



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

**Velocidades de Aproximación de un
Número Real por una Sucesión de la
Forma $\{N\alpha\}$**

Autor: Bastian Galasso-Díaz

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al
grado de Magister en Ciencias Exactas mención Matemática.

Profesor Guía : Dr. Godofredo Iommi Echeverría

Comisión Informante:

Dr. Godofredo Iommi Echeverría - Pontificia Universidad Católica de Chile

Dr. Ricardo Menares - Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Dr. Mario Ponce - Pontificia Universidad Católica de Chile

28 de junio de 2013

Índice general

Resumen	5
Agradecimientos	7
1. Formalismo Termodinámico	9
1.1. Espacio Simbólico	9
1.2. Formalismo Termodinámico	11
1.2.1. Presión topológica en el caso compacto.	11
1.2.2. Presión topológica en el caso no compacto.	13
2. Teoría de Números	17
2.1. Fracciones Continuas	17
2.2. Transformación β	21
2.3. Equidistribución	22
2.4. Algoritmo de Ostrowski	23
3. Teoría de Dimensión	25
3.1. Medida de Hausdorff	25
3.2. Dimensión de Hausdorff	26
3.3. Dimensión puntual y dimensión de una medida	28
4. Transformación de Ostrowski	33
4.1. Propiedades de la transformación de Ostrowski.	33
4.2. Formalismo Termodinámico para la Transformación de Ostrowski.	38
5. Medida Absolutamente Continua para la Transformación de Ostrowski	43
6. Aplicaciones a Teoría de Números	49
Bibliografía	55

Dedicado a mi esposa, María Ignacia.

Resumen

En el año 1922 el matemático ruso Alexander Markowich Ostrowski desarrolló un sistema de numeración en el que es posible escribir cualquier número natural en base $(q_n)_n$, donde los valores q_n corresponden a los denominadores del n -ésimo aproximante por fracción continua de un número irracional $\alpha \in (0, 1)$ fijo. En efecto, si consideramos la representación en fracción continua de α , dada por

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_1 a_2 a_3 \dots],$$

Ostrowski demostró en [20] que todo número $N \in \mathbb{N}$ se puede escribir de la forma

$$N = \sum_{k=1}^n b_k q_k,$$

donde b_n cumple que $0 \leq b_n \leq a_n$ y si $b_n = a_n$ entonces $b_{n+1} = 0$. Es posible demostrar que el algoritmo de Ostrowski se extiende al caso en que N se reemplaza por un real $\beta \in (0, 1]$. Se obtiene una representación del mismo tipo, admitiendo una serie en vez de una suma.

Si denotamos por

$$N_n := \sum_{k=1}^n b_k q_k,$$

tendremos que

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \{N_n \alpha\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k \theta_{k-1} = \sum_{n \geq 1} b_n \theta_{n-1},$$

donde $\theta_n = q_n \alpha - p_n$ y $\{x\}$ denota la parte fraccionaria de x . Por extensión, llamaremos *expansión de Ostrowski* de β en base α a la sucesión $(\{N_n \alpha\})_n$.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar el siguiente resultado que describe, en detalle, las posibles velocidades exponenciales de aproximación por este método

Teorema. *Para cada $\zeta \in (-\infty, -\log((\sqrt{5} + 1)/2))$, se tiene que*

$$\dim_H \left(\left\{ (\alpha, \beta) \in (0, 1]^2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\{N_n \alpha\} - \beta| = \zeta \right\} \right) > 0.$$

Observación 0.0.1. *Para valores de $\zeta > -\log((\sqrt{5} + 1)/2)$ nuestro método no nos dice nada, esencialmente por que el rango de valores presentado en el teorema, se obtiene a partir del rango de la derivada de la presión el cual es $(-\infty, -3 \log((\sqrt{5} + 1)/2))$ y por ello, no podemos decir más acerca de dichos posibles valores de ζ .*

La demostración de este teorema es de naturaleza dinámica. En efecto, consideraremos un sistema dinámico estrechamente relacionado con la expansión de Ostrowski y describiendo sus propiedades ergódicas podremos deducir el resultado anterior.

