

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS

**Nuevas singularidades en superficies estables
simplemente conexas con $p_g = 0$**

Por

Arié Antoine Stern González

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al
grado de Magister en Ciencias Exactas mención Matemática.

Profesor Guía : Giancarlo Urzúa

Comisión Informante:

Maximiliano Leyton - Universidad de Talca

Álvaro Liendo - Universidad de Talca

Rubí E. Rodríguez - Pontificia Universidad Católica de Chile

Julio, 2013
Santiago-Chile

A mis padres.

Agradecimientos

Me gustaría comenzar dando las gracias a mi profesor guía Giancarlo Urzúa. Por su paciencia, su apoyo y por todo lo que me ha enseñado durante el magister. Por estar siempre disponible para conversar, darme consejos y aclarar mis dudas.

También me gustaría agradecer a los profesores Max Leyton, Álvaro Liendo y Rubí Rodríguez, por revisar la tesis y por sus valiosos comentarios que contribuyeron a mejorar este trabajo.

Agradecer a mis amigos Robbie, Bastián, Beto y Gionella con quienes he compartido todos estos años desde que comencé a estudiar matemáticas.

Finalmente agradecer a mi familia, en especial a mis padres, Rodrigo y Viviana, por su cariño y apoyo constante para alcanzar cada una de las metas que me he propuesto.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Teoría general	3
1.1. Superficies algebraicas	3
1.2. Fibraciones elípticas racionales	6
1.3. Singularidades	9
1.4. Deformaciones locales	13
1.5. Deformaciones globales y móduli	15
1.6. Grupo fundamental	21
Capítulo 2. Construcción de las superficies	25
2.1. Modelo de construcción de acuerdo a Lee y Park	25
Capítulo 3. Resultados	31
3.1. $K^2 = 1$	34
3.2. $K^2 = 2$	44
3.3. $K^2 = 3$	73
3.4. W.H.S.	89
Capítulo 4. Preguntas	97
Apéndice	99
Lista de símbolos	113
Bibliografía	115

Introducción

En esta introducción usaré el lenguaje desarrollado en el primer capítulo de esta tesis. Las variedades mencionadas están definidas en \mathbb{C} y la topología considerada es la analítica inducida por \mathbb{C}^m , algún m .

Uno de los problemas fundamentales en geometría algebraica es el de clasificar variedades. Es decir, dadas dos variedades, nos gustaría saber si éstas son isomorfas o no. Esta pregunta en general es difícil de responder, sin embargo, uno se da cuenta que cuando dos variedades son isomorfas, entonces éstas tienen ciertas características comunes como por ejemplo la dimensión y la irreductibilidad. Todas dichas propiedades que comparten las variedades isomorfas se llaman invariantes. Así una primera prueba para determinar si dos variedades son isomorfas es calcular estos invariantes para cada una de ellas y si son distintos entonces sabemos que las variedades no son isomorfas. Por otro lado, el hecho que dos variedades tengan los mismos invariantes en general no es suficiente para asegurar que son isomorfas. Asociado a este problema de clasificación de variedades están los llamados espacios de móduli. Este espacio es otra variedad en la que cada punto representa una clase de isomorfismo de las variedades que estamos clasificando con ciertos invariantes fijos. Por lo general este espacio de móduli no es compacto ya que degeneraciones de variedades no singulares puede dar como resultado una variedad singular. Nos interesa estudiar una compactificación particular de este espacio.

Deligne y Mumford [7] definieron una compactificación del espacio de móduli de curvas de género $g \geq 2$ agregando a este último las llamadas curvas estables, las cuales representan ciertas curvas proyectivas con a lo más nodos como singularidades. Esto fue generalizado para el caso del espacio de móduli de superficies algebraicas (no singulares) de tipo general con invariantes topológicos K^2 y χ fijos por Kollár-Shepherd-Barron [14]. En particular a nosotros nos interesa estudiar el caso con $p_g = h^0(\Omega^2) = 0$ (así $\chi = 1$), $1 \leq K^2 \leq 4$ y simplemente conexas. Estos invariantes son los más chicos posibles para superficies de tipo general. Alrededor de 1980, Barlow encuentra los primeros ejemplos de superficies de tipo general con $p_g = 0$, $K^2 = 1$ y simplemente

conexas. Esta era la única familia de superficies con estas características conocidas hasta que en 2007 Lee y Park desarrollaron un método para construir nuevos ejemplos [16]. La pregunta natural era si existían superficies de tipo general, simplemente conexas con $p_g = 0$ y $K^2 = 2, 3$ y 4. Usando esa técnica Lee, Park y colaboradores probaron [16, 20, 21] la existencia de estas superficies concluyendo de esta manera que los espacios de móduli correspondientes eran no vacíos. A diferencia de lo que ocurre con la compactificación del espacio de móduli de curvas, donde sabemos cual es el tipo topológico de las curvas estables, en la compactificación del espacio de móduli de las superficies de tipo general no es claro ni siquiera que tipo de singularidades pueden aparecer. De hecho hay muy pocos ejemplos concretos para situaciones especiales de la descripción de estos espacios de móduli y su compactificación. (Por ejemplo sabemos que la compactificación es una variedad proyectiva, pero en general ni siquiera sabemos si esta variedad proyectiva es conexa). Luego resulta interesante construir nuevas superficies estables para intentar conocer mejor este espacio.

En esta tesis se construyen nuevas superficies estables normales, en particular proyectivas, irreducibles y con singularidades de dimensión cero. Estas superficies son nuevas porque poseen nuevas singularidades de acuerdo a la literatura existente. Más precisamente, en esta tesis construimos 49 nuevas singularidades en superficies estables con $p_g = 0$, grupo fundamental trivial y K^2 variando en 1, 2, 3 adaptando la técnica desarrollada por Lee y Park. Además para $K^2 = 2$ y 3 se logró sobrepasar el índice conocido hasta ahora para las singularidades. También se construyen ejemplos con singularidades cociente elíptico y ejemplos con singularidades WHS con QHD las cuales no aparecen en la literatura. Las singularidades cociente elíptico si son singularidades admisibles para superficies estables. Sin embargo, las WHS con QHD no lo son, pero se conjetura que el límite estable de los correspondientes ejemplos podría corresponder a superficies no normales. No hay ejemplos de superficies estables no normales con los invariantes que fijamos arriba.

CAPÍTULO 1

Teoría general

En este capítulo desarrollaremos los tópicos necesarios para entender el tema central de esta tesis y aprovechamos de fijar la notación que usaremos a lo largo de ésta.

1.1. Superficies algebraicas

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado.

DEFINICIÓN 1. Una **superficie proyectiva** X es una variedad proyectiva (irreducible) de dimensión dos. En otras palabras tenemos un ideal homogéneo primo $I_X = (F_1, \dots, F_m) \subset k[x_0, \dots, x_n]$ para algún n tal que

$$X = \{x = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}_k^n : F_1(x) = 0, \dots, F_m(x) = 0\}$$

y $\dim X = 2$. La superficie X se dirá **no singular** si es no singular en cada uno de sus puntos [12, Ch.1 Sect.5].

Una superficie se estudia principalmente a través de las curvas que contiene. Una **curva** en una superficie es una subvariedad (irreducible) de dimensión uno.

DEFINICIÓN 2. Sea X superficie proyectiva no singular. Definimos el grupo libre abeliano de los **divisores** de X como

$$\text{Div}(X) = \left\{ \sum_{C \subset X} n_C C \right\}$$

donde C es una curva en X , $n_C \in \mathbb{Z}$ y $n_C = 0$ salvo para una cantidad finita de curvas. La operación corresponde a sumar los n_C para cada C ; así 0 es la identidad. Un divisor $D \in \text{Div}(X)$ se dice **efectivo** si $n_C \geq 0$ para todo $C \subset X$.

Sea $K(X)$ el cuerpo de funciones racionales de X [12, Ch.1 Sect.3]. Dada $f \in K(X) - \{0\}$ existe un divisor $\text{div}(f)$ el cual codifica las curvas cero (en $f^{-1}(0)$) y las curvas polo (en $f^{-1}(\infty)$) de f con multiplicidades. Un divisor D se dice principal si $D = \text{div}(f)$ para algún $f \in K(X)$. Notar que el subconjunto de divisores principales forma un subgrupo de $\text{Div}(X)$. El grupo cociente $\text{Div}(X)/\{\text{divisores principales}\}$ es el **grupo**

de Picard de X , denotado por $Pic(X)$. Si D y D' pertenecen a la misma clase en $Pic(X)$ entonces decimos que son **linealmente equivalentes** y lo denotamos $D \sim D'$. Una clase distinguida en $Pic(X)$ es la **clase canónica** la cual se define como la clase de cualquier 2-forma diferencial racional en X [26, Ch.3 Sect. 6.3]. Cualquier divisor en esta clase se llamará divisor canónico y la clase se denotará por K_X .

La operacion biracional más importante para una superficie no singular es el blow-up en un punto; cf. [12, Ch.5 Sect.3].

DEFINICIÓN 3. [26, Ch.2 Sect.4] *Sea p un punto no singular de una superficie algebraica X . Se define el blow-up de X en p , denotado por $Bl_p(X)$, como un morfismo biracional $\pi : Bl_p(X) \rightarrow X$ que cumple las siguientes condiciones:*

- $Bl_p(X)$ es una superficie algebraica no singular.
- $\pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{P}_k^1 =: E$.
- $\pi|_{Bl_p(X) \setminus E}$ es un isomorfismo.

Notar que dado $p \in X$ no singular, siempre existe el blow-up y es único salvo isomorfismo [26, Ch. 2 Sect.4].

Sea X una superficie proyectiva no singular. Luego X posee una teoría de intersección. Esto es generalizar la intersección intuitiva de dos curvas distintas contando multiplicidades para cualquiera dos divisores de X .

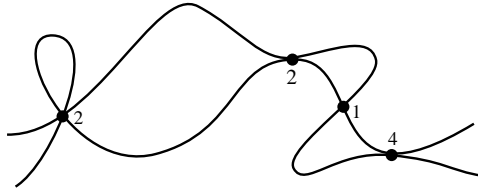


FIGURA 1.1. Posible intersección de dos cúbicas en \mathbb{P}_k^2

De hecho el producto de intersección está bien definido en las clases del grupo de Picard de X : $Pic(X) \times Pic(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $(D, D') \mapsto D \cdot D'$. Este número de intersección es el único que satisface ciertas propiedades naturales [12, Ch.5 Sect.1], [3, Ch.1]. Notar que en particular para todo D la autointersección $D^2 = D \cdot D$ tiene sentido.

Dado $\bar{X} = Bl_p(X)$, es importante poder relacionar la teoría de intersección y la clase canónica en \bar{X} con lo que teníamos originalmente en X . Las siguientes dos proposiciones nos dicen explícitamente cuales son estas relaciones.

PROPOSICIÓN 1. [12, Ch.5 Sect.3] *El morfismo natural $\pi^* : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(\bar{X})$ y $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(\bar{X})$ definido por $1 \mapsto 1 \cdot E$ dan lugar a un isomorfismo $\text{Pic}(\bar{X}) \simeq \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}$. La teoría de intersección en \bar{X} está determinada por las reglas:*

- (a) *si $C, D \in \text{Pic}(X)$, entonces $(\pi^*C) \cdot (\pi^*D) = C \cdot D$;*
- (b) *si $C \in \text{Pic}(X)$, entonces $(\pi^*C) \cdot E = 0$;*
- (c) $E^2 = -1$.

Finalmente, si $\pi_ : \text{Pic}(\bar{X}) \rightarrow \text{Pic}(X)$ denota la proyección al primer factor, entonces:*

- (d) *si $C \in \text{Pic}(X)$ y $D \in \text{Pic}(\bar{X})$, entonces $(\pi^*C) \cdot D = C \cdot (\pi_*D)$.*

PROPOSICIÓN 2. [12, Ch.5 Sect.3] *La clase canónica de \bar{X} viene dada por $K_{\bar{X}} = \pi^*K_X + E$. Por lo tanto $K_{\bar{X}}^2 = K_X^2 - 1$.*

Dos teoremas importantes consecuencia de la teoría de intersección son:

TEOREMA 1 (**Fórmula de adjunción**). [12, Ch.5 Ex.1.3] *Sea C una curva en X y sea $p_a(C)$ su género aritmético [12, Ch.1 Ex. 7.2]. Entonces*

$$C^2 + K_X \cdot C = 2p_a(C) - 2.$$

Recordar que $p_a(C) \geq 0$, y es igual a cero si y sólo si $C \simeq \mathbb{P}_k^1$. Si C es no singular, entonces $p_a(C) = g(C) =$ dimensión sobre k de las 1-formas diferenciales en C (i.e. el género de C).

EJEMPLO 1. *Sea $X = \mathbb{P}_k^2$ y sea C una curva de grado d en X definida por $F = 0$. Notemos que dada una recta L cualquiera definida por $\{G = 0\}$, entonces el cociente F/G^d define una función racional en \mathbb{P}_k^2 y por tanto $C \sim dL$. Esto nos permite concluir que $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} = \langle L \rangle$. Si C' es otra curva de grado d' , entonces $C \cdot C' = dL \cdot d'L = dd'$ (Teorema de Bezout). También se tiene que $K_{\mathbb{P}_k^2} \sim -3L$ y aplicando la fórmula de adjunción obtenemos que $p_a(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.*

Cada divisor D define un haz invertible $\mathcal{O}_X(D)$, el cual depende de manera uno a uno con los elementos en $\text{Pic}(X)$, es decir $D \sim D' \Leftrightarrow \mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{O}_X(D')$ [12, Ch.2 Sect.6]. Por ejemplo $D = 0$ define el haz estructural \mathcal{O}_X , y un divisor canónico define el haz de las 2-formas Ω_X^2 regulares.

Para $D \in \text{Pic}(X)$, se define

$$\chi(D) = h^0(\mathcal{O}_X(D)) - h^1(\mathcal{O}_X(D)) + h^2(\mathcal{O}_X(D))$$

donde h^i es la dimensión sobre k de H^i [12, Ch. III].

EJEMPLO 2. Para $D = 0$, $\chi(0) = \chi(\mathcal{O}_X) =$ *característica de Euler de X* y $h^0(\mathcal{O}_X) = 1$ (ya que $H^0(\mathcal{O}_X) = k$). Se define la **irregularidad de X** como $q(X) = h^1(\mathcal{O}_X)$ y el **género geométrico de X** como $p_g(X) = h^2(\mathcal{O}_X)$. Recordemos que por la dualidad de Serre [12, Ch. III, Sect. 7] $h^2(\mathcal{O}_X) = h^0(K_X)$. De esta manera $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X)$. Notar que si $k = \mathbb{C}$, entonces la teoría de Hodge nos dice que $h^1(\mathcal{O}_X) = h^0(\Omega_X^1)$.

TEOREMA 2 (Riemann-Roch). [12, Ch.5 Thm.1.6] Sea $D \in \text{Pic}(X)$. Entonces:

$$\chi(D) = \frac{1}{2}D \cdot (K_X - D) + \chi(\mathcal{O}_X).$$

1.2. Fibraciones elípticas racionales

En esta sección nuestro cuerpo base es $k = \mathbb{C}$. De aquí en adelante denotaremos $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ simplemente por \mathbb{P}^n .

DEFINICIÓN 4. Una **fibración elíptica** sobre una curva proyectiva suave C , es un morfismo sobreyectivo $f: S \rightarrow C$ donde S es una variedad proyectiva no singular y las fibras generales son curvas no singulares de género uno. Si S es una superficie, entonces diremos que S es una **superficie elíptica** sobre C . Cuando $C = \mathbb{P}^1$ entonces diremos que la **fibración elíptica es racional** y si S es superficie entonces la llamaremos **superficie elíptica racional**.

Vamos a asumir que todas las superficies elípticas que aparezcan de aquí en adelante son minimales con respecto a la fibración elíptica, es decir, que las fibras no contengan curvas (-1) . Una **curva (-1)** es una curva racional no singular con autointersección -1 .

EJEMPLO 3. Sean g, h polinomios homogéneos de grado tres en $\mathbb{C}[x, y, z]$ tales que g y h no tienen factores en común. Entonces el pincel de cúbicas asociado a g, h dado por curvas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda g + \mu h = 0\} \subset \mathbb{P}^2 \text{ con } [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

define una superficie elíptica racional S dada por el blow-up de \mathbb{P}^2 en los nueve puntos base del pincel (estos pueden ser infinitamente cercanos). Salvo finitos $[\lambda, \mu]$, $\Gamma_{\lambda, \mu}$ en S es una curva elíptica no singular. En el Capítulo 2 se muestra un ejemplo explícito.

El ejemplo 3 será muy importante en esta tesis ya que todas las superficies elípticas que consideraremos serán obtenidas a partir de un pincel de cúbicas en \mathbb{P}^2 .

DEFINICIÓN 5. Una **sección** de una superficie elíptica $f: S \rightarrow C$ es un morfismo $s: C \rightarrow S$ tal que $f \circ s = \text{id}_C$.

Las secciones forman un grupo abeliano finitamente generado llamado **grupo de Mordell-Weil**, el cual denotaremos por $MW(S)$ (mirar [18] [6]). Este es grupo abeliano bajo la adición inducida por la curva elíptica sobre el cuerpo $K(C)$.

Notemos que la superficie del ejemplo 3 tiene al menos una sección, la curva excepcional correspondiente al último blow-up. Luego las superficies elípticas que se obtienen a partir de un pincel de cúbicas en \mathbb{P}^2 son superficies elípticas racionales con al menos una sección. De hecho, toda superficie elíptica racional S con al menos una sección es isomorfa al blow-up de \mathbb{P}^2 en los puntos base de un pincel de cúbicas [6, Th. 5.6.1].

Kodaira clasificó las posibles fibras singulares que puede tener una superficie elíptica las cuales se muestran en el Cuadro 1 [2, p. 200]. Dentro de las fibras singulares hay dos que son irreducibles, las fibras I_1 y II , y todas las demás tienen al menos dos componentes. En el caso de las fibras singulares irreducibles, éstas tienen autointersección cero, mientras que cada una de las componentes del resto de las fibras singulares tiene autointersección -2 . Las únicas fibras que pueden ser múltiples son las fibras del tipo I_n con $n \geq 0$.

Notar que si hay secciones, entonces la multiplicidad m para las fibras I_n tiene que ser igual a uno.

En [23], Person clasificó todas las posibles configuraciones de fibras singulares para superficies elípticas racionales.

TEOREMA 3. *Dada una superficie elíptica racional $f: S \rightarrow C$ con secciones, entonces*

$$K_S \sim -F$$

donde F es la clase de una fibra general. En particular $K_S^2 = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Por lo anterior, S es el blow-up de un pincel de cúbicas. Sabemos que

$$K_S \sim \pi^*(-3L) + \sum_{i=1}^9 e_i$$

y

$$F \sim \pi^*(3L) - \sum_{i=1}^9 e_i$$

donde e_i es el pull-back de la i -ésima curva (-1) con todos los blow-ups que le siguen. Entonces $K_S \sim -F$. \square

Notación	Fibra
$I_0 (m \in \mathbb{N})$	
$I_1 (m \in \mathbb{N})$	
$I_2 (m \in \mathbb{N})$	
$I_n, n \geq 3 (m \in \mathbb{N})$	
II	
III	
IV	
I_0^*	
$I_n^*, (n \geq 1)$	
IV^*	
III^*	
II^*	

TABLA 1. Tabla de Kodaira para fibras en fibraciones elípticas. Se muestran las multiplicidades de las componentes.

1.3. Singularidades

En esta sección fijaremos el cuerpo base $k = \mathbb{C}$ y miraremos ciertas singularidades en superficies normales. Recordamos que por definición una superficie (irreducible) X es **normal** si todos los anillos locales \mathcal{O}_p en cada punto $p \in X$ son integralmente cerrados (en $K(X)$) [26, Ch.2 Sect.5]. Sabemos que el conjunto de puntos singulares de X tiene dimensión cero [26, p.127]. En esta sección ($\mathbf{p} \in \mathbf{X}$) significa que X es vecindad analítica de una singularidad normal p en dimensión dos.

Dado ($p \in X$) una **resolución minimal** de p es una superficie (irreducible) no singular \tilde{X} y un morfismo biracional $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que $\tilde{X} \setminus \sigma^{-1}(p)$ es isomorfo a $X \setminus p$ bajo σ y el divisor $\sigma^{-1}(p)$ no contiene una curva C isomorfa a \mathbb{P}^1 con $C^2 = -1$. El divisor $\sigma^{-1}(p)$ se llamará **divisor excepcional** de σ . Todas estas resoluciones locales se pueden globalizar en cualquier superficie normal. Todo ($p \in X$) tiene una resolución minimal y única [2, Ch.3 Thm.6.1, Thm.6.2].

EJEMPLO 4. Considerar ($p \in X$) donde X es una vecindad de $p = (0, 0, 0)$ en $\{xy = z^2\} \subset \mathbb{A}^3$. El tipo analítico de esta singularidad se llama **nodo** y se denota por A_1 . La resolución minimal es la transformada propia de X en el blow-up de \mathbb{A}^3 en p (Ver Figura 1.2). Notar que el divisor excepcional es una curva $E \simeq \mathbb{P}^1$ con $E^2 = -2$.

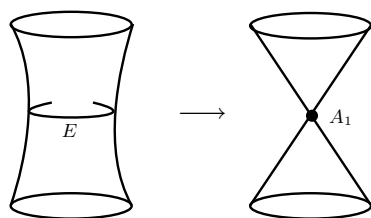


FIGURA 1.2. Resolución minimal del nodo.

Suponer por el momento que X es superficie proyectiva normal con una singularidad. Toda superficie normal posee divisor canónico [10, Sect. 0.18], y queremos saber como difieren con respecto a resolución minimal. Más precisamente, sea $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ resolución minimal de ($p \in X$), entonces numéricamente tenemos:

$$K_{\tilde{X}} \equiv \sigma^*(K_X) + \sum_i d(E_i)E_i$$

donde $\cup_i E_i$ es el divisor excepcional y $d(E_i) \in \mathbb{Q}$. Los números $d(E_i)$ se llaman **discrepancias** y se calculan a través del sistema lineal:

$$\left\{ K_{\tilde{X}} \cdot E_i = \sum_j d(E_j)(E_j \cdot E_i) \right\}_i$$

La solución es única ya que la matriz de intersección $[E_i \cdot E_j]$ es invertible. De hecho la matriz $[E_i \cdot E_j]$ es negativa definida por el criterio de Grauert [2, p.91]. Los $d(E_i)$ son no positivos ya que

LEMA 1. [13, Ch.3 Sect.7] *Sea X una superficie no singular y $C = \cup C_i$ un conjunto de curvas propias en X . Asuma que la matriz de intersección $(C_i \cdot C_j)$ es negativa definida. Sea $A = \sum a_i C_i$ una \mathbb{R} -combinación lineal de las curvas C_i . Asuma que $(A \cdot C_j) \geq 0$ para todo j . Entonces*

- (1) $a_i \leq 0$ para todo i .
- (2) Si C es conexo, luego $a_i = 0$ para todo i o $a_i < 0$ para todo i .
De esta forma las discrepancias $d(E_i)$ para la resolución minimal de más arriba satisfacen $d(E_i) \leq 0$.

Por Mumford [19], toda superficie normal proyectiva tiene teoría intersección para sus divisores. Luego tenemos K_X^2 bien definido

$$K_X^2 := K_{\tilde{X}}^2 - \left(\sum_i d(E_i) E_i \right)^2.$$

Las singularidades más importantes en esta tesis son las singularidades cíclicas que pasamos a definir ahora. Sea $0 < q < m$ enteros con $(m, q) = 1$. Considerar el automorfismo de \mathbb{C}^2 definido por $T(x, y) = (\mu_m x, \mu_m^q y)$ donde μ_m es una raíz m -ésima primitiva de la unidad. Una **singularidad cíclica** es la singularidad en $(0, 0)$ del cociente $\mathbb{C}^2 / \langle T \rangle$ para algún par m, q . Esta singularidad se denotará por $\frac{1}{m}(1, q)$. Notar que analíticamente esta singularidad es la singularidad de la variedad afín correspondiente a la \mathbb{C} -álgebra $\mathbb{C}[x, y]^{(T)} \subset \mathbb{C}[x, y]$, i.e. los polinomios invariantes por T .

EJEMPLO 5. *El nodo del Ejemplo 4 es analíticamente $\frac{1}{2}(1, 1)$. Observar que en este caso $T(x, y) = (-x, -y)$ y así $\mathbb{C}[x, y]^{(T)}$ es generado como \mathbb{C} -álgebra por x^2, y^2, xy .*

La resolución minimal de una singularidad $\frac{1}{m}(1, q)$ tiene como divisor excepcional una cadena de curvas $E_i \simeq \mathbb{P}^1$, $i = 1, \dots, s$ tal que $E_i \cdot E_{i+1} = 1$ si $i \in \{1, \dots, s-1\}$, $E_i \cdot E_j = 0$ si $j \neq i-1, i, i+1$, y $E_i^2 = -e_i$ donde

$$\frac{m}{q} = [e_1, \dots, e_s] := e_1 - \frac{1}{e_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{e_s}}}.$$

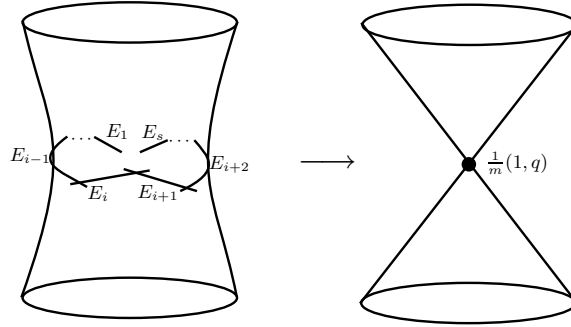


FIGURA 1.3. Resolución minimal de una singularidad cíclica $\frac{1}{m}(1, q)$

Notar que dados m, q como arriba existe una única tal fracción continua de Hirzebruch-Jung [2, Ch.3 Sect.5].

Definimos las siguientes sucesiones de números. Sea

$$0 = b_{s+1} < 1 = b_s < \dots < q = b_1 < m = b_0$$

dónde $b_{i+1} = e_i b_i - b_{i-1}$. De esta manera

$$\frac{b_{i-1}}{b_i} = e_i - \frac{1}{e_{i+1} - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{e_s}}}.$$

También,

$$0 = P_0 < 1 = P_1 < \dots < q^{-1} = P_s < m = P_{s+1}$$

donde q^{-1} es el inverso de q módulo m en el intervalo $[1, m-1]$, $P_{i+1} = e_i P_i - P_{i-1}$, y $Q_0 = -1$, $Q_1 = 0$, $Q_{i+1} = e_i Q_i - Q_{i-1}$. Así,

$$\frac{P_i}{Q_i} = e_1 - \frac{1}{e_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{e_{i-1}}}}.$$

Para la clase canónica tenemos

$$K_{\tilde{X}} \equiv \sigma^*(K_{\frac{1}{m}(1, q)}) - \sum_{i=1}^s \left(1 - \frac{b_i + P_i}{m}\right) E_i.$$

Y así la discrepancia de E_i es $-(1 - \frac{b_i + P_i}{m})$ [30].

Notar que

$$\left(\sum (1 - \frac{b_i + P_i}{m}) E_i\right)^2 = \sum_{i=1}^s (2 - e_i) - \frac{q + q^{-1} + 2}{m} + 2.$$

LEMA 2. *Sea $X = \frac{1}{m}(1, q)$ una singularidad cociente cíclica. Son equivalentes*

- (1) $m = dn^2$ y $q = dna - 1$ con $(n, a) = 1$.
- (2) K_X^2 es un entero.
- (3) $\frac{m}{(m, q+1)}$ divide a $(m, 1 + q)$.

DEMOSTRACIÓN. Siguiendo nuestra notación, si $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ es la resolución minimal, tenemos

$$(K_{\tilde{X}} - \sigma^* K_X)^2 = \sum_{i=1}^s (2 - e_i) - \frac{q + q^{-1} + 2}{m} + 2$$

luego $q + q^{-1} + 2 \equiv 0 \pmod{m}$. Esto nos da (1) si y sólo si (2). El (1) si y sólo si (3) es trivial. \square

Una **T-singularidad cíclica** es una singularidad que satisface una de las equivalencias del lema anterior y $n > 1$. Cuando $d = 1$, la llamaremos **singularidad de Wahl**. Estas últimas son particularmente importantes en esta tesis. Identificaremos la singularidad $\frac{1}{m}(1, q)$ con su fracción continua $[e_1, \dots, e_s]$. Definimos el índice de $\frac{1}{dn^2}(1, dna - 1)$ como n ; éste es el menor número natural tal que $nK_{\frac{1}{dn^2}(1, dna-1)}$ es Cartier.

LEMA 3. [14] *Una T-singularidad del tipo $\frac{1}{dn^2}(1, dna - 1)$ es*

- (i) o $[4]$ ($d = 1$), o $\frac{4d}{2d-1} = [3, 2, \dots, 2, 3]$ donde 2 aparece $d - 2$ veces ($d > 1$),
- (ii) o se obtiene partiendo con una de las singularidades en (i) e iterando las operaciones $[2, e_1, \dots, e_{s-1}, e_s + 1]$ y $[e_1 + 1, e_2, \dots, e_s, 2]$.

En el caso particular de las singularidades de Wahl, hay un método simple para calcular n, a y las discrepancias de las curvas que componen la cadena a partir de la fracción continua $[e_1, \dots, e_s]$.

LEMA 4. *Dado $[e_1, \dots, e_s] = \frac{n^2}{na-1}$ con $(n, a) = 1$ y $0 < a < n$, definamos la sucesión $n\delta_i := b_i + P_i$ para $i \in \{0, 1, \dots, s, s+1\}$ (b_i, P_i son los números para $[e_1, \dots, e_s]$ definidos arriba). Sean $\tilde{b}_i, \tilde{P}_i, (n+a)\tilde{\delta}_i := \tilde{b}_i + \tilde{P}_i$ los números para $\frac{(n+a)^2}{(n+a)a-1} = [e_1 + 1, \dots, e_s, 2]$. Entonces, $\tilde{\delta}_i = \delta_i$ para $i \in \{1, \dots, s+1\}$, y $\tilde{\delta}_0 = \tilde{\delta}_{s+2} = m + a = \delta_1 + \delta_{s+1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $b_0 + P_0 = n^2$, $b_1 + P_1 = na$, $\tilde{b}_0 + \tilde{P}_0 = (n + a)^2$, y $\tilde{b}_1 + \tilde{P}_1 = (n + a)a$. Entonces

$$\frac{\tilde{b}_2 + \tilde{P}_2}{n + a} = (e_1 + 1)a - (n + a) = e_1a - n = \frac{b_2 + P_2}{n}$$

y así, por las recurrencias definidas anteriormente, obtenemos $\tilde{\delta}_i = \delta_i$ para $i = 1, \dots, s + 1$. Uno ve que $\tilde{\delta}_0 = \tilde{\delta}_{s+2} = n + a = \delta_1 + \delta_{s+1}$. \square

Como las discrepancias son $-(1 - \frac{b_i + P_i}{n^2})$ entonces son iguales a $-1 + \frac{\delta_i}{n}$ y el δ_i se calcula recursivamente. Además este lema nos da una forma de calcular n, a para las fracciones de singularidades de Wahl a partir del proceso inductivo $[e_1, \dots, e_s] \rightarrow [e_1 + 1, \dots, e_s, 2]$ o $[2, e_1, \dots, e_s + 1]$, partiendo con [4]. Para [4] se tiene que $n = 2, a = 1$; aquí $\delta_1 = 1, \delta_0 = \delta_2 = 2$. Luego para [5, 2] tenemos $n = 1 + 2 = 3, a = 1 + 2 - 2 = 1$, y así se sigue.

