{n+1}(dx)\|_p}{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|_p} = 1 + \tau_n \mathcal{B}_n^+ \geq 1 + \tau_{\min} \mathcal{R}_{\min} =: \Lambda,$$

donde evidentemente  $\Lambda > 1$ . Se sigue que

$$\frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|_p}{\|dx\|_p} \geq \Lambda^n.$$

A pesar de que esta desigualdad se asemeja mucho a lo que queremos, debemos asegurarnos de poder cambiar la p-métrica por la métrica euclidiana. Observar que

$$\|dx\| = \sqrt{(dr)^2 + (d\varphi)^2} = |dr| \sqrt{1 + \mathcal{V}^2} = \frac{\|dx\|_p}{\cos \varphi} \sqrt{1 + (\mathcal{B}^+ \cos \varphi - \mathcal{K})^2}, \quad (2.2)$$

y por tanto tenemos la igualdad

$$\frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|}{\|dx\|} = \frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|_p \cos \varphi_0 \sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}}{\|dx\|_p \cos \varphi_n \sqrt{1 + \mathcal{V}_0^2}}. \quad (2.3)$$

Como  $dx$  es un vector inestable, todas sus imagenes son inestables, en otras palabras  $\mathcal{V}_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}^n(x)}^u$ . En los billares de tipo A y B se tiene que las pendientes inestables satisfacen

$$0 < \mathcal{V}_{\min} := \mathcal{K}_{\min} < \mathcal{V} < \mathcal{V}_{\max} := \mathcal{K}_{\max} + 1/\tau_{\min} < \infty.$$

Concluimos que  $\frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_0^2}} > C$  para una cierta constante  $C = C(\mathcal{D}) > 0$ . Observe que

$$\mathcal{B}_n^+ \geq \mathcal{R}_{\min} / \cos \varphi_n,$$

y por tanto

$$\frac{\|D_x \mathcal{F}(dx)\|_p}{\|dx\|_p} = 1 + \mathcal{B}_0^+ \tau_0 \geq \tau_{\min} \frac{\mathcal{R}_{\min}}{\cos \varphi_0} = \frac{c}{\cos \varphi_0}.$$

Usando las desigualdades recientemente descritas concluimos que

$$\frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|}{\|dx\|} \geq C \frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|_p}{\|D_x \mathcal{F}(dx)\|_p} \frac{\|D_x \mathcal{F}(dx)\|_p}{\|dx\|_p} \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_n} \geq C' \Lambda^n,$$

donde  $C' = \frac{c \cdot C}{\Lambda} > 0$ .

□

## 2.1. Estructura de las Singularidades

Ya hemos definido los conjuntos de singularidad para la aplicación de primer retorno  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , los conjuntos  $\mathcal{S}_n$  y  $\mathcal{S}_{-n}$  para  $n \geq 0$ . Nos gustaría poder decir algo de como están constituidos estos conjuntos de singularidades en relación a  $\mathcal{M}$  y los conos estables e inestables.

**Teorema 2.5.** *Consideremos  $n < 0$ , el conjunto  $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{S}_0$  está constituido de curvas inestables de clase  $\mathcal{C}^1$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $n = -1$ . Una curva  $S \subset \mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$  está dada por puntos en  $\mathcal{M}$  que vienen de una esquina o bien de una colisión tangencial, en ambos casos es evidente que al colisionar estos puntos (que vienen de  $\mathcal{S}_0$ ) con  $\partial\mathcal{D}$  se forma un frente de onda dispersor. En cualquiera de los dos casos, la preimagen de este frente de onda dispersor se enfoca en la colisión previa. Esto es evidente en el caso de una esquina, pero no lo es tanto cuando tenemos que el frente viene de una colisión tangencial. Consideremos dos puntos  $q$  y  $q' = q + dq$  en la pared donde se tiene la colisión tangencial. Los vectores dirección de  $q$  y  $q'$  son claramente los tangentes a  $\partial\mathcal{D}$ ,  $v$  y  $v' = v + dv$  respectivamente. Ya vimos anteriormente que  $d\gamma = \mathcal{K}dr$  siendo  $r$  el arcoparametro de la componente y  $\gamma$  la función que a cada punto de esa componente le asigna la pendiente de su tangente, se sigue entonces que  $\|dv\| \sim \mathcal{K}\|dq\|$  (ver página 9). Ahora notar que la proyección ortogonal desde  $q$  a la recta  $q' + tv'$ ,  $t \in \mathbb{R}$  es del orden de  $\frac{1}{2}\mathcal{K}\|dq\|^2 + o(\|dq\|^2)$  (ver en figura 3.1) y se puede calcular  $t'(0) = \frac{1}{2}$ , además de que  $\sin(\gamma(0) - \gamma(t)) \sim \gamma(0) - \gamma(t) \sim \gamma'(0) \sim \mathcal{K}\|dq\|$ . Si  $\|dq\|_{\perp}$  es la distancia entre las rectas  $q + tv$  y  $q' + tv'$ , entonces  $\|dq\|_{\perp} = O(\|dq\|^2)$ . Finalmente

$$\mathcal{B} = \lim_{\|dq\| \rightarrow 0} \frac{\|dv\|}{\|dq\|_{\perp}} = \infty.$$

Se sigue ahora que  $\mathcal{B}_-(x) = \frac{1}{\tau_{-1}(x)}$  para  $x \in \mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$ . Por la ecuación (1.19)

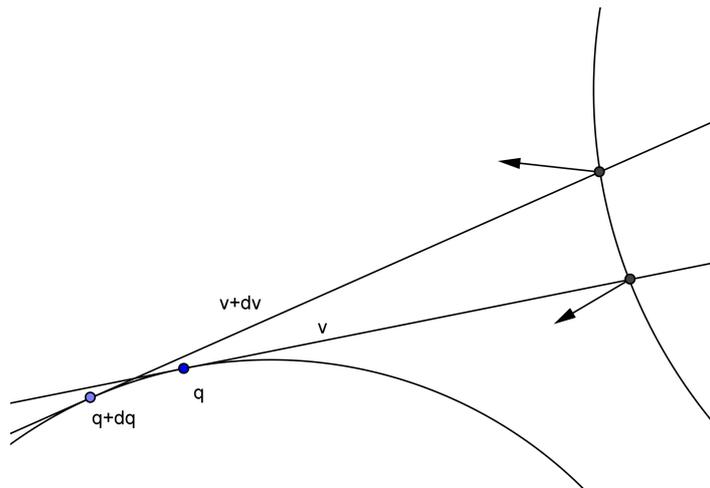


Figura 2.1: En el caso en que la curva singular provenga de un frente de tangentes.

$$\mathcal{V} = \mathcal{K} + \frac{\cos(\varphi)}{\tau_{-1}}, \quad (2.4)$$

de donde  $S$  es una curva inestable. Para los  $n < -1$  se sigue del hecho de que las curvas inestables son preservadas por la función de  $\mathcal{F}^{-1}$ . Observemos que de (2.4) tenemos  $\mathcal{V} > 0$  y por tanto la curva inestable puede escribirse como el gráfico de una función en la variable  $r$ , en otras palabras  $\varphi = \varphi(r)$  que es solución de

$$\frac{d}{dr}\varphi(r) = \mathcal{K}(r) + \frac{\cos \varphi(r)}{\tau_{-1}(r, \varphi(r))}. \quad (2.5)$$

La regularidad de la curva singular está dada por la regularidad que tenga la solución  $\varphi$  a esa ecuación. Las funciones involucradas en el lado derecho de (2.5) son continuas, la función es de clase  $\mathcal{C}^1$ .

□

**Comentario.** Análogamente tenemos que  $\mathcal{S}_n \setminus \mathcal{S}_0$  está constituido por curvas suaves estables para  $n > 0$ , cuando invertimos el sentido del tiempo los roles que cumplen las direcciones estables e inestables se intercambian.

Cuando estamos en un billar de horizonte finito, i.e.  $\tau < \infty$ , los conjuntos  $\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_0$  (resp.  $\mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$ ) están constituidos por una cantidad finita de curvas estables (resp. inestables) compactas suaves. El hecho de que las curvas sean estables (resp. inestables) es por el Teorema 2.5. La finitud de las componentes suaves viene de una interpretación geométrica global. Supongamos que estamos interesados en entender como está constituido el conjunto  $\mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$ . Hay dos posibilidades para las curvas que componen  $\mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$ , ya sea como las colisiones de un haz de direcciones a partir de una esquina o bien como resultado de tomar cada componente  $\Gamma_i$  y considerar donde van a chocar las direcciones tangentes a la componente. Observar que las curvas que van apareciendo pierden suavidad o incluso continuidad cuando nuestro haz de direcciones pasa de chocar en una componente a otra. En ambos casos estamos generando una cantidad finita de curvas (ya que  $\tau < \infty$ ). Como la cantidad de esquinas y de componentes son finitas se sigue que la cantidad total de curvas suaves son finitas. El razonamiento es análogo para  $\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_0$ . Cuando el tiempo de primer retorno es no acotado superiormente se puede razonar similarmente, en este caso permitimos que la cantidad de curvas suaves compactas que aparecen son numerables.

## 2.2. Variedades inestables y estables

La existencia de variedades estables e inestables es esencial en toda la teoría de sistemas dinámico diferenciable. En este caso también lo es aunque el hecho de tener singularidades nos dará muchos impedimentos técnicos, en particular la partición por variedades inestables no es una foliación propiamente tal, solo es una partición medible. La existencia de variedades estables e inestables (locales) es un hecho conocido para sistemas donde hay hiperbolicidad, a pesar de que es de las herramientas más usadas en dinámicas diferenciables, pocas veces se tienen maneras de hallarlas concretamente. En nuestro caso encontraremos las variedades estables e inestables por medio de nuestro conjunto de singularidades.

**Definición.** Sea  $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_n$  para  $n \in \mathbb{Z}$ . Sea por  $\mathcal{Q}_n(x)$  la componente conexa de  $x$  en  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_n$ .

Observemos que como  $\mathcal{S}_{-n} \setminus \mathcal{S}_0$  solo contiene curvas inestables suaves a trozo, necesariamente  $\partial \mathcal{Q}_{-n}(x)$  está compuesto por dos curvas  $\partial^L \mathcal{Q}_{-n}(x)$  y  $\partial^R \mathcal{Q}_{-n}(x)$  ambas monótonas crecientes. Basta considerar un punto cualquiera de  $\partial \mathcal{Q}_{-n}(x)$  y tratar de avanzar con pendiente positiva a lo largo de esa curva, debemos llegar a un punto de mayor altura. Cuando seguimos avanzando en la frontera empezaremos a bajar y hemos encontrado la segunda componente.

Obviamente  $\mathcal{Q}_{-(n+1)}(x) \subset \mathcal{Q}_{-n}(x)$  para  $n \geq 1$  y si definimos  $W_0^u(x) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{Q}_{-n}(x)}$  obtenemos un conjunto no vacío. Por la forma de los conjuntos  $\mathcal{Q}_{-n}(x)$  es fácil convencerse que  $W_0^u(x)$  es una curva continua. Denotamos por  $W^u(x)$  a la curva  $W_0^u(x)$  luego de sacar sus extremos.

**Proposición 2.6.** *Se tiene la inclusión  $W^u(x) \subset \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{Q}_{-n}(x)$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe un  $z \in W^u(x) \cap \partial \mathcal{Q}_{-n}(x)$  para cierto  $n \geq 1$ . Observemos que una vecindad de  $z$  en  $W^u(x)$  está siendo aproximado por rectas  $\mathcal{S}_{-m}$  para  $m$  arbitrariamente grande. Usando el Teorema 2.6 en una vecindad de  $z$  es clara la contradicción ya que la pendiente de las curvas singulares son las fronteras de los conos inestables (ver demostración del Teorema 2.5). □

Se puede probar que las curvas  $W^u(x)$  son más que solo continuas, son de clase  $\mathcal{C}^{l-2}$  (ver capítulo 2 de [8]). A nosotros nos interesa que al menos sean  $\mathcal{C}^1$  para calcular su largo. Como  $\mathcal{F}^{-n}$  es suave en  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}$  y  $W^u(x) \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}$ , las curvas  $\mathcal{F}^{-n}(W^u(x))$  son suaves. De la hiperbolicidad uniforme de  $\mathcal{F}$  tenemos

$$|\mathcal{F}^{-n}(W^u(x))| \leq C'^{-1} \Lambda^{-n} |W^u(x)|, n \geq 1, \quad (2.6)$$

donde  $C'$  y  $\Lambda$  son constantes que definimos en la demostración del Teorema 2.4. Se tiene una desigualdad análoga en el caso de las componentes conexas de  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{\infty}$ . Usaremos la notación  $W^s(x)$  para estas componentes.

$$|\mathcal{F}^n(W^s(x))| \leq C'^{-1} \Lambda^{-n} |W^s(x)|, n \geq 1 \quad (2.7)$$

Las variedades  $W^u(x)$  y  $W^s(x)$  se dicen las variedades inestables y estables de  $x$  respectivamente. Como  $\mathcal{S}_{\pm\infty}$  tiene medida de Lebesgue cero por ser unión numerable de curvas compactas (y por tanto medida cero respecto a  $\mu$ ), las variedades deben ser no degenerada para  $\mu$ -casi todo punto de  $\mathcal{M}$ .

**Comentario.** En general a una variedad inestable le pedimos que sea una variedad suave  $W \subset \mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{F}^{-n}(W)$  es suave para todo  $n \geq 0$  y que se tenga el límite

$$|\mathcal{F}^{-n}(W)| \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

En el caso del billar, de existir las variedades inestables, por el tema de la diferenciabilidad de  $\mathcal{F}^{-n}(W)$  sabemos que debe estar en una componente conexa de  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}$ . Lo que estamos diciendo con todo esto es que las componentes conexas que no son puntos, son precisamente las variedades inestables. Sucede lo mismo para el caso de las variedades estables (referencias generales de la estructura de variedades estables e inestables son [11], [12])

Por último enunciamos un teorema que relaciona las pendientes inestables con las pendientes de los conjuntos de singularidades a tiempos positivos. Es un resultado de continuidad.

**Teorema 2.7.** ([8]) *Sea  $\mathcal{D}$  un billar de tipo A, B, C o D. Existe una sucesión de números  $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$  convergiendo a cero tal que para cualquier curva  $S \subset \mathcal{S}_{-n} \setminus \mathcal{S}_{-(n+1)}$  y  $y \in S$ , existe una vecindad  $\mathcal{U}_y \subset \mathcal{M}$  tal que la pendientes  $\mathcal{V}_y(S)$  de  $y$  en  $S$  satisface que  $\sup_{x \in \mathcal{U}_y} |\mathcal{V}_x^u - \mathcal{V}_y(S)| < \beta_n$  donde  $\mathcal{V}_x^u$  es la pendiente de la dirección inestable (y el supremo se toma sobre los puntos donde hay dirección inestable).*

### 2.3. Dinámica en las curvas singulares

Asumiremos que nos encontramos en un billar de tipo A o B (donde no hay esquinas). En este tipo de billares el conjunto de singularidades  $\mathcal{S}_1$  aparece tomando una componente  $\Gamma_i$  junto con su familia continua de vectores tangentes a esta componente. Consideramos las imágenes de esta curva en  $\mathcal{M}$  al aplicar  $\mathcal{F}$  y luego invertimos el signo del ángulo de la colisión. La curva que obtenemos (posiblemente disconexa) es localmente suave mientras no cambie de componente y evidentemente aplicando  $\mathcal{F}$  terminamos en  $\mathcal{S}_0$ .