El sistema dinámico que estudiaremos es la aplicación $T : (0, 1]^2 \rightarrow (0, 1]^2$ definida por

$$(\alpha, \beta) \mapsto T(\alpha, \beta) = \left(\left\{ \frac{1}{\alpha} \right\}, \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \right\} \right).$$

Los iterados de T nos permiten obtener los valores de los dígitos $(b_n)_n$ y por ende, los valores de N_n .

Desde el trabajo fundacional de Rufus Bowen [2] la relación entre formalismo termodinámico y teoría de la dimensión de sistemas dinámicos se ha estudiado en gran detalle. Las técnicas utilizadas en este trabajo corresponden a esta tradición. En efecto, describiremos el formalismo termodinámico para la transformación T y utilizaremos esos resultados para demostrar el Teorema principal. Existen diversas dificultades al intentar aplicar esta estrategia, por una parte la aplicación T esta definida en un espacio no compacto, por lo tanto los resultados clásicos en el área no se pueden utilizar. Debemos, recurrir a técnicas recientes donde parte de la teoría se ha extendido al caso no compacto, ver por ejemplo los trabajos de O. Sarig [24] y de R. Mauldin y M. Urbański [18]. Otro problema fundamental es que la transformación T es no conforme. La teoría de la dimensión en este caso está muy poco desarrollada y es particularmente difícil obtener resultados precisos en este contexto. Es por esta razón que nuestro resultado, está formulado en términos de dimensión de Hausdorff positiva.

También mostraremos algunos de los resultados obtenidos para la transformación de Ostrowski, donde destacamos la obtención de una medida invariante absolutamente continua con respecto a Lebesgue de manera explícita por Sh. Ito ([10]), así como también los resultados obtenidos por Sh. Ito y H. Nakada ([9]), donde probaron que para Lebesgue casi todo par $(\alpha, \beta) \in (0, 1]^2$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\{N_n \alpha\} - \beta| = -\frac{\pi^2}{12 \log 2},$$

que es el resultado que este trabajo buscó generalizar.

Agradecimientos

Me gustaría partir agradeciendo a mi Profesor Guía, Dr. Godofredo Iommi por ser un excelente guía y profesor. Agradecer mucho todo el tiempo que me dedicó tanto en el pre-grado como en el post-grado, las largas sesiones de trabajo, sus retos cuando no estaba trabajando como correspondía, la constante preocupación por enviarme artículos relacionados al tema y en general todo lo que hizo, ya que este trabajo sin su fundamental apoyo no hubiese sido posible, por eso muchas gracias.

Además me gustaría agradecer también a mi señora María Ignacia y a mi familia, por su constante apoyo en el área más emocional, dándome ánimo para poder seguir adelante con este trabajo en los momentos de mayor frustración y creer en mi. También a mis grandes amigos de carrera Robert, Arie y Anibal, no sólo por ser grandes amigos y compañeros, si no también por todas las tardes de discusiones, y consejos que me ayudaron mucho , sobre todo en los momentos de frustración donde hasta lo más básico se veía imposible.

Agradecer también a mis amigos Jose, Erik, Rodrigo, Gionnella y Carlos por todos los momentos vividos que me ayudaron a relajarme en todos esos momentos de gran estrés y frustración, que me ayudaron a poder pensar de manera más clara y llegar a los resultados esperados

Agradecer también a la facultad de Matemáticas por otorgarme una beca para poder financiar el programa, al profesor Alejandro Ramirez por sus consejos al igual que a los profesores Mario Ponce y Juan Rivera por su ayuda no sólo en el post-grado si no que también en el pre-grado.

Finalmente, recalcar que este trabajo fue parcialmente financiado por el Proyecto Fondecyt 1110040 y el Center of Dynamical Systems and Related Fields (ACT project 1103 PIA-CONICYT).