1.4. Deformaciones locales

En esta sección vamos a considerar $k = \mathbb{C}$ y \mathbb{D} va a ser el germen de una curva suave con un punto destacado 0. Una **deformación** será un morfismo sobreyectivo $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$ donde \mathcal{X} es un 3-fold (analítico) normal complejo. Las fibras sobre $t \in \mathbb{D}$ se denotarán por X_t . Si X es una superficie compleja normal entonces una deformación de X es una deformación $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que X_0 es X . Una deformación de X es una **suavización** si X_t es no singular para $t \neq 0$.

Sea $(p \in X)$ una vecindad analítica normal dos dimensional de la singularidad p . Esta singularidad posee un espacio de deformación versal $\text{Def}(p \in X)$ (ver [5, Sect. 2]). Básicamente $\text{Def}(p \in X)$ parametriza todas las posibles deformaciones de la singularidad y dada una deformación arbitraria de la singularidad existe un morfismo desde la base a $\text{Def}(p \in X)$ tal que sobre los espacios tangentes es un isomorfismo.

EJEMPLO 6. $X = \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ entonces $\text{Def}(p \in X) = (0 \in \mathbb{C})$ y una familia versal es $X_t = \{x^2 + y^2 + z^2 = t\}$.

El espacio $\text{Def}(p \in X)$ es en general una variedad analítica la cual puede ser reducible, no reducida, etc. Para una singularidad cíclica, $\text{Def}(p \in X)$ tiene varias componentes y descripción concreta para cada una de ellas [27, Sect.10] [28]. En particular hay una manera combinatorial de contar cuantas componentes tiene [14, 28]. Notamos que toda singularidad racional $(p \in X)$ posee una componente en $\text{Def}(p \in X)$ tal que toda deformación sobre esa componente posee una resolución simultanea: la compontene de Artin. Además toda componente posee suavizaciones de $(p \in X)$ (ver [14, pag. 313]).

DEFINICIÓN 6. Para $(p \in X)$ singularidad cociente (localmente en $(0, 0)$, \mathbb{C}^2/G , donde G es un subgrupo finito de $GL(2, \mathbb{C})$), una deformación $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$ con $X \subset \mathcal{X}$ y $X_0 = X$ se dirá \mathbb{Q} -Gorenstein si y sólo si $K_{\mathcal{X}}$ es \mathbb{Q} -Cartier, i.e. existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nK_{\mathcal{X}}$ es un divisor de Cartier [12, Ch. III, Sect. 6].

TEOREMA 4. [14, Prop. 3.10] Una singularidad cociente $(p \in X)$ posee una deformación \mathbb{Q} -Gorenstein si y sólo si es una T -singularidad: ADE o cíclica $\frac{1}{dn^2}(1, dna - 1)$ con $(n, a) = 1$. Además hay una única componente en $\text{Def}(T\text{-singularidad})$ donde toda deformación es \mathbb{Q} -Gorenstein y para $\frac{1}{dn^2}(1, dna - 1)$ la dimensión de la componente es igual a d . Así las singularidades de Wahl son exactamente las T -singularidades cíclicas con componente \mathbb{Q} -Gorenstein de dimensión uno.

Las **singularidades ADE**, también llamadas singularidades **Du Val** o singularidades racionales dobles, son las singularidades más simples en superficies. El divisor excepcional de su resolución mínima tiene como grafo dual uno de tipo A_n o D_n o E_6, E_7, E_8 con sólo curvas racionales suaves de autointersección -2 llamadas curvas (-2) [2, Ch.III, Sect. 3].

Dada una singularidad $(p \in X)$ y una suavización de ella $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$ entonces existe una bien definida fibra de Milnor (ver 1.1 en [32]). Esta fibra de Milnor M es un 4-manifold real compacto con borde ∂M : el link de X . Este borde depende sólo de la singularidad. El número de Milnor μ es el rango de $H_2(M, \mathbb{Z})$.

EJEMPLO 7. Es sabido que $\text{Def}(\frac{1}{4}(1, 1))$ tiene dos componentes, una de dimensión tres y una de dimensión uno. El número de Milnor para suavizaciones en la de dimensión tres (componente de Artin) es $\mu = 1$, mientras que en la otra componente se tiene que $\mu = 0$. Así el número de Milnor depende de la suavización.

Dentro de las singularidades cíclicas, una singularidad tiene suavización con $\mu = 0$ si y sólo si es una singularidad de Wahl. De hecho estas singularidades pertenecen a la clase de singularidades para las cuales la homología racional de la fibra de Milnor es la homología racional de un disco. Son llamadas QHD (**rational homology disk**). En [4] los autores clasifican las singularidades QHD dentro de las singularidades WHS. Las **singularidades WHS** se definen como singularidades aisladas normales complejas de dimensión dos dadas por $\text{Spec}(A)$ donde A es un anillo graduado positivamente (2.1,[32]). Para los divisores excepcionales de las singularidades WHS que son QHD no cíclicas ver figuras 1 y 2 de [4]. Una conjetura de Wahl dice que las singularidades WHS con QHD son exactamente todas las singularidades QHD.

Una característica relevante para nosotros de estas singularidades es la siguiente:

PROPOSICIÓN 3. *Sea X una superficie normal proyectiva con sólo singularidades Q_1, \dots, Q_n WHS del tipo $\mathbb{Q}HD$. Sea $Z \rightarrow X$ su resolución minimal. Sea l_i el número de curvas excepcionales sobre q_i , entonces*

$$K_X^2 = K_Z^2 + \sum_{i=1}^n l_i.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver sección 2 en [29]

□

1.5. Deformaciones globales y móduli

A nosotros nos interesa deformar superficies normales proyectivas para así estudiar una compactificación del espacio de moduli de ciertas superficies algebraicas de tipo general. Una superficie minimal no singular se dice de **tipo general** si K es nef y $K^2 > 0$. El primer problema es como construir deformaciones a partir de una superficie normal proyectiva X . Notar que una deformación de X produce deformaciones de sus singularidades. La idea es hacer el proceso inverso, es decir, pegar deformaciones de sus singularidades para obtener una deformación de X . Este proceso tiene obstrucciones. La idea será construir X sin obstrucciones. Estas obstrucciones se expresan mediante cierto grupo de cohomología y así la estrategia es probar que ese grupo es cero. En efecto, cuando ese grupo es cero cualquier deformación de cada una de las singularidades de X se puede globalizar; cf. [17].

De esta forma primero hablaremos de la obstrucción y luego daremos criterios para su anulación en los casos que nos interesan. Específicamente para cuando X proviene de una fibración elíptica racional.

DEFINICIÓN 7. *Sea Z superficie proyectiva no singular y D divisor con cruces simples normales (CSN), i.e. D es divisor reducido con sólo nodos, y todas sus componentes son no singulares. Se define el haz de diferenciales en X con polos en D como el haz $\Omega_X^1(\log D)$ definido en [8, Sect.2].*

TEOREMA 5. *Sea Z una superficie proyectiva no singular, sean $W_1, \dots, W_r \subset Z$, donde W_i son divisores CSN excepcionales disjuntos de singularidades WHS con $\mathbb{Q}HD$ tales que W_i es una cadena o tiene una curva central de la cual salen tres cadenas (e.g. singularidades de Wahl; ver figuras 1 en [4]). Supongamos que*

$$H^0(Z, \Omega_Z^1(\log(\sum W_i) \otimes \mathcal{O}_Z(K))) = 0.$$

Entonces existe morfismo biracional $f : Z \rightarrow X$ tal que contrae los W_i , donde X es una superficie proyectiva normal con obstrucción cero.

DEMOSTRACIÓN. Para f y X normal proyectivo mirar [1] y para la obstrucción mirar lema 1 y teorema 2 de [16]. Para las singularidades que no son cíclicas usar primero Lema 1 de [16] junto con [33, Cor. 2.18]. \square

OBSERVACIÓN 1. Las WHS con QHD de la tabla 2 quedarían fuera del teorema anterior.

LEMA 5. Sea $f : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ una fibración elíptica con alguna sección. Suponer que f posee dos fibras singulares F_1 y F_2 de tipo I_n e I_m con $n, m \geq 1$. Sea $\pi : Y' \rightarrow Y$ el blow-up de Y en un nodo de F_1 y en un nodo de F_2 . Entonces,

$$H^0(Y', \Omega_{Y'}^1(\log(F_1 + F_2)) \otimes \mathcal{O}_{Y'}(K_{Y'})) = 0.$$

Esto es también cierto si usamos sólo una fibra singular.

DEMOSTRACIÓN. Mirar [22, proof of Thm.2.1]. \square

LEMA 6. Sea Y una superficie no singular proyectiva, y sea D un divisor CSN. Sea $\pi : Y' \rightarrow Y$ el blow-up de Y en algún punto tal que E es la correspondiente curva (-1) . Entonces,

$$H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{O}_Y(K_Y)) = H^0(Y', \Omega_{Y'}^1(\log(D + E)) \otimes \mathcal{O}_{Y'}(K_{Y'})).$$

Por otro lado, si G es una curva (-1) en Y tal que $D + G$ es un divisor con CSN, entonces

$$H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{O}_Y(K_Y)) = H^0(Y, \Omega_Y^1(\log(D + G)) \otimes \mathcal{O}_Y(K_Y)).$$

DEMOSTRACIÓN. Esto es conocido, mirar por ejemplo [22, Prop.4.2 y 4.3]. \square

LEMA 7. Sea Y una superficie proyectiva no singular, y sea D un divisor CSN. Suponer la existencia de configuraciones de curvas $\{D_1, \dots, D_r\}$ las cuales son divisores excepcionales disjuntos de singularidades de tipo ADE. Asumir además que $D \cap D_i = \emptyset$ para todo i . Entonces,

$$H^0(Y, \Omega_Y^1(\log D) \otimes \mathcal{O}_Y(K_Y)) = H^0(Y, \Omega_Y^1(\log(D + \sum_{i=1}^r D_i)) \otimes \mathcal{O}_Y(K_Y)).$$

DEMOSTRACIÓN. Este es precisamente [22, Thm.4.4]. \square

El lema 6 se usa a través de alguna sucesión de blow-ups para armar configuraciones del tipo que andamos buscando. El lema 7 se usa, por ejemplo, cuando uno parte con la situación de lema 5 y agrega parcialmente ciertas ADE configuraciones de curvas (-2) provenientes de otras fibras singulares de f . En el Capítulo 2 se verá como funciona explícitamente.

Las superficies que vamos a construir son límite de superficies proyectivas no singulares de tipo general en la compactificación del espacio de moduli $\overline{M}_{K^2, \chi}$ de superficies de tipo general con K^2 y χ fijo definida por Kollár-Shepherd-Barron en [14, Sect. 5]. Los puntos de $\overline{M}_{K^2, \chi}$ representan superficies reducidas proyectivas conexas con clase canónica amplia y sólo singularidades del tipo semi-log-canonical (para una definición precisa ver [14, 5.4] o [10]). Estas superficies se llamarán **estables** en analogía con las curvas estables de Deligne y Mumford. En particular, una superficie irreducible reducida proyectiva con sólo singularidades de Wahl y clase canónica amplia es una superficie estable. (Recordemos que en este caso, K^2 es un número entero positivo.) Si cambiamos singularidades de Wahl por log-canonical del tipo QHD, entonces hay tres singularidades más que agregar. Estas son las singularidades cociente de singularidades elípticas (**SCE**) cuyo divisor excepcional es uno de los que aparece en la figura 1.4 (mirar [13, Ch. 4 Sect.1]). Cada segmento representa un \mathbb{P}^1 .

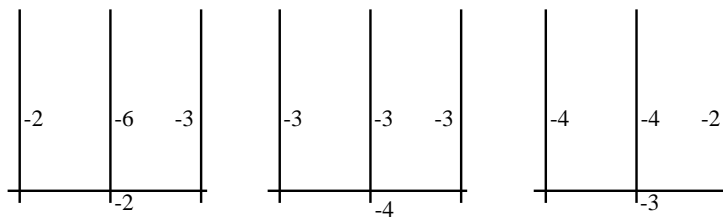


FIGURA 1.4. Divisores excepcionales de SCE que son QHD

En esta tesis estamos interesados en trabajar espacios de moduli con los invariantes más pequeños posibles. Como para una superficie proyectiva de tipo general con a lo más singularidades ADE sabemos que $K^2 > 0$ y $\chi(\mathcal{O}) > 0$ [3, Ch. 10], los invariantes más chicos son $K^2 = 1$ y $\chi(\mathcal{O}) = 1$. Fijaremos $\chi(\mathcal{O}) = 1$ y variaremos $K^2 \in \{1, 2, 3, 4\}$ (ver Capítulo 2 para la razón de $1 \leq K^2 \leq 4$). Ahora $\chi(\mathcal{O}) = 1 - q + p_g = 1$, luego $p_g = q$. Así lo mínimo es $p_g = q = 0$. Más aún nos restringiremos al caso de superficies simplemente conexas (topología analítica).

Construiremos superficies X con sólo singularidades de Wahl y sin obstrucciones. Así una suavización \mathbb{Q} -Gorenstein de X nos dará superficies proyectivas no singulares. Si K_X es amplio (o nef), entonces la fibra general X_t tiene divisor canónico amplio (o nef) [13, Prop. 1.41]. Por definición, K_X es **nef** si y sólo si $K_X \cdot \Gamma \geq 0$ para toda curva Γ irreducible. Es claro que si K_X es nef y $K_X^2 > 0$ entonces la fibra general es una superficie de tipo general.

Nuestro objetivo es construir superficies estables con nuevas singularidades de Wahl, y también más generales. El problema será entonces que K_X podría no ser amplio. Sin embargo, nos bastará con probar que K_X es nef (y $K_X^2 > 0$). Esto es porque el límite estable de X tendrá que producir bajo alguna deformación \mathbb{Q} -Gorenstein cada una de las singularidades de X (mirar [31]). Recordemos que K_X es amplio si y sólo si $K^2 > 0$ y $K \cdot \Gamma > 0$ para toda curva irreducible Γ en X : este es el criterio de Nakai-Moishezon (ver [13, Sect. 1.5]).

Nuestra construcción comenzará con una superficie elíptica y el criterio para saber si K_X es nef será el siguiente.

TEOREMA 6. *Sea Y una superficie elíptica racional con al menos una sección. Asumamos que Y tiene al menos dos fibras singulares del tipo I_{d_1}, I_{d_2} con $d_i > 0$. Sea $\pi : Z \rightarrow Y$ la composición de n blow-ups sobre las fibras I_{d_1} e I_{d_2} . Entonces se tiene que*

$$K_Z \equiv \frac{-F_1}{2} + \frac{-F_2}{2} + \sum_{i=1}^n n_i E_i$$

donde F_i corresponde a la transformada estricta de la fibra I_{d_i} y $n_i \in \mathbb{Q}_{>0}$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos las siguientes reducciones:

1. Sabemos que $K_Z = \pi^*(K_Y) +$ (suma efectiva de divisores excepcionales) y por el Teorema 3 sabemos que $\pi^*(K_Y) \sim -F$ donde F es una fibra general en Y , y a su vez $-F \equiv \frac{-F_1}{2} + \frac{-F_2}{2}$. Luego, si E_j representa la curva excepcional correspondiente al j -ésimo blow-up y denotamos por $m_{F_i}^j$ la multiplicidad de E_j en el pullback de la fibra I_{d_i} y por m_K^j la multiplicidad de E_j en el pullback del divisor canónico de Y , entonces el teorema es equivalente a que se cumpla

$$\frac{1}{2} m_{F_i}^j \leq m_K^j, \quad j \in \{1, \dots, n\}, i = 1, 2. \quad (*)$$

2. Como las fibras I_{d_i} son disjuntas, entonces al hacer el pullback de cada una de ellas, se tiene que las multiplicidades de las

curvas excepcionales sobre cada fibra es independiente y por tanto podemos probar el teorema para una sola fibra singular del tipo I_d con $d > 0$, cuya transformada estricta denotaremos por F .

3. Si en una fibra hacemos blow-ups en puntos distintos, entonces notemos que al hacer el pullback de la fibra, las multiplicidades de las curvas excepcionales que aparecen sobre cada punto son independientes. Luego para demostrar el teorema se puede asumir que todos los blow-ups fueron hechos sobre un solo punto.

La demostración la haremos por inducción sobre el número de blow-ups sobre una fibra singular I_d , $d > 0$.

Caso base:

- (i) Si p es un punto no singular de la fibra, entonces al hacer el primer blow-up aparece una curva excepcional E_1 . Aquí se tiene que $\pi^*(I_d) = F + E_1$ y $K_Z = \pi^*(K_Y) + E_1$, es decir, $m_F^1 = m_K^1 = 1$ y por tanto se cumple (*).
- (ii) Si p es un nodo de la fibra I_d , al hacer el primer blow-up aparece una curva excepcional E_1 que interseca a F en dos puntos. Tenemos $\pi^*(F) = F + 2E_1$ y $K_Z = \pi^*(K_Y) + E_1$, es decir, $m_F^1 = 2$ y $m_K^1 = 1$ y por tanto se cumple (*).

Hipótesis de inducción: Supongamos que $\frac{1}{2}m_F^j \leq m_K^j$ para $1 \leq j \leq n-1$.

Debemos probar que la desigualdad también se cumple para el n -ésimo blow-up. Hay que analizar los siguientes casos:

1. El n -ésimo blow-up se hace en la intersección entre la fibra y un E_j .

Al hacer el pullback de la fibra y del divisor canónico se tiene que $m_F^n = m_F^j + 1$ y $m_K^n = m_K^j + 1$. Por hipótesis de inducción se tiene que $\frac{1}{2}m_F^j \leq m_K^j$ luego también se cumple que $\frac{1}{2}m_F^n \leq m_K^n$.

2. El n -ésimo blow-up se hace en la intersección entre un E_j y un E_i .

Notemos que este caso sólo se puede tener si $n \geq 3$ ya que se necesitan al menos dos curvas excepcionales distintas. Al hacer el pullback de la fibra y del divisor canónico se tiene que $m_F^n = m_F^i + m_F^j$ y $m_K^n = m_K^i + m_K^j + 1$. Por hipótesis

de inducción se tiene que $\frac{1}{2}m_F^j \leq m_K^j$ y $\frac{1}{2}m_F^i \leq m_K^i$ luego también se cumple que $\frac{1}{2}m_F^n \leq m_K^n$.

3. EL n -ésimo blow-up se hace en un punto suave de un E_j . En este caso al hacer el pullback de la fibra y del divisor canónico se tiene que $m_F^n = m_F^j$ y $m_K^n = m_K^j + 1$. Por hipótesis de inducción se tiene que $\frac{1}{2}m_F^j \leq m_K^j$ luego también se cumple que $\frac{1}{2}m_F^n \leq m_K^n$.

□

En el Capítulo 2 se muestra un ejemplo donde se usa este teorema.

COROLARIO 1. *Sea Y una superficie elíptica racional con al menos una sección. Asumamos que Y tiene al menos dos fibras singulares del tipo I_{d_1}, I_{d_2} con $d_i > 0$. Sea $\pi : Z \rightarrow Y$ la composición de n blow-ups sobre las fibras I_{d_1} e I_{d_2} y sea F_i la transformada estricta de I_{d_i} . Asumir que en Z tenemos W_1, \dots, W_r configuraciones disjuntas de Wahl, tal que F_1, F_2 son parte de alguna de estas configuraciones. Sea X la contracción de W_1, \dots, W_r . Entonces K_X es nef si:*

1. $d(F_i) \leq -1/2$
2. *Dada E curva excepcional de la composición de los blow-ups, sean $G_1, \dots, G_s \in \cup W_i$ con $E \cdot G_i \neq 0$ para todo i . Entonces requerimos que $-1 + \sum_{i=1}^s d(G_i)(E \cdot G_i) > 0$. En particular si tales E son curvas (-1) , entonces tienen que intersectar en al menos dos puntos a $\cup_i W_i$ (contando multiplicidades).*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior tenemos

$$K_Z \equiv \frac{-F_1}{2} + \frac{-F_2}{2} + \sum_{i=1}^n n_i E_i$$

con $n_i \in \mathbb{Q}_{>0}$. Sea $W_i = \sum G_{ij}$. Sea $f : Z \rightarrow X$ la contracción. Entonces

$$K_Z \equiv f^*(K_X) + \sum_i \sum_j d(G_{ij}) G_{ij}$$

y así $f^*(K_X)$ es \mathbb{Q} -numéricamente efectivo por las hipótesis de las discrepancias sobre los F_i . Notar que una curva irreducible Γ tiene $\Gamma \cdot K_X < 0$ si y sólo si $f^*(\Gamma) \cdot f^*(K_X) < 0$, y así si sólo si $\Gamma' \cdot f^*(K_X) < 0$ donde Γ' es la transformada estricta de Γ . De esta manera, como el $f^*(K_X)$ es \mathbb{Q} -numéricamente efectivo, si $\Gamma' \cdot f^*(K_X) < 0$, entonces Γ'

es igual a algún E_i . Supongamos que $\Gamma' = E_k$, luego

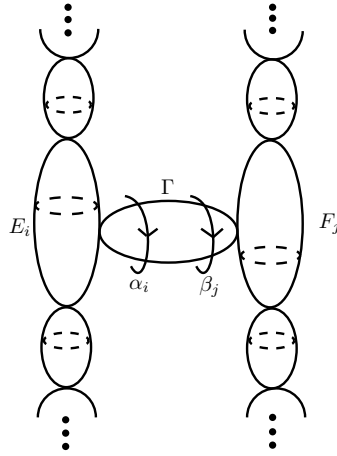
$$\begin{aligned} E_i \cdot f^*(K_X) &= E_k \cdot K_Z + \sum \sum d(G_{ij}) G_{ij} \cdot E_k \\ &\geq -1 + \sum_{G_{ij} \cap E_k \neq \emptyset} d(G_{ij}) G_{ij} \cdot E_k \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

por hipótesis. Luego K_X es nef. □

1.6. Grupo fundamental

Consideraremos X como una variedad compleja con la topología analítica. Así tenemos el grupo fundamental $\pi_1(X)$ de siempre, no haremos mención del punto base. Dada una superficie proyectiva X con sólo singularidades de Wahl y una suavización \mathbb{Q} -Gorenstein $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$, queremos dar un criterio para probar que la fibra general es simplemente conexa bajo ciertas propiedades de X y de sus singularidades. La estrategia es la usada en [16]. Esta involucra el teorema de Van Kampen y ciertos cálculos hechos por Mumford en [19]. Las partes fundamentales en el cálculo son las siguientes:

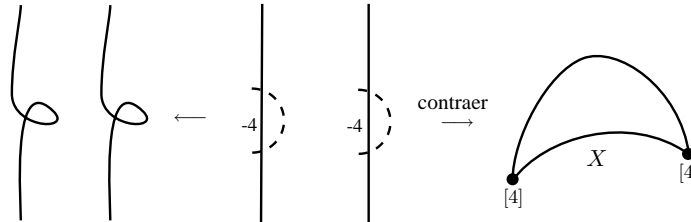
1. En general, dada una singularidad cíclica $\frac{1}{m}(1, q)$, y su resolución \tilde{X} , el grupo fundamental de su link es $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ y se representa en una vecindad tubular del divisor excepcional de la siguiente manera. Recordemos que el divisor excepcional es una cadena de \mathbb{P}^1 's: E_1, \dots, E_s . Sea α_i un lazo alrededor de E_i . Entonces según [19, pag. 20], α_1 y α_s son generadores de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, y todo otro α_i es una potencia de α_1 (o α_s) donde el exponente se calcula como en [19, pag. 20]. De esta forma, estos exponentes vienen dados explícitamente por los b_i, P_i de la página 13, i.e. $\alpha_j = \alpha_1^{b_j} = \alpha_s^{P_j}$.
2. Dadas dos configuraciones de Wahl W_1, W_2 (o de cualquier singularidad normal), si existe una curva Γ isomorfa a \mathbb{P}^1 intersectando cada configuración en un punto la componente E_i de W_1 y la componente F_j de W_2 , entonces generaremos una relación entre ambos lazos a través de Γ . Más precisamente α_i es homotópico a $\beta_j^{\pm 1}$ en $X \setminus (W_1 \cup W_2)$ (dependiendo de la orientación elegida). Si por ejemplo los índices de las singularidades son coprimos, entonces los lazos serán triviales en $\pi_1(X \setminus (W_1 \cup W_2))$.



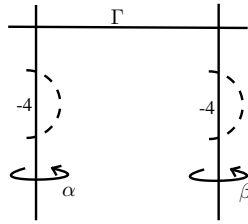
3. Siempre consideraremos en esta tesis una superficie X tal que su resolución mínima es racional. Así el grupo fundamental de X es trivial ya que las singularidades de Wahl son racionales.

Usando estos tres hechos se podrá concluir caso a caso que la fibra general de la suavización es simplemente conexa. Para esto es fundamental la interpretación de la suavización a través de la fibra de Milnor y el uso del teorema de Van Kampen (ver [16, Prop. 8]).

EJEMPLO 8. *Dada una superficie elíptica racional con secciones y dos I_1 's. Hacemos blow-up en los nodos de las I_1 's para obtener dos configuraciones de Wahl iguales a [4]. Luego de contraer ambas obtenemos una superficie X con dos singularidades.*

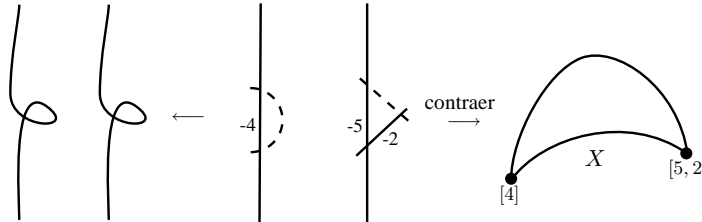


Entonces X no tiene obstrucción por Lema 5 y una suavización \mathbb{Q} -Gorenstein da una superficie de Enriques (ver [31, Sect. 5]). El grupo fundamental $\pi_1(X_t)$ es así $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ahora tomamos una sección $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1$ y entonces vemos que $\alpha \sim s\beta^{\pm 1}s^{-1}$ donde s es un camino uniendo al punto base de $\pi_1(X_t)$ en α .

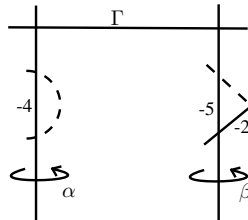


Como $n_1 = n_2 = 2$ entonces no podemos aniquilarlos entre ellos bajo la estrategia de índices coprimos. De hecho no son triviales ya que si lo fuesen $\pi_1(X_t) = 1$, lo que sería contradictorio.

EJEMPLO 9. Con la misma superficie elíptica del ejemplo anterior, hacemos un blow-up adicional para obtener dos configuraciones de Wahl distintas y contrayendo estas cadenas obtenemos una superficie X con dos singularidades.



Entonces X no tiene obstrucción por Lema 5. Así X tiene una suavización \mathbb{Q} -Gorenstein y se puede probar que X_t es una superficie que tiene dimensión de Kodaira igual a 1 y es minimal.



En efecto es simplemente conexa ya que $\alpha \sim s\beta^{\pm 1}s^{-1}$ a través de Γ , pero $\alpha^4 = 1 = s\beta^{\pm 4}s^{-1}$ luego $\beta^{\pm 4} = 1$ y como $\beta^9 = 1$ se concluye que $\beta^{\pm 1}$ es trivial. Como $\alpha \sim s\beta^{\pm 1}s^{-1}$ entonces α también es trivial. Usando el teorema de Van Kampen se deduce que $X \setminus \{[4], [5, 2]\}$ es simplemente conexa y así usando el criterio con las fibras de Milnor [16, Prop. 8] X_t también lo es. La X_t es entonces una superficie de Dolgachev tipo 2,3 (ver [31, Sect. 5]).

CAPÍTULO 2

Construcción de las superficies

En este capítulo describiremos el modelo de construcción desarrollado por Lee y Park el cual involucra no sólo hacer blow-ups para crear configuraciones del tipo buscado, sino que también se busca que la construcción sea tal que se satisfagan las condiciones necesarias para que la obstrucción sea cero, la clase canónica K_X sea nef, tengamos el K_X^2 pedido y que el grupo fundamental sea trivial.

2.1. Modelo de construcción de acuerdo a Lee y Park

La estrategia general es la siguiente. A partir de una fibración elíptica racional $Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ con secciones consideraremos cierta composición de blow-ups $Z \rightarrow Y$ tal que en Z tendremos una colección disjunta de configuraciones de Wahl. Ahora contraemos todas estas configuraciones $Z \rightarrow X$, donde X es una superficie proyectiva normal (con sólo singularidades de Wahl). La construcción será tal que podremos probar que K_X es nef, $K_X^2 > 0$ y X no posee obstrucciones para deformar. Para esto usaremos lo desarrollado en el capítulo 1. Por razones generales, el p_g de la fibra general será cero y así sólo nos faltará calcular que el grupo fundamental es trivial, usando Sección 1.6 del capítulo 1.

OBSERVACIÓN 2. *Por teoremas generales tenemos que $1 \leq K_X^2 \leq 9$ (tipo general dice $K_X^2 > 0$, desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau ([2, Ch. 7]) implica $K^2 \leq 9$). Sin embargo, obstrucción cero nos impone que $1 \leq K_X^2 \leq 4$. Esto es porque la fibra general X_t satisface*

$$h^1(X_t, T_{X_t}) - h^2(X_t, T_{X_t}) = 10\chi(\mathcal{O}_{X_t}) - 2K_{X_t}^2$$

por el teorema de Hirzenbruch-Riemann-Roch [2, Ch. 1], y ya que X_t es de tipo general (y así $h^0(X_t, T_{X_t}) = 0$). En nuestro caso, obstrucción cero implica $h^2(X_t, T_{X_t}) = 0$. Como $\chi(\mathcal{O}_{X_t}) = 1$ tenemos $h^1(X_t, T_{X_t}) = 10 - 2K_{X_t}^2$. Más aún, como X tiene suavización \mathbb{Q} -Gorenstein no trivial, entonces $h^1(X_t, T_{X_t}) > 0$.

Ahora explicaremos la estrategia, la cual será usada en todos nuestros nuevos ejemplos, a través del primer ejemplo construido por Lee y Park para $K^2 = 2$ en [16].