Consideremos una curva suave  $S \subset \mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_0$ , i.e.  $\mathcal{F}(S) \subset \mathcal{S}_0$ . De lo comentado anteriormente podemos asumir que las imágenes de  $S$  por  $\mathcal{F}$  son tangentes a una de las componentes, digamos  $\Gamma_j$  y que  $S \subset \mathcal{M}_i$  (o sea que los puntos base de  $S$  están en  $\Gamma_i$ ). Por el comentario al Teorema 2.5 sabemos que las pendientes de  $S$  son negativas, podemos parametrizar  $S$  mediante  $r \mapsto (r, \varphi(r))$  para cierta función  $\varphi$ . Consideremos un punto  $x \in S$  y una vecindad  $V \subset \mathcal{M}$  de  $x$  suficientemente pequeña de modo que  $S$  determine dos regiones  $V^+$  y  $V^-$  de  $V$ . Podemos asumir que  $V^+$  ( $V_-$ ) es la región superior (inferior) de  $V$ . Tomemos un punto  $z \in V^+$ , por la definición de  $V^+$  si  $z = (r, \varphi)$  entonces  $\varphi(r) < \varphi$  (como nos interesan vecindades pequeñas de  $x$  asumimos que la variación  $\varphi - \varphi(r)$  es pequeña), recordando que la parametrización de  $\Gamma_i$  está hecha para que los vectores normales (apuntando al interior de  $\mathcal{D}$ ) aparezcan a mano derecha de los tangentes a  $\Gamma_i$ , es fácil ver que la imagen de  $z$  queda en una vecindad de  $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{S}_0$  (estamos aumentando el ángulo a la derecha, quedamos en la misma componente  $\mathcal{M}_j$  de  $\mathcal{F}(x)$  y cerca con la métrica respectiva). Por el contrario cuando disminuimos el ángulo de los vectores que inciden tangencialmente vamos a pasar de largo de la componente  $\Gamma_j$ , la incidencia se produce en otra componente  $\Gamma_k$  con  $k \neq j$  (si fuese necesario acortamos  $S$  para que esto pase en una sola componente  $\Gamma_k$ ). Ver que  $\mathcal{F}^2(S) \subset \mathcal{F}(\mathcal{S}_0)$  va a parar a la componente  $\Gamma_k$ , de hecho un punto  $p \in \mathcal{F}(V^+)$  va a ir a parar cerca de  $\mathcal{F}^2(x)$ . Se concluye que hay una vecindad  $W$  de  $\mathcal{F}^2(x) \in \mathcal{F}^2(S)$  tal que es dividida en dos partes por la curva  $\mathcal{F}^2(S) \subset \mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$ , la superior  $W^+$  y la inferior  $W^-$  (recordar que  $\mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$  está compuesto por curvas inestables, curvas de pendiente positiva). Podemos asumir que

$W^+ \subset \mathcal{F}^2(V^+)$  y que  $W^- \subset \mathcal{F}(V^-)$ .

Tomemos un punto  $z = (r, \varphi) \in S \cap V$  que tenga variedad inestable  $Y := V^u(z)$  y llamemos  $Y^+ = Y \cap V^+$ ,  $Y^- = Y \cap V^-$ . Sea  $\gamma_- : (r - \epsilon, r) \rightarrow V^-$  la parametrización de una parte de  $Y^-$  que es de la forma  $s \mapsto (s, \varphi(s))$  donde es importante que

$$\lim_{t \rightarrow r^-} \gamma_-(t) = z, \quad (2.8)$$

y que  $\gamma_- \cap \mathcal{S}_1 = \emptyset$ . Nos interesa ver que sucede con la pendiente del vector

$$\lim_{t \rightarrow r^-} (\mathcal{F} \circ \gamma_-)'(t). \quad (2.9)$$

Observe que

$$D_{\gamma_-(t)} \mathcal{F}(\gamma_-'(t)) = \frac{-1}{\cos \varphi_1} \begin{pmatrix} \tau \mathcal{K} + \cos \varphi & \tau \\ \tau \mathcal{K} \mathcal{K}_1 + \mathcal{K} \cos \varphi_1 + \mathcal{K}_1 \cos \varphi & \tau \mathcal{K}_1 + \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(r) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

y por tanto la pendiente está dada por la expresión

$$\frac{(\tau \mathcal{K} \mathcal{K}_1 + \mathcal{K} \cos \varphi_1 + \mathcal{K}_1 \cos \varphi) + (\tau \mathcal{K}_1 + \cos \varphi_1) \varphi'}{(\tau \mathcal{K} + \cos \varphi) + (\tau) \varphi'}. \quad (2.11)$$

De lo mencionado en el párrafo anterior sabemos que

$$\lim_{t \rightarrow r^+} (\mathcal{F} \circ \gamma_-)(t) = \mathcal{F}^2(z). \quad (2.12)$$

Por la ecuación (2.5) tenemos que la pendiente de  $\mathcal{F}^2(S)$  en  $\mathcal{F}^2(z) = (r^*, \varphi^*)$  es

$$P_0 := \mathcal{K}^* + \frac{\cos \varphi^*}{\tau_{-1}^*}, \quad (2.13)$$

donde  $\mathcal{K}^*, \cos \varphi^*, \tau_{-1}^*$  son las funciones que hemos usado siempre y que en este caso están asociadas a  $\mathcal{F}^2(z)$ . De (2.8) y (2.12) se que tomando límite  $t \rightarrow r^-$  tengo que  $\mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}^*$ ,  $\cos \varphi_1 \rightarrow \cos \varphi^*$ ,  $\tau \rightarrow \tau_{-1}^*$  y por tanto el límite de la ecuación (2.9) vale

$$P_1 := \frac{(\tau_{-1}^* \mathcal{K} \mathcal{K}^* + \mathcal{K} \cos \varphi^* + \mathcal{K}^* \cos \varphi) + (\tau_{-1}^* \mathcal{K}^* + \cos \varphi^*) \varphi'}{(\tau_{-1}^* \mathcal{K} + \cos \varphi) + (\tau_{-1}^*) \varphi'},$$

donde  $\varphi'$  es la pendiente de la dirección inestable en el punto  $z$ . Observemos que

$$P_1 = \frac{\mathcal{K} P_0 + \frac{\mathcal{K}^* \cos \varphi}{\tau_{-1}^*} + P_0 \varphi'}{\mathcal{K} + \frac{\cos \varphi}{\tau_{-1}^*} + \varphi'} = P_0 - \frac{\cos \varphi \cos \varphi^*}{\tau_{-1}^* (\tau_{-1}^* \mathcal{K} + \cos \varphi + \tau_{-1}^* \varphi')}. \quad (2.14)$$

Tomando una vecindad aún más pequeña de  $\mathcal{F}^2(z)$  de ser necesario (permaneciendo lejos de  $\mathcal{S}_0$ ) tenemos control uniforme del segundo termino de (2.14). Se concluye que las variedades inestables en la vecindad de  $\mathcal{F}^2(z)$  que hemos descrito se prolongan cortando a  $\mathcal{F}^2(S)$  de manera transversal.

Hagamos un análisis similar en  $Y^+$ . Sea  $\gamma_+ : (r, r + \epsilon) \rightarrow V^+$  la parametrización de una parte de  $Y^+$  que es de la forma  $s \mapsto (s, \varphi(s))$  donde es importante que

$$\lim_{t \rightarrow r^+} \gamma_+(t) = z, \quad (2.15)$$

y que  $\gamma_+ \cap \mathcal{S}_1 = \emptyset$ . En este caso nos interesa ver que sucede con la pendiente del vector

$$\lim_{t \rightarrow r^+} (\mathcal{F}^2 \circ \gamma_+)'(t).$$

Evidentemente la curva  $\mathcal{F} \circ \gamma_+$  es una curva inestable donde  $\lim_{t \rightarrow r^+} \mathcal{F} \circ \gamma_+(t) = \mathcal{F}(z) \in \mathcal{S}_0$ . Para nuestros cálculos es conveniente definir  $\delta := \mathcal{F} \circ \gamma_+$ . La ecuación (2.15) se convierte en

$$\lim_{t \rightarrow r^+} \delta(t) = \mathcal{F}(z) \quad (2.16)$$

y nos interesa el valor de la pendiente de

$$\lim_{t \rightarrow r^+} (\mathcal{F} \circ \delta)'(t) \quad (2.17)$$

Podemos asumir (reparametrizando si fuera necesario) que  $\delta(r) = (r, \psi(r))$  para una cierta función suave  $\psi$ . Tenemos la misma expresión que en (2.11) para la pendiente de  $(\mathcal{F} \circ \delta)'(t)$  salvo que los puntos donde se evalúan las funciones involucradas son los del gráfico de  $\delta$  y su imagen. En este caso  $\varphi_1 \rightarrow \pi/2$  cuando  $t \rightarrow r^+$ , finalmente la pendiente límite es la dada por la expresión

$$\frac{(\tau\mathcal{K}\mathcal{K}_1 + \mathcal{K} \cos \varphi_1) + (\tau\mathcal{K}_1 + \cos \varphi_1)\varphi'}{\tau\mathcal{K} + \tau\varphi'} = \frac{\tau\mathcal{K} + \cos \varphi_1}{\tau} = \mathcal{K} + \frac{\cos \varphi_1}{\tau}, \quad (2.18)$$

que es precisamente la pendiente de la recta tangente a  $\mathcal{F}^2(S)$  en  $\mathcal{F}^2(z)$ . De esto concluimos que las variedades inestables que la vecindad de  $\mathcal{F}^2(z)$  que consideramos terminan de manera tangente a  $\mathcal{F}^2(S)$ .

Con estos resultados tenemos una descripción de como son las variedades inestables en vecindades de los puntos de  $\mathcal{S}_{-1} \setminus \mathcal{S}_0$ . Invirtiendo el tiempo pasa algo análogo con las variedades estables en vecindades de los puntos de curvas en  $\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_0$ . Esta descripción geométrica es suficiente para lo que necesitaremos más adelante en la demostración de la segunda versión de ergodicidad local (Capítulo 5).

## Capítulo 3

# Nuevo espacio de colisiones

Este capítulo del manuscrito está orientado a presentar definiciones necesarias para hacer sentido a lo que llamaremos *Teorema fundamental de Billares dispersores*. Este teorema nos permitirá tener un control local del largo de las variedades estables e inestables, que técnicamente es una de las grandes dificultades al tener un sistema con singularidades. Dentro de otras cosas presentaremos una partición del espacio  $\mathcal{M}$  que se presta para tener control de distorsión sobre ciertas cantidades.

Por el momento vamos a asumir un teorema que es fundamental para todo lo que sigue, en un próximo capítulo se presentarán ciertas condiciones sobre el sistema dinámico que nos permitiría asegurar un resultado como este.

**Definición.** Dada una variedad curva inestable  $W \subset \mathcal{M}$  y un punto  $x \in W$  se define

$$\mathcal{J}_W \mathcal{F}^n(x) = \frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|}{\|dx\|},$$

donde  $dx$  es el vector tangente a  $W$  en  $x$ . Llamaremos a este valor el *Jacobiano inestable*.

Observemos que en  $\mu$ -casi todo punto de  $\mathcal{M}$  hay una dirección inestable junto con una variedad inestable local. Por  $E^u(x)$  denotamos el subespacio inestable de  $x$ . El nombre *Jacobiano inestable* tiene sentido ya que  $\mathcal{J}_W \mathcal{F}(x)$  es precisamente el ‘jacobiano’ de la transformación  $D_x \mathcal{F} : E^u(x) \rightarrow E^u(\mathcal{F}(x))$ .

**Teorema 3.1.** ([8]) *Sea  $x \in \mathcal{M}$  un punto que tiene variedad inestable local  $W^u(x)$ . La medida  $\mu$  condicional a lo largo de la variedad inestable  $W^u(x)$  es absolutamente continua con respecto a Lebesgue de  $W^u(x)$ . Sea  $\rho_W$  su densidad, esta función es de clase  $\mathcal{C}^{l-2}$  y satisface*

$$\frac{\rho_W(y)}{\rho_W(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(y)}{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(z)}, \quad (3.1)$$

para cada par de puntos  $y, z \in W$ .

La medida de probabilidad en  $W$  con densidad  $\rho$  dada por el límite del teorema anterior se llama la medida u-SRB (o u-Gibbs según veremos en el próximo capítulo).

Nuestro sistema dinámico tiene singularidades, recordemos que  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  es una dinámica que no tiene continuidad en  $\mathcal{S}_1$  y es difeomorfismo en el complemento a ese conjunto. La noción de medida SRB (clásica) se aplica para sistemas suaves, evidentemente los

resultados sobre este tipo de medidas no se transportan inmediatamente a nuestro sistema singular. A pesar de esto es conveniente que discutamos brevemente que entendemos por medidas SRB y como su extensión al caso singular nos ayudará en el capítulo que sigue (una referencia general es [28]).

Hagamos un poco de historia acerca de las medidas SRB. Es importante tener una noción de cuales son las ideas que han dado frutos significativos en sistemas dinámicos suaves (o con singularidades). Un problema central en sistemas dinámicos es la elección de medidas significativas para un sistema, medidas que entreguen mucha información de nuestra dinámica. Posterior a eso se estudian propiedades, se caracterizan, etc. Siendo más precisos, la elección de medidas invariantes relevantes para la dinámica es todo un tema. Voy a presentar una serie de resultados que definen lo que llamaremos medidas SRB (en honor a Sinai, Ruelle y Bowen).

Historicamente los sistemas clásicos donde hay (por definición) hiperbolicidad son sistemas Anosov y Axioma A. Definiremos lo que es un sistema Anosov (caso particular de los atractores Axioma A) para presentar las propiedades que queremos para nuestras medidas SRB.

**Definición.** Un difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  es Anosov (donde  $M$  es una variedad riemanniana compacta) si para cada punto  $x \in M$  hay una descomposición del espacio tangente

$$T_x M = E^u(x) \oplus E^s(x),$$

que es  $Df$ -invariante. Además pedimos que  $E^u(x)$  ( $E^s(x)$ ) sea uniformemente expansivo (contractivo), en otras palabras que existan constantes  $\lambda, \mu > 0$  tal que

$$\|Df|E^u(x)\| > \lambda > 1 > \mu > \|Df|E^s(x)\|,$$

para todo  $x \in M$ .

**Teorema 3.2.** ([5][21][22][24]) Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo Anosov de clase  $\mathcal{C}^2$ . Existe una única medida  $\mu$  boreliana de probabilidad que es  $f$ -invariante tal que cumple las siguientes (equivalentes) condiciones:

(a) Cuando se restringe  $\mu$  a cada variedad inestable, obtenemos medidas absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue de cada variedad inestable (Lebesgue inducido por la métrica  $g$  de  $M$ ).

(b)

$$h_\mu(f) = \int_M |\det(Df|E^u(x))| d\mu(x),$$

donde  $h_\mu(f)$  es la entropía métrica de  $f$ .

(c) Existe un conjunto  $V \subset M$  de medida Lebesgue total tal que para cada función continua  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \int_M \varphi d\mu,$$

para cada  $x \in V$ .

La medida  $\mu$  obtenida por el teorema es la que llamamos medida SRB. Evidentemente ésta no es una definición general, solo estamos presentando las propiedades que nos gustaría extender. Nos quedaremos con la siguiente definición.

**Definición.** Sea  $f : M \rightarrow M$  un difeomorfismo de clase  $\mathcal{C}^2$  en una variedad riemanniana compacta  $M$ . Una medida  $\mu$  que es  $f$ -invariante se dice SRB si el sistema dinámico tiene exponentes de Lyapunov positivos en  $\mu$ -casi todo punto y las medidas condicionadas a  $\mu$  a lo largo de las variedades inestables son medidas absolutamente continuas respecto a Lebesgue en las respectivas variedades.

Un resultado conocido para una amplia gama de sistemas hiperbólicos es que la densidad que aparece en las variedades inestables luego de condicionar la medida  $\mu$  satisface la ecuación (3.1). Por último enunciaremos un par de teoremas que se aplican a las medidas SRB y que vamos a usar en el caso de nuestro sistema  $(\mathcal{F}, \mu)$ , asumiendo que la medida referencia es algo así como una extensión de las medidas SRB clásicas.