Santiago, 2013

Bastián Galasso

Capítulo 1

Formalismo Termodinámico

Dentro de las distintas perspectivas desde las que pueden ser estudiados los sistemas dinámicos, en esta sección estaremos interesados en estudiar una en particular, que es la que los estudia desde la perspectiva de la teoría de medida o como es llamada, teoría ergódica. Dentro de la teoría ergódica existe una importante rama que se deriva de la mecánica estadística llamada *formalismo termodinámico*, la cuál consiste en el estudio de ciertos procedimientos que nos ayudan a escoger medidas invariantes relevantes para un cierto sistema dinámico.

Dentro de los sistemas dinámicos, existen muchos interesantes para los cuales el conjunto de medidas invariantes es muy grande, por lo que el problema se traduce en escoger dentro de este espacio elementos relevantes para el sistema, de donde nace el interés por el formalismo termodinámico.

Uno de los objetivos principales dentro de esta teoría será el estudio de la presión topológica, que es un funcional que cuantifica el desorden del sistema. En dicho objeto nos apoyaremos para encontrar medidas invariantes relevantes para el sistema, utilizando un resultado que nos provee de una forma natural para escoger medidas llamado *principio variacional*, y las medidas que obtendremos las llamaremos *medidas de equilibrio*. Dichas medidas, son en muchos casos relevantes en algún sentido ergódico o en teoría de la dimensión.

1.1. Espacio Simbólico

Sea S un conjunto numerable al cual llamaremos alfabeto. Definimos el conjunto Σ_S por

$$\Sigma_S = \{(x_n)_n : x_n \in S, \forall n \in \mathbb{N}\},$$

el que denotaremos por Σ en caso de que el alfabeto esté claro. Sea $A = (t_{ij})_{(i,j) \in S \times S}$ una matriz tal que sus entradas sean solamente 0's y 1's (pero sin columnas ni filas de ceros) -a la que llamaremos *matriz de admisibilidad*- con ella definimos Σ_A por

$$\Sigma_A = \{(x_n)_n \in \Sigma : t_{x_i x_{i+1}} = 1, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

La matriz A recibe dicho nombre porque permite determinar los elementos del conjunto Σ que pertenecen al conjunto Σ_A , al cual también se le denotará simplemente por Σ siempre y cuando el contexto lo permita.

Ahora, a este conjunto le podemos asociar un sistema dinámico $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ definido por $\sigma(x_1 x_2 x_3 \dots) = (x_2 x_3 x_4 \dots)$, es decir,

$$\sigma((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}},$$

a la cual la llamaremos *Shift por un lado*. El par (Σ_A, σ) lo llamaremos *Shift de Markov numerable*.

A este espacio lo podemos equipar con un topología, que es generada por los conjuntos

$$C_{i_1 \dots i_n} = \{(x_n)_n \in \Sigma_A : x_j = i_j, \forall j \in \{1, \dots, n\}\},$$

que llamaremos *cilindros* de orden n o de profundidad n . Notamos este espacio no es compacto y que si consideramos todos los cilindros de un orden n fijo, entonces $C_{i_1 \dots i_n} \cap C_{i'_1 \dots i'_n} = \phi$ si $i_1 \dots i_n \neq i'_1 \dots i'_n$, por lo tanto tendremos que

$$\Sigma_A = \bigcup_{i_1 \dots i_n \text{ admisible}} C_{i_1 \dots i_n},$$

es decir, los cilindros de un orden fijo generan una partición del espacio simbólico Σ_A .