Pencil de cúbicas base: Sea $Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ la fibración elíptica racional construida a partir del pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda,\mu} = \{\lambda(xy - z^2)z + \mu(x - y)^3 = 0\}$$

con $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$. Denotemos por $L' = \{x = y\}$, $L = \{z = 0\}$ y $C = \{xy = z^2\}$. Las intersecciones entre estas curvas se muestran en la Figura 2.1. Notar que la línea L' se toma con multiplicidad 3; esa es la razón del 3 encerrado en un círculo que aparece en la Figura 2.1. Notar que esta fibración tiene exactamente cuatro fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [1 : 0]$, $[0 : 1]$, $[36 : \sqrt{3}i]$ y $[-36 : \sqrt{3}i]$. Las correspondientes fibras singulares son I_2 , IV^* y dos I_1 respectivamente (ver Tabla 1). En la Figura 2.1 se muestra el pincel y la fibración elíptica correspondiente (después de los nueve blow-ups de \mathbb{P}^2 sobre los tres puntos marcados con 3). Notemos que hay al menos tres secciones E_3 , E_6 y E_9 intersectando otras curvas de la manera que se muestra en la Figura 2.1. Los E_i son las curvas excepcionales en cada uno de los nueve blow-ups. El índice de E_i indica el orden en el cual fueron hechos los blow-ups. Las transformadas propias de L' , L y C se denotan por la misma letra. Las curvas F_1, F_2 son las dos fibras I_1 .

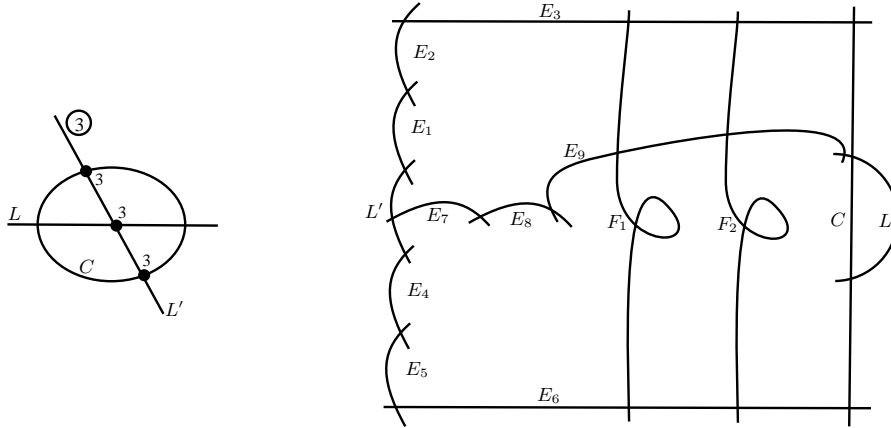
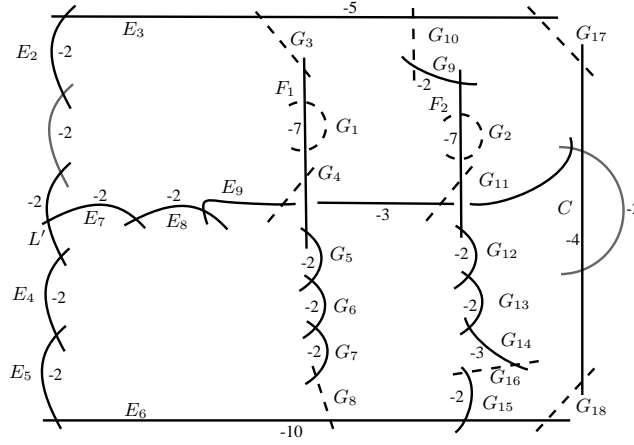


FIGURA 2.1. Fibración elíptica con IV^* , I_2 y $2I_1$

Blow-ups y configuraciones de Wahl: Consideraremos $Z \rightarrow Y$ composición de 18 blow-ups. Cada divisor excepcional será denotado por G_i . El índice denotará el orden de los blow-ups y así la Figura 2.2 indica precisamente el procedimiento. En Figura 2.2 tenemos las autointersecciones de cada una de las curvas relevantes en la construcción. Notemos que aparecen las siguientes cinco configuraciones de Wahl: $[4]$, $[5, 2]$, $[7, 2, 2, 2]$, $[2, 7, 2, 2, 3]$ y $[2, 10, 2, 2, 2, 2, 3]$.

Sea $f: Z \rightarrow X$ la contracción de estas cinco singularidades.


 FIGURA 2.2. Superficie racional Z

Obstrucción cero: Sea $W_1 = C$, $W_2 = E_3 + E_2$, $W_3 = F_1 + G_5 + G_6 + G_7$, $W_4 = G_9 + F_2 + G_{12} + G_{13} + G_{14}$ y $W_5 = G_{15} + E_6 + E_5 + E_4 + L' + E_7 + E_8 + E_9$. Probaremos que

$$H^0(Z, \Omega_Z^1(\log(W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5)) \otimes \mathcal{O}_Z(K_Z)) = 0.$$

(Recordamos que esto implicará que X no tiene obstrucciones para deformar por Teorema 5). Para eso partimos con el blow-up de Y en los dos nodos de F_1 y F_2 , cuyos divisores excepcionales llamamos G_1 y G_2 . Entonces por Lema 5

$$H^0(Y, \Omega_Y^1(\log(F_1 + F_2)) \otimes \mathcal{O}_Y(K_Y)) = 0.$$

Ahora agregaremos las configuraciones tipo du Val: $E_2, E_8 + E_7 + L' + E_4 + E_5$, y C . Entonces por Lema 7

$$H^0(Y, \Omega_Y^1(\log(F_1 + F_2 + E_2 + E_8 + E_7 + L' + E_4 + E_5 + C)) \otimes \mathcal{O}_Y(K_Y)) = 0,$$

y por Lema 6 agregaremos las tres secciones E_6, E_6 y E_9

$$H^0(Y, \Omega_Y^1(\log(F_1 + F_2 + E_2 + E_8 + E_7 + L' + E_4 + E_5 + C + E_3 + E_6 + E_9)) \otimes \mathcal{O}_Y(K_Y)) = 0.$$

Ahora haremos los 18 blow-ups. Cada vez que hagamos uno agregaremos el correspondiente divisor excepcional a "la cohomología". Por lema 6 esta se mantendrá igual a cero. Después del blow-up número 18 borraremos las curvas (-1): $G_3, G_4, G_8, G_{10}, G_{11}, G_{16}, G_{17}, G_{18}$ de la cohomología. Nuevamente por lema 6 esta cohomología se mantendrá igual a cero, y eso era lo que queríamos demostrar.

Cálculo de K^2 y p_g : Que p_g sea igual a cero es semi-continuidad de $h^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t})$ más el hecho de que $h^0(X, \mathcal{O}_X) = 0$, ya que las singularidades son racionales. Para calcular K_X^2 , el cual es igual a $K_{X_t}^2$, usamos la Proposición 3:

$$K_X^2 = -18 + 1 + 2 + 4 + 5 + 8 = 2.$$

K nef: Primero tenemos que calcular las discrepancias de cada una de las curvas excepcionales sobre las singularidades de X . Denotaremos por $d(E)$ la discrepancia de la curva excepcional E . Usando el algoritmo descrito en el Lema 4, obtenemos que

$$\begin{aligned} d(C) &= -1/2 & d(E_3) &= -2/3 & d(E_2) &= -1/3 & d(F_1) &= -4/5 \\ d(G_5) &= -3/5 & d(G_6) &= -2/5 & d(G_7) &= -1/5 & d(G_9) &= -4/9 \\ d(F_2) &= -8/9 & d(G_{12}) &= -7/9 & d(G_{13}) &= -6/9 & d(G_{14}) &= -5/9 \\ d(G_{15}) &= -7/15 & d(E_6) &= -14/15 & d(E_5) &= -13/15 & d(E_4) &= -12/15 \\ d(L') &= -11/15 & d(E_7) &= -10/15 & d(E_8) &= -9/15 & d(E_9) &= -8/15 \end{aligned}$$

luego $d(F_1), d(F_2) \leq -1/2$ y así sólo falta verificar que la suma de las discrepancias sobre las curvas $(-1) G_i$ es menor o igual que -1 .

Curva (-1)	Suma discrepancias
G_3	$d(E_3) + d(F_1) = -22/15$
G_4	$d(E_9) + d(F_1) = -20/15$
G_8	$d(G_7) + d(E_6) = -17/15$
G_{10}	$d(E_3) + d(G_9) = -10/9$
G_{11}	$d(E_9) + d(F_2) = -64/45$
G_{16}	$d(G_{14}) + d(G_{15}) = -46/45$
G_{17}	$d(E_3) + d(C) = -7/6$
G_{18}	$d(C) + d(E_6) = -43/30$

Como se satisfacen las condiciones del Teorema 6, entonces tenemos que K_X es nef. Más explícitamente, podemos escribir

$$\begin{aligned} K_Z \equiv & \frac{-F_1}{2} + \frac{-F_2}{2} + \frac{1}{2}G_3 + \frac{1}{2}G_4 + \frac{1}{2}G_5 + \frac{3}{2}G_6 + \frac{5}{2}G_7 + \frac{7}{2}G_8 + \frac{1}{2}G_9 + \frac{3}{2}G_{10} \\ & + \frac{1}{2}G_{11} + \frac{1}{2}G_{12} + \frac{3}{2}G_{13} + \frac{5}{2}G_{14} + \frac{7}{2}G_{15} + 7G_{16} + G_{17} + G_{18} \end{aligned}$$

y luego

$$\begin{aligned} f^*(K_X) \equiv & \frac{3}{10}F_1 + \frac{7}{18}F_2 + \frac{1}{2}G_3 + \frac{1}{2}G_4 + \frac{11}{10}G_5 + \frac{19}{10}G_6 + \frac{27}{10}G_7 + \frac{7}{2}G_8 + \frac{17}{18}G_9 + \frac{3}{2}G_{10} \\ & + \frac{1}{2}G_{11} + \frac{23}{18}G_{12} + \frac{39}{18}G_{13} + \frac{55}{18}G_{14} + \frac{119}{30}G_{15} + 7G_{16} + G_{17} + G_{18} + \frac{1}{2}C \\ & + \frac{1}{3}E_2 + \frac{2}{3}E_3 + \frac{12}{15}E_4 + \frac{13}{15}E_5 + \frac{14}{15}E_6 + \frac{10}{15}E_7 + \frac{9}{15}E_8 + \frac{8}{15}E_9 + \frac{11}{15}L' \end{aligned}$$

Grupo fundamental trivial Aquí usaremos la Sección 1.6 del Capítulo 1. Mirar [16, Th. 3]. Por ejemplo, podemos aplicar 1.6 en lazos alrededor de (y en ese orden) G_{17}, G_3, G_{10} y G_4 .

OBSERVACIÓN 3. *De hecho en este ejemplo K_X es amplio (ver [31, Sect. 3]), y así X es una superficie estable en el espacio de móduli de superficies de tipo general con $K^2 = 2$ y $p_g = 0$.*

CAPÍTULO 3

Resultados

Imitaremos el procedimiento mostrado en el capítulo anterior con distintos ejemplos nuevos que producen singularidades nuevas. Estos son los resultados de esta tesis.

Como en el ejemplo del capítulo anterior, construiremos una superficie X con sólo singularidades de Wahl y obstrucción cero. Como la obstrucción es cero podemos deformar de manera \mathbb{Q} -Gorenstein manteniendo una de las singularidades de X y suavizando las otras. Esto localmente define un divisor del correspondiente espacio de moduli [9, Sect. 11]. Si la singularidad de Wahl que se mantuvo es $\frac{1}{n^2}(1, na - 1)$, entonces el divisor lo representaremos por $\mathbf{D}(\frac{n}{a})$. Un punto en este divisor representa una superficie estable con sólo la singularidad de Wahl $\frac{1}{n^2}(1, na - 1)$.

Para cada ejemplo los datos serán

1. Fibración elíptica $Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ base con ciertas curvas relevantes, nos referiremos al apéndice para cada una de ellas.
2. Figura indicando el número y orden de los blow-ups sobre Y y las respectivas configuraciones de Wahl. Una de ellas corresponde a la singularidad nueva.
3. Indicaremos las discrepancias de las curvas excepcionales de cada una de las singularidades. Con esto se puede verificar, usando el Corolario 1, que el K_X es nef. Se calcula K^2 de acuerdo a la fórmula mostrada la Proposición 3.
4. Se indicarán los \mathbb{P}^1 (y el orden) para cancelar lazos en el cálculo del grupo fundamental. En todos los casos el grupo fundamental será trivial.
5. También ponemos el modelo minimal X' de la resolución minimal de un punto general en $D(\frac{n}{a})$ a través de flips (el $D(\frac{n}{a})$ se definió arriba). Los flips son los descritos en [11] y no serán descritos en esta tesis.

OBSERVACIÓN 4. *En algunos ejemplos seremos capaces de probar que la clase canónica K_X no es sólo nef, si no que es amplia. En esos casos la superficie X en cuestión será estable. Para esto usaremos el criterio de Nakai-Moishezon y como ya tenemos que $K_X^2 > 0$, entonces*

para que K_X sea amplio, basta con verificar que $\Gamma \cdot K_X > 0$ para toda curva irreducible Γ . Como ya sabemos que K_X es nef, entonces basta ver que no existe una curva irreducible Γ en X tal que $\Gamma \cdot K_X = 0$. Si Z es la resolución minimal de X , entonces verificar la condición anterior es equivalente a probar que no existe una curva irreducible Γ' en Z tal que $\Gamma' \cdot \sigma^*(K_X) = 0$. Digamos que $\sigma^*(K_X) = \sum q_i \Gamma_i$ con $q_i \in \mathbb{Q}$ y $q_i > 0$. Supongamos que no se puede tener que $\Gamma_i \cdot \sigma^*(K_X) = 0$, luego $\Gamma' \neq \Gamma_i$. Más aún, si queremos que $\Gamma' \cdot \sigma^*(K_X) = 0$, entonces $\Gamma' \cap \Gamma_i = \emptyset$ para todo i . Luego, si en Z tuvieramos que el soporte de una fibra de $Z \rightarrow \mathbb{P}^1$ está contenido en $\sigma^*(K_X)$, entonces no se puede tener que $\Gamma' \cdot \sigma^*(K_X) = 0$ a menos que Γ' sea vertical, es decir pertenece a una fibra de la fibración elíptica. Así el único problema que podríamos tener es que existiera una curva (-2) perteneciente a una fibra, que no interseque a las configuraciones de Wahl que hay en Z . Por lo tanto se concluiría que K_X es amplio si es que no hay tales curvas (-2) . Así, K_X es amplio en aquellos ejemplos que cumplan las siguientes condiciones:

- Soporte de $\sigma^*(K_X)$ contiene el soporte de una fibra completa
- Curva (-2) en las fibras si intersecan a las configuraciones de Wahl

y en cada uno de esos ejemplos se mencionará las curvas que forman el soporte de la fibra.

OBSERVACIÓN 5. *En algunos ejemplos se utilizaron secciones dobles y en estos casos el cálculo de la obstrucción difiere de la regla general. Las secciones dobles utilizadas pasan por el nodo de una I_1 o bien intersecan a todas las fibras en dos puntos distintos. Notar que una sección doble tiene autointersección igual a cero. El cálculo de la obstrucción en estas situaciones se hace de la siguiente manera: Por el Lema 5 sabemos que podemos agregar dos fibras F_1 y F_2 y la obstrucción sigue siendo cero. Luego, por el Lema 7 podemos agregar las curvas (-2) relevantes para cada ejemplo y la obstrucción sigue siendo cero. Ahora, si la sección doble utilizada pasaba por el nodo de una I_1 , entonces al hacer el blow-up en dicho nodo se obtiene que la sección doble se transforma en una curva (-1) con intersecciones CSN y así la podemos agregar por el Lema 6 de modo que la obstrucción sigue siendo cero. En el caso que la sección doble interseca a todas las fibras en dos puntos distintos, entonces hacemos blow-up en alguno de los puntos de intersección de la sección doble con F_1 o F_2 y así la sección doble se transforma en una curva (-1) y la podemos agregar por el Lema 6 obteniendo nuevamente que la obstrucción es igual a cero. Desde aquí en adelante el argumento*

sigue igual que en el capítulo anterior y por tanto se concluye que en estos casos la obstrucción también es cero.

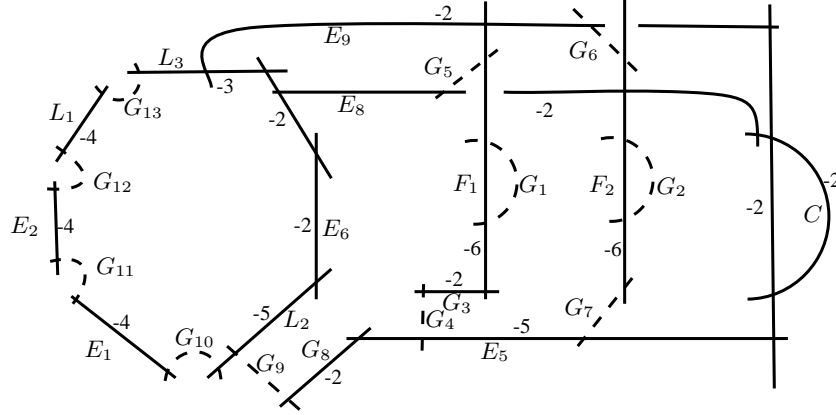
OBSERVACIÓN 6. Nuestras construcciones tratarán de optimizar el número de curvas no usadas, para así no disminuir artificialmente los parámetros libres de la construcción. Por ejemplo, si observamos las fibraciones elípticas $I_8 + I_2 + 2I_1$ y $I_7 + I_2 + 3I_1$ de las Figuras 4.4 y 4.6 respectivamente, entonces es claro que se puede deformar una en la otra ya que basta mover la recta L de modo que siga pasando por el mismo punto de intersección con L_2 pero que ya no pase por $L_1 \cap L_3$. Más aún, notemos que las secciones obtenidas al hacer el blow-up en $L_1 \cap L_2 \cap C$, $L_2 \cap L$ y $L_2 \cap L_3 \cap C$ aparecen en ambas configuraciones. Así podemos construir un mismo tipo de ejemplo tanto en una como en la otra si es que sólo necesitamos esas curvas. (ver por ejemplo $D \binom{3}{1}$ en $K^2 = 1$).

NOTACIÓN 1. Dada una configuración de Wahl $W_1 = [e_1, \dots, e_s]$, se denotará por $d[a_1, \dots, a_s]$ al vector $[d(e_1), \dots, d(e_s)]$ donde $a_i = d(e_i)$ (la discrepancia de E_i).

OBSERVACIÓN 7. Las WHS con QHD del final no corresponden a superficies estables. Pero se sospecha que los límites estables deberían ser superficies no normales. No hay ejemplos de superficies no normales en estos espacios de móduli.

3.1. $K^2 = 1$ 1. $D_{(1)}^{(3)}$

- Fibración elíptica: $I_7 + I_2 + 5I_1$ (ver Figura 4.6).
- Se hacen 13 blow-ups

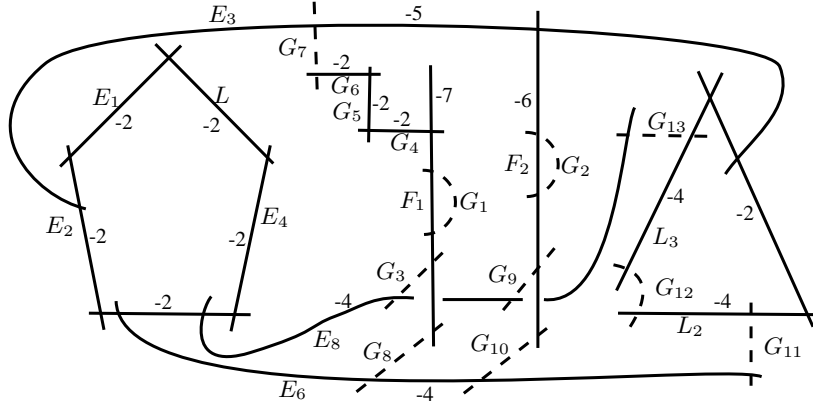


- $E_1 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_2 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L_1 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L_2, E_6 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $E_5, G_8 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $F_2, E_8, C = [6, 2, 2] = d[\frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}]$
- $G_3, F_1, E_9, L_3 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $K^2 = -13 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 1$
- X' es una superficie de Dolgachev de tipo (2,3)
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: $G_4, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_7$

OBSERVACIÓN 8. Existe también $D_{(1)}^{(3)}$ donde el punto general representa una superficie racional. De esta forma, este ejemplo indica la presencia de dos superficies estables distintas en el mismo espacio modular con una misma singularidad. Es el único ejemplo conocido.

2. $D \binom{11}{2}$

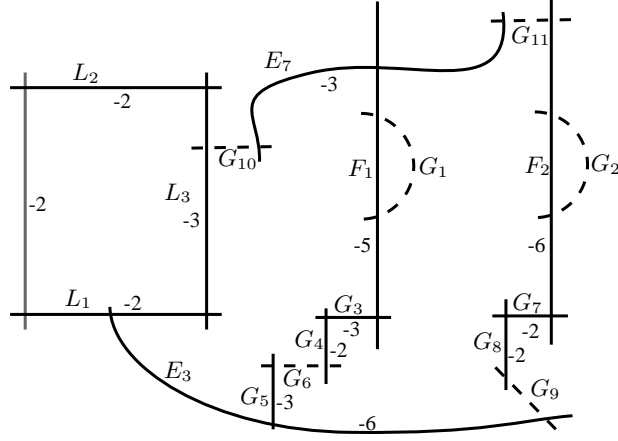
- Fibración elíptica: $I_5 + I_3 + 4I_1$ (ver Figura 4.10).
- Se hacen 13 blow-ups



- $L_2 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L_3 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_6 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_8 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $F_1, G_4, G_5, G_6 = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $F_2, E_3, E_2, E_1, L, E_4 = [6, 5, 2, 2, 2, 2] = d[\frac{-9}{11}, \frac{-10}{11}, \frac{-8}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{-4}{11}, \frac{-2}{11}]$
- $K^2 = -13 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 6 = 1$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: $G_3, G_8, G_{10}, G_{11}, G_{12}$.

3. $D\left(\begin{smallmatrix} 11 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$

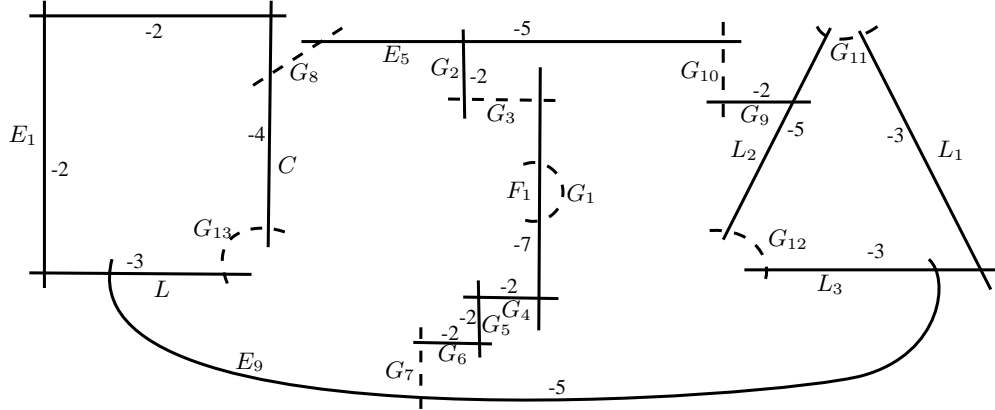
- Fibración elíptica: $I_4 + 8I_1$ (ver Figura 4.13).
- Se hacen 11 blow-ups



- $F_2, G_7, G_8 = [6, 2, 2] = d\left[\frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}\right]$
- $E_7, F_1, G_3, G_4 = [3, 5, 3, 2] = d\left[\frac{-5}{8}, \frac{-7}{8}, \frac{-6}{8}, \frac{-3}{8}\right]$
- $G_5, E_3, L_1, L_3, L_2 = [3, 6, 2, 3, 2] = d\left[\frac{-7}{11}, \frac{-10}{11}, \frac{-9}{11}, \frac{-8}{11}, \frac{-4}{11}\right]$
- $K^2 = -11 + 3 + 4 + 5 = 1$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_6, G_{11}

4. $D\left(\begin{smallmatrix} 13 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$

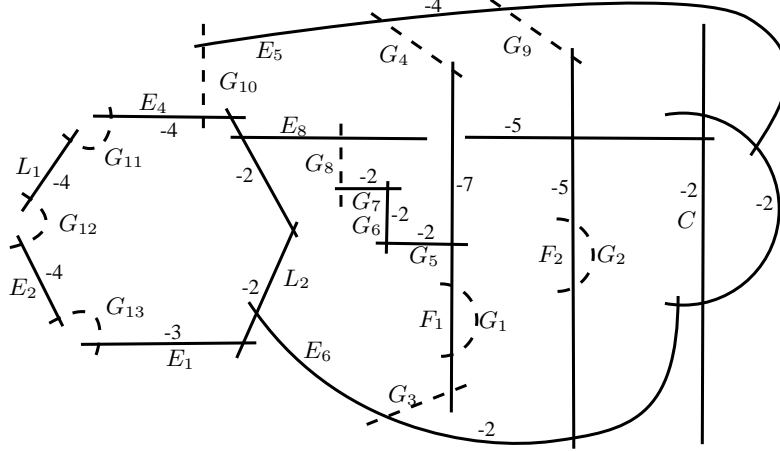
- Fibración elíptica: $I_4 + I_3 + 5I_1$ (ver Figura 4.15).
- Se hacen 13 blow-ups



- $C = [4] = d\left[\frac{-1}{2}\right]$
- $L_2, G_9 = [5, 2] = d\left[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right]$
- $E_5, G_2 = [5, 2] = d\left[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right]$
- $F_1, G_4, G_5, G_6 = [7, 2, 2, 2] = d\left[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}\right]$
- $L_1, L_3, E_9, L, E_1 = [3, 3, 5, 3, 2] = d\left[\frac{-8}{13}, \frac{-11}{13}, \frac{-12}{13}, \frac{-10}{13}, \frac{-5}{13}\right]$
- $K^2 = -13 + 1 + 2 + 2 + 4 + 5 = 1$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_8, G_3, G_{10}, G_{11}

5. $D_{(7)}^{(16)}$

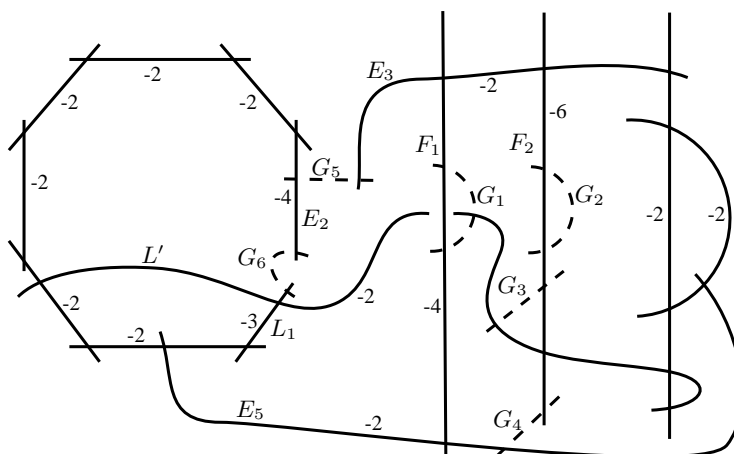
- Fibración elíptica: $I_6 + I_2 + 4I_1$ (ver Figura 4.8).
- Se hacen 13 blow-ups



- $E_2 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L_1 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_4 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_5 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $F_1, G_5, G_6, G_7 = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $C, E_8, F_2, E_6, L_2, E_1 = [2, 5, 5, 2, 2, 3] = d[\frac{-7}{16}, \frac{-14}{16}, \frac{-15}{16}, \frac{-13}{16}, \frac{-11}{16}, \frac{-9}{16}]$
- $K^2 = -13 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 6 = 1$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: $G_4, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_{13}$

6. $D\left(\frac{17}{7}\right)$

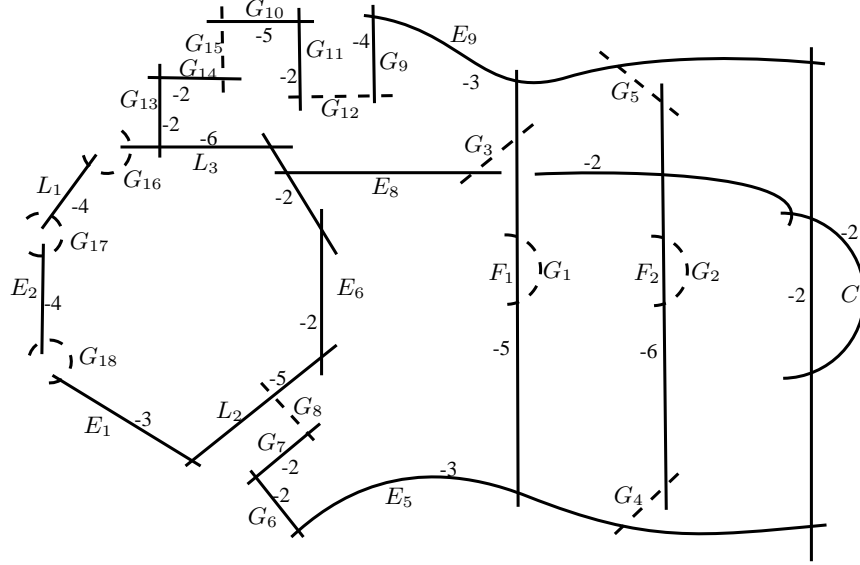
- Fibración elíptica: $I_8 + I_2 + 2I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.4).
- Se hacen 6 blow-ups



- $E_2 = [4] = d\left[\frac{-1}{2}\right]$
- $E_5, F_1, E_3, F_2, L', L_1 = [2, 4, 2, 6, 2, 3] = d\left[\frac{-7}{17}, \frac{-14}{17}, \frac{-15}{17}, \frac{-16}{17}, \frac{-13}{17}, \frac{-10}{17}\right]$
- $K^2 = -6 + 1 + 6 = 1$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_6

7. $D_5^{(18)}$

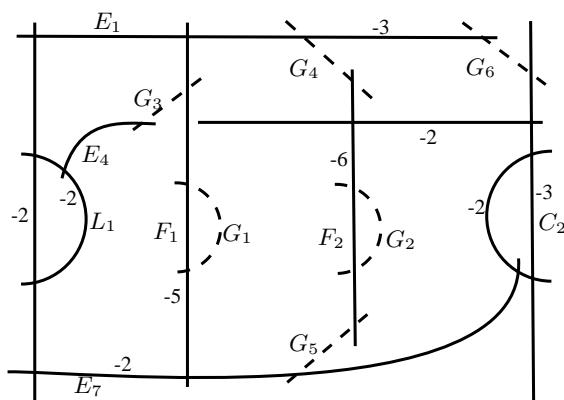
- Fibración elíptica: $I_7 + I_2 + 3I_1$ (ver Figura 4.6).
- Se hacen 18 blow-ups



- $E_2 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L_1 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $G_{10}, G_{11} = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $E_1, L_2, E_6 = [3, 5, 2] = d[\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{-2}{5}]$
- $L_3, G_{13}, G_{14} = [6, 2, 2] = d[\frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}]$
- $F_2, E_8, C = [6, 2, 2] = d[\frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}]$
- $G_9, E_9, F_1, E_5, G_6, G_7 = [4, 3, 5, 3, 2, 2] = d[\frac{-13}{18}, \frac{-16}{18}, \frac{-17}{18}, \frac{-15}{18}, \frac{-10}{18}, \frac{-5}{18}]$
- $K^2 = -18 + 1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 3 + 6 = 1$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: $G_8, G_3, G_{12}, G_{15}, G_{16}, G_{17}$

8. $D(2, 3, 6; 2)$

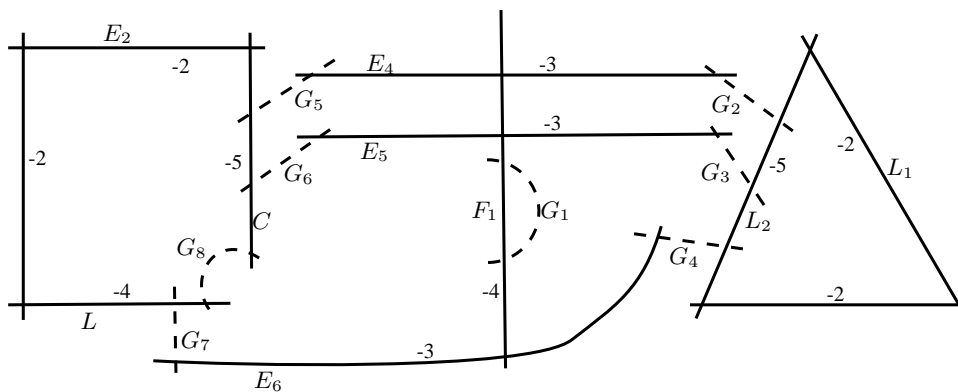
- Fibración elíptica: $2I_2 + 8I_1$ (ver Figura 4.18).
- Se hacen 6 blow-ups



- $E_1, F_1, E_7 = [3, 5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $L_1, C_2, F_2; E_4 = [2, 3, 6; 2] = d[\frac{-1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{6}; -1]$
- $K^2 = -6 + 3 + 4 = 1$
- X' es racional
- π_1 trivial: Sea α un lazo alrededor de F_2 y β un lazo alrededor de E_1 . Sabemos que $\alpha \sim \beta$ y usando la curva $(-1) G_2$ vemos que $\alpha^2 = 1$ y así $\beta^2 = 1$. Como 2 es coprimo con 3, entonces necesariamente $\beta = 1$. Ahora aplicamos la sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de G_6, G_3, G_4 y así concluimos que el grupo fundamental es trivial.