**Teorema 3.3.** ([18]) *En presencia de exponentes de Lyapunov positivos, una medida invariante equivalente a Lebesgue de  $M$  es una medida SRB.*

**Teorema 3.4.** ([16][18]) *Sea  $\mu$  una medida SRB sin exponentes de Lyapunov cero. Se tiene que*

- (i)  $\mu$  tiene a los más numerables componentes ergódicas.
- (ii) Sea  $U$  una componente ergódica, entonces existe una partición  $U = \cup_{j=1}^k \Lambda_j$  tal que  $f(\Lambda_j) \subset \Lambda_{j+1}$  donde  $\Lambda_{k+1} := \Lambda_1$ . Además  $f^k : \Lambda_j \rightarrow \Lambda_j$  es mixing para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ .

Hasta ahora solo hemos mencionado propiedades que se heredan de sistemas suaves a nuestro caso particular (singular). Es importante poder controlar la distorsión de ciertas cantidades, nos gustaría tener control por ejemplo de la densidad que aparece en el Teorema 3.1, tener control de como varía el Jacobiano inestable, el Jacobiano de la función de holonomía, etc. En general no hay buen control de manera global. Es conocido que en el caso de un sistema Anosov se satisface la desigualdad

$$\left| \frac{d}{dx} \log \rho_W(x) \right| \leq C,$$

donde  $C$  es una constante para  $(M, f)$ . En particular se tiene que  $e^{-C|W|} \leq \frac{\rho_W(x)}{\rho_W(y)} \leq e^{C|W|}$ .

En el caso del billar esta desigualdad no tiene sentido, la densidad no tiene porque estar acotada. Observemos que si alguno de los puntos extremos de  $\mathcal{F}^{-n}(W)$  vive en  $S_0$  para  $n \geq 0$  entonces por el límite en (3.1) es cero, lo cual claramente imposibilita una cota global como en el caso de los sistemas Anosov. Para tratar este tipo de dificultades con el control de distorsión de ciertas cantidades vamos a refinar nuestro espacio  $\mathcal{M}$  (ver [5], [12] para más información de flujos Anosov).

**Definición.** Sea  $k_0 \geq 1$  un entero. Para cada  $k \geq k_0$  se define

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_k &= \left\{ (r, \varphi) : \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k^2} < \varphi < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right\}, \\ \mathbb{H}_{-k} &= \left\{ (r, \varphi) : -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{(k+1)^2} < \varphi < -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{k^2} \right\}. \end{aligned}$$

La sección central está dada por

$$\mathbb{H}_0 = \left\{ (r, \varphi) : -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{k_0^2} < \varphi < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k_0^2} \right\}.$$

Las líneas que no estamos considerando en esta partición son las dadas por

$$\mathbb{S}_k = \{(r, \varphi) : \varphi = \text{signo}(k) \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k^2} \right)\},$$

para  $|k| \geq k_0$ . Finalmente se define

$$\mathbb{S} = \cup_{|k| \geq k_0} \mathbb{S}_k.$$

**Comentario.** La elección de  $k_0$  será hecha más adelante, por ahora no es importante tener precisión en eso.

**Definición.** Una variedad estable o inestable  $W \subset \mathcal{M}$  se dice *débilmente homogénea* si  $W$  pertenece a algún  $\mathbb{H}_k$ . Una variedad inestable  $W \subset \mathcal{M}$  se dice *homogénea* si  $\mathcal{F}^{-n}(W)$  es débilmente homogénea para cada  $n \geq 0$ . Una variedad estable  $W \subset \mathcal{M}$  se dice *homogénea* si  $\mathcal{F}^n(W)$  es débilmente homogénea para cada  $n \geq 0$ . Una variedad homogénea se dice una H-variedad

Observemos que dada una variedad inestable  $W \subset \mathcal{M}$ , podemos considerar las componentes conexas de  $W \setminus \cup_{n \geq 0} \mathcal{F}^n(\mathbb{S})$ . Es fácil convencerse que estas componentes son H-variedades. Lo mismo sucede con las componentes de  $W \setminus \cup_{n \geq 0} \mathcal{F}^{-n}(\mathbb{S})$  para una variedad estable  $W$ . Una definición más débil que H-variedad es ser H-componente.

**Definición.** Dada una variedad inestable  $W \subset \mathcal{M}$  y  $n \geq 0$  se define una H-componente de  $\mathcal{F}^n(W)$  como una subcurva suave maximal  $W'$  de  $\mathcal{F}^n(W)$  que satisface  $\mathcal{F}^{-i}(W')$  es débilmente homogénea para  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

**Definición.** Cada componente  $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}$  tenemos una cantidad numerable de franjas homogéneas  $\mathbb{H}_{i,k} = \mathcal{M}_i \cap \mathbb{H}_k$ . Se define  $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$  como la unión de los conjuntos  $\mathbb{H}_{i,k}$ . Este conjunto  $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$  será llamado el *nuevo espacio de colisiones*.

Observemos que  $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$  no es compacto y que  $\partial \mathcal{M}_{\mathbb{H}} = \mathbb{S}$ . A diferencia de  $\mathcal{M}$ , ya no consideramos el conjunto  $\mathcal{S}_0$  como parte de espacio. La función de primer retorno actúa naturalmente sobre  $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ , i.e. usando  $\mathcal{F}$  puede definirse  $\mathcal{F}_{\mathbb{H}} : \mathcal{M}_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ .

Es fácil convencerse de que  $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$  pierde suavidad en los puntos de  $\mathcal{S}_1 \cup \mathbb{S} \cup \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{S})$ . Análogamente  $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{-1}$  pierde suavidad en  $\mathcal{S}_1 \cup \mathbb{S} \cup \mathcal{F}(\mathbb{S})$ . Inmediato de esto tenemos que  $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^n$  pierde suavidad en  $\mathcal{S}_n^{\mathbb{H}} = \mathcal{S}_n \cup (\cup_{m=0}^n \mathcal{F}^{-m}(\mathbb{S}))$ , lo mismo sucede con  $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}^{-n}$  en el conjunto  $\mathcal{S}_{-n}^{\mathbb{H}} = \mathcal{S}_{-n} \cup (\cup_{m=0}^n \mathcal{F}^m(\mathbb{S}))$ . Los conjuntos  $\mathcal{S}_{\infty}^{\mathbb{H}} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{S}_n^{\mathbb{H}}$  y  $\mathcal{S}_{-\infty}^{\mathbb{H}} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{S}_{-n}^{\mathbb{H}}$  son los nuevos conjuntos de singularidades, son los conjuntos de singularidades para  $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ .

Tomemos un punto  $z \in \mathbb{S}$  y el vector  $v = (dr, 0) \in T_z \mathcal{M}$ . Usando el Teorema 1.4 vemos que  $D_z \mathcal{F} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr \\ 0 \end{pmatrix}$  si, y solo si,  $\tau \mathcal{K}a + \cos \varphi a + b\tau = 0$ , luego  $\frac{b}{a} = -\mathcal{K} - \frac{\cos \varphi}{\tau}$ . Se sigue que la pendiente del vector  $D_z \mathcal{F}^{-1} \begin{pmatrix} dr \\ 0 \end{pmatrix}$  es justamente  $-\mathcal{K} - \frac{\cos \varphi}{\tau}$ , es un vector en el cono estable de  $\mathcal{F}^{-1}(z)$ . Tenemos que  $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{S}_k)$  es una curva estable, por lo mismo  $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{S})$  es una unión numerable de curvas estables.

Además como las curvas  $\mathbb{S}_k$  se acercan a  $\mathcal{S}_0$  cuando  $|k|$  crece se tiene que las rectas que conforman  $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{S}_k)$  van aproximando a  $\mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_0$ .

Tal cual habiamos definido las variedades inestables en  $\mathcal{M}$  como las componentes conexas de  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}$ , obtenemos las variedades inestables en  $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$  como las componentes conexas de  $\mathbb{H}_{i,k} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}^{\mathbb{H}}$ . Como sabemos que  $\mu$ -casi todo punto de  $\mathcal{M}$  tiene variedades inestables locales bien definidas, es inmediato que lo mismo sucede con las variedades inestables para  $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ . Si  $x \in \mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ , su variedad inestable local en el nuevo conjunto de colisiones se denota por  $W_{\mathbb{H}}^u(x)$ . Lo mismo sucede para las variedades locales estables, en este caso la anotamos como  $W_{\mathbb{H}}^s(x)$ .

### 3.1. Control de distorsión

Comentamos que una de las motivaciones para definir nuestro nuevo espacio de colisiones  $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}$  era el hecho de que hay cantidades que no podemos controlar (razonablemente) en el espacio total. Si nos restringimos a pedazos pequeños si hay control, necesitamos pasar por las componentes débilmente homogéneas de las variedades inestables.

Consideremos una variedad inestable  $W$  tal que  $W_n = \mathcal{F}^{-n}(W)$  es débilmente homogénea para cada  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ . Asumiremos que las curvas  $W_n$  son de clase  $\mathcal{C}^{l-1}$  con derivadas uniformemente acotadas hasta orden  $l-1$ . Denotaremos por  $x_n = \mathcal{F}^n(x)$  y  $W_n = \mathcal{F}^{-n}(W)$ .

**Teorema 3.5.** *Para  $y, z \in W$  y cada  $1 \leq n \leq N$  se tiene que*

$$C_d^{-1} \leq e^{-C|W|^{1/3}} \leq \frac{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(y)}{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(z)} \leq e^{C|W|^{1/3}} \leq C_d, \quad (3.2)$$

donde  $C$  y  $C_d$  son constantes para la mesa de billar.

*Demostración.* Observar que por la regla de la cadena se tiene  $\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(x_k)$ . Por desigualdad triangular se tiene

$$|\log \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(y) - \log \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\log \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(y_k) - \log \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(z_k)|. \quad (3.3)$$

Por el teorema del valor medio

$$|\log \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(y_k) - \log \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(z_k)| \leq |W_k| \max_{x \in W_k} \left| \frac{d}{dx} \log \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(x) \right|. \quad (3.4)$$

Usando la Proposición 1.13 y la ecuación (2.3) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) &= \frac{1}{1 + \tau_{n+1} \mathcal{B}_{n+1}^+} \frac{\cos \varphi_n}{\cos \varphi_{n+1}} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_{n+1}^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}} \\ &= \frac{\cos \varphi_n}{2\mathcal{K}_{n+1} \tau_{n+1} + \cos \varphi_{n+1} (1 + \tau_{n+1} \mathcal{B}_{n+1}^-)} \frac{\sqrt{1 + \mathcal{V}_{n+1}^2}}{\sqrt{1 + \mathcal{V}_n^2}}, \end{aligned}$$

ya que  $\mathcal{B}_{n+1}^+ - \mathcal{B}_{n+1}^- = \frac{2\mathcal{K}_{n+1}}{\cos \varphi_{n+1}} \tau_{n+1}$ . Tomando logaritmo y derivando en  $x_n$  se tiene que

$$\frac{d}{dx_n} \log \mathcal{J}_{W_n} \mathcal{F}^{-1}(x_n) = \frac{C_n(x_n)}{\cos \varphi_n}, \quad (3.5)$$

donde la función  $C_n$  es uniformemente acotada ya que las funciones involucradas en la ecuación que tenemos para  $\mathcal{J}_{W_n}\mathcal{F}^{-1}(x_n)$  para los billares de tipo A son todas uniformemente acotadas excepto  $\cos \varphi_n$ . De las ecuaciones (3.3) y (3.5) tenemos la desigualdad

$$|\log \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(y) - \log \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(z)| \leq P \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|W_k|}{\cos \varphi_k}, \quad (3.6)$$

siendo  $P = P(\mathcal{D})$  una constante.

Observemos que una curva inestable homogénea  $Z \subset \mathbb{H}_k$  satisface que todas las pendientes de las rectas tangentes son  $\geq \mathcal{K}$ , se obtiene fácilmente que  $|W|$  es menor que el largo de una recta  $L$  de pendiente  $\mathcal{K}_{\min}$  que atraviesa  $\mathbb{H}_k$ . Sean  $(a, \pi - 1/k^2)$  y  $(b, \pi - 1/(k+1)^2)$  los puntos de corte de  $L$  con  $\partial\mathbb{H}_k$  y  $r := (b - a)$ . Como la pendiente de la recta es  $\mathcal{K}_{\min}$  tendremos que

$$\frac{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}}{b - a} = \mathcal{K}_{\min},$$

y por tanto  $r = \frac{1}{\mathcal{K}_{\min}} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} < C_0 \frac{1}{(k+1)^3}$  con  $C_0$  una constante. El largo de la recta  $L$  que queda atrapada en  $\mathbb{H}_k$  es precisamente  $r\sqrt{1 + \mathcal{K}_{\min}^2} \leq C_1 \frac{1}{(k+1)^3}$  de donde

$$|W| \leq C_1 \frac{1}{(k+1)^3},$$

para  $C_1 = C_1(\mathcal{D})$  una constante. Observar que existe  $c > 0$  tal que  $c \frac{1}{(k+1)^2} \leq \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k^2})$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  (recordar que  $\sin(x)/x \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow 0$  y hacer el cambio  $y = \pi/2 - x$ ). Se sigue inmediatamente de esto que si  $(r, \varphi) \in \mathbb{H}_k$  entonces  $c \frac{1}{(k+1)^2} \leq \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k^2}) \leq \cos \varphi$ . Finalmente existe una constante  $C_2 > 0$  tal que

$$|W| \leq C_1 \frac{1}{(k+1)^3} \leq C_2 (\cos \varphi)^{3/2}. \quad (3.7)$$

Aplicando la desigualdad (3.7) en (3.6) obtenemos

$$|\log \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(y) - \log \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(z)| \leq P \sum_{k=0}^{n-1} |W_k|^{1/3}, \quad (3.8)$$

finalmente usando la hiperbolicidad uniforme de  $\mathcal{F}$  tenemos que  $|W_n| \leq \Lambda^{-n}|W|$  y por tanto existe una constante  $C_3 = C_3(\mathcal{D})$  tal

$$\sum_{k=0}^{n-1} |W_k|^{1/3} \leq |W|^{1/3} \sum_{k \geq 0} \Lambda^{-k/3} = C_3 |W|^{1/3}.$$

Hemos llegado a la desigualdad  $|\log \frac{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(y)}{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(z)}| \leq C_3 |W|^{1/3}$ , lo que buscábamos. De la desigualdad (3.7) es claro que los largos de las curvas homogéneas son uniformemente acotados, podemos pasar a la constante  $C_d$ .

□

Como corolario tenemos que para  $x \in W$  y cada  $1 \leq n \leq N$

$$C_d^{-1} \leq \frac{\mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x)}{|W_n|/|W|} \leq C_d. \quad (3.9)$$

Anteriormente comentamos que en el caso de un sistema Anosov, hay una cota uniforme para  $\frac{d}{dx} \log \rho_W(x)$ , comentamos que esto no sucede globalmente para nuestras variedades inestables. Con nuestro nuevo espacio de colisión podemos recuperar control sobre esta cantidad.

**Teorema 3.6.** *Para cada H-variedad inestable  $W \subset \mathcal{M}$  tenemos*

$$\left| \frac{d}{dx} \log \rho_W(x) \right| \leq \frac{C}{|W|^{2/3}}, \quad (3.10)$$

donde  $C = C(\mathcal{D})$  es una constante.