La siguiente definición es fundamental, ya que más adelante buscaremos trabajar con resultados obtenidos en el contexto de dinámica simbólica

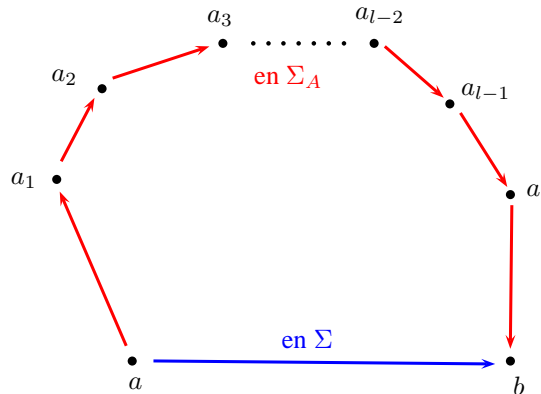
Definición 1.1.1. *Dado (X, f) un sistema dinámico y una partición $\mathcal{P} = (P_n)_n$ de X , entonces diremos que X tiene una representación simbólica $X_{\mathcal{P}, f}$, asociando una sucesión $(x_n)_n$ a un punto x si $f^{n-1}(x) \in \text{Int } P_{x_n}$. Luego, diremos que f es Markov sobre la partición \mathcal{P} si la intersección*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{D_n(x)},$$

corresponde a un solo punto, donde

$$D_n(x) = \bigcap_{k=0}^n f^{-k}(P_{x_k}).$$

Si bien en Σ_A no toda palabra es admisible como lo es en Σ , si podemos hacer que sean -en un sentido combinatorio- muy cercanos. Lo que queremos decir con esto es que existe un subconjunto finito $L \subset S$ de modo que si la palabra ab no es admisible en Σ_A , existen $a_1, \dots, a_l \in L$ de modo tal que $aa_1 \dots a_l b$ es admisible en Σ_A . Visto de manera gráfica tendremos que



Lo que nos dice básicamente que si no podemos conectar a con b en Σ_A como en Σ , entonces existen finitos pasos tales que nos permiten conectarlos "por un camino más largo". Esto es conocido como la propiedad BIP.

Definición 1.1.2 (Big images and preimages property). *Un Shift de Markov numerable (Σ_A, σ) , se dice que satisface la propiedad BIP si existen $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ en el alfabeto S tales que*

$$\forall a \in S, \exists i, j \text{ tales que las palabras } \gamma_i a \text{ y } a \gamma_j,$$

sean admisibles.

Ahora necesitaremos otra definición que nos será muy útil dentro de lo que haremos en los siguientes capítulos, que es la regularidad de potenciales (desde ahora usaremos Σ para referirnos a Σ_A),

Definición 1.1.3. *Sea $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada. Definimos la n -ésima variación por*

$$V_n(\phi) := \sup\{|\phi(x) - \phi(y)| : x, y \in \Sigma, x_i = y_i \forall i \in \{1, \dots, n-1\}\}.$$

A partir de esto, tendremos la siguiente definición

Definición 1.1.4. *Sea $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ y $V_n(\phi)$ la n -ésima variación de ϕ . Diremos que ϕ es de variación sumable si*

$$\sum_{n \geq 3} V_n(\phi) < +\infty,$$

y diremos que ϕ es débilmente Hölder continua si $V_n(\phi) \leq K\alpha^n$ con $K \in \mathbb{R}$ constante y $0 < \alpha < 1$.

1.2. Formalismo Termodinámico

1.2.1. Presión topológica en el caso compacto.

La presión topológica es un concepto primeramente introducido por Ruelle ([23]) y estudiado en más generalidad por Walters ([29]). Sea $T : X \rightarrow X$ una transformación con X un espacio compacto y sea $C(X, \mathbb{R})$ el espacio de las funciones continuas de X en \mathbb{R} donde $C(X, \mathbb{R})$ es equipado con la norma del supremo. La presión es una función $P(T, \cdot)$ que va desde $C(X, \mathbb{R})$ a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que tiene buenas propiedades con respecto a la estructura de $C(X, \mathbb{R})$ y contiene a la entropía en el sentido que $P(T, 0) = h(T)$.