9. $D(3, 3, 3; 4)$

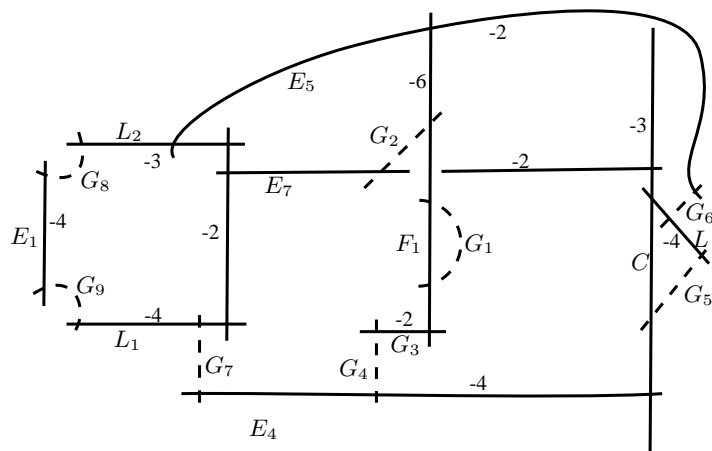
- Fibración elíptica: $I_4 + I_3 + 5I_1$ (ver Figura 4.15).
- Se hacen 8 blow-ups



- $L = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $C, E_2 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $L_2, L_1 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $E_4, E_5, E_6; F_1 = [3, 3, 3; 4] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}; -1]$
- $K^2 = -8 + 1 + 2 + 2 + 4 = 1$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_8, G_7, G_5, G_6, G_4

10. $D(4, 2, 4; 3)$

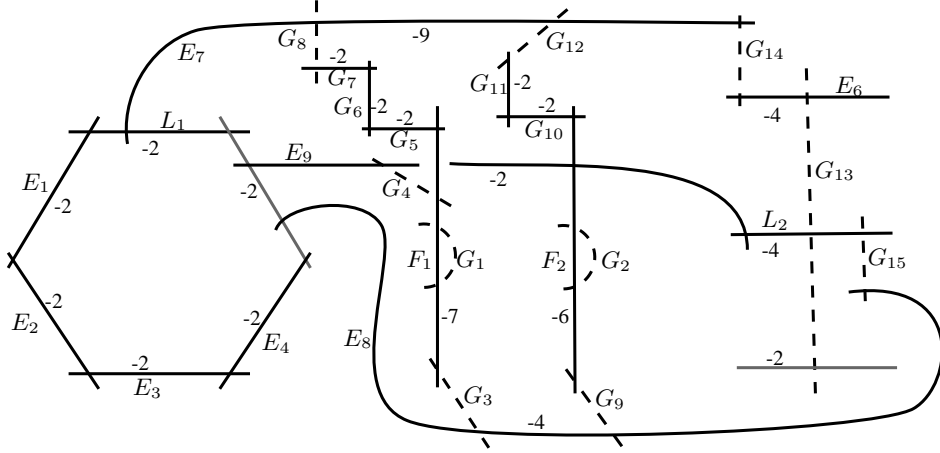
- Fibración elíptica: $I_4 + I_2 + 6I_1$ (ver Figura 4.16).
- Se hacen 9 blow-ups



- $E_1 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L_1 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $G_3, F_1, E_5, L_2 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $L, E_7, E_4; C = [4, 2, 4; 3] = d[\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{4}; -1]$
- $K^2 = -9 + 1 + 1 + 4 + 4 = 1$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: $G_8, G_9, G_7, G_6, G_5, G_2$

3.2. $K^2 = 2$ 1. $D_{(1)}^{(7)}$

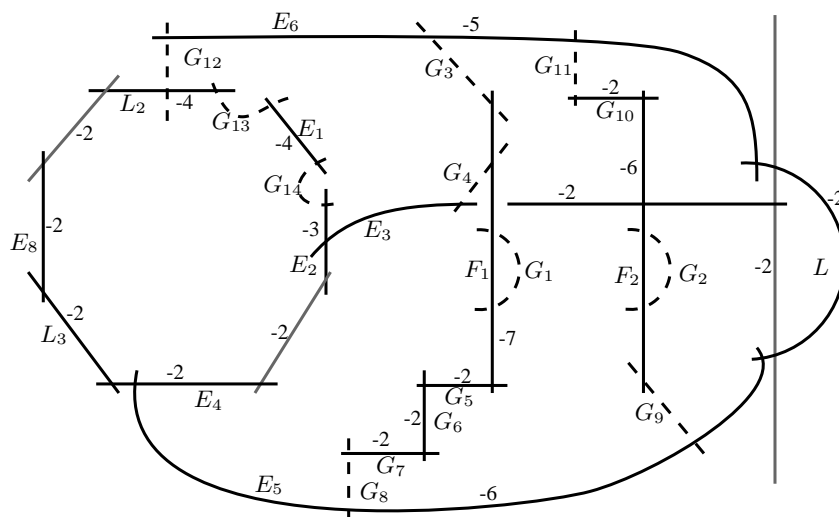
- Fibración elíptica: $I_6 + IV + 2I_1$ (ver Figura 4.9).
- Se hacen 15 blow-ups.



- $E_6 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_8 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $F_1, G_5, G_6, G_7 = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $L_2, E_9, F_2, G_{10}, G_{11} = [4, 2, 6, 2, 2] = d[\frac{-7}{10}, \frac{-8}{10}, \frac{-9}{10}, \frac{-6}{10}, \frac{-4}{10}]$
- $E_7, L_1, E_1, E_2, E_3, E_4 = [9, 2, 2, 2, 2, 2] = d[\frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{-1}{7}]$
- $K^2 = -15 + 1 + 1 + 4 + 5 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{14}, G_{12}, G_8, G_3

2. $D_{(3)}^{(7)}$

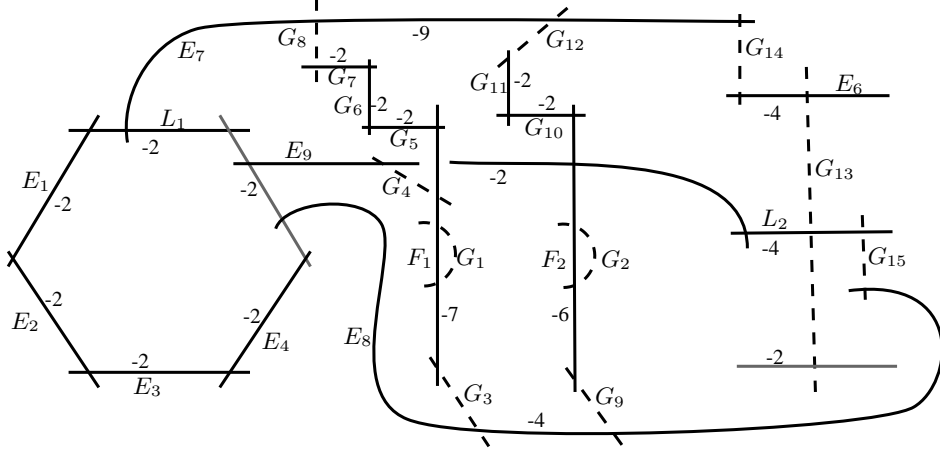
- Fibración elíptica: $I_8 + I_2 + 2I_1$ (ver Figura 4.4).
- Se hacen 14 blow-ups



- $E_1 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L_2 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $G_{10}, F_2, E_3, E_2 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $F_1, G_5, G_6, G_7 = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $E_6, L, E_5, E_4, L_3, E_8 = [5, 2, 6, 2, 2, 2] = d[\frac{-10}{13}, \frac{-11}{13}, \frac{-12}{13}, \frac{-9}{13}, \frac{-6}{13}, \frac{-3}{13}]$
- $K^2 = -14 + 1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: $G_3, G_{11}, G_{12}, G_{13}$

3. $D_{(3)}^{(10)}$

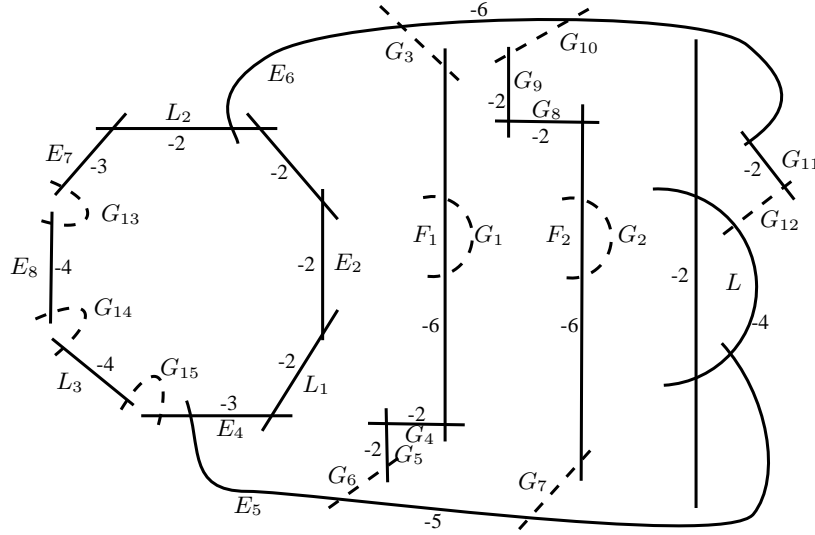
- Fibración elíptica: $I_6 + IV + 2I_1$ (ver Figura 4.9).
- Se hacen 15 blow-ups.



- $E_6 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_8 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $F_1, G_5, G_6, G_7 = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $L_2, E_9, F_2, G_{10}, G_{11} = [4, 2, 6, 2, 2] = d[\frac{-7}{10}, \frac{-8}{10}, \frac{-9}{10}, \frac{-6}{10}, \frac{-4}{10}]$
- $E_7, L_1, E_1, E_2, E_3, E_4 = [9, 2, 2, 2, 2, 2] = d[\frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{-1}{7}]$
- $K^2 = -15 + 1 + 1 + 4 + 5 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{14}, G_{12}, G_8, G_3

4. $D \binom{11}{3}$

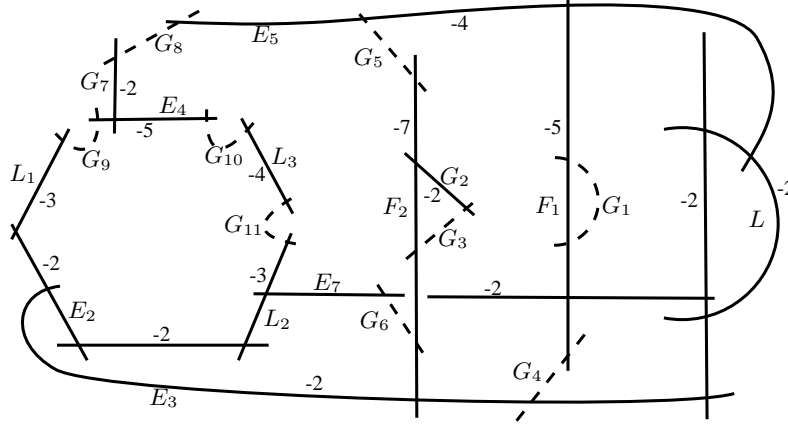
- Fibración elíptica: $I_8 + I_2 + 2I_1$ (ver Figura 4.4).
- Se hacen 15 blow-ups



- $L_3 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_8 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $F_1, G_4, G_5 = [6, 2, 2] = d[\frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}]$
- $F_2, G_8, G_9 = [6, 2, 2] = d[\frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}]$
- $G_{11}, E_6, L_2, E_7 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $L, E_5, E_4, L_1, E_2 = [4, 5, 3, 2, 2] = d[\frac{-8}{11}, \frac{-10}{11}, \frac{-9}{11}, \frac{-6}{11}, \frac{-3}{11}]$
- $K^2 = -15 + 1 + 1 + 3 + 3 + 4 + 5 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: $G_{12}, G_{10}, G_3, G_{13}, G_{14}$

5. $D\left(\frac{12}{5}\right)$

- Fibración elíptica: $I_6 + I_2 + 4I_1$ (ver Figura 4.8).
- Se hacen 11 blow-ups

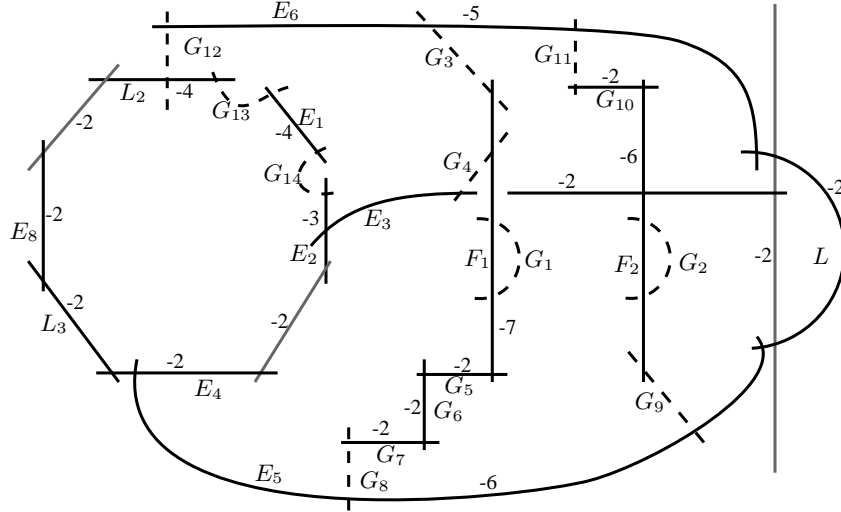


- $L_3 = [4] = d\left[\frac{-1}{2}\right]$
- $E_4, G_7 = [5, 2] = d\left[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right]$
- $G_2, F_2, E_3, E_2, L_1 = [2, 7, 2, 2, 3] = d\left[\frac{-4}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{-7}{9}, \frac{-6}{9}, \frac{-5}{9}\right]$
- $L, E_5, F_1, E_7, L_2 = [2, 4, 5, 2, 3] = d\left[\frac{-5}{12}, \frac{-10}{12}, \frac{-11}{12}, \frac{-9}{12}, \frac{-7}{12}\right]$
- $K^2 = -11 + 1 + 2 + 5 + 5 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{10}, G_9, G_{11}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_2 , que corresponde a las curvas G_2, G_3, F_2, G_5, G_6 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

6. $D_3^{(13)}$

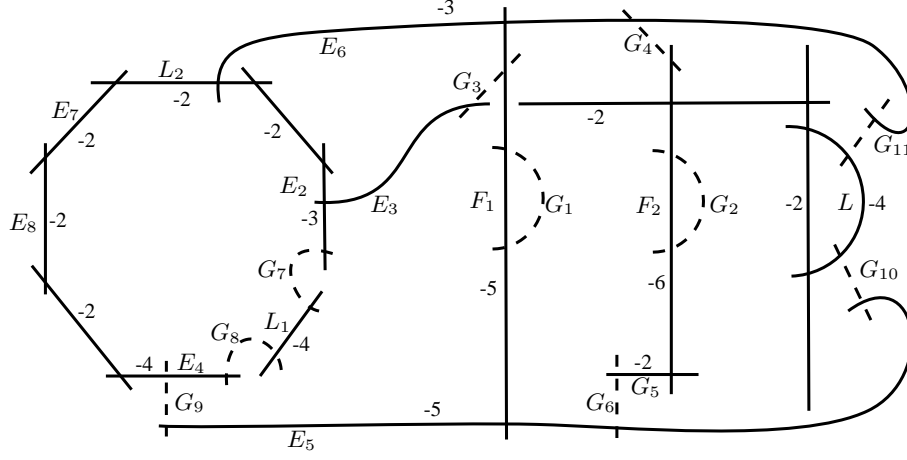
- Fibración elíptica: $I_8 + I_2 + 2I_1$ (ver Figura 4.4).
- Se hacen 14 blow-ups



- $E_1 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L_2 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $G_{10}, F_2, E_3, E_2 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $F_1, G_5, G_6, G_7 = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $E_6, L, E_5, E_4, L_3, E_8 = [5, 2, 6, 2, 2, 2] = d[\frac{-10}{13}, \frac{-11}{13}, \frac{-12}{13}, \frac{-9}{13}, \frac{-6}{13}, \frac{-3}{13}]$
- $K^2 = -14 + 1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: $G_3, G_{11}, G_{12}, G_{13}$

7. $D \binom{14}{3}$

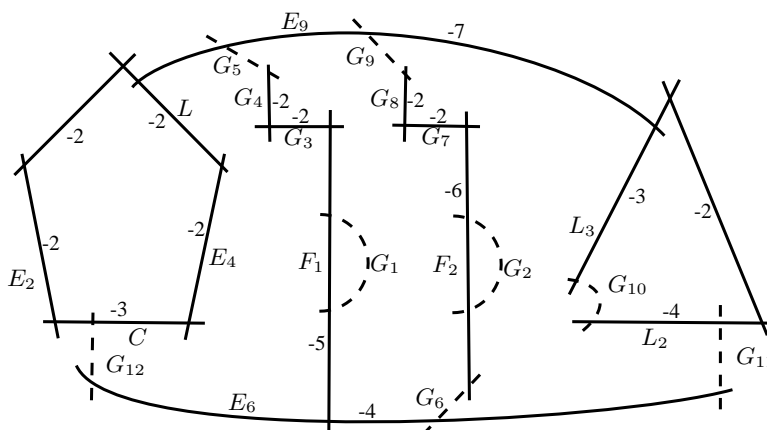
- Fibración elíptica: $I_8 + I_2 + 2I_1$ (ver Figura 4.4).
- Se hacen 11 blow-ups



- $L = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L_1 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_4 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $G_5, F_2, E_3, E_2 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $E_5, F_1, E_6, L_2, E_7, E_8 = [5, 5, 3, 2, 2, 2] = d[\frac{-11}{14}, \frac{-13}{14}, \frac{-12}{14}, \frac{-9}{14}, \frac{-6}{14}, \frac{-3}{14}]$
- $K^2 = -11 + 1 + 1 + 1 + 4 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_7, G_8, G_9, G_{10}

8. $D\left(\frac{14}{5}\right)$

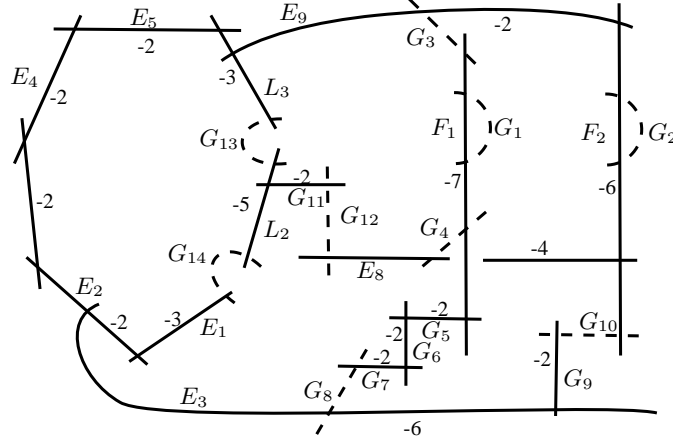
- Fibración elíptica: $I_5 + I_3 + 4I_1$ (ver Figura 4.10).
- Se hacen 12 blow-ups



- $L_2 = [4] = d\left[\frac{-1}{2}\right]$
- $F_2, G_7, G_8 = [6, 2, 2] = d\left[\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}\right]$
- $E_6, F_1, G_3, G_4 = [4, 5, 2, 2] = d\left[\frac{-5}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{-2}{7}\right]$
- $L_3, E_9, L, E_4, C, E_2 = [3, 7, 2, 2, 3, 2] = d\left[\frac{-9}{14}, \frac{-13}{14}, \frac{-12}{14}, \frac{-11}{14}, \frac{-10}{14}, \frac{-5}{14}\right]$
- $K^2 = -12 + 1 + 3 + 4 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_6, G_{11}, G_{10}

9. $D_4^{(15)}$

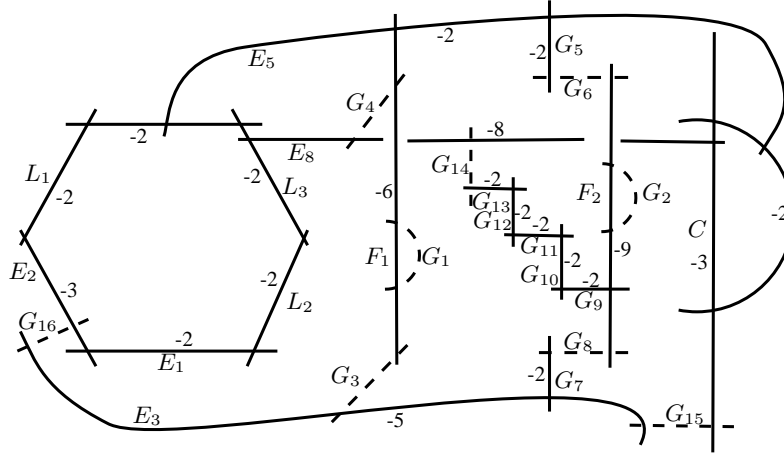
- Fibración elíptica: $I_7 + 5I_1$ (ver Figura 4.7).
- Se hacen 14 blow-ups



- $L_2, G_{11} = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $G_9, E_3, E_2, E_1 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $F_1, G_5, G_6, G_7 = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $E_8, F_2, E_9, L_3, E_5, E_4 = [4, 6, 2, 3, 2, 2] = d[\frac{-11}{15}, \frac{-14}{15}, \frac{-13}{15}, \frac{-12}{15}, \frac{-8}{15}, \frac{-4}{15}]$
- $K^2 = -14 + 2 + 4 + 4 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{14}, G_8, G_4

10. $D_6^{(17)}$

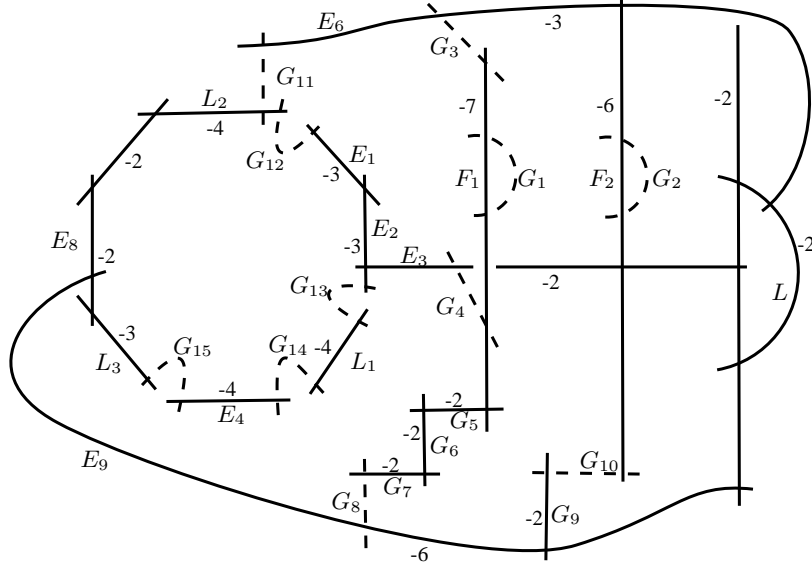
- Fibración elíptica: $I_6 + I_2 + 4I_1$ (ver Figura 4.8).
- Se hacen 16 blow-ups



- $E_3, G_7 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $F_1, E_5, G_5 = [6, 2, 2] = d[\frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}]$
- $F_2, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_{13} = [9, 2, 2, 2, 2, 2] = d[\frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{-1}{7}]$
- $C, E_8, L_3, L_2, E_1, E_2, L_1 = [3, 8, 2, 2, 2, 3, 2] = d[\frac{-11}{17}, \frac{-16}{17}, \frac{-15}{17}, \frac{-14}{17}, \frac{-13}{17}, \frac{-12}{17}, \frac{-6}{17}]$
- $K^2 = -16 + 2 + 3 + 6 + 7 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_8, G_3, G_{15}

11. $D_7^{(18)}$

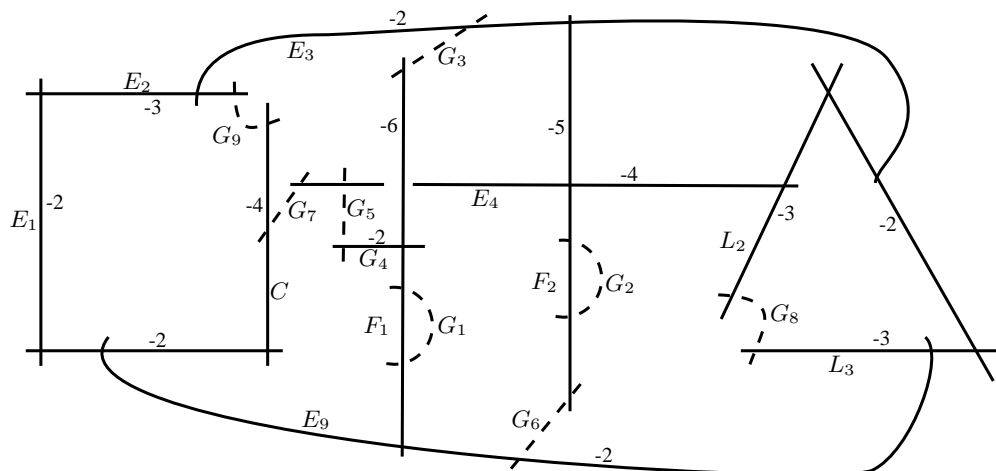
- Fibración elíptica: $I_8 + I_2 + 2I_1$ (ver Figura 4.4).
- Se hacen 15 blow-ups



- $L_1 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_4 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L_2 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $G_9, E_9, E_8, L_3 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $F_1, G_5, G_6, G_7 = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $L, E_6, F_2, E_3, E_2, E_1 = [2, 3, 6, 2, 3, 3] = d[\frac{-7}{18}, \frac{-14}{18}, \frac{-17}{18}, \frac{-16}{18}, \frac{-15}{18}, \frac{-11}{18}]$
- $K^2 = -15 + 1 + 1 + 1 + 4 + 4 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: $G_8, G_{15}, G_{14}, G_3, G_{11}, G_{12}$

12. $D_{(7)}^{(19)}$

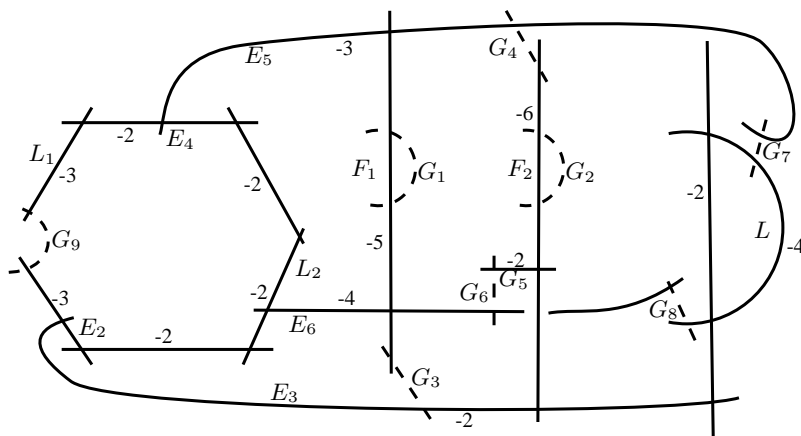
- Fibración elíptica: $I_4 + I_3 + 5I_1$ (ver Figura 4.15).
- Se hacen 9 blow-ups



- $C = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $G_4, F_1, E_9, L_3 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $L_2, E_4, F_2, E_3, E_2, E_1 = [3, 4, 5, 2, 3, 2] = d[\frac{-12}{19}, \frac{-17}{19}, \frac{-18}{19}, \frac{-16}{19}, \frac{-14}{19}, \frac{-7}{19}]$
- $K^2 = -9 + 1 + 4 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_8, G_7