*Demostración.* Sea  $y \in W$ . Por el Teorema 3.1 y la regla de la cadena

$$\log \rho_W(x) = \log \rho_W(y) + \sum_{k=0}^{\infty} (\log \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(x_k) - \log \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(y_k)). \quad (3.11)$$

Usando las desigualdades (3.4), (3.5) y (3.7) tenemos que

$$|\log \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(x_k) - \log \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(y_k)| \leq P\Lambda^{-k/3},$$

de donde la serie en (3.11) converge uniformemente. Observar que de (3.5) y la regla de la cadena

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \log \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x) \frac{C_n(x_n)}{\cos \varphi_n}. \quad (3.12)$$

La cota uniforme para las funciones  $C_n$  y las ecuaciones (3.7), (3.9) nos dan la existencia de una constante  $C_4 = C_4(\mathcal{D})$  tal que

$$\left| \mathcal{J}_W \mathcal{F}^{-n}(x) \frac{C_n(x_n)}{\cos \varphi_n} \right| \leq C_4 \frac{|W_n|/|W|}{|W_n|^{2/3}} \leq C_4 \frac{\Lambda^{-n/3}}{|W|^{2/3}}. \quad (3.13)$$

Finalmente la serie en (3.12) converge uniformemente (Test M de Weierstrass), concluimos que

$$\frac{d}{dx} \rho_W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \log \mathcal{J}_{W_k} \mathcal{F}^{-1}(x_k),$$

y usando (3.13)

$$\left| \frac{d}{dx} \rho_W(x) \right| \leq C_4 \sum_{n \geq 0} \frac{\Lambda^{-n/3}}{|W|^{2/3}} \leq \frac{C}{|W|^{2/3}}. \quad (3.14)$$

□

**Corolario:** Dados  $x, y \in W$ , existe una constante  $C = C(\mathcal{D})$  tal que

$$C_d^{-1} \leq e^{-C|W|^{1/3}} \leq \frac{\rho_W(x)}{\rho_W(y)} \leq e^{C|W|^{1/3}} \leq C_d, \quad (3.15)$$

para cualquier H-variedad  $W \subset \mathcal{M}$ .



## Capítulo 4

# Teorema fundamental de Billares dispersivos

La matemática que presentaremos a continuación está enfocada primordialmente para presentar la prueba completa del siguiente teorema que (siguiendo a [8]) llamaremos *Teorema fundamental de billares dispersores*, a modo de abreviatura en lo que sigue del manuscrito será nombrado por **TFBD**. Para esta sección asumiremos que nuestro billar es de tipo  $A$  excepto que se mencione lo contrario.

**Definición.** Sea  $Y$  es una curva de clase  $\mathcal{C}^1$  con extremos  $a, b$ . Consideremos  $x \in Y$ , denotamos por  $r_Y(x)$  a la mínima distancia de  $x$  a los extremos de  $Y$ , i.e.  $r_Y(x) = \min\{d_Y(x, a), d_Y(x, b)\}$  donde  $d_Y$  es la *distancia inducida* por la métrica usual de  $\mathbb{R}^2$  al restringirse a la curva  $Y$ . Denotaremos por  $m_Y$  a la medida de Lebesgue sobre la curva  $Y$ , más formalmente a la medida de Hausdorff 1 en  $Y$ .

### Teorema 4.1. (TFBD)

Sea  $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{\infty}^{\mathbb{H}}$  i.e. un punto tal que  $\mathcal{F}^n(x) \notin \mathbb{S}$ , para todo  $n \geq 0$ . Se tiene que para cualquier  $1 > q > 0$  y  $A > 0$  existe una vecindad  $\mathcal{U}_x^u \subset \mathcal{M}$  de  $x$  tal que cualquier variedad inestable  $W \subset \mathcal{U}_x^u$  satisface

$$m_W(z \in W : r_{\mathbb{H}}^s(z) > Am_W(W)) \geq (1 - q)m_W(W)$$

Sea  $x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}^{\mathbb{H}}$  i.e. un punto tal que  $\mathcal{F}^{-n}(x) \notin \mathbb{S}$ , para todo  $n \geq 0$ . Se tiene que para cualquier  $1 > q > 0$  y  $A > 0$  existe una vecindad  $\mathcal{U}_x^s \subset \mathcal{M}$  de  $x$  tal que cualquier variedad estable  $W \subset \mathcal{U}_x^s$  satisface

$$m_W(z \in W : r_{\mathbb{H}}^u(z) > Am_W(W)) \geq (1 - q)m_W(W)$$

Este teorema nos permitirá posteriormente probar la ergodicidad de la función de primer retorno  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  para billares de tipo  $A$ . La interpretación del teorema es bastante directa. En los puntos de  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{\infty}^{\mathbb{H}}$ , i.e. en los puntos donde hay variedades estables, hay una vecindad tal que a partir de una variedad inestable los largos de las variedades estables son en su mayoría tan largos como queramos en relación al largo de la curva inestable de partida. La segunda parte de teorema nos dice lo mismo en el caso de los puntos que tienen variedades locales inestables.

## 4.1. Lemas de crecimiento

Nuestro primer objetivo es probar dos lemas de crecimiento que describen como se comporta el largo de las componentes conexas de las imágenes a iterados positivos de las variedades inestables.

**Definición.** Dado un punto  $x \in \mathcal{M}_{\mathbb{H}}$ . Consideremos una curva inestable  $W$  débilmente homogénea que contiene a  $x$ . Para  $n \geq 0$  se define por  $W_n(x)$  a la H-componente (ver definición en Capítulo 2) de  $\mathcal{F}^n(W)$  que contiene a  $\mathcal{F}^n(x)$ . Sea

$$r_n(x) := r_{W_n(x)}(\mathcal{F}^n(x)).$$

Usando la notación anterior procedemos a enunciar el primer y segundo lema de crecimiento.

**Teorema 4.2.** (*Primer lema de crecimiento*)

Existe una constante  $\hat{\lambda} > 1$ ,  $\theta_1 \in (0, 1)$  y  $c_1, c_2 > 0$  tales que para todo  $n \geq 0$  y  $\epsilon > 0$  se tiene

$$m_W(r_n(x) < \epsilon) \leq c_1(\theta_1 \hat{\lambda})^n m_W(r_0(x) < \epsilon/\hat{\lambda}^n) + c_2 \epsilon m_W(W)$$

**Teorema 4.3.** (*Segundo lema de crecimiento*)

Existe una constante  $\tau > 0$  y  $c_3 > 0$  tal que para  $n \geq \tau |\log(m_W(W))|$  y  $\epsilon > 0$  se tiene

$$m_W(r_n(x) < \epsilon) \leq c_3 \epsilon m_W(W).$$

Consideremos una variedad local inestable  $W \subset \mathcal{M}$ . Como ya vimos anteriormente  $W \subset \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}$ , i.e.  $W$  se mantiene en el conjunto de diferenciabilidad de la función de primer retorno  $\mathcal{F}$  por iteraciones negativas, observar que el largo de  $W$  decrece exponencialmente mediante estas iteraciones (al menos en los billares donde se tiene un sistema dinámico uniformemente hiperbólico). Por el contrario es evidente que al considerar  $\mathcal{F}^n(W)$  para  $n$  grande debemos perder continuidad (porque nuestro espacio es de diámetro finito y como sabemos  $W$  crece uniformemente por iteraciones positivas). Lo que tendremos al considerar  $\mathcal{F}^n(W)$  para  $n$  grande es una gran cantidad de variedades inestables desconectadas, que por la expansión uniforme de la derivada sabemos que en conjunto tiene un gran largo. A pesar de que  $\mathcal{F}^n(W)$  como conjunto es muy grande, puede que cada una de nuestras componentes en el paso  $n$ -ésimo sean pequeñas, lo cual es posible en este tipo de dinámicas con singularidades. Este problema aumenta notablemente cuando consideramos las singularidades generadas al particionar  $\mathcal{M}$  con nuestros  $\mathbb{H}_k$ , evidentemente las H-componentes son aún más pequeñas que las componentes conexas descritas anteriormente. En el caso de los billares de tipo  $A$  y  $B$  no se da este caso, las H-componentes no son tan pequeñas. Es todo un logro que en este tipo de dinámicas con conjuntos de singularidades denso las H-componentes no sean tan pequeñas. A partir de los dos lemas de crecimiento podemos dar una interpretación del comportamiento de los largos de las H-componentes. Observemos que para las primeras  $\sim |\log |W||$  iteraciones tenemos que las H-componentes de  $\mathcal{F}^n(W)$  crecen monótonamente y exponencialmente en  $n$  hasta alcanzar un tamaño de orden 1 (primer lema de crecimiento). Posterior a esto las H-componentes de  $\mathcal{F}^n(W)$  se mantienen largas durante las siguientes iteraciones (segundo lema de crecimiento).

Procederemos a demostrar ambos lemas de crecimiento.

Sea  $x = (r, \varphi) \in \mathcal{M}$  y consideremos un vector  $dx$  tangente a  $\mathcal{M}$  en  $x$  con coordenadas  $(dr, d\varphi)$ . Se define la métrica  $\|\cdot\|_*$  mediante

$$\|dx\|_* = \frac{\mathcal{K} + |\mathcal{V}|}{\sqrt{1 + \mathcal{V}^2}} \|dx\|$$

donde  $\mathcal{K}$  es la curvatura en el punto que parametriza  $r$  y  $\mathcal{V}$  es la pendiente  $d\varphi/dr$ . Si  $dr = 0$  por continuidad definimos  $\|dx\|_* = \|dx\|$ . Observar que si el vector  $dx$  se rota desde el eje  $r$  en sentido antihorario en  $\frac{\pi}{2}$  grados (hasta dejarlo en el eje  $\varphi$ ), la métrica interpola los valores  $\mathcal{K}\|dx\|$  con  $\|dx\|$ . Afirmamos que las métricas  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|_*$  son uniformemente equivalentes. Basta observar que si  $|\mathcal{V}| \geq 1$  entonces se tiene

$$\frac{1}{2} < \frac{|\mathcal{V}|}{\sqrt{1 + \mathcal{V}^2}} < \frac{\mathcal{K} + |\mathcal{V}|}{\sqrt{1 + \mathcal{V}^2}} < (\mathcal{K}_{max} + 1),$$

y si  $|\mathcal{V}| < 1$

$$\frac{\mathcal{K}_{min}}{\sqrt{2}} \leq \frac{\mathcal{K} + |\mathcal{V}|}{\sqrt{1 + \mathcal{V}^2}} \leq (\mathcal{K}_{max} + 1).$$

La elección de las constantes  $C_1, C_2 > 0$  tales que  $C_1\|dx\| \leq \|dx\|_* \leq C_2\|dx\|$  puede hacerse con  $C_1 = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\mathcal{K}_{min}}{\sqrt{2}}\}$  y  $C_2 = \mathcal{K}_{max} + 1$ .

Sea  $dx = (dr_0, d\varphi_0) \in C_x^u$  y  $D\mathcal{F}_x(dx) = (dr_1, d\varphi_1)$ , recordemos la fórmula

$$\frac{\|D\mathcal{F}_x(dx)\|}{\|dx\|} = (1 + \tau_0 \mathcal{B}_0^+) \frac{\cos(\varphi_0) \sqrt{1 + \mathcal{V}_1^2}}{\cos(\varphi_1) \sqrt{1 + \mathcal{V}_0^2}},$$

y por lo tanto (las pendientes de vectores inestables satisfacen  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_0 > 0$ )

$$\frac{\|D\mathcal{F}_x(dx)\|_*}{\|dx\|_*} = (1 + \tau_0 \mathcal{B}_0^+) \frac{\cos(\varphi_0) \mathcal{K}_1 + \mathcal{V}_1}{\cos(\varphi_1) \mathcal{K}_0 + \mathcal{V}_0}. \quad (4.1)$$

Vamos a probar los lemas de crecimientos con esta métrica adaptada y usando la libertad en las constantes  $c_1, c_2$  volveremos a la métrica euclidiana.

En primer lugar, verifiquemos que se tiene la desigualdad

$$\frac{\|D_x \mathcal{F}(dx)\|_*}{\|dx\|_*} \geq \Lambda^*,$$

para una cierta constante  $\Lambda^* > 1$ . Veamos que  $\mathcal{B}_1^- = \frac{\mathcal{B}_0^+}{1 + \tau_0 \mathcal{B}_0^+}$ , en otras palabras

$$1 + \tau_0 \mathcal{B}_0^+ = \frac{\mathcal{B}_0^+}{\mathcal{B}_1^-} = \frac{\frac{2\mathcal{K}_0}{\cos \varphi_0} + \mathcal{B}_0^-}{\mathcal{B}_1^-} = \frac{\mathcal{K}_0 + \mathcal{V}_0}{\mathcal{B}_1^- \cos \varphi_0}.$$

Usando la ecuación (4.1) tenemos que

$$\frac{\|D_x \mathcal{F}(dx)\|_*}{\|dx\|_*} = \frac{\mathcal{K}_1 + \mathcal{V}_1}{\mathcal{B}_1^- \cos \varphi_1} = 1 + \frac{2\mathcal{K}_1}{\mathcal{B}_1^- \cos \varphi_1},$$

Observar que  $\frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{B}_1^- \cos \varphi_1} = \frac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{V}_1 - \mathcal{K}_1} = \frac{1}{\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{K}_1} - 1}$  es acotado inferiormente porque  $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{K}_1} \leq \frac{\mathcal{V}_{m\acute{a}x}}{\mathcal{K}_{m\acute{i}n}}$ .

Se sigue que  $1 + \frac{2\mathcal{K}_1}{\mathcal{B}_1^- \cos \varphi_1} > \Lambda_* > 1$  para una cierta constante  $\Lambda_*$ .

Usaremos la notación

$$\mathcal{J}_W^* \mathcal{F}^n(x) := \frac{\|D_x \mathcal{F}^n(dx)\|_*}{\|dx\|_*}$$

para denotar el jacobiano inestable en esta nueva métrica. Podemos replicar la demostración del Teorema 3.5 para nuestra métrica adaptada, lo único verdaderamente esencial de nuestra métrica  $\|\cdot\|_*$  es que es uniformemente equivalente a la euclidiana. Siendo más precisos tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.4.** *Sea  $W$  una variedad inestable tal que  $\mathcal{F}^{-k}(W)$  es débilmente homogénea para cada  $k \in \{0, \dots, N\}$ . Para  $y, z \in W$  y cada  $1 \leq n \leq N$  se tiene que*

$$(C_d^*)^{-1} \leq e^{-C^*|W|^{1/3}} \leq \frac{\mathcal{J}_W^* \mathcal{F}^{-n}(y)}{\mathcal{J}_W^* \mathcal{F}^{-n}(z)} \leq e^{C^*|W|_*^{1/3}} \leq C_d^*, \quad (4.2)$$

donde  $C^* = C^*(\mathcal{D})$  y  $C_d^* = C_d^*(\mathcal{D})$  son constantes positivas.

*Demostración.* Identica a la demostración de Teorema 3.5. □

Vamos a asumir el siguiente resultado.

**Proposición 4.5.** ([8]) *Dada una variedad inestable  $W \subset \mathcal{M}$  denotamos por  $W_i$  a las  $H$ -componentes de  $\mathcal{F}(W)$  y definamos*

$$\lambda(W_i) = \max_{y \in W_i} \mathcal{J}_{W_i}^* \mathcal{F}^{-1}(y).$$

Se tiene la desigualdad

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \sup_{W: |W|_* < \delta} \sum_i \lambda(W_i) < 1,$$

donde por  $|W|_*$  nos referimos al largo de  $W$  bajo la métrica  $\|\cdot\|_*$ .

Usando la notación de la Proposición 4.5 y el Teorema 4.4

$$\frac{\mathcal{J}_W^* \mathcal{F}^{-1}(y)}{\mathcal{J}_W^* \mathcal{F}^{-1}(z)} \leq e^{C^*|W_i|^{1/3}},$$

para cualquier par de puntos  $y, z \in W_i$ . Tomemos  $y$  el punto donde se alcanza el máximo de  $\mathcal{J}_W^*$  y  $z$  donde se alcanza el mínimo. Nos queda la desigualdad

$$\lambda(W_i) \leq e^{C^*|W_i|^{1/3}} \min_{x \in W_i} \mathcal{J}_{W_i}^* \mathcal{F}^{-1}(x),$$

de donde

$$\lambda(W_i) |W_i|_* \leq e^{C^*|W_i|^{1/3}} |\mathcal{F}^{-1}(W_i)|_*. \quad (4.3)$$

**Comentario.** En la demostración de esta proposición se hace la elección de la constante  $k_0$  que usamos para definir nuestro nuevo espacio de colisión. Esta proposición se sigue cumpliendo para los billares de tipo B.