Definición 1.2.1. *Sea n un número natural, $\varepsilon > 0$ y K un subconjunto compacto del espacio métrico (Σ, d) . Un subconjunto $E \subset K$ se dice (n, ε) -separado con respecto a σ si para $x, y \in E$, $x \neq y$, implica que $d_n(x, y) > \varepsilon$ (o equivalentemente que para $x \in E$, el conjunto*

$$\bigcap_{i=0}^{n-1} \overline{\sigma^{-i} B(\sigma^i(x), \varepsilon)},$$

no contiene otros puntos de E), donde $d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(\sigma^i x, \sigma^i y)$.

Luego denotando por

$$S_n \phi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(\sigma^i(x)),$$

definimos $P_n(\sigma, \phi, \varepsilon)$ por

$$P_n(\sigma, \phi, \varepsilon) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} e^{S_n \phi(x)} : E \text{ es un subconjunto } (n, \varepsilon) \text{-separado de } X \right\},$$

para luego dar paso a la definición de presión como

$$P(\sigma, \phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P_n(\sigma, \phi, \varepsilon).$$

A partir de lo anterior, podemos notar que la definición depende de la métrica utilizada para definir los conjuntos (n, ε) -separados y que si tenemos dos métricas uniformemente equivalentes, entonces obtenemos el mismo valor de la presión para ambas (Ver Walter [28], pagina 171). La ventaja de que el espacio sea compacto, es que dos métricas que son equivalentes, entonces son uniformemente equivalentes y por ello, tendremos que el valor de la presión no depende de la métrica. Ahora si el espacio no es compacto, entonces se puede dar la situación de que dos métricas equivalentes nos lleven a valores distintos de la presión, es decir, dependerá de la métrica. Pero por otro lado, como veremos en el teorema 1.2.2 la presión puede ser escrita en términos de un supremo, que no depende en lo absoluto de la métrica y es ahí donde tendremos uno de los problemas que presenta el caso no compacto.

El siguiente teorema presenta una lista de propiedades que cumple la recién definida función

Teorema 1.2.1. *Sea $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ una transformación continua en un espacio métrico compacto Σ . Si $\phi, \Phi \in C(\sigma, \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces P cumple las siguientes propiedades:*

1. $P(\sigma, 0) = h(\sigma)$
2. Si $\phi \leq \Phi$, entonces $P(\sigma, \phi) \leq P(\sigma, \Phi)$. En particular $h(\sigma) + \inf \phi \leq P(\sigma, \phi) \leq h(\sigma) + \sup \phi$.
3. $P(\sigma, \cdot)$ toma siempre valores finitos o es constantemente ∞ .
4. Si $P(\sigma, \cdot) < \infty$ entonces $P(\sigma, \cdot)$ es convexa.
5. $P(\sigma, \phi + c) = P(\sigma, \phi) + c$
6. $P(\sigma, \phi + \Phi) \leq P(\sigma, \phi) + P(\sigma, \Phi)$
7. $|P(\sigma, \phi)| \leq P(\sigma, |\phi|)$

Definición 1.2.2. *Sea $T : X \rightarrow X$ un sistema dinámico. Definimos $\mathcal{M}(X, T)$ al conjunto de todas las medidas T -invariantes, es decir, $\mu \in \mathcal{M}(X, T)$ si y sólo si $\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(X)$.*

El próximo teorema fue demostrado para algunas transformaciones por D. Ruelle ([23]) y en más generalidad por P. Walters ([29]). Otras pruebas de este teorema fueron dadas más tarde por M. Denker y R. Bowen.

Teorema 1.2.2 (Principio Variacional). *Sea $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ una transformación continua en un espacio métrico compacto Σ y sea $\phi \in C(\Sigma, \mathbb{R})$. Entonces*

$$P(\sigma, \phi) = \sup \left\{ h_\mu(\sigma) + \int \phi d\mu : \mu \in \mathcal{M}(\Sigma, \sigma) \right\}$$

Llamaremos medidas de equilibrio para el potencial ϕ , a aquellas medidas $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma, \sigma)$ tales que alcanzan el supremo del teorema 1.2.2, es decir,

$$P(\sigma, \phi) = h_\mu(\sigma) + \int \phi d\mu.$$

Al subconjunto de $\mathcal{M}(\Sigma, \sigma)$ correspondiente a todas las medidas de equilibrio para ϕ , lo denotaremos por $\mathcal{M}_\phi(\Sigma, \sigma)$.