13. $D\left(\frac{19}{8}\right)$

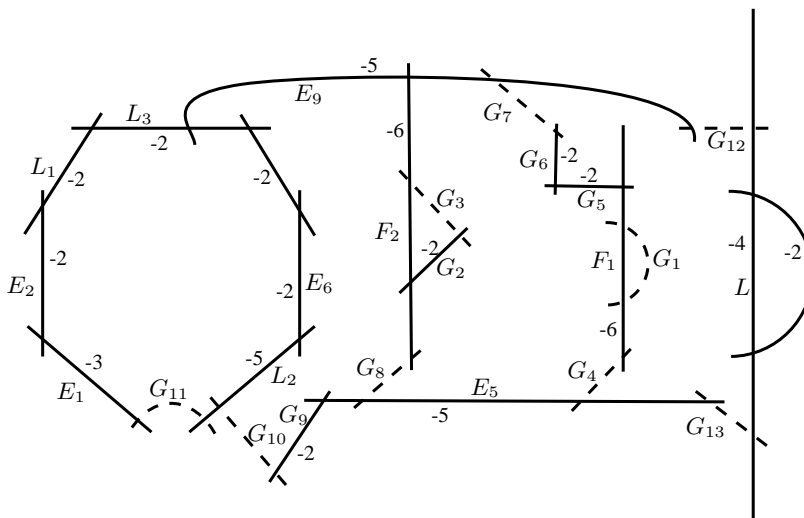
- Fibración elíptica: $I_6 + I_2 + 4I_1$ (ver Figura 4.8).
- Se hacen 9 blow-ups



- $L = [4] = d\left[\frac{-1}{2}\right]$
- $G_5, F_2, E_3, E_2 = [2, 6, 2, 3] = d\left[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}\right]$
- $L_2, E_6, F_1, E_5, E_4, L_1 = [2, 4, 5, 3, 2, 3] = d\left[\frac{-8}{19}, \frac{-16}{19}, \frac{-18}{19}, \frac{-17}{19}, \frac{-14}{19}, \frac{-11}{19}\right]$
- $K^2 = -9 + 1 + 4 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_9, G_8

14. $D_{(9)}^{(20)}$

- Fibración elíptica: $I_7 + I_2 + 3I_1$ (ver Figura 4.6).
- Se hacen 13 blow-ups

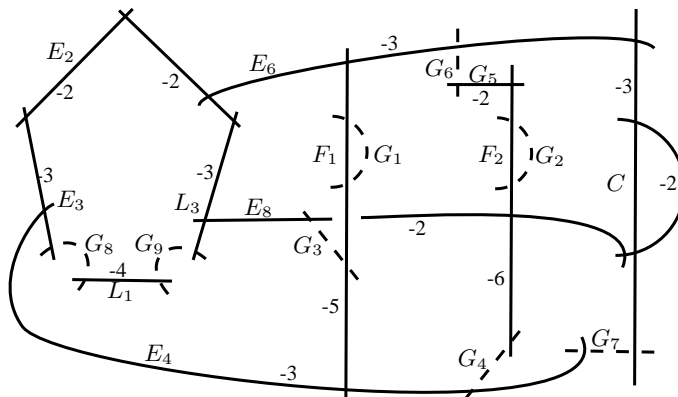


- $L = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_5, G_9 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $L_2, E_6 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $F_1, G_5, G_6 = [6, 2, 2] = d[\frac{-3}{4}, \frac{-2}{4}, \frac{-1}{4}]$
- $G_2, F_2, E_9, L_3, L_1, E_2, E_1 = [2, 6, 5, 2, 2, 2, 3] = d[\frac{-9}{20}, \frac{-18}{20}, \frac{-19}{20}, \frac{-17}{20}, \frac{-15}{20}, \frac{-13}{20}, \frac{-11}{20}]$
- $K^2 = -13 + 1 + 2 + 2 + 3 + 7 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{11}, G_4, G_{13}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_2 , que corresponde a las curvas G_2, G_3, F_2, G_8 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

15. $D_{(8)}^{(21)}$

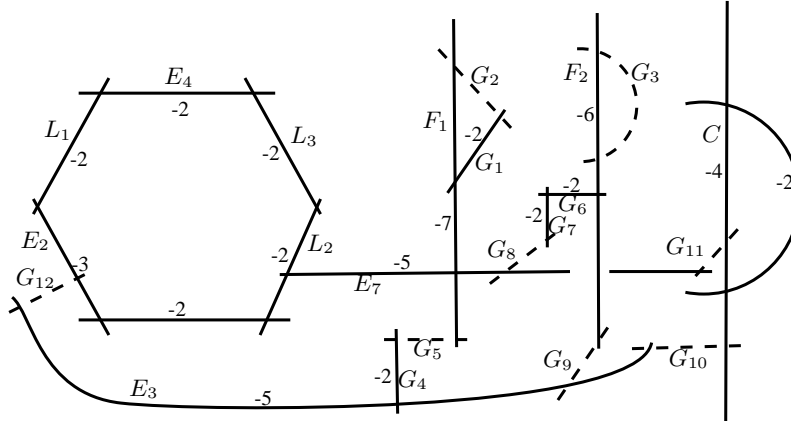
- Fibración elíptica: $I_5 + I_2 + 5I_1$ (ver Figura 4.11).
- Se hacen 9 blow-ups



- $L_1 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $G_5, F_2, E_8, L_3 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $C, E_6, F_1, E_4, E_3, E_2 = [3, 3, 5, 3, 3, 2] = d[\frac{-13}{21}, \frac{-18}{21}, \frac{-20}{21}, \frac{-19}{21}, \frac{-16}{21}, \frac{-8}{21}]$
- $K^2 = -9 + 1 + 4 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_9, G_4, G_7

16. $D_{11}^{(24)}$

- Fibración elíptica: $I_6 + I_2 + 4I_1$ (ver Figura 4.8).
- Se hacen 12 blow-ups

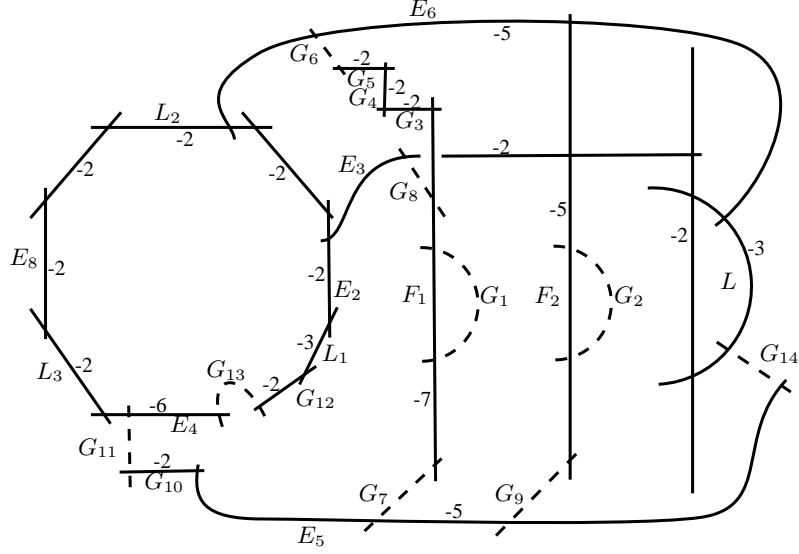


- $C = [4] = d[-\frac{1}{2}]$
- $E_3, G_4 = [5, 2] = d[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$
- $F_2, G_6, G_7 = [6, 2, 2] = d[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$
- $G_1, F_1, E_7, L_2, L_3, E_4, L_1, E_2 = [2, 7, 5, 2, 2, 2, 2, 3]$
 $= d[-\frac{11}{24}, -\frac{22}{24}, -\frac{23}{24}, -\frac{21}{24}, -\frac{19}{24}, -\frac{17}{24}, -\frac{15}{24}, -\frac{13}{24}]$
- $K^2 = -12 + 1 + 2 + 3 + 8 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_9, G_{12}, G_{10}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas G_1, G_2, F_1, G_4, G_5 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

17. $D_{(9)}^{(25)}$

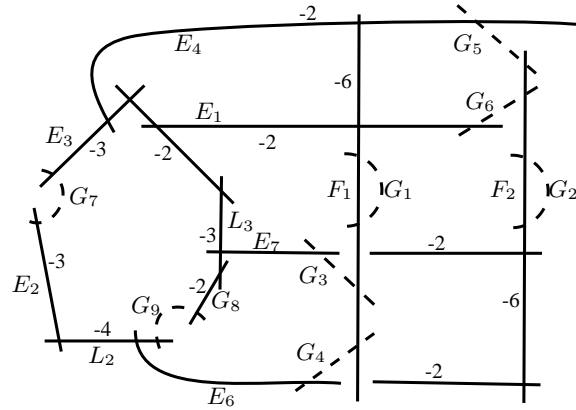
- Fibración elíptica: $I_8 + I_2 + 2I_1$ (ver Figura 4.4).
- Se hacen 14 blow-ups



- $E_5, G_{10} = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $E_4, L_3, E_8 = [6, 2, 2] = d[\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}]$
- $F_1, g_3, G_4, G_5 = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $L, E_6, F_2, E_3, E_2, L_1, G_{12} = [3, 5, 5, 2, 2, 3, 2] = d[\frac{-16}{25}, \frac{-23}{25}, \frac{-24}{25}, \frac{-22}{25}, \frac{-20}{25}, \frac{-18}{25}, \frac{-9}{25}]$
- $K^2 = -14 + 2 + 3 + 4 + 7 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{14}, G_7, G_{11}

18. $D_{10}^{(27)}$

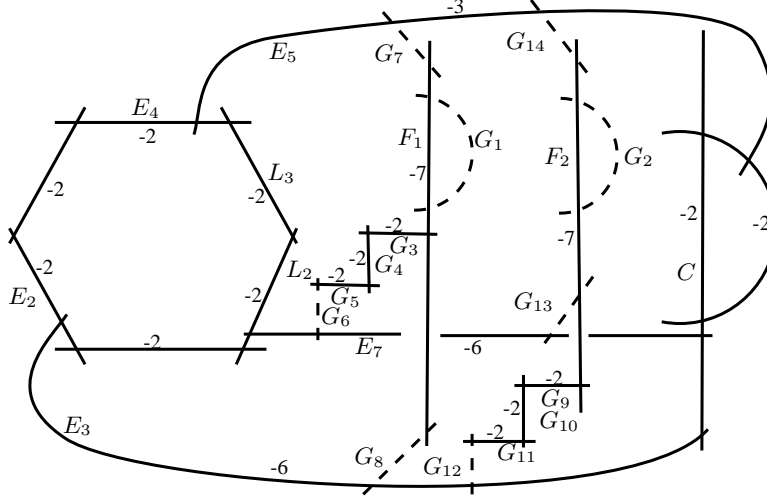
- Fibración elíptica: $I_5 + 7I_1$ (ver Figura 4.12).
- Se hacen 9 blow-ups



- $E_1, F_1, E_4, E_3 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $E_2, L_2, E_6, F_2, E_7, L_3, G_8 = [3, 4, 2, 6, 2, 3, 2] = [\frac{-17}{27}, \frac{-24}{27}, \frac{-25}{27}, \frac{-26}{27}, \frac{-23}{27}, \frac{-20}{27}, \frac{-10}{27}]$
- $K^2 = -9 + 4 + 7 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_7

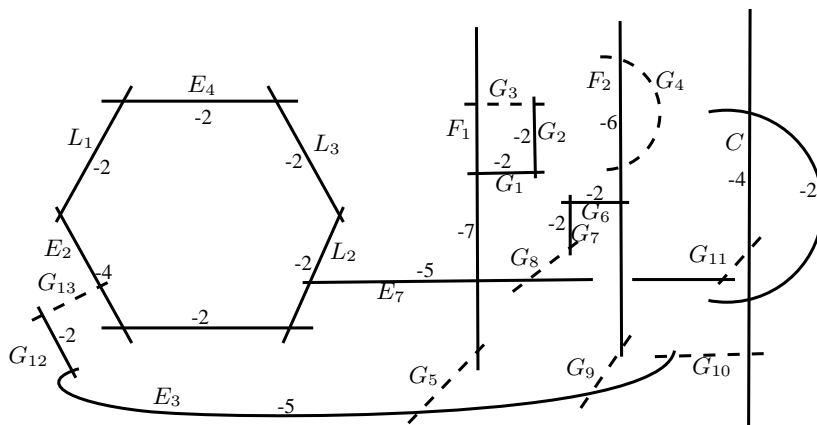
19. $D_{13}^{(29)}$

- Fibración elíptica: $I_6 + I_2 + 4I_1$ (ver Figura 4.8).
- Se hacen 14 blow-ups



- $F_1, G_3, G_4, G_5 = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $F_2, G_9, G_{10}, G_{11} = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $E_2, E_3, C, E_7, L_2, L_3, E_4, E_5 = [2, 6, 2, 6, 2, 2, 2, 3]$
 $= d[\frac{-13}{29}, \frac{-26}{29}, \frac{-27}{29}, \frac{-28}{29}, \frac{-25}{29}, \frac{-22}{29}, \frac{-19}{29}, \frac{-16}{29}]$
- $K^2 = -14 + 4 + 4 + 8 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_7, G_{14}

20. $D_{11}^{(35)}$
- Fibración elíptica: $I_6 + I_2 + 4I_1$ (ver Figura 4.8).
 - Se hacen 13 blow-ups

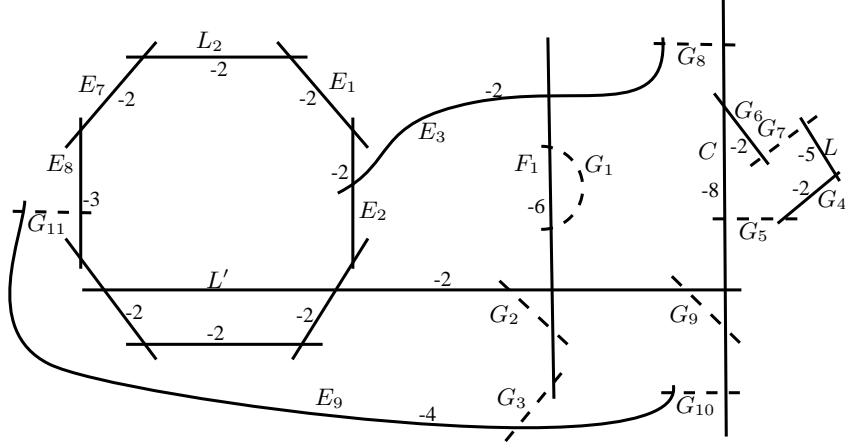


- $C = [4] = d[-\frac{1}{2}]$
- $E_3, G_{12} = [5, 2] = d[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$
- $F_2, G_6, G_7 = [6, 2, 2] = d[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$
- $G_2, G_1, F_1, E_7, L_2, L_3, E_4, L_1, E_2 = [2, 2, 7, 5, 2, 2, 2, 2, 4]$
 $= d[-\frac{11}{35}, -\frac{22}{35}, -\frac{33}{35}, -\frac{34}{35}, -\frac{32}{35}, -\frac{30}{35}, -\frac{28}{35}, -\frac{26}{35}, -\frac{24}{35}]$
- $K^2 = -13 + 1 + 2 + 3 + 9 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_9, G_{13}, G_{10}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas G_1, G_2, G_3, F_1, G_5 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

21. $D_{19}^{(41)}$

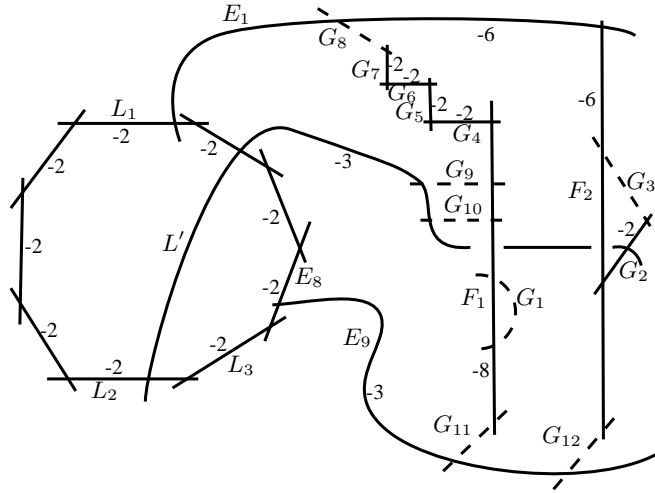
- Fibración elíptica: $I_8 + I_2 + 2I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.4).
- Se hacen 11 blow-ups



- $E_9 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L, G_4 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $G_6, C, L', F_1, E_3, E_2, E_1, L_2, E_7, E_8 = [2, 8, 2, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 3]$
 $= d[\frac{-19}{41}, \frac{-38}{41}, \frac{-39}{41}, \frac{-40}{41}, \frac{-37}{41}, \frac{-34}{41}, \frac{-31}{41}, \frac{-28}{41}, \frac{-25}{41}, \frac{-22}{41}]$
- $K^2 = -11 + 1 + 2 + 10 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{11}, G_5

22. $D_{19}^{(42)}$

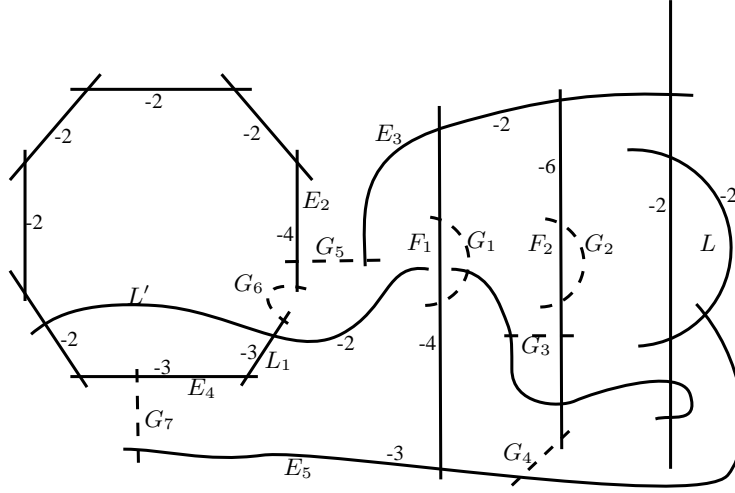
- Fibración elíptica: $I_9 + 3I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.3).
- Se hacen 12 blow-ups



- $F_1, G_4, G_5, G_6, G_7 = [8, 2, 2, 2] = d[-\frac{5}{6}, -\frac{4}{6}, -\frac{3}{6}, -\frac{2}{6}, -\frac{1}{6}]$
- $L_1, E_1, F_2, G_2, L', L_2, L_3, E_8, E_9 = [2, 6, 6, 2, 3, 2, 2, 2, 3]$
- $= d[\frac{-19}{42}, \frac{-38}{42}, \frac{-41}{42}, \frac{-40}{42}, \frac{-39}{42}, \frac{-35}{42}, \frac{-31}{42}, \frac{-27}{42}, \frac{-23}{42}]$
- $K^2 = -12 + 5 + 9 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Observemos que hay una curva (-2) que interseca a L_1 y que no interseca a ninguna otra curva de las configuraciones de Wahl. Usando esta curva obtenemos que un lazo alrededor de L_1 es trivial. Como este lazo es generador obtenemos que los lazos alrededor de todas las curvas de esa configuración de Wahl son triviales. Ahora aplicamos la sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de G_8 y así se concluye que el grupo fundamental es trivial.

23. $D_{17}^{(44)}$

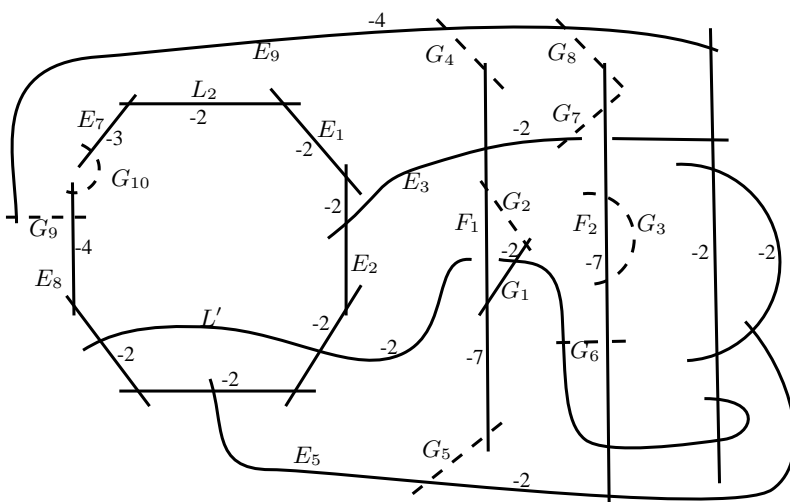
- Fibración elíptica: $I_8 + I_2 + 2I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.4).
- Se hacen 7 blow-ups



- $E_2 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $L, E_5, F_1, E_3, F_2, L', L_1, E_4 = [2, 3, 4, 2, 6, 2, 3, 3]$
 $= d[\frac{-17}{44}, \frac{-34}{44}, \frac{-41}{44}, \frac{-42}{44}, \frac{-43}{44}, \frac{-40}{44}, \frac{-37}{44}, \frac{-27}{44}]$
- $K^2 = -7 + 1 + 8 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Observemos que hay una curva (-2) que interseca a E_2 y que no interseca a ninguna otra curva de las configuraciones de Wahl. Usando esta curva obtenemos que un lazo alrededor de E_2 es trivial. Ahora aplicando la sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de G_6 vemos que los lazos alrededor de L_1 son triviales, pero un lazo α alrededor de L_1 es igual a β^3 donde β es un lazo alrededor de E_4 que es generador. Luego β^3 es trivial y como 3 es coprimo con 44 entonces se concluye que $\beta = 1$ y por lo tanto el grupo fundamental es trivial.

24. $D_{21}^{(46)}$

- Fibración elíptica: $I_8 + I_2 + 2I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.4).
- Se hacen 10 blow-ups

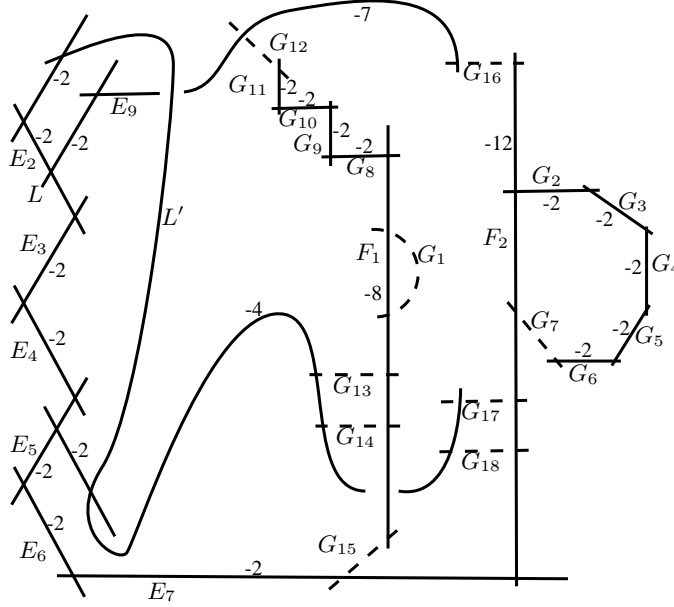


- $E_8 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_9 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_5, F_2, L', G_1, F_1, E_3, E_2, E_1, L_2, E_7 = [2, 7, 2, 2, 7, 2, 2, 2, 2, 3]$
- $= d[\frac{-21}{46}, \frac{-42}{46}, \frac{-43}{46}, \frac{-44}{46}, \frac{-45}{46}, \frac{-41}{46}, \frac{-37}{46}, \frac{-33}{46}, \frac{-29}{46}, \frac{-25}{46}]$
- $K^2 = -10 + 1 + 1 + 10 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Observemos que hay una curva (-2) que interseca a E_5 y no interseca a ninguna otra curva de las configuraciones de Wahl. Usando esta curva, obtenemos que un lazo alrededor de E_5 es trivial. Como este lazo es generador obtenemos que los lazos alrededor de todas las curvas de esa configuración de Wahl son triviales. Ahora aplicamos la sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de G_{10}, G_9 y así se concluye que el grupo fundamental es trivial.

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas G_1, G_2, F_1, G_4, G_5 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

25. $D_{(9)}^{(55)}$

- Fibración elíptica: $I_3^* + 3I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.1).
- Se hacen 18 blow-ups



$$- L' = [4] = d\left[\frac{-1}{2}\right]$$

$$F_1, G_8, G_9, G_{10}, G_{11} = [8, 2, 2, 2] = d\left[\frac{-5}{6}, \frac{-4}{6}, \frac{-3}{6}, \frac{-2}{6}, \frac{-1}{6}\right]$$

$$G_6, G_5, G_4, G_3, G_2, F_2, E_7, E_6, E_5, E_4, E_3, E_2, L, E_9 = [2, 2, 2, 2, 2, 12, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 7] = d\left[\frac{-9}{55}, \frac{-18}{55}, \frac{-27}{55}, \frac{-36}{55}, \frac{-45}{55}, \frac{-54}{55}, \frac{-53}{55}, \frac{-52}{55}, \frac{-51}{55}, \frac{-50}{55}, \frac{-49}{55}, \frac{-48}{55}, \frac{-47}{55}, \frac{-46}{55}\right]$$

$$- K^2 = -18 + 1 + 5 + 14 = 2$$

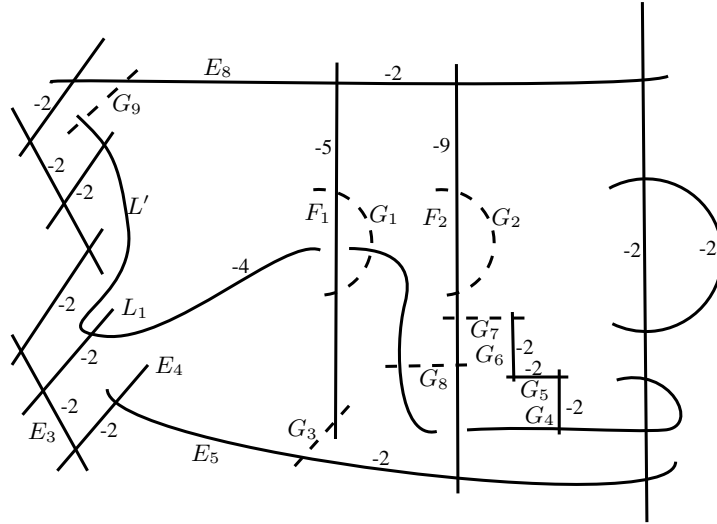
- X' es racional

- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{12}, G_{13}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_2 , que corresponde a las curvas $G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, F_2, G_{16}, G_{17}, G_{18}$, está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

26. $D_{13}^{(58)}$

- Fibración elíptica: $I_2^* + I_2 + 2I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.17).
- Se hacen 9 blow-ups



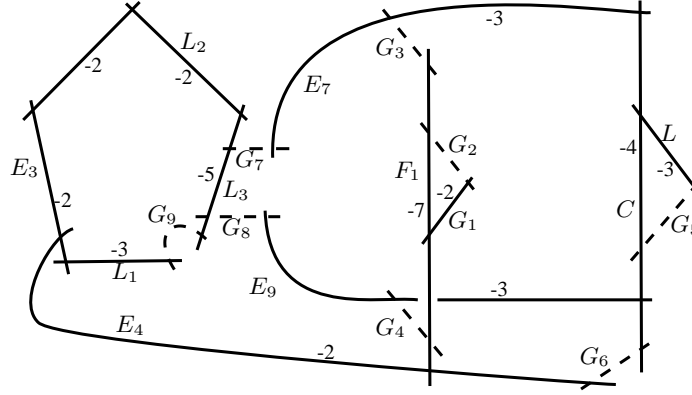
- $F_1, E_8, F_2, E_5, E_4, E_3, L_1, L', G_4, G_5, G_6 = [5, 2, 9, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 2, 2]$
 $= d[\frac{-45}{58}, \frac{-51}{58}, \frac{-57}{58}, \frac{-56}{58}, \frac{-55}{58}, \frac{-54}{58}, \frac{-53}{58}, \frac{-52}{58}, \frac{-39}{58}, \frac{-26}{58}, \frac{-13}{58}]$
- $K^2 = -9 + 11 = 2$

- X' es racional
- π_1 trivial: Observemos que hay una curva (-2) que interseca a L' y no interseca a ninguna otra curva de la configuración de Wahl. Usando esta curva, obtenemos que un lazo alrededor de L' es trivial. Ahora aplicando la sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de G_8 y luego a G_7 obtenemos que lazos alrededor de F_2 y G_6 son triviales. Pero los lazos alrededor de G_6 son generadores, de donde se concluye que el grupo fundamental es trivial.

OBSERVACIÓN 9. $n = 58$ es el máximo nuevo record en índices para $K^2 = 2$.

27. $D(3, 3, 3; 4)$

- Fibración elíptica: $I_5 + I_2 + 5I_1$ (ver Figura 4.11).
- Se hacen 9 blow-ups

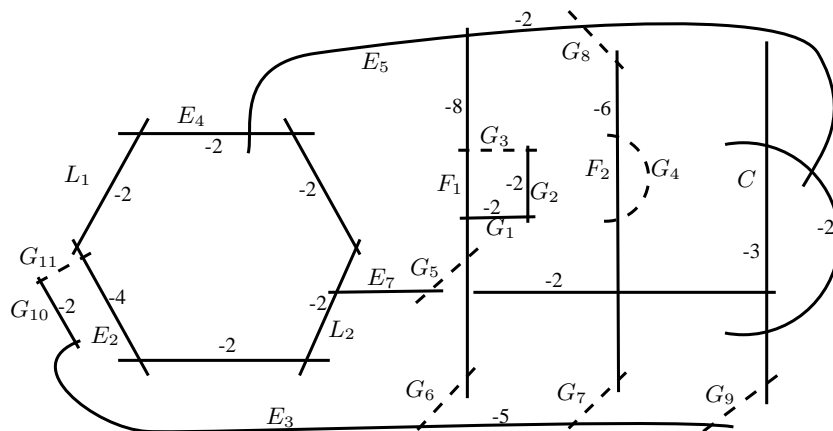


- $L_3, L_3 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $G_1, F_1, E_4, E_3, L_1 = [2, 7, 2, 2, 3] = d[\frac{-4}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{-7}{9}, \frac{-6}{9}, \frac{-5}{9}]$
- $L, E_7, E_9; C = [3, 3, 3; 4] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}; -1]$
- $K^2 = -9 + 2 + 5 + 4 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Sea α un lazo alrededor de G_1 y β un lazo alrededor de F_1 . Notar que α es generador y se tiene que $\beta = \alpha^2$. Además, usando la curva G_2 se tiene que $\alpha \sim \beta$, luego se tiene que $\alpha^2 = \alpha$ y por lo tanto $\alpha = 1$. Ahora aplicando la sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de G_9, G_3, G_4, G_6, G_5 se concluye que el grupo fundamental es trivial.