**Definición.** Sea  $Y$  una curva suave en  $\mathcal{M}$ . El largo de  $Y$  con la métrica inducida  $\|\cdot\|_*$  es  $|Y|_*$ . Denotamos por  $r_Y^*(x)$  a la función que nos da la menor distancia de  $x \in Y$  a los extremos de  $Y$  con la métrica inducida. Imitando la notación que usamos para la métrica euclidiana definimos

$$r_n^*(x) = r_{W_n(x)}^*(\mathcal{F}^n(x)).$$

*Demostración.* (Primer lema de crecimiento)

Usando la proposición anterior sabemos que existe un  $\delta_0 > 0$  tal que

$$\zeta_1 := e^{C^*\delta_0^{1/3}} \max\{\Lambda_*^{-1}, \sup_{W:|W|_* < \delta_0} \sum_i \lambda(W_i)\} < 1,$$

donde  $C^*$  es la constante que aparece en el Teorema 4.4. Sea

$$\zeta_0 := \max\{\Lambda_*^{-1}, \sup_{W:|W|_* < \delta_0} \sum_i \lambda(W_i)\}.$$

Comencemos asumiendo que  $|W|_* < \delta_0$ . Sean  $W_i$  las H-componentes de  $\mathcal{F}(W)$ . Para cada  $i$  se tiene que  $W_i \cap \mathcal{F}(\{x \in W : r_1^*(x) < \epsilon\})$  es la unión de dos intervalos en  $W_i$  (se sobrelapan si  $|W_i|_* < 2\epsilon$ ). Se sigue que el conjunto  $\mathcal{F}^{-1}(W_i) \cap \{x \in W : r_1^*(x) < \epsilon\}$  es la unión de dos subintervalos en  $\mathcal{F}^{-1}(W_i)$  de largo a lo más  $\lambda(W_i)\epsilon$ . Se sigue que

$$m_W^*(x \in W : r_1^*(x) < \epsilon) \leq \sum_i 2\epsilon\lambda(W_i) \leq 2\zeta_0\epsilon.$$

Es evidente que

$$m_W^*(x \in W : r_0^*(x) < \delta) = \min\{2\delta, m_W^*(W)\}.$$

Si  $\min\{2\epsilon/\Lambda_*, m_W^*(W)\} = 2\epsilon/\Lambda_*$  de las desigualdades anteriores

$$m_W^*(x \in W : r_1^*(x) < \epsilon) \leq \zeta_0\Lambda_*m_W^*(x \in W : r_0^*(x) < \epsilon/\Lambda_*),$$

Si  $\min\{2\epsilon/\Lambda_*, m_W^*(W)\} = m_W^*(W)$ , recordando que  $\Lambda_*\zeta_0 \geq 1$  obtenemos

$$m_W^*(x \in W : r_1^*(x) < \epsilon) \leq |W|_* \leq \zeta_0\Lambda_*m_W^*(x \in W : r_0^*(x) < \epsilon/\Lambda_*).$$

Si  $|W|_* > \delta_0$  entonces si  $W_i$  son las H-componentes de  $W$ , dividimos cada  $W_i$  en  $k_i + 1$  curvas de largo a lo más  $\delta_0$ , donde  $k_i = \lfloor |W_i|_*/\delta_0 \rfloor$ . La unión de las preimagen de las vecindades de largo  $\epsilon$  de los puntos de la partición nos da que el término que estamos tratando de acotar es menor o igual a

$$2\epsilon \sum_i k_i \lambda(W_i) \leq 2\epsilon\delta_0^{-1} \sum_i |W_i|_* \lambda(W_i) \leq 2\epsilon e^{C\delta_0^{1/3}} \delta_0^{-1} \sum_i |\mathcal{F}^{-1}(W_i)|_* = 2\epsilon e^{C\delta_0^{1/3}} \delta_0^{-1} |W|_*.$$

Definiendo  $\alpha_0 = 2e^{C\delta_0^{1/3}} \delta_0^{-1}$  nos queda la desigualdad

$$m_W^*(x \in W : r_1^*(x) < \epsilon) \leq \zeta_0\Lambda_*m_W^*(x \in W : r_0^*(x) < \epsilon/\Lambda_*) + \alpha_0\epsilon m_W^*(W).$$

Ahora probemos por inducción que

$$m_W^*(x \in W : r_n^*(x) < \epsilon) \leq (\zeta_1\Lambda_*)^n m_W^*(x \in W : r_0^*(x) < \epsilon/\Lambda_*^n) + \alpha_1(1 + \zeta_1 + \dots + \zeta_1^{n-1})\epsilon m_W^*(W),$$

donde  $\alpha_1 = e^{C\delta_0^{1/3}} \alpha_0$ . El caso  $n = 1$  se sigue de  $\alpha_0 < \alpha_1$ ,  $\zeta_0 < \zeta_1$ .

Consideremos un segmento  $W' \subset \mathcal{F}^n(W)$  de H-componente de largo a los más  $\delta_0$ , tenemos la desigualdad

$$m_{W'}^*(x \in W : r_1^*(x) < \epsilon) \leq \zeta_0\Lambda_*m_{W'}^*(x \in W : r_0^*(x) < \epsilon/\Lambda_*) + \alpha_0\epsilon|W'|_*.$$

La preimagen  $W'' = \mathcal{F}^{-n}(W') \subset W$  satisface

$$m_{W'}^*(x \in W : r_{n+1}^*(x) < \epsilon) \leq \zeta_1\Lambda_*m_{W'}^*(x \in W : r_n^*(x) < \epsilon/\Lambda_*) + \alpha_1\epsilon|W'|_*.$$

Ya que la distorsión de  $\mathcal{F}^{-n}$  se controla con las constantes  $\alpha_1$  y  $\zeta_1$  en vez de  $\alpha_0$  y  $\zeta_0$ . Sumando sobre todas las curvas  $W''$  se tiene

$$m_{W'}^*(x \in W : r_{n+1}^*(x) < \epsilon) \leq \zeta_1 \Lambda_* m_{W'}^*(x \in W : r_n^*(x) < \epsilon/\Lambda_*) + \alpha_1 \epsilon |W'|_*.$$

Usando la hipótesis de inducción tenemos

$$\begin{aligned} & \zeta_1 \Lambda_* m_{W'}^*(x \in W : r_n^*(x) < \epsilon/\Lambda_*) + \alpha_1 \epsilon |W'|_* \\ & \leq (\zeta_1 \Lambda_*)^{n+1} m_W^*(x \in W : r_0^*(x) < \epsilon/\Lambda_*^n) + \alpha_1 (1 + \zeta_1 + \dots + \zeta_1^{n-1} + \zeta_1^n) \epsilon m_W^*(W), \end{aligned}$$

y se concluye lo pedido. Tenemos nuestro primer lema de crecimiento en términos de la métrica adaptada  $\|\cdot\|_*$ . Para obtener el mismo resultado en la métrica euclidiana usamos que ambas métricas son uniformemente equivalentes. □

*Demostración.* (Segundo lema de crecimiento)

Usaremos la notación que usamos para estipular el primer lema de crecimiento para probar el segundo lema de crecimiento. Consideremos  $\tau = 1/\min\{|\log \theta_1|, |\log \hat{\Lambda}|\}$ . Es evidente que si  $n \geq \tau |\log |W||$  se tiene que  $|\hat{\Lambda}|^n > |W|^{-1}$  y  $|W| > \theta_1^n$ . Recordando que  $m_W(x \in W : r_0(x) < \epsilon/|\hat{\Lambda}|^n) < 2\epsilon/|\hat{\Lambda}|^n$ . Se sigue directamente del primer lema de crecimiento que

$$m_W(x \in W : r_n(x) < \epsilon) \leq 2c_1 \theta_1^n \epsilon + c_2 \epsilon m_W(W) \leq (2c_1 + c_2) \epsilon m_W(W). □$$

Enunciaremos sin demostración un teorema que es fundamental para la demostración del TFBD (la demostración puede encontrarse en [8]).

**Teorema 4.6.** ([8]) *Para cada variedad estable  $W \subset \mathcal{M}$ , las  $H$ -variedades  $W_{\mathbb{H}}^u(x)$  tienen largo positivo para  $m_W$ -casi todo punto  $x \in W$ . Más aún*

$$m_W\{x \in W : r_{\mathbb{H}}^u(x) < \epsilon\} \leq C\epsilon,$$

para algún  $C = C(\mathcal{D}) > 0$  y todo  $\epsilon > 0$ . Para cada variedad inestable  $W \subset \mathcal{M}$ , las  $H$ -variedades  $W_{\mathbb{H}}^s(x)$  tienen largo positivo para  $m_W$ -casi todo punto  $x \in W$ . Más aún

$$m_W\{x \in W : r_{\mathbb{H}}^s(x) < \epsilon\} \leq C\epsilon,$$

para algún  $C = C(\mathcal{D}) > 0$  y todo  $\epsilon > 0$ .

## 4.2. Demostración TFBD

Ahora estamos en condiciones de probar lo que presentamos a principio del capítulo como TFBD.

*Demostración.* Sea  $q > 0$ , definamos  $p = C^{-1} C_d^{-1} q$  donde  $C > 0$  es la constante que aparece en el Teorema 4.5 y  $C_d$  la constante que aparece en el Teorema 3.5. Dado  $A > 0$  arbitrario podemos escoger  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que  $A \leq p C'^2 \Lambda^{2n}$  donde  $C'$  y  $\Lambda$  son las constantes que aparecen en la demostración del Teorema 2.4.

Sea  $\mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)$  la componente conexa de  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_n^{\mathbb{H}}$  que contiene a  $x$ . Consideremos una vecindad de  $\mathcal{U}_x^u$  de  $x$  totalmente contenida en  $\mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)$  tal que

$$\text{dist}(\mathcal{U}_x^u, \partial\mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)) > A \text{ diam } \mathcal{U}_x^u, \quad (4.4)$$

donde ese diámetro es tomado con la distancia inestable. Tomamos la mayor distancia entre puntos del conjunto que pueden ser conectados con una variedad inestable. Consideremos una variedad inestable  $W \subset \mathcal{U}_x^u$  y denotemos por  $W_n$  a  $\mathcal{F}^n(W)$ . Como  $W \subset \mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)$  sabemos que la curva  $W_n$  es suave (no toca al conjunto de singularidades de  $\mathcal{F}_{\mathbb{H}}$ ), es una  $\mathbb{H}$ -variedad. Podemos aplicar el Teorema 4.5 a la curva  $W_n$

$$m_{W_n}\{r_{\mathbb{H}}^s(x) < p|W_n|\} \leq Cp|W_n|. \quad (4.5)$$

Consideremos ahora un punto  $x \in W_n$  tal que  $r_{\mathbb{H}}^s(x) \geq p|W_n|$ . Hay dos posibles casos, la variedad estable local de  $x$  toca a  $\partial\mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)$  o no. Si esto sucede entonces

$$r_{\mathbb{H}}^s(\mathcal{F}^{-n}z) \geq \text{dist}(W, \partial\mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)).$$

En caso contrario sea  $z$  el punto de  $W$  tal que  $d_s(z, \mathcal{F}^{-n}x) = r_{\mathbb{H}}^s(\mathcal{F}^{-n}x)$  ( $d_s$  es la distancia euclidiana calculada sobre la variedad estable), la hiperbolicidad uniforme nos dice que  $d_s(z, \mathcal{F}^{-n}x) \geq C'\Lambda^n d_s(\mathcal{F}^n(z), x) \geq C'\Lambda^n r_{\mathbb{H}}^s(x) \geq C'\Lambda^n p|W_n|$ , se sigue que

$$r_{\mathbb{H}}^s(\mathcal{F}^{-n}z) \geq \text{mín}\{\text{dist}(W, \partial\mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)), pC'\Lambda^n|W_n|\}.$$

Usando que  $|W_n| \geq C'\Lambda^n|W|$  y que  $\text{dist}(W, \partial\mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)) \geq A|W|$  (por la ecuación 4.2)

$$r_{\mathbb{H}}^s(\mathcal{F}^{-n}z) \geq \text{mín}\{\text{dist}(W, \partial\mathcal{Q}_n^{\mathbb{H}}(x)), pC'^2\Lambda^{2n}|W|\} = A|W|,$$

ya que  $pC'^2\Lambda^{2n} \leq A$ . La desigualdad recién obtenida nos dice que si  $z \in W$  es tal que  $r_{\mathbb{H}}^s(z) < A|W|$ , entonces  $r_{\mathbb{H}}^s(\mathcal{F}^n(z)) < p|W_n|$ , en otras palabras que

$$A := \{x \in W : r_{\mathbb{H}}^s(x) < p|W|\} \subset \mathcal{F}^{-n}(x \in W_n : \{r_{\mathbb{H}}^s(x) < p|W_n|\}),$$

usando el Teorema 3.5 y la desigualdad (4.3) nos queda

$$m_W(x \in W : r_{\mathbb{H}}^s(x) < A|W|\} \leq C_d Cp|W| = q|W|,$$

de donde se concluye la primera parte de TFBD. La segunda parte es análoga a esta, podemos invertir el tiempo y el rol que cumplían las variedades estables pasan a ser el de las inestables (y viceversa).  $\square$



## Capítulo 5

# Propiedades dinámicas

Este capítulo está enfocado en probar propiedades dinámicas de la aplicación de primer retorno en los billares de tipo A. Posteriormente podremos extender propiedades al flujo del billar. En general probar que una medida es ergódica para una dinámica en particular es difícil, vamos a presentar un argumento que se puede usar cuando tenemos un comportamiento razonable de la partición medible en variedades inestables y estables. Me refiero al argumento de Hopf [13][14]. La demostración que presentamos es mérito de Sinai en un paper fundacional del área [23].

La idea general del argumento es que las variedades inestables y estables están mod 0 en una única componente ergódica. Recordar que por  $\mathcal{M}$  denotamos a la sección transversal al flujo del billar y por  $\mathcal{F}$  la aplicación de primer retorno. La medida invariante que nos interesa es la dada por la densidad  $L \cos(\varphi) dr d\varphi$  siendo  $d\varphi$  la coordenada del ángulo respecto a la normal y  $dr$  el arcoparametro ( $L$  es una constante de normalización para hacerla de probabilidad). Usamos la convención de que al ir recorriendo la curva con el arcoparametro la normal está a mano izquierda del tangente, apuntando al interior del dominio  $\mathcal{D}$ . Denotamos por  $\mu$  a la medida mencionada anteriormente, el objetivo es probar que  $\mu$  ergódica.

Vamos a partir la discusión de este capítulo presentando un trabajo que generaliza los resultados que han sido mencionados acerca de las medidas SRB. Pesin [21] da condiciones que aseguran la existencia de medidas que asemejan las propiedades de las medidas SRB en el caso de dinámicas con singularidades. Introduciremos brevemente el tipo de dinámicas donde se cumple la descomposición de Pesin. Seguiremos la notación usada en [19].

Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana con métrica inducida  $d$ ,  $K \subset M$  un abierto de clausura compacta y  $N \subset K$  un cerrado. Consideremos la función  $f : K \setminus N \rightarrow K$  que es difeomorfismo de clase  $C^2$  con su imagen. Asumiremos que existen constantes  $C_i > 0, \alpha_i \geq 0$  para  $i \in \{1, 2\}$  tales que

$$\begin{aligned} \|d^2 f_x\| &\leq C_1 d(x, N^+)^{-\alpha_1}, x \in K \setminus N, \\ \|d^2 f_x^{-1}\| &\leq C_2 d(x, N^-)^{-\alpha_2}, x \in f(K \setminus N). \end{aligned}$$

Sea  $N^+ = \partial K \cup N$  el conjunto de singularidades de  $f$  y  $N^-$  el conjunto de singularidades de  $f^{-1}$  (son todos los límites de  $\{f(z_n)\}$  donde  $\{z_n\}$  es una sucesión que converge a  $N^+$ ). Sea

$$K^+ = \{x \in K : f^n(x) \notin N^+, n \geq 0\},$$

y consideremos los conjuntos

$$D = \bigcap_{n \geq 0} f^n(K^+), \Lambda = \overline{D}.$$

Toda la discusión que viene está centrada en entender la dinámica en este conjunto  $\Lambda$  (bajo las hipótesis que introduce Pesin).

**Definición.** Decimos que  $\Lambda$  es un *atractor hiperbólico generalizado* si existe  $C > 0$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ , una función  $\alpha : K \setminus N^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  y dos familias de planos  $P^u(z), P^s(z)$  de dimensiones complementarias en  $T_z M$ ,  $z \in K \setminus N^+$  tal que los conos  $C^u(z) := C(z, \alpha(z), P^u(z))$  y  $C^s(z) := C(z, \alpha(z), P^s(z))$  (los puntos que están a ángulo menor que  $\alpha(z)$  a algún punto del plano asociado), cumplen las siguientes condiciones:

1. El ángulo entre  $C^u(z), C^s(z)$  está uniformemente acotada para  $z \in K \setminus N^+$ .
2.  $df(C^u(z)) \subset C^u(f(z)), z \in K \setminus N^+$  y  $df^{-1}(C^s(z)) \subset C^s(f^{-1}(z)), z \in f(K \setminus N^+)$ .
3. Si  $z \in K^+, v \in C^u(z)$  entonces  $\|df^n(v)\| \geq C\lambda^{-n}\|v\|$ .  
Si  $z \in f^n(K^+), v \in C^s(z)$  entonces  $\|df^{-n}v\| \geq C\lambda^{-n}\|v\|$ .

Sean

$$E^s(z) = \bigcap_{n \geq 0} df^{-n}C^s(f^n(z)),$$

$$E^u(z) = \bigcap_{n \geq 0} df^n C^u(f^{-n}(z)).$$

Se puede probar que para cada  $z \in D$  se tiene que  $T_z M = E^s(z) \oplus E^u(z)$  es una descomposición  $df$ -invariante, i.e.  $df(E^s(z)) = E^s(f(z))$  y  $df(E^u(z)) = E^u(f(z))$ . De las propiedades impuestas sobre los conos inestables y estables es evidente que el ángulo entre estos subespacios está uniformemente acotado y que se sigue cumpliendo la propiedad 2. de la expansión-contracción exponencial de vectores. Observar que la elección de los planos  $C^w(z)$  tiene cierto margen de error, lo que es intrínseco de nuestra definición son los subespacios invariantes  $E^w(z), w \in \{s, u\}$ .

La idea de presentar a groso modo una parte del paper de Pesin donde se extienden propiedades conocidas para las medidas SRB a lo que prontamente llamaremos medidas u-Gibbs, es entrar en la discusión de como un trabajo bastante general refleja propiedades que para el tipo de billares que estudiamos han aparecido naturalmente. Situemos la teoría de billares dispersores en este lenguaje.

En el caso de la aplicación  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , tenemos que  $\mathcal{F}$  en el complemento de  $\mathcal{S}_1$  es de clase  $\mathcal{C}^{l-1}, l \geq 3$  y es difeomorfo con su imagen, en este caso con  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-1}$ . Ya hemos presentado los conos que dan la estructura de atractor hiperbólico generalizado a  $\Lambda$ . Notemos que para el caso de billares hiperbólicos de tipo A y B, donde nuestras componentes  $\mathcal{M}_i$  solo tienen discontinuidades en  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , se sigue que  $N^+ = \mathcal{S}_1$  y usando notación anterior  $K^+ = \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_\infty$ . Directo de la definición se tiene  $\Lambda = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{F}^k(K^+) = \mathcal{M} \setminus (\mathcal{S}_\infty \cup \mathcal{S}_{-\infty})$ . El cono inestable está dado por

$$C_x^u = \{(dr, d\varphi) \in T_x M : \mathcal{K} \leq \frac{d\varphi}{dr} \leq \mathcal{K} + \frac{\cos \varphi}{\tau_{-1}(x)}\},$$

siendo  $\tau(x)$  el tiempo de primer retorno de  $x$  a  $\mathcal{M}$  por medio del flujo del billar,  $\varphi$  la coordenada angular de  $x \in \mathcal{M}$  y  $\mathcal{K}$  la curvatura de  $\Gamma_i$  en  $x \in \mathcal{M}_i$ . Usando la misma notación, el cono estable de  $x \in M$  está dado por

$$C_x^s = \{(dr, d\varphi) \in T_x M : -\mathcal{K} - \frac{\cos \varphi}{\tau(x)} \leq \frac{d\varphi}{dr} \leq -\mathcal{K}\}.$$

Se verificó anteriormente usando la fórmula para la derivada de  $\mathcal{F}$  que se tiene las inclusiones

$$D_x \mathcal{F}(C_x^u) \subset \text{int}(C_{\mathcal{F}(x)}^u) \cup \{0\}, D_x \mathcal{F}(C_x^s) \subset \text{int}(C_{\mathcal{F}(x)}^s) \cup \{0\}.$$

Ahora que ya tenemos estas definiciones básicas bien entendidas en el caso de billares, discutamos la estructura de las variedades estables e inestables, la herramienta fundamental para el estudio de dinámicas suaves (con singularidades en este caso).

Un rol particularmente importante lo cumplen los siguientes conjuntos

$$D_{\epsilon, l}^+ = \{z \in \lambda : \rho(f^n(z), N^+) \geq l^{-1} e^{-\epsilon n}, n \geq 0\},$$

$$D_{\epsilon, l}^- = \{z \in \lambda : \rho(f^{-n}(z), N^-) \geq l^{-1} e^{-\epsilon n}, n \geq 0\},$$

para  $l \in \mathbb{N}$  y  $\epsilon > 0$ . Estos conjuntos representan los de puntos que se acercan a una velocidad a lo más exponencial al conjunto de discontinuidades. Sea  $D_\epsilon^+ = \bigcup_{l=1}^\infty D_{\epsilon, l}^+$  y  $D_\epsilon^- = \bigcup_{l=1}^\infty D_{\epsilon, l}^-$ .

En este contexto también se puede hablar de variedades estables e inestables, asumiremos lo que mencionaremos a continuación [18]. Existe un  $\epsilon > 0$  para el cual los puntos  $z \in D_{\epsilon, l}^-$  tienen una variedad inestable local asociada, i.e. existe  $V^u(z)$  de clase  $\mathcal{C}^1$  que es tangente a  $E^u(z)$  tal que  $f^{-1}(V^u(z)) \subset V^u(f^{-1}(z))$  y existe la aproximación exponencial de los puntos  $x, y \in V^u(z)$  por medio de  $f^{-n}$ . El enunciado existencial de las variedades locales estables es análogo para puntos  $z \in D_{\epsilon, l}^+$ . Es importante recalcar que solo asumimos la existencia de estas variedades en puntos de  $D_{\epsilon, l}^\pm$  para  $\epsilon$  suficientemente pequeño y  $l \in \mathbb{N}$  arbitrario. El hecho de restringirnos a conjuntos donde la velocidad de aproximación a las singularidades es a lo más exponencial nos permite tener un control sobre los largos de las variedades locales inestables (estables), nos da una cierta uniformidad de su largo. Parte de los problemas técnicos para extender los resultados de sistemas suaves a los con singularidades es precisamente ese, debemos encontrar una manera de controlar los largos de la variedades, la partición por variedades inestables (estables) ya no es continua ni forma una foliación, es tan solo medible.

**Proposición 5.1.** ([18],[19]) *Existen valores  $r_1(l) > r_2(l) > r_3(l) > 0$  tal que se cumplen las siguientes propiedades. Sea*

$$W(z) = \exp_z\{u \in E^u(z) : \|u\| \leq r_1(l)\}.$$

*Entonces para cada  $y \in B(z, r_3(l)) \cap D_{\epsilon, l}^-$  la intersección  $V^u(y) \cap W(z)$  consiste en un único punto que denotamos por  $[y, z]$ . Además*

$$B^u([y, z], r_2(l)) \subset V^u(y).$$

La constante  $\epsilon > 0$  es la mencionada arriba que nos asegura la existencia de las variedades locales inestables (estables) y  $B^u(x, r)$  es la bola de radio  $r$  centrada en  $x$ , donde la distancia es la dada por la restricción de la métrica de la variedad a la variedad inestable en  $x \in D_{\epsilon, l}^-$ . Esta proposición nos proporciona un control uniforme de los largos de las variedades inestables en  $D_{\epsilon, l}^-$ .

Recordemos la manera que probamos la existencia de las variedades inestables y estables en el caso de los billares. En este tipo de dinámicas (como siempre, billares de tipo A y B), las variedades inestables aparecen como las componentes conexas (no degeneradas en puntos) de  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}$  (como componentes conexas de  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_\infty$  en el caso de las estables). Se probó de

manera directa que estas componentes en caso de no ser el mismo punto, entonces son curvas suave. Anteriormente discutimos el hecho de que las curvas que aparecen tienen por pendiente las direcciones inestables en sus respectivos puntos. Se justificó que al aumentar  $n$ , la pendiente de las curvas de  $\mathcal{S}_{-n} \setminus \mathcal{S}_{-(n-1)}$  se van acercando continuamente a la dirección inestable del punto que estamos encajonando. De este hecho se sigue que lo que construimos por medio del conjunto de singularidades, efectivamente son las variedades inestables (hay contracción exponencial al iterar negativamente por la hiperbolicidad uniforme). Es evidente que  $\mathcal{S}_{\pm\infty}$  es medible y tiene medida cero ( $\mathcal{S}_{\pm n}$  tiene medida cero Lebesgue para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  y evidentemente también para  $\mu$ ). Casi todos los puntos tienen una variedad inestable no degenerada conteniéndolos.

Volviendo al contexto general, queremos definir una cierta clases de medidas que tienen propiedades dinámicas buenas (más adelante quedará claro esta afirmación), afortunadamente nuestra medida de referencia  $\mu$  en  $\mathcal{M}$  es de este tipo.

Sea  $\mathcal{J}^u(z)$  el jacobiano del diferencial  $df_z$  restringido a  $E^u(z)$ . Dado  $l > 0$ , tomemos  $z \in D_{\epsilon,l}^-$  y  $w \in V^u(z)$ . Se define

$$\kappa(z, w) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{\mathcal{J}^u(f^{-j}(z))}{\mathcal{J}^u(f^{-j}(w))},$$

donde claramente para que esta definición tenga sentido hay que probar la convergencia de ese límite. No haremos el cálculo explícito, al igual como se menciona en la Proposición 4 [19], basta usar el hecho de que la función  $s \mapsto E^u(s)$  es Lipschitz y la aproximación exponencial de  $z, w$  por medio de  $f^{-n}$ . Para esto último también recordar que  $\sum_{i \in \mathbb{N}} (a_i - 1)$  converge absolutamente si, y solo si,  $\prod_{i \in \mathbb{N}} a_i$  converge absolutamente (con  $a_i > 0$ ).

Usando la notación de la Proposición 5.1, consideremos  $r \leq r_3(l)$  y definamos

$$\Pi(z, r) = \bigcup_{y \in B(z, r) \cap D_{\epsilon,l}^-} B^u([y, z], r_2(l)),$$

un conjunto que llamaremos *rectángulo de radio  $r$  centrado en  $z$* . Sea  $\mu$  una medida boreliana de probabilidad en  $\Lambda$ . Tomemos un rectángulo  $\Pi(z, r)$  con  $\mu(\Pi) > 0$ . Sea  $\eta : \Pi(z, r) \rightarrow W(z)$  la función  $w \mapsto [w, z]$  y  $X = \eta(\Pi(z, r))$  su imagen. Dado  $x \in X$ , denotamos  $\mu_x$  a la medida condicional de  $\mu$  en  $\eta^{-1}(x)$ .

**Definición.** Decimos que  $\mu$  es una medida u-Gibbs si para todo  $l > 0$  y cualquier rectángulo  $\Pi(z, r)$  (teniendo presente que en la elección de las dimensiones de este rectángulo es importante haber fijado previamente  $l$ ), se tiene que

$$d\mu_x(w) = r(x)\kappa(x, w)d\nu^u(w),$$

donde  $w \in \eta^{-1}(x)$ . La constante  $r(x)$  es de normalización (para que la medida condicional  $\mu_x$  sea de probabilidad). La medida  $\nu^u$  es Lebesgue sobre la variedad  $\eta^{-1}(x)$ .

Vamos a suponer que existe un  $z \in D_{\epsilon}^-$  y constantes  $C > 0, t > 0, \gamma > 0$  tal que para cada  $s$  con  $0 \leq s \leq \gamma$  y  $n \geq 0$  se tenga que

$$\nu^u(V^u(z) \cap f^{-n}(U(s, N^+))) \leq Cs^t,$$

siendo  $U(s, N^+) := \{x \in \mathcal{K} \setminus N : d(x, N^+) \leq s\}$ . Este supuesto es particularmente importante, siguiendo la notación de [19] lo llamaremos (H4).

Los dos teoremas que nos interesan son el de existencia y de descomposición ergódica.

**Teorema 5.2.** ([19]) *Asumiendo que se da (H4), entonces existe una medida de probabilidad  $\mu$  concentrada en  $D$  que es  $u$ -Gibbs y  $f$ -invariante. Además  $\mu(D_\epsilon^0) = 1$ .*

**Teorema 5.3.** ([18],[19]) *Sea  $\mu$  una medida  $f$ -invariante de probabilidad  $u$ -Gibbs tal que  $\mu(D_\epsilon^0) = 1$ . Existen conjuntos  $\Lambda_i \subset \Lambda$ ,  $i \geq 0$  tales que*

(1)  $\Lambda = \cup \Lambda_i$  con  $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ .

(2)  $\mu(\Lambda_0) = 0$ ,  $\mu(\Lambda_i) > 0$  para  $i > 0$ .

(3) Para  $i > 0$  se tiene  $f(\Lambda_i) \subset \Lambda_i$  y  $f|_{\Lambda_i}$  es ergódica.

(4) Para cada  $\Lambda_i$  existe una partición  $\{\Lambda_i^k\}_{k=1}^{t_i}$  donde  $f(\Lambda_i^k) \subset \Lambda_i^{k+1}$  y  $\Lambda_i^{t_i+1} := \Lambda_1$ . Además  $f^{t_i} : \Lambda_i^k \rightarrow \Lambda_i^k$  es *mixing*,  $K$ -*mixing* y *Bernoulli*.

## 5.1. El argumento de Hopf

Consideremos una función  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Definamos

$$M_f = \{x \in \mathcal{M} : \bar{f}_+(x) = \bar{f}_-(x)\},$$

donde

$$\bar{f}_+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\mathcal{F}^i(x)) \text{ y } \bar{f}_-(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\mathcal{F}^{-i}(x)).$$

Como consecuencia del Teorema ergódico de Birkhoff esos límites existen y coinciden para casi todo  $x \in \mathcal{M}$ , en otras palabras  $\mu(M_f) = 1$ . Se define  $\bar{f}(x) := \bar{f}_+(x) = \bar{f}_-(x)$  en  $M_f$ .