Teorema 1.2.3 (Unicidad de Medidas de Equilibrio). *Sea (Σ, σ) un shift y sea ϕ un potencial Hölder continuo, entonces ϕ tiene una única medida de equilibrio.*

Observemos en el caso del espacio simbólico, la definición de la presión topológica por los conjuntos (n, ε) -separados coincide con la siguiente definición

Definición 1.2.3. *Sea Σ espacio métrico compacto, sea ϕ un potencial en $C(\Sigma, \mathbb{R})$ y sea $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$, entonces definimos la presión topológica relativa a σ de ϕ como*

$$P(\sigma, \phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\sigma^n(x)=x} \exp \left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi(\sigma^i(x)) \right) \right).$$

Para poder entender un poco que significa esta definición, podemos hacer un pequeño calculo utilizando $\phi = 0$ como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} P(\sigma, 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\sigma^n(x)=x} \exp \left(\sum_{i=0}^{n-1} 0 \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\sigma^n(x)=x} 1 \right) \\ \Rightarrow \sum_{\sigma^n(x)=x} 1 &\asymp \exp(n \cdot P(\sigma, 0)) \end{aligned}$$

Entonces como se puede apreciar, la presión topológica de la función 0 está relacionada con cómo crecen las órbitas periódicas de largo n , cuando n crece. Por lo que podemos concluir que si consideramos un potencial ϕ continuo, entonces la presión mide el crecimiento de las órbitas periódicas pero con una cierta ponderación dentro de ésta.

1.2.2. Presión topológica en el caso no compacto.

Para nuestro propósito nos reduciremos a estudiar sólo el caso de Shift de Markov numerables con la propiedad BIP que definimos en 1.1.2. Para ello daremos la definición de presión topológica introducida por Sarig ([24]) en base a un trabajo previo de Gurevich ([6]),

Definición 1.2.4. *Para $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ potencial de variación sumable, la presión de Gurevich de ϕ es definida por*

$$P_G(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\sigma^n x=x} \exp \left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi(\sigma^i x) \right).$$

Observación 1.2.1. *El límite anterior existe siempre (permitiendo que pueda ser infinito). Además si la transformación considerada no cumple con la propiedad BIP entonces la anterior definición se cambia por*

$$P_G(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\sigma^n x=x} \exp \left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi(\sigma^i x) \right) \chi_{C_{i_0}}(x),$$

donde $\chi_{C_{i_0}}(x)$ es la función característica del cilindro $C_{i_0} \subset \Sigma$ y la definición anterior, no depende del cilindro C_{i_0} .

Además de lo anterior, también tenemos el siguiente teorema que relaciona la presión de Gurevich con la presión en el caso compacto,

Teorema 1.2.4 (Teorema de aproximación por compactos, ([24])). *Si $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es de variación sumable, entonces*

$$P_G(\phi) = \sup\{P_{\sigma|K}(\phi) : K \subset \Sigma \text{ con } K \neq \emptyset \text{ y } K \text{ compacto y } \sigma\text{-invariante}\},$$

donde $P_{\sigma|K}(\phi)$ es la presión clásica sobre el compacto K .

Procediendo de manera análoga a lo hecho para el caso compacto, tendremos el siguiente teorema (ver [17, 18, 24, 25, 26])

Teorema 1.2.5 (Principio Variacional, [24]). *Si $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es de variación sumable, $\left\| \sum_{\sigma y=x} e^{\phi(y)} \right\|_{\infty} < \infty$ y $P_G(\phi) < \infty$, entonces*

$$P_G(\phi) = \sup \left\{ h_{\mu}(\sigma) + \int \phi d\mu : \mu \in \mathcal{M}_{\sigma} \text{ y } - \int \phi d\mu < \infty \right\},$$

donde \mathcal{M}_{σ} es el conjunto de todas las medidas borelianas de probabilidad σ -invariantes, y $h_{\sigma}(\mu)$ es la entropía de la medida μ (Ver Walters [28], Ch. 4).