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas G_1, G_2, F_1, G_3, G_4 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

28. $D(2, 3, 6; 2)$

- Fibración elíptica: $I_6 + I_2 + 4I_1$ (ver Figura 4.8).
- Se hacen 11 blow-ups

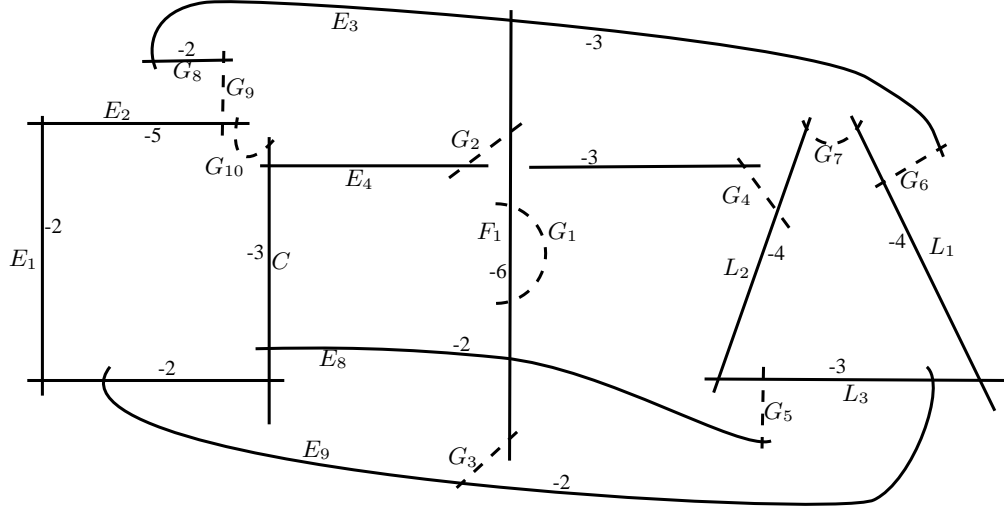


- $E_3, G_{10} = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $G_2, G_1, F_1, E_5, E_4, L_1, E_2 = [2, 2, 8, 2, 2, 2, 4]$
- $L_2, C, F_2; E_7 = [2, 3, 6; 2] = d[\frac{-1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{6}; -1]$
- $K^2 = -11 + 2 + 7 + 4 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{11}, G_5, G_7, G_9

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas $G_1, G_2, G_3, F_1, G_5, G_6$, está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

29. $D(4, 2, 4; 3)$

- Fibración elíptica: $I_4 + I_3 + 5I_1$ (ver Figura 4.15).
- Se hacen 10 blow-ups

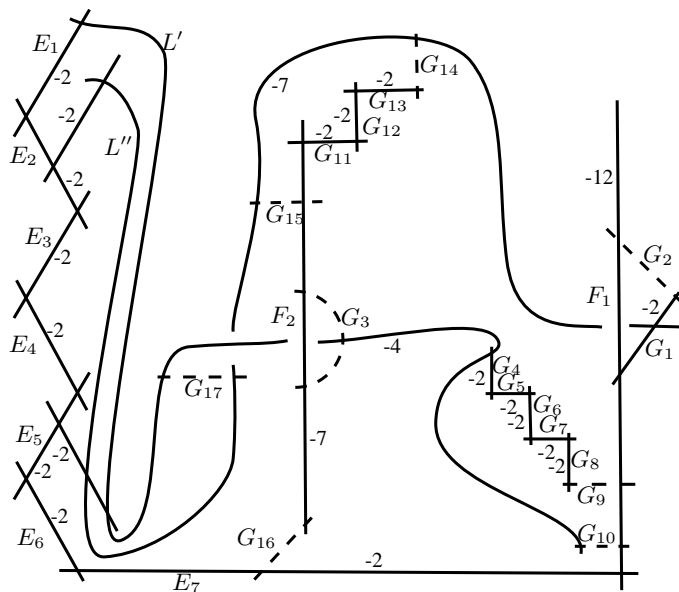


- $E_2, E_1 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $G_8, E_3, F_1, E_8, C, E_4 = [2, 3, 6, 2, 3, 3]$
- $L_1, E_9, L_2; L_3 = [4, 2, 4; 3] = d[\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{4}; -1]$
- $K^2 = -10 + 2 + 6 + 4 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Usando la curva $(-1) G_1$ vemos que un lazo α alrededor de F_1 es tal que $\alpha^2 = 1$. Por otro lado, si β es un lazo alrededor de E_4 , entonces $\alpha \sim \beta$ y luego $\beta^2 = 1$. Además, si γ y η representan lazos alrededor de E_8 y E_3 , entonces se tiene que $\gamma = \beta^8 = 1$ y $\eta = \beta^{70} = 1$. Ahora aplicando la sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de $G_6, G_7, G_4, G_9, G_3, G_5$ se concluye que el grupo fundamental es trivial.

3.3. $K^2 = 3$

1. $D_{(1)}^{(5)}$

- Fibración elíptica: $I_3^* + 3I_1$ con dos secciones dobles (ver Figura 4.1).
- Se hacen 17 blow-ups

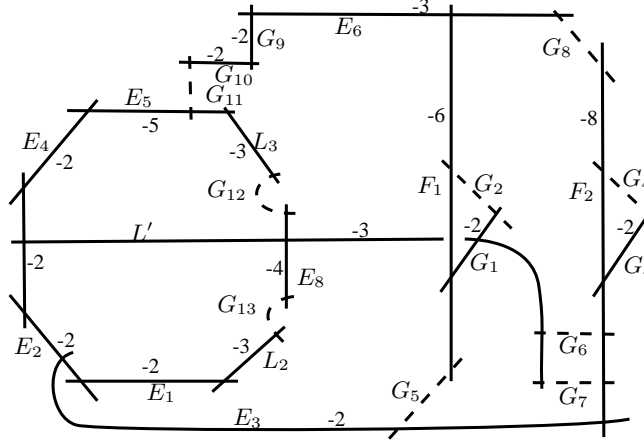


- $F_2, G_{11}, G_{12}, G_{13} = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $L'', G_1, F_1, E_7, E_6, E_5, E_4, E_3, E_2, E_1, L', G_4, G_5, G_6, G_7, G_8 = [7, 2, 12, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 2, 2] = d[\frac{-104}{123}, \frac{-113}{123}, \frac{-122}{123}, \frac{-121}{123}, \frac{-120}{123}, \frac{-119}{123}, \frac{-118}{123}, \frac{-117}{123}, \frac{-116}{123}, \frac{-115}{123}, \frac{-114}{123}, \frac{-95}{123}, \frac{-76}{123}, \frac{-57}{123}, \frac{-38}{123}, \frac{-19}{123}]$
- $K^2 = -17 + 4 + 16 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{14}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas $G_1, G_2, F_1, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}$, está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

2. $D\binom{5}{2}$

- Fibración elíptica: $I_8 + 4I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.5).
- Se hacen 13 blow-ups

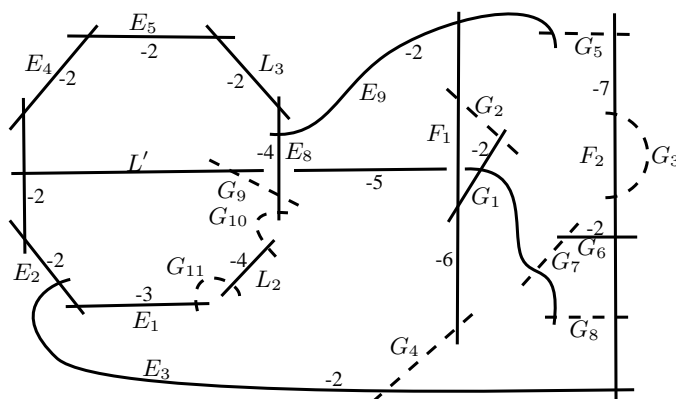


- $L_3, E_5, E_4 = [3, 5, 2] = d[\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{-2}{5}]$
- $G_3, F_2, E_3, E_2, E_1, L_2 = [2, 8, 2, 2, 2, 3] = d[\frac{-5}{11}, \frac{-10}{11}, \frac{-9}{11}, \frac{-8}{11}, \frac{-7}{11}, \frac{-6}{11}]$
- $E_8, L', G_1, F_1, E_6, G_9, G_{10} = [4, 3, 2, 6, 3, 2, 2] = d[\frac{-18}{25}, \frac{-22}{25}, \frac{-23}{25}, \frac{-24}{25}, \frac{-21}{25}, \frac{-14}{25}, \frac{-7}{25}]$
- $K^2 = -13 + 3 + 6 + 7 = 3$
- X' es una superficie de tipo general con $K^2 = 1$
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{13}, G_{12}

OBSERVACIÓN 10. Si X'_0 es la resolución minimal de un punto general en $D\binom{5}{2}$, entonces usando flips y contracciones divisoriales se prueba que existe una curva (-1) en X'_0 tal que después de contraerla se obtiene la superficie X' minimal. Más aún, la curva (-1) interseca en un punto a la curva (-5) , en otro punto a la curva (-3) y no interseca a la curva (-2) . Al contraer la curva (-1) la curva (-5) se transforma en una curva (-4) y la curva (-3) se transforma en una curva (-2) que interseca en dos puntos distintos a la curva (-4) y la otra curva (-2) se mantiene e interseca a la curva (-4) en un punto. Así X' es una superficie de Godeaux con $\pi_1 = 1$.

3. $D_4^{(9)}$

- Fibración elíptica: $I_8 + 4I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.5).
- Se hacen 11 blow-ups

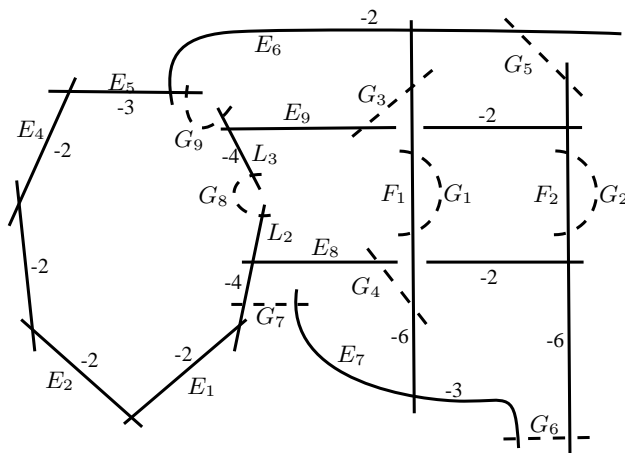


- $L_2 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $G_6, F_2, E_3, E_2, E_1 = [2, 7, 2, 2, 3] = d[\frac{-4}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{-7}{9}, \frac{-6}{9}, \frac{-5}{9}]$
- $L', G_1, F_1, E_9, E_8, L_3, E_5, E_4 = [5, 2, 6, 2, 4, 2, 2, 2]$
- $= d[\frac{-24}{31}, \frac{-27}{31}, \frac{-30}{31}, \frac{-29}{31}, \frac{-28}{31}, \frac{-21}{31}, \frac{-14}{31}, \frac{-7}{31}]$
- $K^2 = -11 + 1 + 5 + 8 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_7, G_{11}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas G_1, G_2, F_1, G_4 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

4. $D\binom{11}{4}$

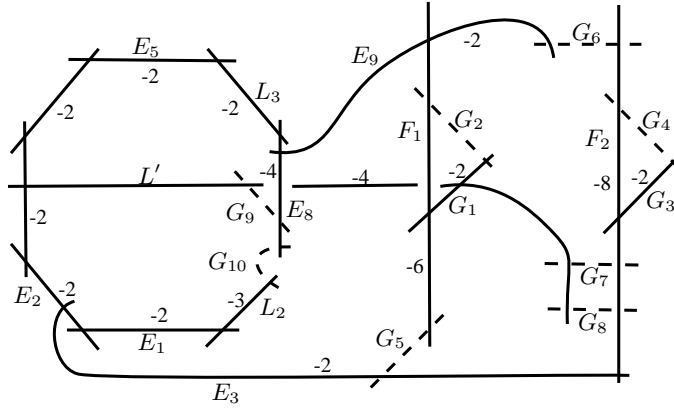
- Fibración elíptica: $I_7 + 5I_1$ (ver Figura 4.7).
- Se hacen 9 blow-ups



- $E_7, F_1, E_6, E_5, E_4 = [3, 6, 2, 3, 2] = d[\frac{-7}{11}, \frac{-10}{11}, \frac{-9}{11}, \frac{-8}{11}, \frac{-4}{11}]$
- $L_3, E_9, F_2, E_8, L_2, E_1, E_2 = [4, 2, 6, 2, 4, 2, 2] = d[\frac{-17}{24}, \frac{-20}{24}, \frac{-23}{24}, \frac{-22}{24}, \frac{-21}{24}, \frac{-14}{24}, \frac{-7}{24}]$
- $K^2 = -9 + 5 + 7 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_7, G_8

5. $D\left(\frac{11}{5}\right)$

- Fibración elíptica: $I_8 + 4I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.5).
- Se hacen 10 blow-ups

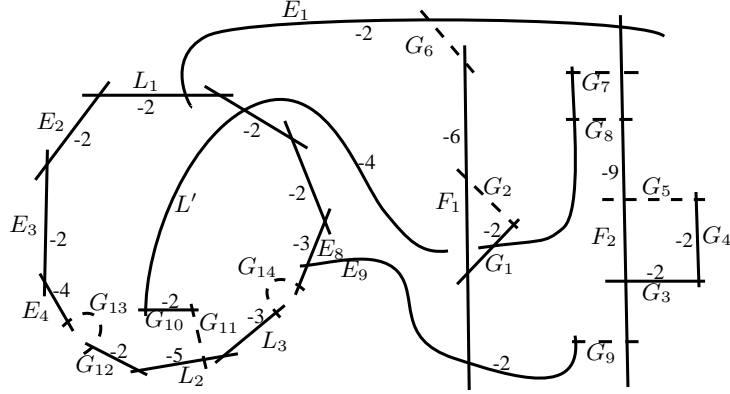


- $G_3, F_2, E_3, E_2, E_1, L_2 = [2, 8, 2, 2, 2, 3] = d\left[\frac{-5}{11}, \frac{-10}{11}, \frac{-9}{11}, \frac{-8}{11}, \frac{-7}{11}, \frac{-6}{11}\right]$
- $L', G_1, F_1, E_9, E_8, L_3, E_5 = [4, 2, 6, 2, 4, 2, 2] = d\left[\frac{-17}{24}, \frac{-20}{24}, \frac{-23}{24}, \frac{-22}{24}, \frac{-21}{24}, \frac{-14}{24}, \frac{-7}{24}\right]$
- $K^2 = -10 + 6 + 7 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{10}, G_9

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_2 , que corresponde a las curvas $G_3, G_4, F_2, G_6, G_7, G_8$, está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

6. $D\left(\frac{17}{7}\right)$

- Fibración elíptica: $I_9 + 3I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.3).
- Se hacen 14 blow-ups

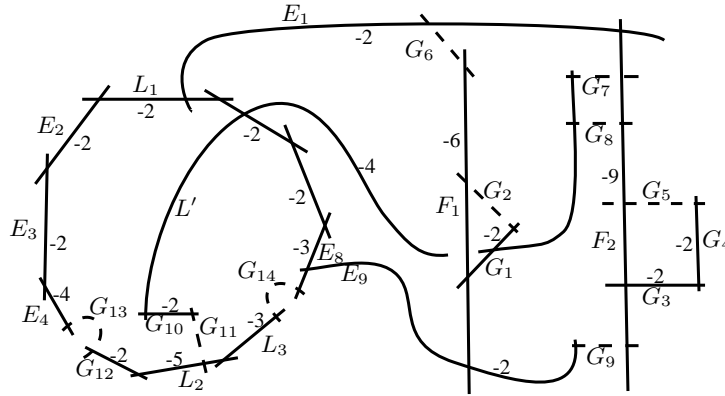


- $L_3, L_2, G_{12} = [3, 5, 2] = d\left[\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{-2}{5}\right]$
- $G_{10}, L', G_1, F_1, E_9, E_8 = [2, 4, 2, 6, 2, 3] = d\left[\frac{-7}{17}, \frac{-14}{17}, \frac{-15}{17}, \frac{-16}{17}, \frac{-13}{17}, \frac{-10}{17}\right]$
- $G_4, G_3, F_2, E_1, L_1, E_2, E_3, E_4 = [2, 2, 9, 2, 2, 2, 2, 4] = d\left[\frac{-6}{19}, \frac{-12}{19}, \frac{-18}{19}, \frac{-17}{19}, \frac{-16}{19}, \frac{-15}{19}, \frac{-14}{19}, \frac{-13}{19}\right]$
- $K^2 = -14 + 3 + 6 + 8 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{14}, G_{13}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_2 , que corresponde a las curvas $G_3, G_4, G_5, F_2, G_7, G_8, G_9$, está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

7. $D_{(6)}^{(19)}$

- Fibración elíptica: $I_9 + 3I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.3).
- Se hacen 14 blow-ups

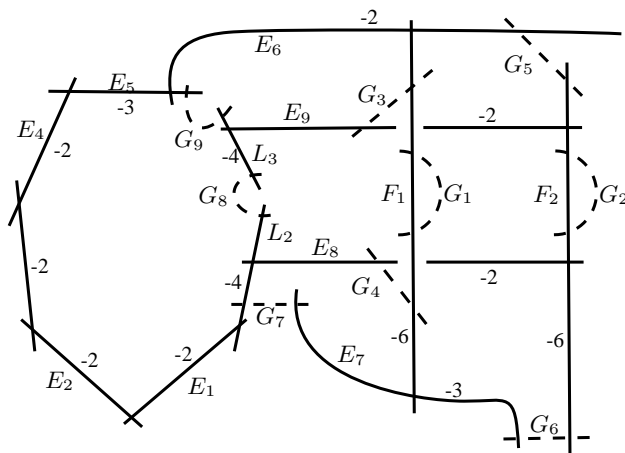


- $L_3, L_2, G_{12} = [3, 5, 2] = d[\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{-2}{5}]$
- $G_{10}, L', G_1, F_1, E_9, E_8 = [2, 4, 2, 6, 2, 3] = d[\frac{-7}{17}, \frac{-14}{17}, \frac{-15}{17}, \frac{-16}{17}, \frac{-13}{17}, \frac{-10}{17}]$
- $G_4, G_3, F_2, E_1, L_1, E_2, E_3, E_4 = [2, 2, 9, 2, 2, 2, 2, 4] = d[\frac{-6}{19}, \frac{-12}{19}, \frac{-18}{19}, \frac{-17}{19}, \frac{-16}{19}, \frac{-15}{19}, \frac{-14}{19}, \frac{-13}{19}]$
- $K^2 = -14 + 3 + 6 + 8 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{14}, G_{13}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_2 , que corresponde a las curvas $G_3, G_4, G_5, F_2, G_7, G_8, G_9$, está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

8. $D_{(7)}^{(24)}$

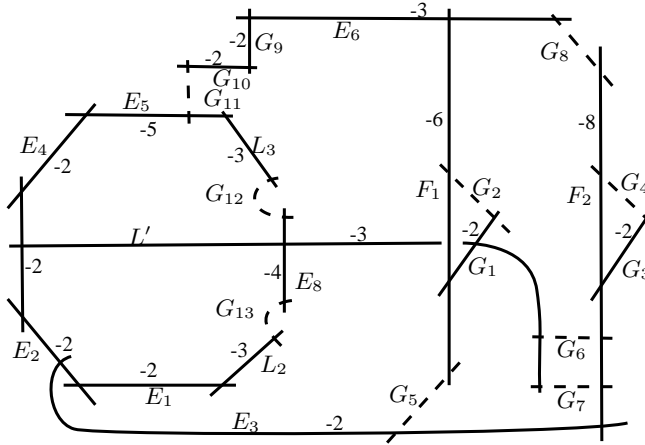
- Fibración elíptica: $I_7 + 5I_1$ (ver Figura 4.7).
- Se hacen 9 blow-ups



- $E_7, F_1, E_6, E_5, E_4 = [3, 6, 2, 3, 2] = d[\frac{-7}{11}, \frac{-10}{11}, \frac{-9}{11}, \frac{-8}{11}, \frac{-4}{11}]$
- $L_3, E_9, F_2, E_8, L_2, E_1, E_2 = [4, 2, 6, 2, 4, 2, 2] = d[\frac{-17}{24}, \frac{-20}{24}, \frac{-23}{24}, \frac{-22}{24}, \frac{-21}{24}, \frac{-14}{24}, \frac{-7}{24}]$
- $K^2 = -9 + 5 + 7 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_7, G_8

9. $D_7^{(25)}$

- Fibración elíptica: $I_8 + 4I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.5).
- Se hacen 13 blow-ups

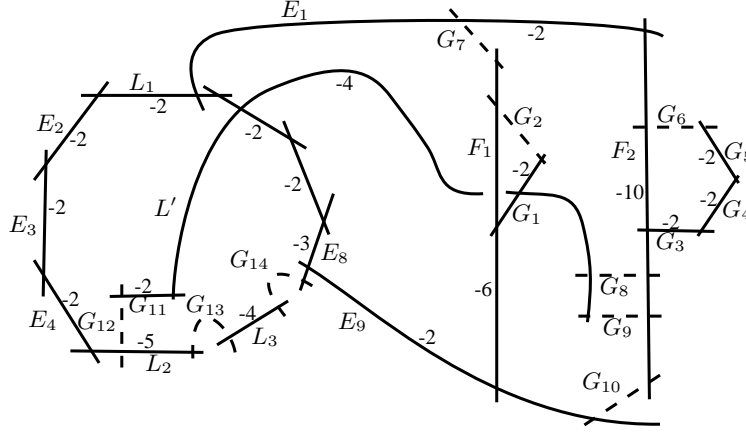


- $L_3, E_5, E_4 = [3, 5, 2] = d[\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{-2}{5}]$
- $G_3, F_2, E_3, E_2, E_1, L_2 = [2, 8, 2, 2, 2, 3] = d[\frac{-5}{11}, \frac{-10}{11}, \frac{-9}{11}, \frac{-8}{11}, \frac{-7}{11}, \frac{-6}{11}]$
- $E_8, L', G_1, F_1, E_6, G_9, G_{10} = [4, 3, 2, 6, 3, 2, 2] = d[\frac{-18}{25}, \frac{-22}{25}, \frac{-23}{25}, \frac{-24}{25}, \frac{-21}{25}, \frac{-14}{25}, \frac{-7}{25}]$
- $K^2 = -13 + 3 + 6 + 7 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{13}, G_{12}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_2 , que corresponde a las curvas $G_3, G_4, F_2, G_6, G_7, G_8$, está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

10. $D_{(7)}^{(29)}$

- Fibración elíptica: $I_9 + 3I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.3).
- Se hacen 14 blow-ups

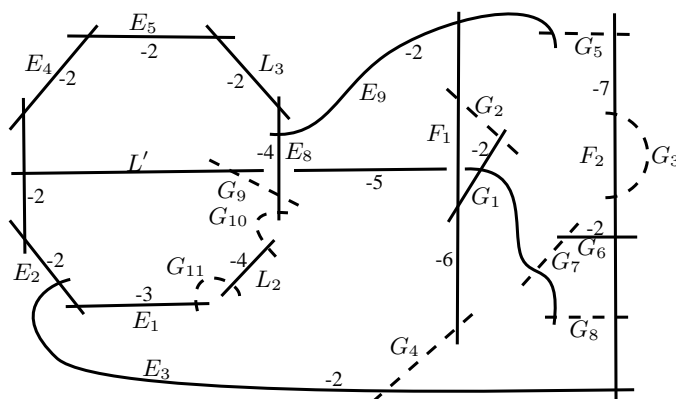


- $L_3 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $G_{11}, L', G_1, F_1, E_9, E_8 = [2, 4, 2, 6, 2, 3] = d[\frac{-7}{17}, \frac{-14}{17}, \frac{-15}{17}, \frac{-16}{17}, \frac{-13}{17}, \frac{-10}{17}]$
- $G_5, G_4, G_3, F_2, E_1, L_1, E_2, E_3, E_4, L_2 = [2, 2, 2, 10, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 5]$
- $d[\frac{-7}{29}, \frac{-14}{29}, \frac{-21}{29}, \frac{-28}{29}, \frac{-27}{29}, \frac{-26}{29}, \frac{-25}{29}, \frac{-24}{29}, \frac{-23}{29}, \frac{-22}{29}]$
- $K^2 = -14 + 1 + 6 + 10 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{12}, G_{13}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_2 , que corresponde a las curvas $G_3, G_4, G_5, G_6, F_2, G_8, G_9, G_{10}$, está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

11. $D_{(7)}^{(31)}$

- Fibración elíptica: $I_8 + 4I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.5).
- Se hacen 11 blow-ups

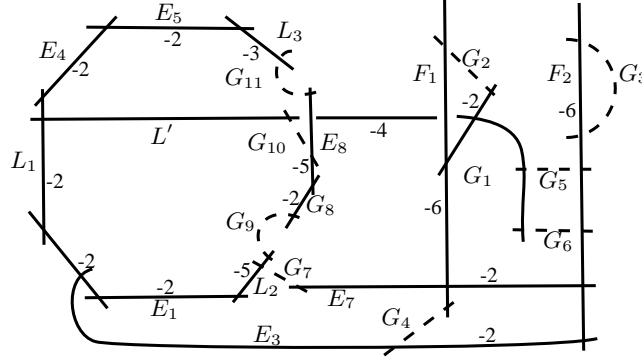


- $L_2 = [4] = d[-\frac{1}{2}]$
- $G_6, F_2, E_3, E_2, E_1 = [2, 7, 2, 2, 3] = d[\frac{-4}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{-7}{9}, \frac{-6}{9}, \frac{-5}{9}]$
- $L', G_1, F_1, E_9, E_8, L_3, E_5, E_4 = [5, 2, 6, 2, 4, 2, 2, 2]$
- $= d[\frac{-24}{31}, \frac{-27}{31}, \frac{-30}{31}, \frac{-29}{31}, \frac{-28}{31}, \frac{-21}{31}, \frac{-14}{31}, \frac{-7}{31}]$
- $K^2 = -11 + 1 + 5 + 8 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_7, G_{11}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas G_1, G_2, F_1, G_4 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

12. $D_{31}^{(69)}$

- Fibración elíptica: $I_8 + 4I_1$ con sección doble (ver Figura 4.5).
- Se hacen 11 blow-ups

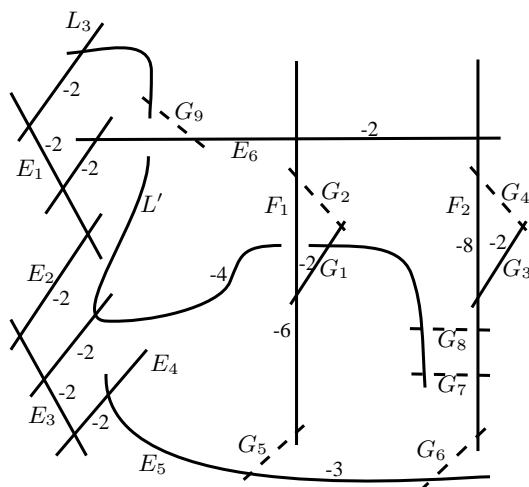


- $L_2, E_1 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $E_8, G_8 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $E_3, F_2, E_7, F_1, G_1, L', L_1, E_4, E_5, L_3 = [2, 6, 2, 6, 2, 4, 2, 2, 2, 3]$
- $d[\frac{-31}{69}, \frac{-62}{69}, \frac{-65}{69}, \frac{-68}{69}, \frac{-67}{69}, \frac{-66}{69}, \frac{-59}{69}, \frac{-52}{69}, \frac{-45}{69}, \frac{-38}{69}]$
- $K^2 = -11 + 2 + 2 + 10 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Sea α_1 un lazo alrededor de E_3 y α_2 un lazo alrededor de F_2 . Entonces se tiene que $\alpha_2 \sim \alpha_1^2$ y usando la curva $(-1) G_3$, se puede ver que $\alpha_2^2 = 1$. Luego $\alpha_1^4 = 1$ y como 4 es coprimo con 69, entonces necesariamente se tiene que $\alpha_1 = 1$. Ahora aplicamos la sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de G_7 y G_9 y así se concluye que el grupo fundamental es trivial.

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas G_1, G_2, F_1, G_4 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

13. $D_{45}^{(97)}$

- Fibración elíptica: $I_2^* + 4I_1$ con una sección (ver Figura 4.2).
- Se hacen 9 blow-ups

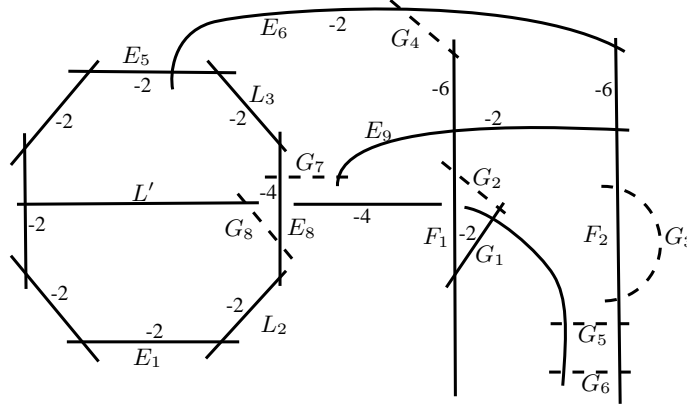


- $G_3, F_2, E_6, F_1, G_1, L', L_3, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 = [2, 8, 2, 6, 2, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 3]$
- $= d[\frac{-45}{97}, \frac{-90}{97}, \frac{-93}{97}, \frac{-96}{97}, \frac{-95}{97}, \frac{-94}{97}, \frac{-87}{97}, \frac{-80}{97}, \frac{-73}{97}, \frac{-66}{97}, \frac{-59}{97}, \frac{-52}{97}]$
- $K^2 = -9 + 12 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Sea α un lazo alrededor de G_3 , β un lazo alrededor de F_2 y α_0 un lazo alrededor de G_3 . Entonces α es generador y se tiene que $\beta = \alpha^2$. También se tiene que $\beta \sim \alpha$. Si γ es un camino que va desde el punto base de β y α al punto base de α_0 y μ es un camino que del punto base de α y β al punto base de α_0 , entonces se tiene que $\beta = \gamma\alpha_0\gamma^{-1}$ y $\alpha = \mu\alpha_0\mu^{-1}$. Además se tiene que $\mu^{-1}\gamma \sim 0$ (ver [21, Pag. 1490]), luego se concluye que $\alpha^2 = \alpha$ y por lo tanto $\alpha = 1$. Así el grupo fundamental es trivial.