**Proposición 5.4.** *Sea  $W$  una variedad inestable (o estable), la función  $\bar{f}$  es constante en  $W \cap M_f$ .*

*Demostración.* Sea  $x, y \in W \cap M_f$ . Supongamos que  $W$  es estable. Sabemos que  $\mathcal{F}^n(x)$  y  $\mathcal{F}^n(y)$  se acercan exponencialmente, en particular  $|f(\mathcal{F}^n(x)) - f(\mathcal{F}^n(y))| \rightarrow 0$  (por la continuidad de  $f$ ), de hecho esa diferencia es uniforme donde  $W$  es compacta (ya hemos discutido que en este tipo de dinámicas las variedades estables e inestables no pueden ser muy largas). Se sigue fácilmente que  $\bar{f}(x) = \bar{f}_+(x) = \bar{f}_+(y) = \bar{f}(y)$ . Se procede análogamente usando  $\mathcal{F}^{-n}$  en el caso de tener una variedad inestable. □

**Definición.** Decimos que una curva  $W \subset \mathcal{M}$  es  $M_f$ -completa si  $m_W(W \setminus M_f) = 0$ . Se define  $G_f \subset M_f$  como los puntos  $x \in M_f$  donde  $W^s(x)$  y  $W^u(x)$  son curvas  $M_f$ -completas. La noción de ser  $G_f$ -completa es análoga.

**Proposición 5.5.** *Sea  $V$  una curva en  $\mathcal{M}$  que es transversal a variedades estables. Sea  $V_* = \{x \in V : W^s(x) \text{ existe}\}$  entonces para  $B \subset V_*$  se tiene  $m_V(B) > 0$  si y solo si  $\mu(\cup_{x \in B} W^s(x)) > 0$ .*

*Demostración.* Usando que  $\mu$  es la medida  $u$ -Gibbs de nuestro sistema, sabemos que la medida  $\mu$  localmente se descompone como Lebesgue de la curva  $V$  por las medidas condicionales en las secciones estables. Lo pedido es directo de Fubini. □

**Proposición 5.6.** *Si una curva estable o inestable es  $M_f$ -completa, entonces es  $G_f$ -completa.*

*Demostración.* Tomemos  $W \subset \mathcal{M}$  inestable. Para  $m_W$ -casi todo punto de  $W$  existe una variedad estable  $W^s$ . Es claro que el conjunto de variedades estables que no son  $M_f$ -completas forman un conjunto de medida cero en  $\mathcal{M}$  (basta hacer el argumento localmente, en un abierto donde podamos escribir  $\mu$  como producto de Lebesgue en una sección transversal y  $\mu$  condicionado a variedades estables). Usando la Proposición 5.5 se concluye que los puntos que no tienen una variedad estable  $M_f$ -completa son un conjunto de medida cero en  $W$ .  $\square$

Como estas proposiciones estamos en condiciones de describir el argumento que nos permitirá probar que  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  es una función ergódica. Vamos a construir lo que llamaremos una cadena de Hopf. Tomemos un punto  $x_0 \in G_f$ . Se define  $H_1(x_0) = W^u(x) \cap G_f$  y  $H_2(x_0) = \cup_{y \in H_1(x_0)} W^s(y) \cap G_f$ . Este procedimiento se sigue iterando. En general tenemos que

$$H_{2n+1}(x_0) = \bigcup_{x \in H_{2n}(x_0)} W^u(x) \cap G_f,$$

$$H_{2n+2}(x_0) = \bigcup_{x \in H_{2n+1}(x_0)} W^s(x) \cap G_f.$$

Una cadena de Hopf asociada a  $x_0$  es el conjunto

$$H_\infty(x_0) = \bigcup_{n \geq 0} H_n(x_0).$$

De la misma forma como partimos con la variedad inestable de  $x_0$  podemos hacerlo con la variedad estable y seguir alternando como lo hicimos en el primer caso, esto induce una segunda cadena de Hopf asociada a  $x_0$ . Es directo de la proposición 5.4 que para cualquier función continua  $f$  se tiene que  $\bar{f}$  es constante en las cadenas de Hopf. De la Proposición 5.6 se tiene que  $\mu(H_2) > 0$  y con mayor razón  $\mu(H_\infty) > 0$ .

El método de Hopf consiste en probar que casi todo punto tiene una vecindad  $U$  donde su cadena de Hopf asociada  $H_\infty$  satisface que  $\mu(U \setminus U \cap H_\infty) = 0$ . Posterior a eso vamos a probar que casi todos los puntos pueden ser conectados con cadenas de Hopf concluyendo que la única componente ergódica es todo  $\mathcal{M}$ .

Este método fue usado originalmente por Hopf en [13],[14] para probar que el flujo geodésico en variedades de curvatura negativa es ergódico (en [2] se demuestra que este tipo de flujos son Anosov). Sinai, en un paper fundacional [23] de la teoría de billares dispersivos aplica este método para probar el teorema que estamos discutiendo, la ergodicidad de la función de primer retorno.

## 5.2. Ergodicidad

Esta sección del capítulo está centrada en probar la ergodicidad de  $\mathcal{F}$  por medio del método de Hopf. Primero probaremos un resultado de *ergodicidad local*.

**Teorema 5.7.** *Sea  $x \in \mathcal{M} \setminus (\mathcal{S}_\infty^{\mathbb{H}} \cup \mathcal{S}_\infty^{\mathbb{H}})$ . Existe una vecindad  $\mathcal{U}_x$  de  $x$  tal que pertenece a una única componente ergódica de  $\mathcal{F}$ .*

*Demostración.* Tomemos una vecindad  $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_x^u \cap \mathcal{U}_x^s$  donde  $\mathcal{U}_x^u$  y  $\mathcal{U}_x^s$  son las vecindades de  $x$  dadas por TFBD para  $A$  muy grande y  $q$  pequeño. Manteniendo la notación que hemos usado a lo largo del manuscrito, por  $\mathcal{V}_x^u$  ( $\mathcal{V}_x^s$ ) denotamos a la pendiente del subespacio inestable (estable) de  $x$ . Las funciones  $\mathcal{V}_x^u$  y  $\mathcal{V}_x^s$  son continuas en los puntos donde están definidas (ver Teorema 3.7) y por tanto podemos asumir que  $\mathcal{U}_x$  es algo tan parecido como queramos a un rombo (para controlar los largos de los pseudo-paralelógramos que se forman con las variedades estables e inestables es importante que  $q$  sea pequeño). Podemos asumir que  $\mathcal{U}_x$  tiene como bordes variedades estables e inestables. Sean  $W_i^u, W_i^s$  los bordes de  $\mathcal{U}_x$  para  $i \in \{1, 2\}$ . Fijemos una función continua  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Consideremos  $x \in \mathcal{U}_x \cap G_f$  y definamos  $W_1 := W_{\mathbb{H}}^u(x) \cap \mathcal{U}_x$ . Por definición de  $G_f$  sabemos que existe  $x_1 \in W_1 \cap G_f$  con variedad estable  $W_2 := W_{\mathbb{H}}^s(x_1)$  y a partir de la elección de  $\mathcal{U}_x$  (por TFBD) tenemos  $|W_2| > A|W_1|$  o bien  $W_2 \cap W_1^u \cap W_s^u \neq \emptyset$ . En el segundo caso paramos el proceso, si  $W_2 \cap W_1^u \cap W_s^u = \emptyset$  seguimos iterando, en otras palabras consideramos un  $x_2 \in W_2 \cap G_f$  con variedad inestable  $W_3$  y por tanto  $|W_3| > A|W_2|$  o bien  $W_3 \cap W_1^s \cap W_2^s \neq \emptyset$ . Como  $A > 1$  y todas nuestras variedades son casi paralelas este proceso tiene que terminar, debe existir un  $n$  impar tal que  $W_n \cap W_1^s \cap W_2^s \neq \emptyset$  (si el proceso termina para un  $n$  par podemos volver a iterar). Consideremos otro  $y \in \mathcal{U}_x \cap G_f$  y repitamos este proceso. Si las variedades que aparecen son  $W'_1, W'_2, \dots$  podemos asumir que hay un  $m$  impar tal que  $W'_m \cap W_1^s \cap W_2^s \neq \emptyset$ . Finalmente podemos conectar  $W_n$  y  $W'_m$  por una variedad estable ya que hay muchas variedades estables con largo grande que mayor a  $A|W_n|$  naciendo partiendo desde  $W_n$  y como  $\mathcal{U}_x$  es casi un rombo forzosamente cortan a  $W'_m$ . Con esto se prueba que  $G_f \cap \mathcal{U}_x \subset H_\infty(x)$  y como ya vimos que  $\mathbb{H}_\infty(x)$  pertenece a una única componente ergódica lo mismo ocurre con  $\mathcal{U}_x$ .  $\square$

Vamos a desarrollar un argumento parecido para probar ergodicidad local en puntos que pertenecen a un único conjunto de singularidades.

**Teorema 5.8.** *Sea  $z \in \mathcal{M}$  un punto que vive en exactamente una curva singular suave de  $\mathcal{S}_\infty^{\mathbb{H}} \cup \mathcal{S}_\infty^{\mathbb{H}}$ . Existe una vecindad  $\mathcal{U}_z$  de  $z$  que pertenece a una única componente ergódica de  $\mathcal{F}$ .*

*Demostración.* Nuestra hipótesis nos dice que existe un único  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $z \in \mathcal{F}^n(\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S})$ . Observar que la elección del *nuevo espacio de colisiones* no tiene nada de particular, si  $z \in \mathcal{F}^n(\mathcal{S}) \setminus \mathcal{F}^n(\mathcal{S}_0)$  podemos trasladar levemente las curvas de  $\mathcal{S}$  para evitar este caso, se puede aplicar el Teorema 5.7. Vamos a asumir que  $z \in \mathcal{F}^n(\mathcal{S}_0)$ . Cualquier vecindad  $V$  de  $z$  puede llevarse difeomórficamente a una vecindad  $\mathcal{F}^{-(n-1)}(V)$  de  $\mathcal{F}^{-(n-1)}(z)$ . Si probamos el teorema para  $n = -1$  queda demostrado para todos los  $n \leq -1$  (si probamos el teorema para  $n = 1$  queda demostrado para los  $n \geq 1$ ). Vamos a asumir que  $n = -1$ , i.e.  $z \in \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}_1$  (el caso positivo se sigue por analogía luego de invertir el tiempo). Por hipótesis tenemos que  $z \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}^{\mathbb{H}}$ .

Sea  $S \subset \mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_0$  un trozo de curva singular suave que contiene a  $z$ . Recordando los resultados obtenidos en la sección 2.3 (y usando la misma notación) sabemos que la curva  $S$  separa una vecindad  $V$  de  $z$  en dos vecindades  $V^+$  y  $V^-$ , además sabemos que la curva  $\mathcal{F}^2(S)$  separa una vecindad  $W$  de  $z' := \mathcal{F}^2(z)$  en  $W^+$  y  $W^-$ , donde se satisface que  $W^+ \subset \mathcal{F}^2(V^+)$  y  $W^- \subset \mathcal{F}(V^-)$ . Observar que como  $z' \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_\infty^{\mathbb{H}}$  podemos aplicar TFBD a una vecindad  $\mathcal{U}_{z'}^u$  de  $z'$ , para las constantes  $\tilde{q} > 0$  y  $\tilde{A} > 0$ . Sabemos que para cualquier variedad inestable  $W \subset \mathcal{U}_{z'}^u$  una gran proporción de los puntos de esa curva cumplen que la distancia del punto a cualquiera de los extremos de su variedad estable, tiene largo a lo menos  $A|W|$ . Es fácil convencerse que la elección de las constantes  $\tilde{q}, \tilde{A}$  puede hacerse de modo que se cumple lo siguiente (localmente hay control de distorsión).

**Lema 5.9.** *Para  $q > 0$  y  $A > 0$  existe una vecindad  $V$  de  $z$  tal que para cualquier variedad inestable  $W_0 \subset V$  existe un subconjunto  $W_1 \subset W_0$  con  $m_{W_0}(W_0 \setminus W_1) < q|W_0|$  donde se*

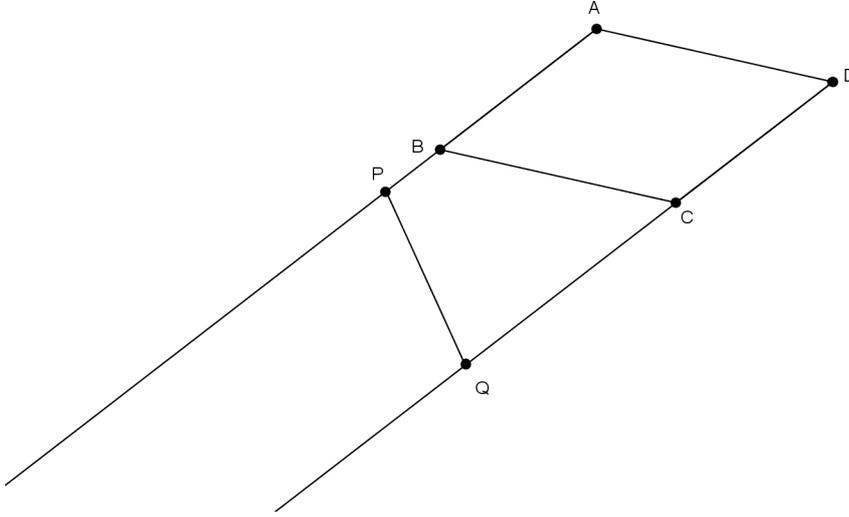


Figura 5.1: Trapecio formado por variedades inestables paralelas y estables transversales

satisface que para todo  $h \in W_1$  hay una variedad estable  $W_{\mathbb{H}}^s(h)$  con largo al menos  $A|W_0|$  desde  $h$  a cada uno de los extremos o bien  $W_{\mathbb{H}}^s(h)$  termina en  $S$ .

En la sección 2.5 verificamos dos cosas, en primer lugar que las variedades estables de la componente  $V^+$  terminan de manera tangente en  $S$ , en segundo lugar que las variedades estables en  $V^-$  terminan de manera transversal en  $S$  casi paralelamente (es posible ver por la ecuación (2.14) que el ángulo que se forma es casi constante en una vecindad de  $z$ ). Por la continuidad de las pendientes de las variedades inestables en puntos donde están definidas podemos asumir que en una vecindad de  $z$  las variedades inestables son casi paralelas (recordar que  $z \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{S}_{-\infty}^{\mathbb{H}}$ ). En resumen podemos encontrar una vecindad  $\mathcal{U}'$  de  $z$  donde las variedades inestables son todas casi paralelas, las variedades estables en  $V^+ \cap \mathcal{U}'$  son todas casi paralelas a  $S$  y las variedades estables en  $V^- \cap \mathcal{U}'$  son todas casi paralelas entre si, por tanto cortan con ángulos casi constante a las variedades inestables. Consideremos un rombo  $ABCD$  donde  $\overline{AB}$  tiene la misma pendiente que la de la variedad inestable  $W_{\mathbb{H}}^u(z)$  y  $\overline{BC}$  tiene la pendiente de  $S$  en  $z$ . Escojamos los puntos  $P \in \overline{AB} \setminus \overline{AB}$ ,  $Q \in \overline{DC} \setminus \overline{DC}$  tal que  $\overline{DC}$  tenga pendiente la de la variedad estable que se aproxima a  $z$  por la región  $V^-$  (Ver figura 6.1). Consideremos  $A = 2 \max\{1, C\}$  donde

$$C = \max\{AP/PQ, PQ/AP, PQ/QD, QD/PQ\}.$$

Sea  $q$  suficientemente pequeño, usando TFBD junto con el Lema 5.9 podemos encontrar una vecindad  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$  de  $z$  donde se cumplen las desigualdades asociadas a  $q$  y  $A$  que nos entregan estas proposiciones. Como  $q$  es pequeño podemos asumir que  $\mathcal{U}$  está limitado por dos variedades inestables casi paralelas, una variedad estable casi paralela a  $S$  y otra que corta de manera transversal a ambas variedades inestables, por todo lo dicho anteriormente podemos aproximar tan bien como queramos a nuestra región  $\mathcal{U}$  con la figura  $APQD$  (bajo una cierta escala). Vamos a aplicar el método de Hopf en esta vecindad de  $z$ .