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_2 , que corresponde a las curvas $G_3, G_4, F_2, G_6, G_7, G_8$, está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

14. $D_{29}^{(100)}$

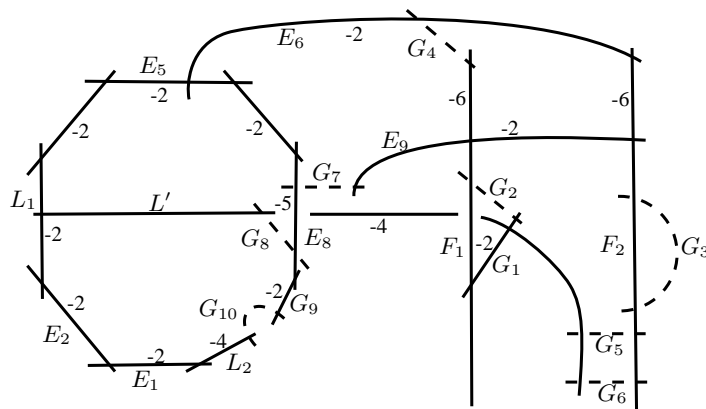
- Fibración elíptica: $I_8 + 4I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.5).
- Se hacen 8 blow-ups



- $L', G_1, F_1, E_9, F_2, E_6, E_5, L_3, E_8, L_2, E_1 = [4, 2, 6, 2, 6, 2, 2, 2, 4, 2, 2]$
- $d[\frac{-71}{100}, \frac{-84}{100}, \frac{-97}{100}, \frac{-98}{100}, \frac{-99}{100}, \frac{-96}{100}, \frac{-93}{100}, \frac{-90}{100}, \frac{-87}{100}, \frac{-58}{100}, \frac{-29}{100}]$
- $K^2 = -8 + 11 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Sea α un lazo alrededor de F_2 y β un lazo alrededor de L' . Usando la curva $(-1) G_3$ se tiene que $\alpha^2 = 1$ y como $\alpha \sim \beta$ entonces $\beta^2 = 1$. Como β es generador se concluye que lazos alrededor de E_9 son triviales. Luego usando la curva $(-1) G_7$ se obtiene que lazos alrededor de E_8 son triviales y finalmente usando la curva $(-1) G_8$ se tiene que β es trivial. Por lo tanto el grupo fundamental es trivial.

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas G_1, G_2, F_1, G_4 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

15. $D_{31}^{(100)}$
- Fibración elíptica: $I_8 + 4I_1$ con una sección doble (ver Figura 4.5).
 - Se hacen 10 blow-ups

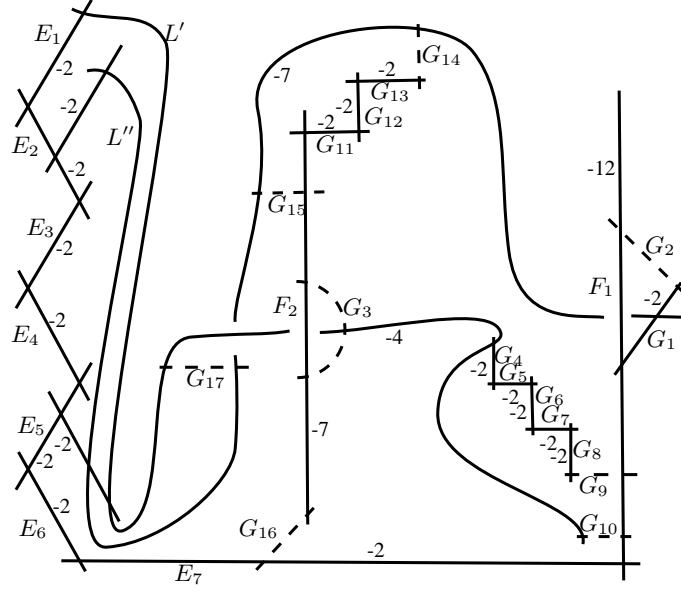


- $E_8, G_9 = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $L_2, E_1, E_2, L_1, L', G_1, F_1, E_9, F_2, E_6, E_5 = [4, 2, 2, 2, 4, 2, 6, 2, 6, 2, 2]$
- $= d[\frac{-69}{100}, \frac{-76}{100}, \frac{-83}{100}, \frac{-90}{100}, \frac{-97}{100}, \frac{-98}{100}, \frac{-99}{100}, \frac{-96}{100}, \frac{-93}{100}, \frac{-62}{100}, \frac{-31}{100}]$
- $K^2 = -10 + 2 + 11 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{10}

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas G_1, G_2, F_1, G_4 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

16. $D_{19}^{(123)}$

- Fibración elíptica: $I_3^* + 3I_1$ con dos secciones dobles (ver Figura 4.1).
- Se hacen 17 blow-ups



- $F_2, G_{11}, G_{12}, G_{13} = [7, 2, 2, 2] = d[\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}]$
- $L'', G_1, F_1, E_7, E_6, E_5, E_4, E_3, E_2, E_1, L', G_4, G_4, G_6, G_7, G_8 = [7, 2, 12, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 2, 2, 2, 2] = d[\frac{-104}{123}, \frac{-113}{123}, \frac{-122}{123}, \frac{-121}{123}, \frac{-120}{123}, \frac{-119}{123}, \frac{-118}{123}, \frac{-117}{123}, \frac{-116}{123}, \frac{-115}{123}, \frac{-114}{123}, \frac{-95}{123}, \frac{-76}{123}, \frac{-57}{123}, \frac{-38}{123}, \frac{-19}{123}]$
- $K^2 = -17 + 4 + 16 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_{14}

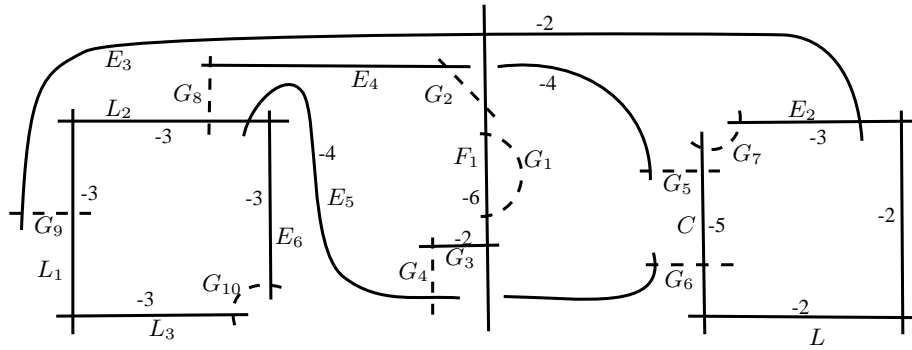
En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas $G_1, G_2, F_1, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}$, está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

OBSERVACIÓN 11. $n = 123$ es el máximo nuevo record en índices para $K^2 = 3$.

3.4. W.H.S.

1. $D(3, 4, 3 - 3; 3)$

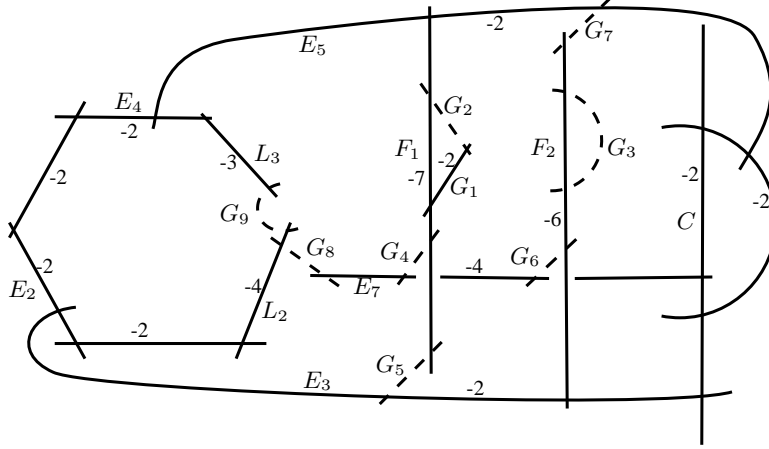
- Fibración elíptica: $2I_4 + 4I_1$ (ver Figura 4.14).
- Se hacen 10 blow-ups



- $E_4 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $C, L = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $G_3, F_1, E_3, E_2 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $E_6, E_5, L_1 - L_3; L_2 = [3, 4, 3 - 3; 3] = d[\frac{-5}{7}, \frac{-11}{14}, \frac{-13}{14} - \frac{-9}{14}, \frac{-8}{7}]$
- $K^2 = -10 + 1 + 2 + 4 + 5 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: $G_2, G_5, G_4, G_8, G_9, G_{10}$

2. $D(2, 6, 4 - 2; 2)$

- Fibración elíptica: $I_6 + I_2 + 4I_1$ (ver Figura).
- Se hacen 9 blow-ups

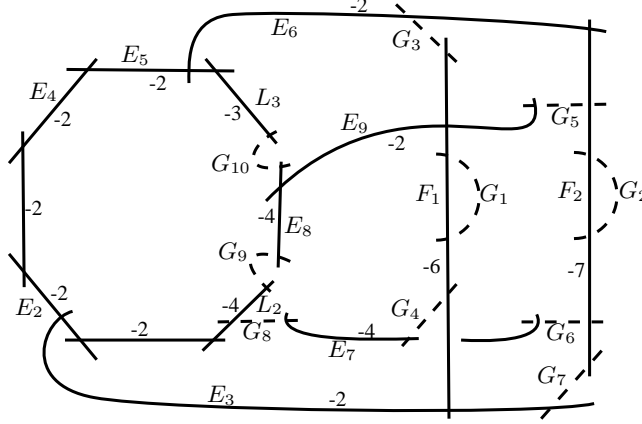


- $L_2 = [4] = d[-\frac{1}{2}]$
- $G_1, F_1, E_5, E_4, L_3 = [2, 7, 2, 2, 3] = d[\frac{-4}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{-7}{9}, \frac{-6}{9}, \frac{-5}{9}]$
- $E_2, F_2, E_7 - C; E_3 = [2, 6, 4 - 2; 2] = d[\frac{-5}{8}, \frac{-7}{8}, \frac{-3}{4} - (-1); \frac{-5}{4}]$
- $K^2 = -9 + 1 + 5 + 5 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_9, G_8, G_6, G_5

En este ejemplo se tiene que K_X es amplio pues el soporte de F_1 , que corresponde a las curvas G_1, G_2, F_1, G_4, G_5 , está contenido en $\sigma^*(K_X)$.

3. $D(2, 3, 7 - 2; 2)$

- Fibración elíptica: $I_8 + 4I_1$ (ver Figura 4.5).
- Se hacen 10 blow-ups

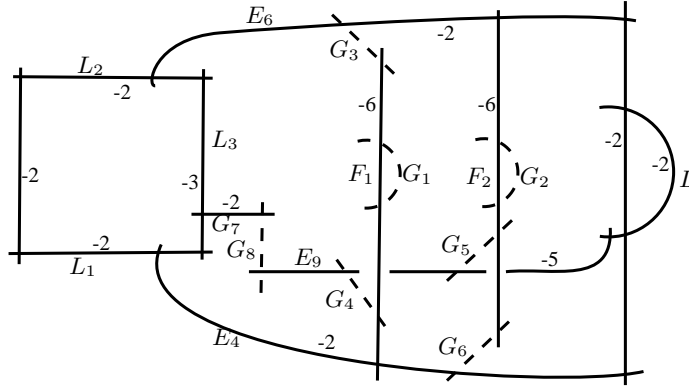


- $L_2 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_7 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $E_2, E_3, F_1, E_9, E_8 = [2, 2, 6, 2, 4] = d[\frac{-7}{10}, \frac{-8}{10}, \frac{-9}{10}, \frac{-6}{10}, \frac{-4}{10}]$
- $E_4, L_3, F_2 - E_6; E_5 = [2, 3, 7 - 2; 2] = d[\frac{-4}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-6}{7} - (-1); \frac{-8}{7}]$
- $K^2 = -10 + 1 + 1 + 5 + 5 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Sea
 - α un lazo alrededor de E_6
 - β un lazo alrededor de L_3
 - γ un lazo alrededor de E_4
 - δ un lazo alrededor de E_5
 - ϵ un lazo alrededor de F_2

Usando la curva $(-1) G_2$ se tiene que $\epsilon^2 = 1$. Por otro lado se tiene $1 = \alpha\epsilon^7$ y así usando la relación anterior se concluye que $\alpha\epsilon = 1$ o equivalentemente $\alpha = \epsilon^{-1}$. También tenemos la relación $1 = \delta\epsilon\alpha^2$, como $\alpha = \epsilon^{-1}$ entonces obtenemos que $\delta = \epsilon$ y así $\delta^2 = 1$. Además se tiene que $1 = \delta\beta^3$, es decir $\delta = \beta^{-3}$ y por lo obtenido anteriormente se concluye que $\beta^6 = 1$. Usando la curva $(-1) G_{10}$ se tiene que $\beta^{100} = 1$ y esto junto con la relación anterior nos dice que $\beta^4 = 1$ y por tanto $\beta^2 = 1$. Así $\delta = \beta^{-1}$ y como $1 = \gamma\beta\alpha\delta^2$, entonces usando las relaciones anteriores se concluye que $\gamma = 1$. Por otro lado, como $\delta\gamma^2 = 1$ y $\gamma = 1$ tenemos que $\delta = 1$ y así $\epsilon = \alpha = \beta = 1$. Ahora aplicamos la sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de

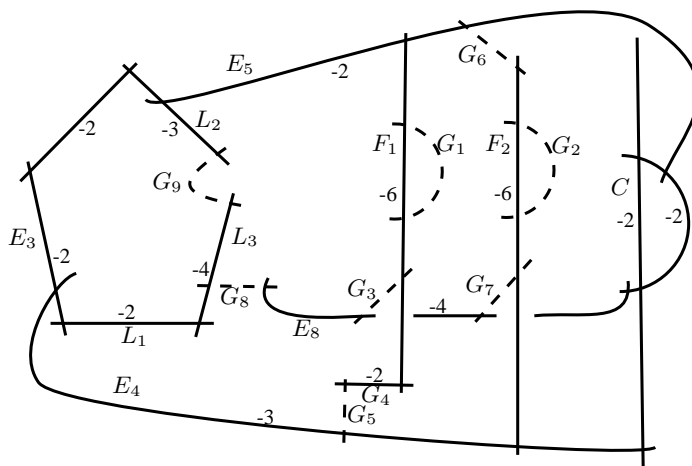
G_{10}, G_9, G_8 concluyendo así que el grupo fundamental es trivial.

4. $D(6 - 2 - 2, 2, 6 - 2 - 2; 3)$
 - Fibración elíptica: $I_4 + I_2 + 6I_1$ (ver Figura 4.16).
 - Se hacen 8 blow-ups



- $E_9, L = [5, 2] = d[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}]$
- $F_1 - E_4 - L_1, G_7, F_2 - E_6 - L_2; L_3 = [6 - 2 - 2, 2, 6 - 2 - 2; 3] = d[\frac{-5}{6} - (-1) - \frac{-7}{6}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{6} - (-1) - \frac{-7}{6}; \frac{-4}{3}]$
- $K^2 = -8 + 2 + 8 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Sea α un lazo alrededor de F_1 y sea β un lazo alrededor de E_9 . Sabemos que $\beta \sim \alpha$ y usando la curva $(-1) G_1$ se puede ver que $\alpha^2 = 1$ y así $\beta^2 = 1$. Como 2 es coprimo con 3, entonces necesariamente $\beta = 1$. Ahora aplicando la sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de G_7, G_4, G_5, G_6, G_3 se concluye que el grupo fundamental es trivial.

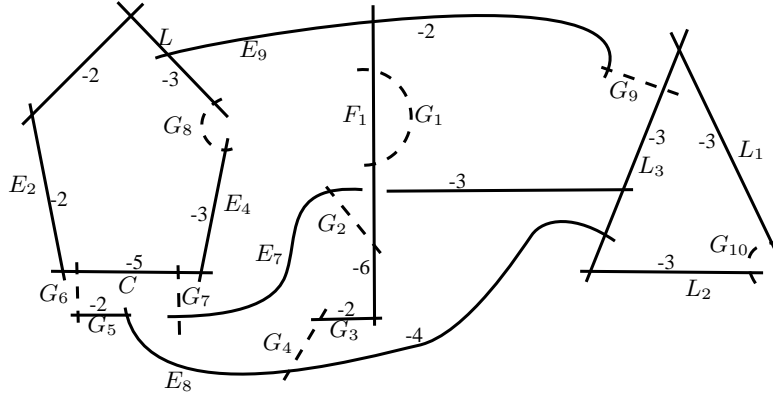
5. $D(6, 2, 4 - 2 - 2; 3)$
 - Fibración elíptica: $I_5 + I_2 + 5I_1$ (ver Figura 4.11).
 - Se hacen 9 blow-ups



- $E_8 = [4] = d[\frac{-1}{2}]$
- $G_4, F_1, E_5, L_2 = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $C, F_2, L_3 - L_1 - E_3; E_4 = [2, 6, 4 - 2 - 2; 3] = d[\frac{-4}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7} - \frac{-6}{7} - (-1); \frac{-8}{7}]$
- $K^2 = -9 + 1 + 4 + 6 = 2$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_3, G_8, G_9, G_6, G_5

6. $D(3, 3, 3, 2 - 4; 3)$

- Fibración elíptica: $I_5 + I_3 + 4I_1$ (ver Figura 4.10).
- Se hacen 10 blow-ups



- $E_4, C, E_2 = [3, 5, 2] = d[\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{-2}{5}]$
- $G_3, F_1, E_9, L = [2, 6, 2, 3] = d[\frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{-4}{7}]$
- $L_1, L_2, E_7, E_8 - G_5; L_3 = [3, 3, 3, 4 - 2; 3] = d[\frac{-5}{6}, \frac{-5}{6}, \frac{-5}{6}, -1 - \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}]$
- $K^2 = -10 + 3 + 4 + 6 = 3$
- X' es racional
- π_1 trivial: Aplicar sección 1.6 del Capítulo 1 a lazos alrededor de: G_8, G_6, G_4, G_2, G_9

OBSERVACIÓN 12. *Notar que la cruz para que sea WHS con $\mathbb{Q}HD$ tiene que ser tal que los cuatro puntos de intersección de la curva (-3) central con las otras curvas que forman la cruz tienen una razón cruzada dada. Pero usando el pincel de la Figura 4.10 estos cuatro puntos en L_3 si los podemos escoger arbitrariamente con respecto a la razón cruzada.*

OBSERVACIÓN 13. *Para este ejemplo no sabemos si la obstrucción es cero ya que el Teorema 5 no se aplica directamente en este caso.*

CAPÍTULO 4

Preguntas

1. Hoy en día, las superficies con $p_g = q = 0$ y $K^2 = 1$ son llamadas superficies numéricamente Godeaux. Para estas superficies se sabe que el grupo fundamental algebraico tiene orden menor o igual a 5. Más aún, se sabe que el caso $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ no puede ocurrir [25] y así el grupo fundamental algebraico puede ser solamente $0, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Las superficies con grupo fundamental algebraico $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ fueron completamente descritas por Miles Reid en [24]. En particular en estos tres casos se sabe que el espacio de móduli correspondiente es irreducible. Sin embargo, para los otros dos casos posibles, ni siquiera se sabe si el espacio de móduli es conexo. A partir de esto, resulta natural preguntarse si el móduli de las superficies numéricamente Godeaux con grupo fundamental trivial es conexo o no, y luego tratar de responder la misma pregunta cuando $K^2 = 2, 3$ y 4 . En relación con esta misma pregunta, uno podría partir preguntándose si dadas dos superficies estables en la compactificación del espacio de móduli (como sucede en esta tesis en muchos ejemplos), ¿será que puedo deformar una en la otra?
2. Como ya se mencionó anteriormente, Kollár y Shepherd-Barron construyeron la compactificación del espacio de móduli de superficies algebraicas con invariantes K^2 y χ fijos. Luego Alexeev encontró una cota general para los índices de las singularidades que aparecen en esta compactificación (completando la construcción). En el caso de superficies normales, Y. Lee hizo explícita una cota y así hoy en día sabemos que el índice de las singularidades de una superficie estable normal X tiene que ser menor o igual a $2^{400(K_X^2)^4}$ [15]. Sin embargo, esta cota es demasiado grande comparado con los ejemplos que tenemos hasta ahora. De hecho para $K^2 = 1$ se tiene que el índice de las singularidades tiene que ser menor o igual a 2^{400} , y el ejemplo conocido con índice más alto es 24. Así mismo los índices más grandes para $K^2 = 2, 3$ y 4 son 58, 123 y 252 que están

muy lejos de la cota dada por Lee. Luego sería interesante poder mejorar esta cota y más aún, tratar de encontrar una cota efectiva, es decir, una cota tal que exista una superficie estable con una singularidad de Wahl cuyo índice sea igual a la cota. Además de mejorar las cotas, también resulta interesante preguntarse si para cada índice menor o igual que el máximo índice conocido para cada K^2 se puede encontrar una superficie estable con una singularidad de Wahl de dicho índice. Por ejemplo, en el caso de $K^2 = 1$, tenemos que la singularidad con mayor índice es la singularidad de Wahl $\frac{1}{24^2}(1, 24 \cdot 5 - 1)$, es decir, $n = 24$ y $a = 5$. Entonces la pregunta anterior es si es posible encontrar para todo $l \leq 24$ una superficie estable que tenga una singularidad de Wahl de índice l . Más aún, uno podría preguntarse si aparecen todas las singularidades de Wahl intermedias con $l \leq 24$ y $(l, a) = 1$. Notemos que si esta última afirmación fuese verdadera, entonces en el caso $K^2 = 1$ tendría que aparecer la singularidad de Wahl con $n = 24$ y $a = 1$ cuya resolución es una cadena con 23 curvas y cadenas tan largas son complicadas de construir con el método de Lee y Park.

Apéndice

A continuación se muestra explícitamente la existencia de las fibraciones elípticas usadas para hacer las construcciones descritas en el Capítulo 3. En cada caso se muestra el pincel de cúbicas en \mathbb{P}^2 a partir del cual se obtiene la fibración luego de hacer blow-ups en los puntos base. Cada una de estas construcciones viene acompañada de un dibujo que muestra el pincel y la fibración elíptica obtenida (en cada caso se muestran a lo más dos fibras del tipo I_1). En el dibujo, cada pincel tiene marcados los puntos base y al lado de estos aparecen los números de intersección entre las componentes irreducibles de las cúbicas en dicho punto. En las fibraciones elípticas hay curvas E_i , $i = 1, \dots, 9$, que corresponden a las curvas excepcionales isomorfas a \mathbb{P}^1 que aparecen luego de hacer el blow-up en los puntos base del pincel, donde el índice indica el orden en el que se hacen los blow-ups. En algunos casos, en el dibujo aparecen líneas que no pertenecen a ninguna de las cúbicas que forman el pincel y que corresponden a secciones dobles que fueron usadas en alguna de las construcciones presentadas en los capítulos anteriores.

1. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $Q = \{x^3 - x^2y + x^2z - yz^2 = 0\}$, $C = \{x^2 + xy - y^2 - yz = 0\}$, $L = \{y = 0\}$, $L' = \{x = 0\}$ y $L'' = \{y - z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda Q + \mu C \cdot L = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.1. Esta fibración tiene cuatro fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$, $[1 : -1]$, $[1 : 8]$ correspondientes a las fibras singulares I_3^* y tres I_1 respectivamente. Las rectas L' y L'' pasan por un punto base del pincel y por el nodo de una fibra I_1 y así ambas corresponden a secciones dobles. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.1.

2. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^3 - x^2y + x^2z - yz^2 = 0\}$, $L_1 = \{3x - 2y - z = 0\}$, $L_2 = \{x - y = 0\}$ y

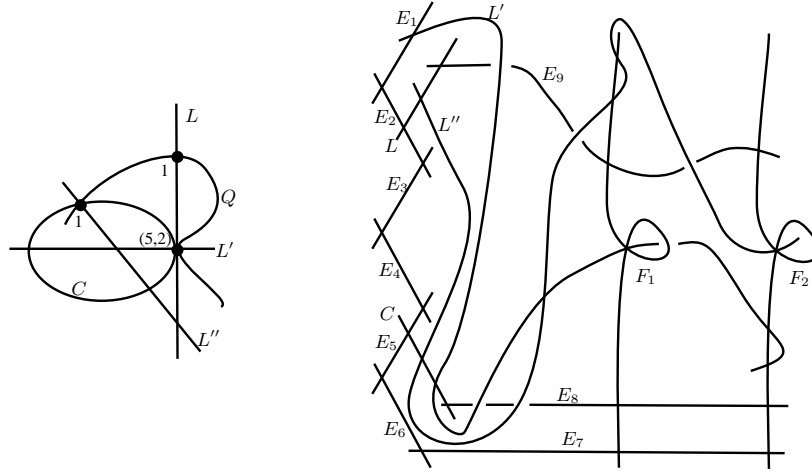


FIGURA 4.1. Fibración elíptica $I_3^* + 3I_1$ con dos secciones dobles

$L_3 = \{y - z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda,\mu} = \{\lambda C + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.2. Esta fibración tiene cinco fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$ y $[\frac{5r_i^2 - 7r_i + 3}{r_i - 2} : 1]$ donde r_i son las raíces del polinomio $z^3 + z - 1$. Las fibras corresponden a las fibras singulares I_2^* y cuatro I_1 respectivamente. También usaremos la sección doble obtenida a partir de la recta que pasa por uno de los puntos base de L_2 y por un nodo de alguna I_1 . La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.2.

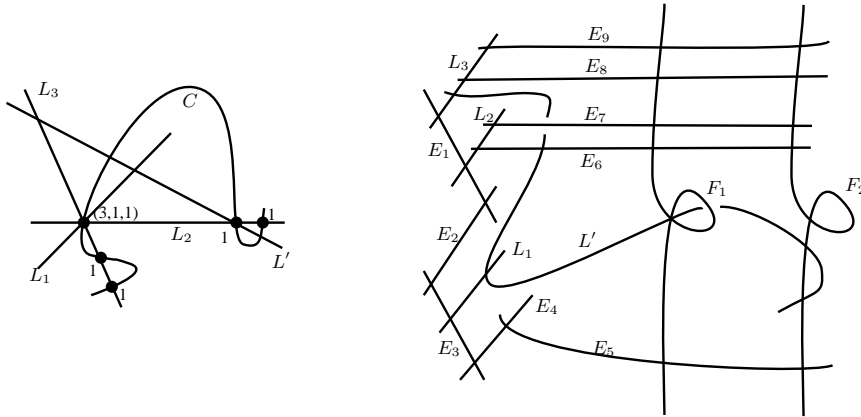


FIGURA 4.2. Fibración elíptica $I_2^* + 4I_1$ con una sección doble

3. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^3 + y^2z - yz^2 = 0\}$, $L_1 = \{y = 0\}$, $L_2 = \{x = 0\}$ y $L_3 = \{z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda,\mu} = \{\lambda C + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.3. Esta fibración tiene cuatro fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 3]$, $[1 : 3\rho]$, $[1 : \rho^2]$, donde ρ es una raíz cúbica primitiva de la unidad. Las fibras corresponden a las fibras singulares I_9 y tres I_1 respectivamente. Además usaremos la sección doble dada por la recta que pasa por uno de los puntos de inflexión de C y por el nodo de una de las I_1 . La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.3.

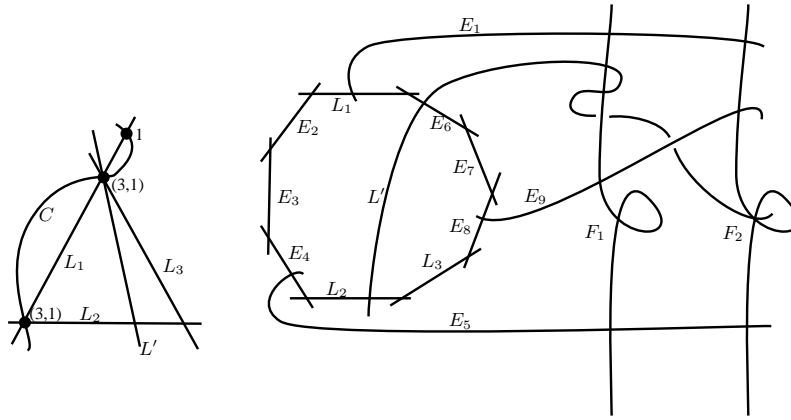


FIGURA 4.3. Fibración elíptica $I_9 + 3I_1$ con una sección doble

4. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^2 + (y - 2z)^2 - z^2 = 0\}$, $L = \{x = 0\}$, $L_1 = \{y - \sqrt{3}x = 0\}$, $L_3 = \{y + \sqrt{3}x = 0\}$, $L_2 = \{2y - 3z = 0\}$ y $L' = \{\sqrt{3}x - 2y + 3z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda,\mu} = \{\lambda CL + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.4. Esta fibración tiene cuatro fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$, $[3\sqrt{3} : -2]$, $[3\sqrt{3} : 2]$ correspondientes a las fibras singulares I_8 , I_2 y dos I_1 respectivamente. La recta L' pasa por un punto base del pincel y por el nodo de una fibra I_1 y así corresponde a una sección doble. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.4.

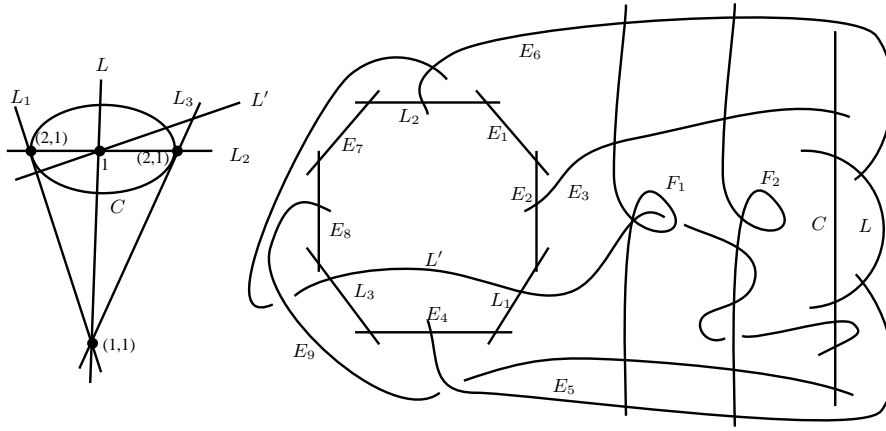


FIGURA 4.4. Fibración elíptica $I_8 + I_2 + 2I_1$ con una sección doble

5. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^3 - x^2y + x^2z - yz^2 = 0\}$, $L_1 = \{y = 0\}$, $L_2 = \{x - y = 0\}$ y $L_3 = \{x - 2y + z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda,\mu} = \{\lambda C + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.5. Esta fibración tiene cinco fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$ y $[\frac{-1}{2} \frac{r_i^2 - 4r_i + 2}{r_i^2 - 12r_i + 8} : 1]$ donde r_i son las raíces del polinomio $z^3 - 4z^2 + 8z - 4$. Las fibras corresponden a las fibras singulares I_8 y cuatro I_1 respectivamente. También usaremos la sección doble obtenida a partir de la recta que pasa por $L_2 \cap L_3$ y por un nodo de alguna I_1 . La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.5.

6. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^2 + (y - 2z)^2 - z^2 = 0\}$, $L = \{z = 0\}$, $L_1 = \{y - \sqrt{3}x = 0\}$, $L_3 = \{y + \sqrt{3}x = 0\}$ y $L_2 = \{2y - 3z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda,\mu} = \{\lambda CL + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.6. Esta fibración tiene cuatro fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$, $[27 : 7r_1^2 - 47r_1 + 42]$, $[27 : 7r_2^2 - 47r_2 + 42]$, $[27 : 7r_3^2 - 47r_3 + 42]$, donde r_i son las raíces de $z^3 - 8z^2 + 15z - 9 = 0$, correspondientes a las fibras singulares I_7 , I_2 y tres I_1 respectivamente. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.6.

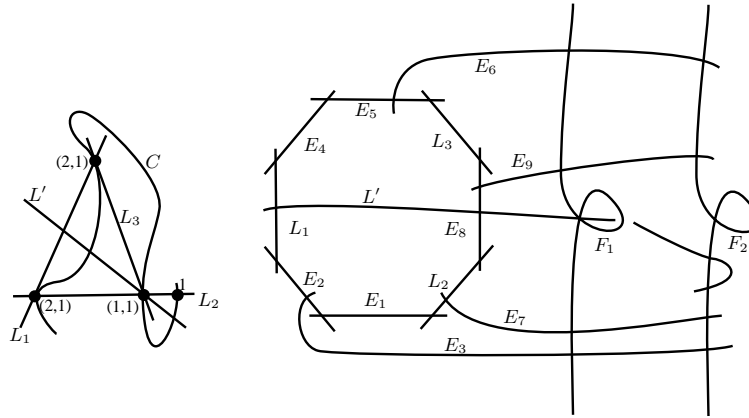


FIGURA 4.5. Fibración elíptica $I_8 + 4I_1$ con una sección doble

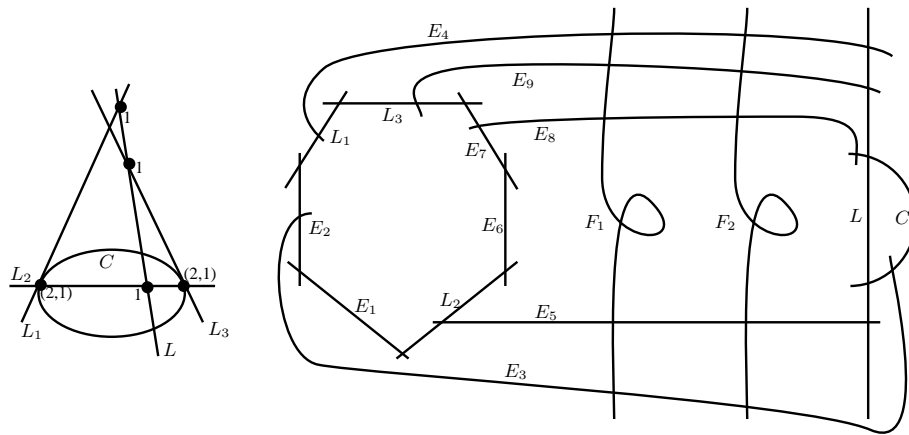


FIGURA 4.6. Fibración elíptica $I_7 + I_2 + 3I_1$

7. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^3 - x^2y + x^2z - yz^2 = 0\}$, $L_1 = \{y = 0\}$, $L_2 = \{2x - y = 0\}$ y $L_3 = \{x - 2y + z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda C + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.7. Esta fibración tiene cinco fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$ y $[-\frac{r_i^2 - r_i + 3}{2r_i^2 - 5r_i + 3} : 1]$ donde r_i son las raíces del polinomio $z^4 - 3z^3 + 9z^2 - 9z + 3$. Las fibras corresponden a las fibras singulares I_7 y cinco I_1 respectivamente. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.7.

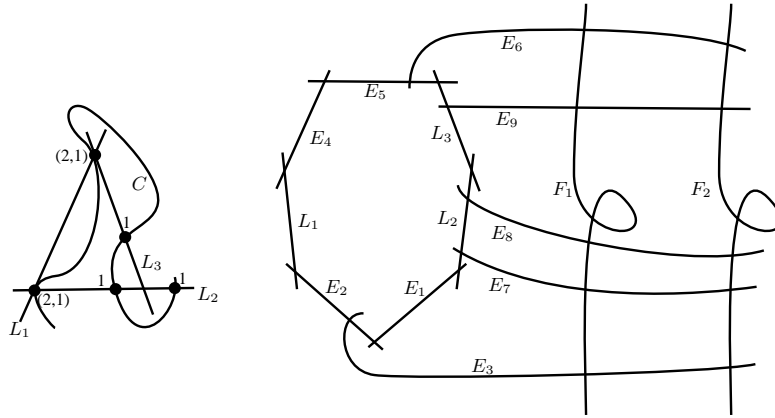


FIGURA 4.7. Fibración elíptica $I_7 + 5I_1$

8. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^2 + (y - 2z)^2 - z^2 = 0\}$, $L = \{x = 0\}$, $L_1 = \{y - \sqrt{3}x = 0\}$, $L_3 = \{y = 0\}$ y $L_2 = \{2y - 3z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda CL + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.8. Esta fibración tiene seis fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$ y $[\frac{1}{2}r_{ij} : 1]$ donde r_{ij} son las raíces del polinomio $z^2 + 216 - 135\sqrt{3}s_j$ y s_j son las raíces de $3z^2 - \sqrt{3}z - 1$. Las fibras corresponden a las fibras singulares I_6 , I_2 y cuatro I_1 respectivamente. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.8.

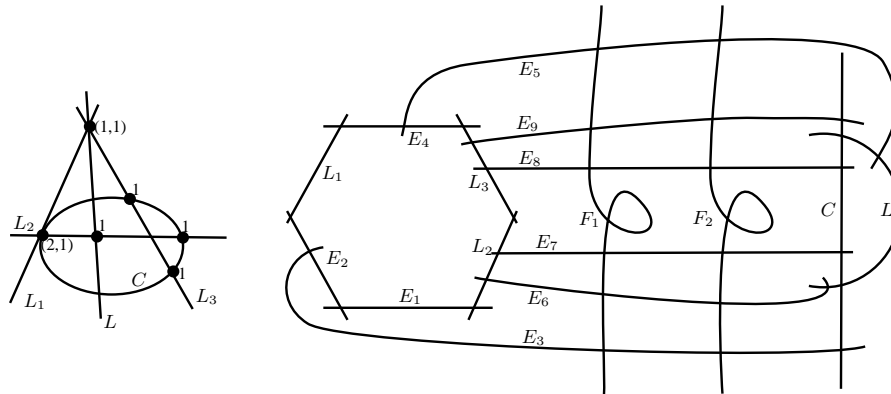


FIGURA 4.8. Fibración elíptica $I_6 + I_2 + 4I_1$

9. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C_1 = \{x^2 + (y - 2z)^2 - z^2 = 0\}$, $L_1 = \{x - 3y + 3z = 0\}$, $C_2 = \{x^2 - (z - 2y)^2 + y^2 = 0\}$ y $L_2 = \{3x - 6y + 5z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda C_1 L_1 + \mu C_2 L_2 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.9. Esta fibración tiene cuatro fibras singulares correspondientes a las fibras singulares I_6 , IV y dos I_1 . La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.9.

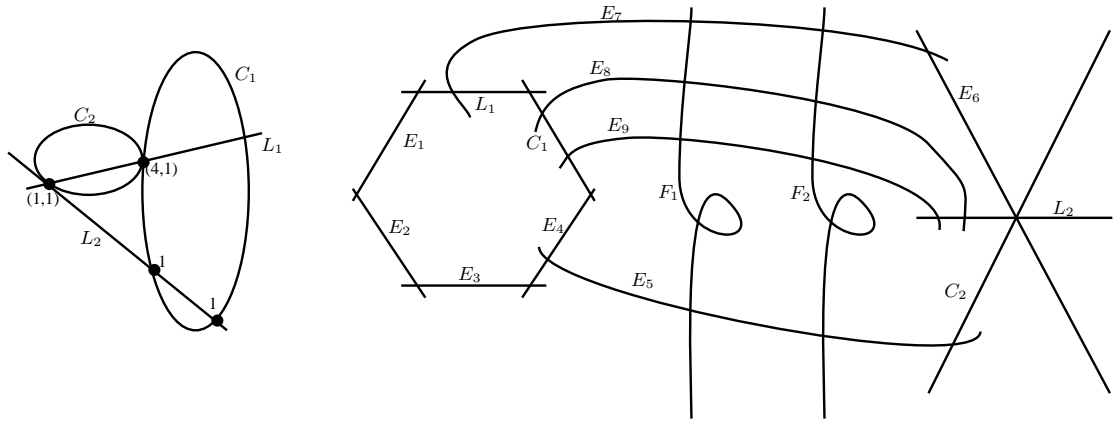


FIGURA 4.9. Fibración elíptica $I_6 + IV + 2I_1$

10. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^2 + (y - 2z)^2 - z^2 = 0\}$, $L = \{x = 0\}$, $L_1 = \{y - z = 0\}$, $L_3 = \{x - y = 0\}$ y $L_2 = \{x + y - 3z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda C L + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.10. Esta fibración tiene seis fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$ y $[1 : \frac{p(r_i)}{q(r_i)}]$ donde p, q son polinomios sin factores en común y r_i son las raíces de un polinomio de grado cuatro con todas sus raíces distintas. Las fibras corresponden a las fibras singulares I_5 , I_3 y cuatro I_1 respectivamente. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.10.

11. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^2 + (y - 2z)^2 - z^2 = 0\}$, $L = \{x = 0\}$, $L_1 = \{y - \sqrt{3}x = 0\}$, $L_3 = \{z = 0\}$ y $L_2 = \{2y - 3z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda C L + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.11. Esta fibración tiene siete fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 :$

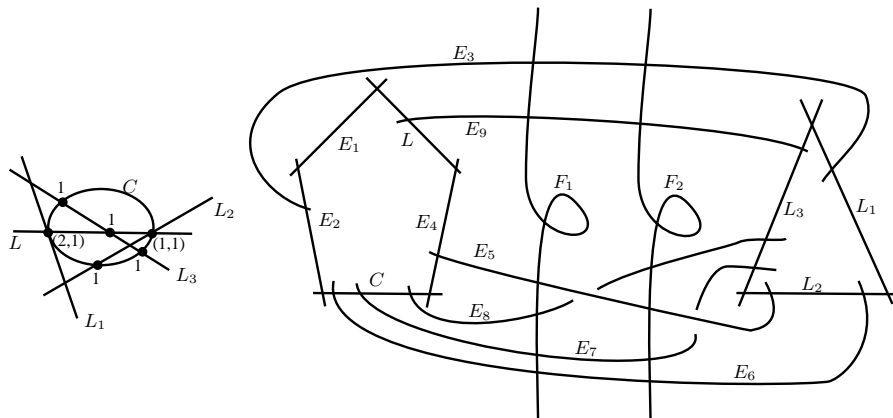


FIGURA 4.10. Fibración elíptica $I_5 + I_3 + 4I_1$

$1], [1 : 0]$ y $[1 : \frac{p(r_i)}{q(r_i)}]$ donde p, q son polinomios sin factores en común y r_{ij} son las raíces de un polinomio de grado cinco con todas sus raíces distintas. Las fibras corresponden a las fibras singulares I_5, I_2 y cinco I_1 respectivamente. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.11.

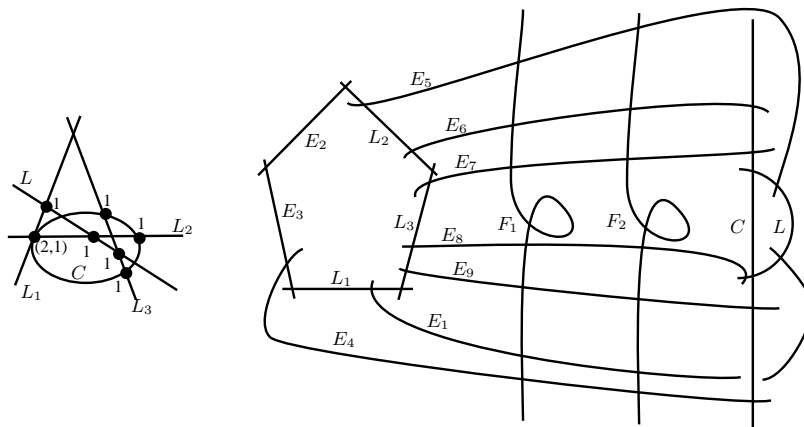


FIGURA 4.11. Fibración elíptica $I_5 + I_2 + 5I_1$

12. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^3 - x^2y + x^2z - yz^2 = 0\}$, $L_1 = \{y = 0\}$, $L_2 = \{2x - y = 0\}$ y $L_3 = \{y - z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda C + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.12. Esta fibración tiene ocho fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 :$

$1]$, $[1 : 0]$ y $[\frac{2r_i^3 - 3r_i^2 + 5r_i - 2}{r_i^4 + r_i^3 - 3r_i^2 + 2r_i} : 1]$ donde r_i son las raíces del polinomio $4z^6 - 4z^5 + 8z^4 - 11z^3 + 40z^2 - 44z + 16$. Las fibras corresponden a las fibras singulares I_5 y siete I_1 respectivamente. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.12.

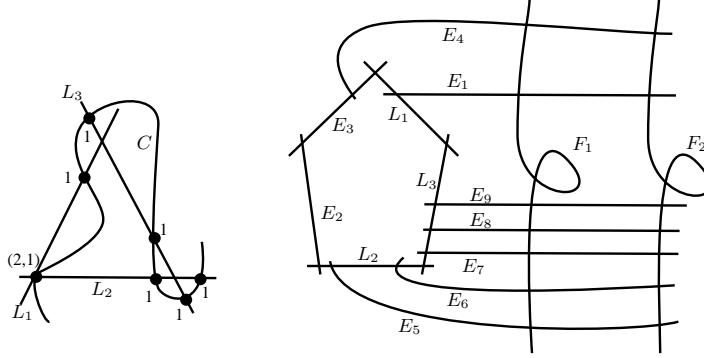


FIGURA 4.12. Fibración elíptica $I_5 + 7I_1$

13. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^3 - x^2y + x^2z - yz^2 = 0\}$, $L_1 = \{x - 2y = 0\}$, $L_2 = \{2x - y = 0\}$ y $L_3 = \{y - z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda C + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.13. Esta fibración tiene nueve fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$ y $[\frac{p(r_i)}{q(r_i)} : 1]$ donde p, q son polinomios sin factores en común y r_i son las raíces de un polinomio de grado siete con todas sus raíces distintas. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.13.

14. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^2 + (y - 2z)^2 - z^2 = 0\}$, $L = \{x = 0\}$, $L_1 = \{y - z = 0\}$, $L_3 = \{x - y = 0\}$ y $L_2 = \{y = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda CL + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.14. Esta fibración tiene seis fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$ y $[\frac{p(r_i)}{q(r_i)} : 1]$ donde p, q son polinomios sin factores en común y r_i son las raíces de un polinomio de grado cuatro con todas sus raíces distintas. Las fibras corresponden a las fibras singulares dos I_4 y cuatro I_1 respectivamente. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.14.

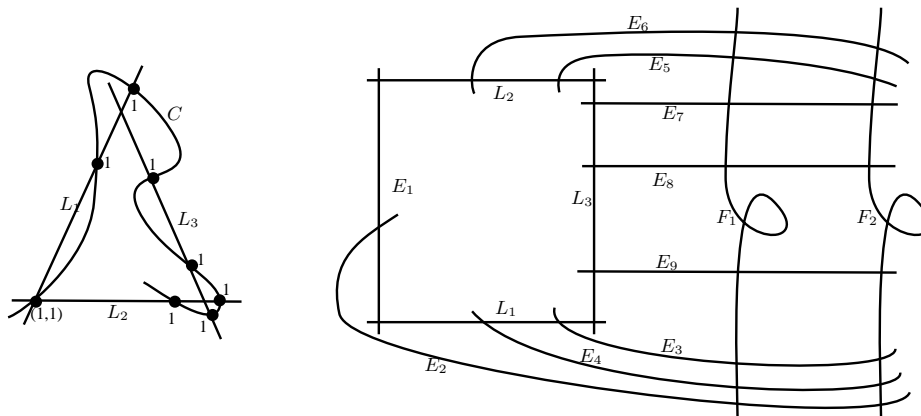


FIGURA 4.13. Fibración elíptica $I_4 + 8I_1$

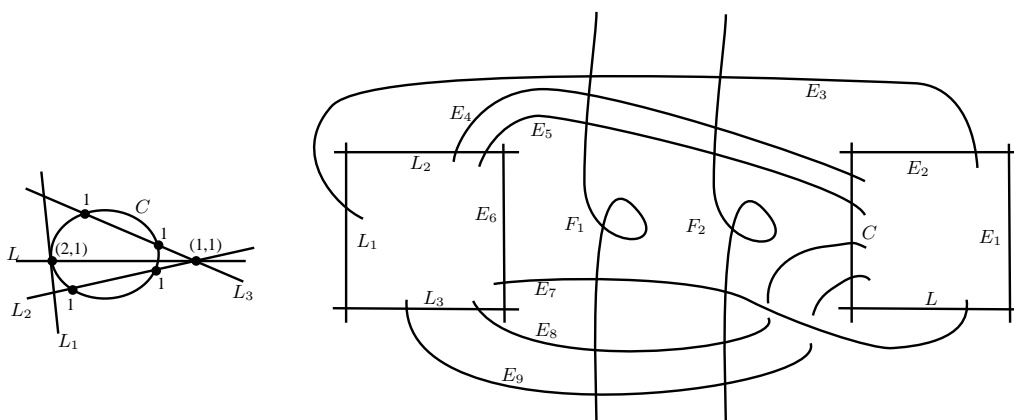


FIGURA 4.14. Fibración elíptica $2I_4 + 4I_1$

15. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^2 + (y - 2z)^2 - z^2 = 0\}$, $L = \{x = 0\}$, $L_1 = \{y - z = 0\}$, $L_3 = \{x - y = 0\}$ y $L_2 = \{x + y + z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda CL + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.15. Esta fibración tiene siete fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$, $[\frac{p(r_i)}{q(r_i)} : 1]$ y $[\frac{g(s_i)}{h(s_i)}]$ donde p, q, g, h son polinomios sin factores en común, r_i y s_i son las raíces de los polinomios $11z^2 - 10z + 5$ y $2z^3 - 22z^2 + 17z + 9$ respectivamente. Las fibras corresponden a las fibras singulares I_4 , I_3 y cinco I_1

respectivamente. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.15.

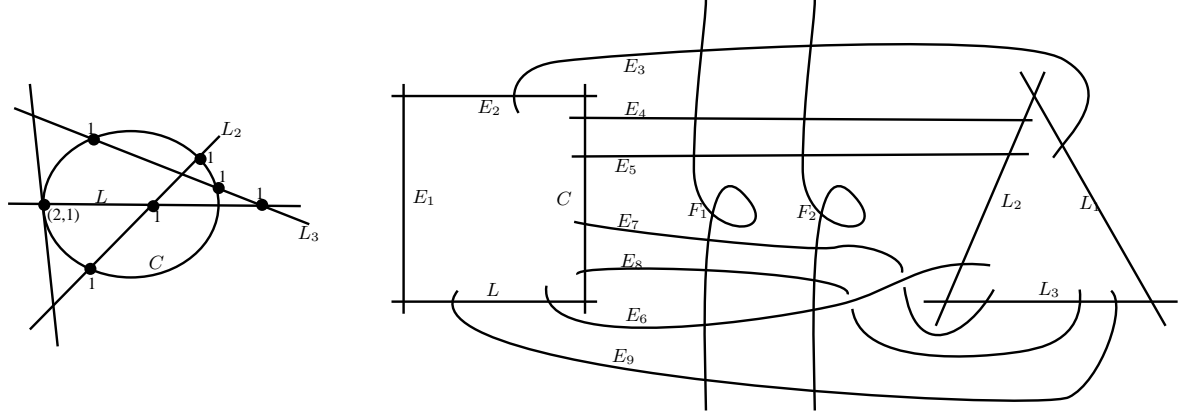


FIGURA 4.15. Fibración elíptica $I_4 + I_3 + 5I_1$

16. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^2 + (y - 2z)^2 - z^2 = 0\}$, $L = \{x = 0\}$, $L_1 = \{x + 2y - 3z = 0\}$, $L_3 = \{x - y = 0\}$ y $L_2 = \{3x + y + z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda CL + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.16. Esta fibración tiene ocho fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$, $[\frac{p(r_i)}{q(r_i)} : 1]$ y $[\frac{g(s_i)}{h(s_i)}]$ donde p, q, g, h son polinomios sin factores en común, r_i son las raíces de los polinomios $2z^2 - 3$ y s_i son las raíces de un polinomio de grado cuatro con todas sus raíces distintas. Las fibras corresponden a las fibras singulares I_4, I_2 y seis I_1 respectivamente. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.16.

17. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C = \{x^3 - x^2y + x^2z - yz^2 = 0\}$, $L_1 = \{3x - 2y - z = 0\}$, $L_2 = \{x - z = 0\}$ y $L_3 = \{y - z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda C + \mu L_1 L_2 L_3 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.17. Esta fibración tiene cuatro fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$ y $[\frac{16r_i - 14}{4r_i + 1} : 1]$ donde r_i son las raíces del polinomio $2z^2 + 1$. Las fibras corresponden a las fibras singulares I_2^*, I_2 y dos I_1 respectivamente. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.17.

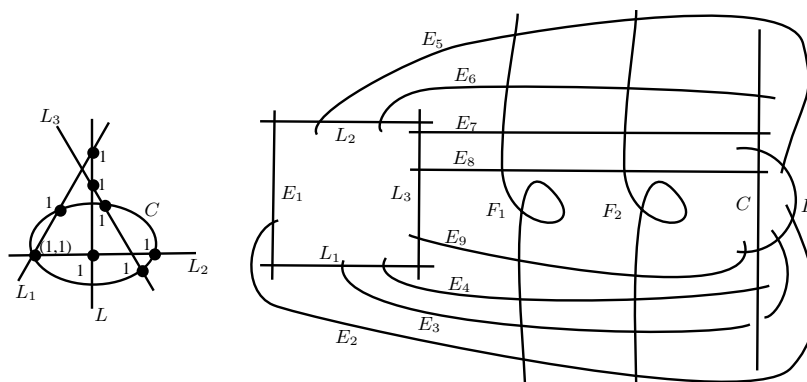


FIGURA 4.16. Fibración elíptica $I_4 + I_2 + 6I_1$

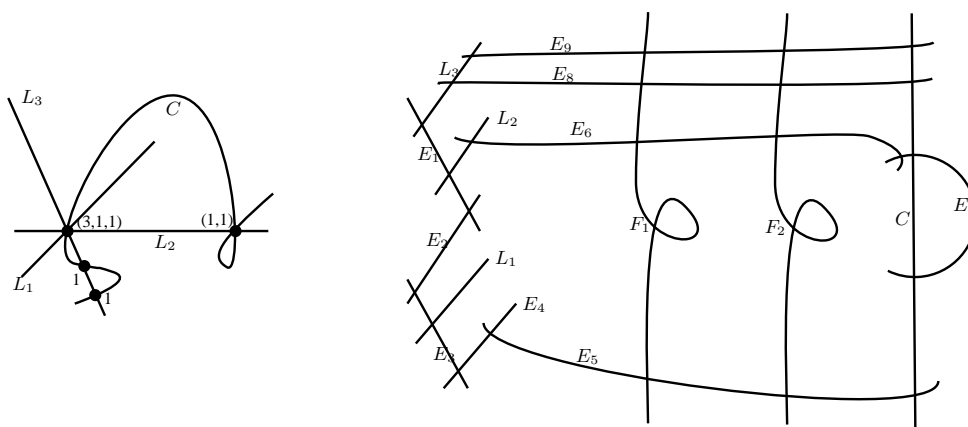


FIGURA 4.17. Fibración elíptica $I_2^* + I_2 + 2I_1$

18. Consideremos las siguientes curvas en \mathbb{P}^2 : $C_1 = \{x^2 + (y - 2z)^2 - z^2 = 0\}$, $L_1 = \{x - 3z = 0\}$, $C_2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ y $L_2 = \{x + y - z = 0\}$ y tomemos el pincel de cúbicas

$$\Gamma_{\lambda, \mu} = \{\lambda C_1 L_1 + \mu C_2 L_2 = 0\}.$$

La intersección de estas curvas se muestra en la Figura 4.18. Esta fibración tiene diez fibras singulares para $[\lambda : \mu] = [0 : 1]$, $[1 : 0]$ y $[\frac{p(r_i)}{q(r_i)} : 1]$ donde r_i son las raíces de un polinomio de grado ocho con todas sus raíces distintas. Las fibras corresponden a las fibras singulares dos I_2 y ocho I_1 respectivamente. La fibración elíptica obtenida se muestra en la Figura 4.18.

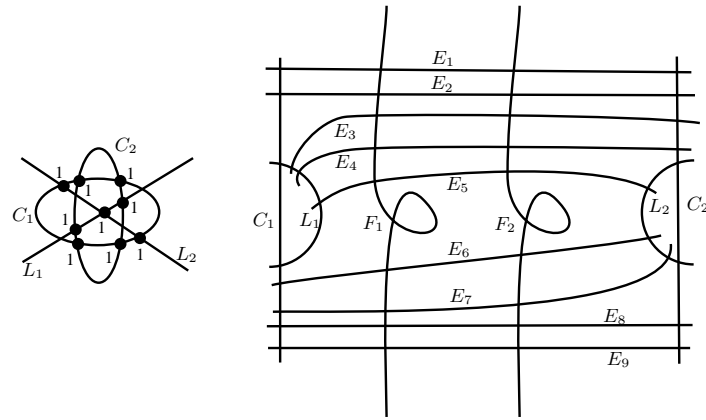


FIGURA 4.18. Fibración elíptica $2I_2 + 8I_1$

Lista de símbolos

- $Bl_p(X)$: Blow-up de X en el punto p .
- $K(X)$: cuerpo de funciones racionales de X .
- $Pic(X)$: grupo de Picard de X .
- $D \sim D'$: D es linealmente equivalente con D' .
- $X \simeq Y$: X es isomorfo con Y en la categoría correspondiente.
- $D \equiv D'$: D es numéricamente equivalente con D' .
- $\langle T \rangle$: subgrupo generado por T .
- $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$: grupo cíclico de m elementos.
- $(p \in X)$: vecindad analítica del punto $p \in X$.
- $\frac{1}{m}(1, q)$: singularidad cíclica.
- $d(C)$: discrepancia de la curva C .

Bibliografía

1. M. Artin *Numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces*, American Journal of Mathematics, Vol. 84, No. 3 (Jul., 1962), pp. 485-496
2. W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., second edition, vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
3. A. Beauville. *Complex Algebraic Surfaces*, London Mathematical Society Student Texts, v.34 (1978)
4. M. Bhupal, A.I. Stipsicz *Weighted homogeneous singularities and rational homology disk smoothings*, American Journal of Mathematics 133 (2011), 1259-1297.
5. D.M. Burns Jr. and J. M. Wahl. *Local contributions to global deformations of surfaces*, Invent. Math. 26(1974), 67-88.
6. F. R. Cossec, I. V. Dolgachev, *Enriques surfaces*, I. Progress in Math. 76. Birkhäuser (1989).
7. P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 36, 1969, 75-109
8. H. Esnault, E. Viehweg *Lectures on vanishing theorems*, DMV Seminar, 20. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. vi+164 pp.
9. P. Hacking. *Compact moduli spaces of surfaces of general type*, Compact moduli spaces and vector bundles, 1-18, Contemp. Math., 564, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
10. P. Hacking. *Compact moduli spaces of surfaces and exceptional vector bundles*, cursillo dictado en la escuela de verano de Barcelona May 28, 2013.
11. P. Hacking, J. Tevelev, G. Urzúa, *Flipping surfaces* pre-print (2013)
12. R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, Graduate Text in Mathematics, v.52, Springer (1977).
13. J. Kollár, S. Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, v.134 (1998).
14. J. Kollár and N. I. Shepherd-Barron. *Threefolds and deformations of surface singularities*, Invent. math. 91, 299-338 (1988).
15. Y. Lee *Numerical bounds for degenerations of surfaces of general type*, Int. J. Math 1999, 10: 79-92
16. Y. Lee and J. Park. *A simply connected surface of general type with $p_g = 0$ and $K^2 = 2$* , Invent. Math. 170, 483-505 (2007).
17. M. Manetti. *Normal degenerations of the complex projective plane*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 419 (1991), 89-118.
18. R. Miranda. *The basic theory of elliptic surfaces*, Notes of lectures by Rick Miranda, Department of Mathematics, Colorado State University (disponible en su página web).

19. D. Mumford. *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 36, 229–246 (1961).
20. H. Park, J. Park, D. Shin. *A simply connected surface of geeral type with $p_g = 0$ and $K^2 = 3$* , Geometry and Topology 13 (2009), 743-767.
21. H. Park, J. Park, D. Shin. *A simply connected surface of geeral type with $p_g = 0$ and $K^2 = 4$* , Geometry and Topology 13 (2009), 1483-1494.
22. H. Park, D. Shin, G. Urzúa. *A simply connected numerical Campedelli surface with an involution*, por aparecer en *Mathematice Annalen* (2013).
23. U. Persson. *Configurations of Kodaira fibers on rational elliptic surfaces*, Mathematische Zeitschrift 205 (1990), 1-47, Springer-Verlag
24. M. Reid. *Surfaces with $p_g = 0, K^2 = 1$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Math 25 (1978), 75-92
25. M. Reid. *Godeaux and Campedelli surfaces*, <http://homepages.warwick.ac.uk/~masda/surf/more/Godeaux.pdf>
26. I. R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry I*, Springer (1988).
27. J. Stevens. *Deformation of singularities*, Lecture Notes on Mathematics, v.1811 (2003).
28. J. Stevens. *On the versal deformation of cyclic quotient singularities*, Singularity theory and its applications, Part I(Coventry, 1988/1989), Lecture Notes in Math. 1462, Springer, Berlin (1991), 302–319.
29. A. I. Stipsicz, Z. Szabó, J. Wahl. *Rational blowdowns and smoothings of surface singularities. (English summary)* J. Topol. 1 (2008), no. 2, 477-517.
30. G. Urzúa. *Singularidades cíclicas en dimensión dos*, Cursillo dictado en las XXV jornadas matemáticas de la zona sur 2012, disponible en <https://sites.google.com/site/xxvjsur2012/>
31. G. Urzúa. *Identifying neighbors of stable surfaces*, pre-print (2013).
32. J. Wahl. *Smoothings of normal surface singularities*, Topology 20(1981), no. 3, 219-246.
33. J. Wahl. *On rational homology disk smoothings of valency 4 surface singularities*, Geometry and Topology 15 (2011), 1125-1156.