Tomemos un punto  $x \in \mathcal{U} \cap G_f$ . Vamos a hacer la misma construcción que en el Teorema 5.7, excepto por que tendremos cuidado de mantenernos lejos de la curva singular  $S$ . Consideremos su variedad inestable  $W_1 := W_{\mathbb{H}}^u(x)$  y tomemos su extremo más distante respecto

a  $S$ . Si el extremo es  $p$  podemos escoger  $x_1 \in W_1$  tal que  $d^u(x_1, p) < 2q|W|$  que satisfaga Lema 5.9. Como las pendientes son todas casi constantes, pudimos haber tomando  $q$  suficientemente pequeño de modo de mantenernos al menos a la misma distancia de  $S$  que estaba  $x$ . Ahora consideramos la variedad inestable estable  $W_2 := W_{\mathbb{H}}^s(x_1)$ , tomamos el extremo que esté más lejos de  $S$  y escogemos  $x_2$  cercano. Repitiendo el argumento anterior podemos asumir que  $\text{dist}\{x_2, S\} \geq \text{dist}\{x_1, S\}$ . Se sigue iterando este procedimiento hasta llegar a una variedad inestable  $W_n$  (con  $n$  impar) tal que toque ambas variedades estables que limitan a  $\mathcal{U}$ . Tomemos otro punto  $y \in G_f \cap \mathcal{U}$  y repitamos este procedimiento. Si llamamos  $W'_n$  a las variedades que aparecen de esta cadena a partir de  $y$ , podemos escoger  $m$  impar tal que  $W'_m$  es una variedad inestable que toca ambas variedades estables que limitan  $\mathcal{U}$ . Sabemos que hay una gran cantidad de variedades estables que parten de nuestra variedad inestable  $W_n$  e intersectan a la variedad  $W'_m$  (por nuestra elección de la constante  $A$ ). Hemos conectado mediante cadenas de Hopf los puntos  $x$  e  $y$  que son arbitrarios en  $\mathcal{U} \cap G_f$ , concluimos que  $\mathcal{U}$  pertenece a una única componente ergódica de  $\mathcal{F}$ . □

Los Teoremas 5.7 y 5.8 nos dicen que para puntos que están en a lo más una curva singular hay vecindades que pertenecen a un única componente ergódica. Resta ver que sucede con los puntos que pertenecen a más de una posible curva singular, en otras palabras con los puntos  $x \in \mathcal{M}$  tales que existen enteros  $m, n$  distintos para los cuales  $x \in \mathcal{F}^n(\mathbb{S} \cup \mathcal{S}_0) \cap \mathcal{F}^m(\mathbb{S} \cup \mathcal{S}_0)$ . Por el Teorema 2.5 sabemos que  $\mathcal{F}^k(\mathcal{S}_0)$  está constituido por curvas inestables (resp. estables) para  $k > 0$  (resp.  $k < 0$ ), también sabemos por los comentarios posteriores a la definición del *nuevo espacio de colisiones* que  $\mathcal{F}^k(\mathbb{S})$  es una familia de curvas inestable (resp. estables) para  $k > 0$  (resp.  $k < 0$ ). Concluimos que si  $n \cdot m < 0$  entonces  $\mathcal{F}^n(\mathbb{S} \cup \mathcal{S}_0) \cap \mathcal{F}^m(\mathbb{S} \cup \mathcal{S}_0)$  contiene a lo más una cantidad numerables de puntos (estamos intersectando numerables curvas inestables con numerables curvas inestables). Supongamos ahora que  $n \cdot m \geq 0$ , sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $n > m \geq 0$ . Observar que  $\mathcal{F}^{-m}$  mapea  $\mathcal{F}^n(\mathbb{S} \cup \mathcal{S}_0) \cap \mathcal{F}^m(\mathbb{S} \cup \mathcal{S}_0)$  a  $\mathcal{F}^{n-m}(\mathbb{S} \cup \mathcal{S}_0) \cap (\mathbb{S} \cup \mathcal{S}_0)$  a biyectivamente y que  $\mathcal{F}^{n-m}(\mathbb{S} \cup \mathcal{S}_0) \cap (\mathbb{S} \cup \mathcal{S}_0)$  es intersección de curvas inestables con rectas de pendiente cero, es un conjunto numerable. Hemos probado lo siguiente

**Proposición 5.10.** *La cantidad de puntos que pertenecen a más de una curva singular es numerable.*

Sea  $E$  el conjunto numerable de puntos dado por la Proposición 5.10. Sea  $\mathcal{M}_i$  una de las componentes conexas de nuestro espacio de colisiones  $\mathcal{M}$ . Tomemos dos puntos  $x, y \in \mathcal{M}_i \setminus E$  y  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_i$  una curva continua que no tome puntos de  $E$  tal que  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma(T) = y$ . Observemos que cada punto  $a \in \gamma([0, T])$  tiene una vecindad  $\mathcal{U}_a$  que pertenece a una única componente ergódica de  $\mathcal{F}$ . La familia de abiertos  $\{\mathcal{U}_a\}_{a \in \gamma([0, T])}$  forma un cubrimiento abierto de  $\gamma([0, T])$ . Por compacidad de  $\gamma([0, T]) \subset \mathbb{R}^2$  nos quedamos con una familia finita  $\{a_i\}_{i=0}^N \subset \gamma([0, T])$  numerada de tal modo que existen reales  $\{t_i\}_{i=0}^N \subset [0, T]$  con  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$  y  $\gamma(t_i) = a_i$ . Es un hecho general que para este tipo de dinámicas donde las componentes ergódicas tienen medida positiva respecto a Lebesgue si tengo dos conjuntos  $A$  y  $B$  que pertenecen a ciertas componentes ergódicas y  $A \cap B$  tiene medida positiva respecto a Lebesgue entonces  $A$  y  $B$  están en la misma componente ergódica, para esto basta usar la propiedad de que un conjunto  $A$  está en una única componente ergódica si y solo si para toda función continua  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene que  $\bar{f}$  es constante para Lebesgue casi todo punto. Por un argumento de cadena podemos ir pasando por los abiertos del cubrimiento (por medio de sus intersecciones usando lo comentado anteriormente) desde el que cubre  $x$  hasta el que cubre  $y$  y concluir que todos viven en una misma componente ergódica. De esta

manera demostramos que  $\mathcal{M}_i$  está en una única componente ergódica. Tomemos un punto  $x \in \mathcal{M}_i \setminus (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_0)$  y una vecindad  $\mathcal{U}$  de  $x$  tal que  $\mathcal{U} \cap (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_0) = \emptyset$ . Observar que  $\mathcal{U}$  es difeomorfo con su imagen y como el soporte de cualquier medida invariante es un conjunto invariante, si  $\mathcal{U}$  pertenece a una componente ergódica, también lo hace  $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ . Se sigue que si  $\mathcal{F}(x) \in \mathcal{M}_j$ , entonces  $\mathcal{M}_i$  y  $\mathcal{M}_j$  pertenecen a una misma componente ergódica. De la finitud de las componentes es más bien evidente que podemos conectar todas las componentes de billar tal cual lo hicimos con  $\mathcal{M}_i$  y  $\mathcal{M}_j$ .

**Teorema 5.11.** *La función  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  es ergódica.*

Recordemos que el flujo  $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  se obtiene de levantar la aplicación  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  por medio de la función  $\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  que nos da el tiempo de primer retorno a  $\mathcal{M}$ , de manera más formal el flujo  $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  se obtiene como un flujo de suspensión con la aplicación  $\mathcal{F}$  en la base  $\mathcal{M}$  y función techo  $\tau$ . Supongamos que hay un conjunto  $A \subset \Omega$  que es invariante por el flujo, en particular las órbitas de todo punto  $x \in A$  deben permanecer en  $A$ . Usando las coordenadas que nos da la suspensión, si  $x = (y, s)$  para  $y \in \mathcal{M}$  y  $0 \leq s < \tau(y)$ , entonces  $\Phi^{-s}(y, s) = (y, 0) \in A$  y  $\Phi^{\tau(y)-s}(y, s) = (\mathcal{F}(y), 0) \in A$ . Sea  $\pi : \Omega \rightarrow \mathcal{M}$  la proyección a la coordenada en  $\mathcal{M}$  que manda  $(y, s) \rightarrow y$  cuando  $0 \leq s < \tau(y)$ . Por lo comentado anteriormente  $B := \pi(A)$  es invariante y por tanto de medida total en  $\mathcal{M}$  (por ergodicidad de  $\mathcal{F}$ ). De la invarianza de  $A$  tenemos que  $\pi^{-1}(B) = A$  y por tanto  $A$  tiene medida total con la medida que se levanta a partir de  $\mu$ , que como ya vimos es la medida  $dx dy dw$  normalizada. Finalmente sacamos como Corolario al Teorema 5.11

**Corolario 5.12.** *EL flujo  $\Phi^t : \Omega \rightarrow \Omega$  es ergódico para la medida  $(2\pi|\mathcal{D}|)^{-1} dx dy dw$ .*

Con un poco más de esfuerzo puede probarse que  $\mu$  es de hecho mixing, K-mixing y Bernoulli. La propiedad de ser mixing también puede llevarse al flujo del billar mediante un argumento parecido a las cadenas de Hopfs. Enunciaremos estos resultados sin una prueba (la demostración puede verse en [8], Capítulo 6).

**Teorema 5.13.** *Para billares de tipo A, la medida  $\mu$  es mixing, K-mixing y Bernoulli, además el flujo  $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  es mixing.*

### 5.3. Particiones de Markov

Para terminar este capítulo quiero hacer un pequeño link entre la dinámica de  $\mathcal{F}$  y un tipo relativamente bien entendido de sistemas dinámicos, los shifts en un espacio simbólico. Para ciertos billares es posible encontrar particiones de Markov subordinadas a la función  $\mathcal{F}$ . Este hecho es de particular interés cuando se quiere llevar el problema a un espacio simbólico, donde podemos usar resultados de formalismo termodinámico para obtener información de la entropía o presión para cierto potencial de interés. Referencias para este tipo de trabajos son [6] y [7] (donde este último es un trabajo de Sinai con Bunimovich que sigue la misma línea de este manuscrito).

**Definición.** Un conjunto  $\mathcal{D} \in \mathcal{M}$  de medida positiva se dice un *paralelógramo* si para cada par de puntos  $x, y \in \mathcal{D}$  se tiene que  $V^u(x) \cap V^s(y)$  consiste en un único punto, además este punto está en  $\mathcal{D}$ .

Dado  $A \subset \mathcal{M}$ , usaremos la notación  $V_A^u(z)$  para representar  $V^u(z) \cap A$ , análogamente  $V_A^s(z) = V^s(z) \cap A$ . Consideremos una colección  $\eta = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots\}$  finita o infinita numerable de paralelogramos tal que se cumple  $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  y  $\mu(\mathcal{M} \setminus \cup_i \mathcal{D}_i) = 0$ .

**Definición.**  $\eta$  se dice una partición de Markov si para cada  $x \in \mathcal{D}_i, Tx \in \mathcal{D}_j, T^{-1}x \in \mathcal{D}_k$  se cumple que

$$\mathcal{F}(V_{\mathcal{D}_i}^s(x)) \subset V_{\mathcal{D}_j}^s(\mathcal{F}(x)) \text{ y } \mathcal{F}^{-1}(V_{\mathcal{D}_i}^u(x)) \subset V_{\mathcal{D}_k}^u(\mathcal{F}^{-1}(x)).$$

**Teorema 5.14.** ([6]) *Es posible construir particiones de Markov numerables para billares de tipo A.*

El estudio del formalismo termodinámico de este tipo de sistemas (un shift en un espacio simbólico con alfabeto numerable) ha tenido grandes avances en los últimos 15 años, de hecho se pueden decir muchas cosas respecto al flujo de suspensión dado por la función  $\tau$ . Ver por ejemplo [3], [15].



# Bibliografía

- [1] W. Ambrose, *Representation of Ergodic Flows*, Ann. Math (2), v.**42** (1941), 723-739.
- [2] D.V. Anosov, *Geodesic flow on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Math v.**90** (1967).
- [3] L. Barreira, G. Iommi, *Suspension flows over countable Markov shifts*, J. Stat. Phys., v.**124** (2006), 207-230.
- [4] L. Barreira, Ya. Pesin, *Lectures on Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory*, University lecture series, v.**23** (2001).
- [5] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Springer Lecture Notes in Math. v.**470** (1975).
- [6] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, *Markov partitions for Dispersed Billiards*, Comm. Math. Phys. v.**78** (1980), 247-280
- [7] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, N. Chernov, *Markov partitions for two-dimensional billiards*, Russ. Math. Surv. v.**45** (1991), 47-106.
- [8] N. Chernov, R. Markarian, *Chaotic Billiards*, Mathematical surveys and monographs, v.**127** (2006).
- [9] I. P. Cornfeld, S.V. Fomin, Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, v.**245**, Springer-Verlag, New York (1982).
- [10] D. Dolgopyat, *Lectures on  $u$ -Gibbs states*, Conference on Partially Hyperbolic Systems, Northwestern Univ. (2001).
- [11] A. Fathi, M. Herman, J-C. Yoccoz, *A proof of Pesin's stable manifold theorem*, Geometric Dynamics, Springer Lecture Notes in Math. v.**1007** (1983), 117-215.
- [12] B. Hasselblatt, A. Katok, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge U. Press, (1995).
- [13] E. Hopf, *Statistik der geodetischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung*, Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, v.**91**, (1939) 261-304.
- [14] E. Hopf, *Statistik der Lösungen geodatischer Probleme vom unstabilen Typus, II*, Math. Annalen, v.**117**, (1940), 540-608.
- [15] T. Kempton, *Thermodynamic formalism for suspension flows over countable Markov shifts*, Nonlinearity, v.**24** (2011), 2763-2775.
- [16] F. Ledrappier, *Propriétés ergodiques des mesures de Sinai*, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. v.**59** (1984), 163-188.

- [17] V. I. Oseledets, *Multiplicative ergodic theorem: Characteristic Lyapunov exponents of dynamical systems*, Trudy MMO, **19** (1968), 179-210.
- [18] Ya. Pesin, *Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, Russ. Math. Surv. v.**32** (1977), 55-114.
- [19] Ya. Pesin, *Dynamical systems with generalized hyperbolic attractors: hyperbolic, ergodic and topological properties*, Erg. Th. Dynam. Sys. v.**2** (1992) 123-151.
- [20] Ya. B. Pesin, Ya. G. Sinai, *Gibbs measures for partially hyperbolic attractors*, Erg. Th. Dynam. Sys. v.**2** (1982), 417-438.
- [21] D. Ruelle, *A measure associated with Axiom A attractors*, Amer. J. Math. (1976), 619-654.
- [22] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism*, Addison Wesley, (1978).
- [23] Ya. G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards*, Russ. Math. Surv. v.**25** (1970), 137-189.
- [24] Ya. G. Sinai, *Gibbs measure in ergodic theory*, Russian Math. Survey v.**27** (1972), 21-69.
- [25] P. Walters, *A Dynamical Proof of the Multiplicative Ergodic Theorem*, Trans. Ame. Math. Soc. v.**335**, No. 1 (1993), 245-257.
- [26] M. Wojtkowski, *Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents*, Comm. Math. Phys. v.**105** (1986), 391-414.
- [27] M. Wojtkowski, *Invariant families of cones and Lyapunov exponents*, Erg. Th. Dynam. Sys. v.**5** (1985), 145-161.
- [28] L. Young, *What are SRB measures, and which dynamical systems have them?*, J. Stat. Phys. v.**108**, Issue 5, (2002), 733-754.