De este teorema, nace una pregunta natural por el hecho de que el lado derecho de la igualdad es un supremo, que es si éste se alcanza y dónde lo hace. Motivado por la pregunta anterior, presentaremos una serie de definiciones y proposiciones que nos ayudaran a responder dichas preguntas.

Definición 1.2.5. *Sea $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ un potencial. Una medida $\mu \in \mathcal{M}_{\sigma}$ con*

$$P_G(\phi) = h_{\sigma}(\mu) + \int \phi d\mu,$$

y $-\phi \in L^1(\mu)$ se denomina una medida o estado de equilibrio para ϕ .

Resultados de Sarig ([24]) y de Buzzi y Sarig ([4]), se pueden resumir en el siguiente teorema

Teorema 1.2.6 (Existencia y unicidad de las medidas de equilibrio). *Si $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ es de variación sumable y $\sup \phi < +\infty$, entonces existe a lo más una medida de equilibrio para ϕ .*

Definición 1.2.6. *Una medida de probabilidad μ se dice medida de Gibbs para el potencial ϕ si existen constantes M y P , tales que para cada cilindro $C_{i_1 \dots i_n}$ y cada $x \in C_{i_1 \dots i_n}$ se tiene que*

$$\frac{1}{M} \leq \frac{\mu(C_{i_1 \dots i_n})}{\exp(-nP + \sum_{i=0}^{n-1} \phi(\sigma^i(x)))} \leq M.$$

La siguiente proposición tiene relación con la existencia y unicidad de las medidas de Gibbs que recién definimos,

Proposición 1.2.1 (Medidas de Gibbs). *Sea (Σ, σ) un shift de Markov numerable con la propiedad BIP, $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ un potencial tal que $\sum_{n \geq 2} V_n(\phi) < \infty$ y $P_G(\phi) < \infty$, entonces ϕ tiene una única medida μ que es de Gibbs. Además si*

$$- \int \phi d\mu < \infty,$$

entonces μ es medida de equilibrio para el potencia ϕ .

Concluyendo esta sección, tenemos un teorema referente a la regularidad de la función $P(t) := P_G(t\phi)$ y sus medidas de equilibrio, dependiendo de donde se encuentre t

Teorema 1.2.7 (Regularidad de la función presión). *Sea $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ un potencial débilmente Hölder continua tal que $P(\phi) < \infty$, entonces existe un valor crítico $t^* \in (0, 1]$ tal que para todo $t < t^*$ se tiene que $P(t\phi) = \infty$ y para todo $t > t^*$ se tiene que $P(t\phi) < \infty$. Más aún, si $t > t^*$ la función $t \mapsto P(t\phi)$ es analítica real y para cada potencial $t\phi$ existe una única medida de equilibrio.*

Ahora después de plantear toda la teoría, daremos un ejemplo simple donde calcularemos la presión y veremos cómo se comportan todos los resultados vistos.

Ejemplo 1.2.1. *Sea (Σ, σ) el full-shift en un alfabeto numerable. Consideremos $\log(\phi) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$\log(\phi) \Big|_{C_{i_j}} = \log(\lambda_{i_j}),$$

para todo $i_j \in \mathbb{N}$ y donde $(\lambda_n)_n$ una sucesión de números reales tales que $\sum_{n \geq 1} \lambda_n = 1$. Además observamos que si $x \in C_{i_1}$, entonces satisface que $\sigma^n x = x$ si y sólo es la repetición infinita de una palabra finita $i_1 j_1 \dots j_{n-1}$ para $j_1, \dots, j_{n-1} \in \mathbb{N}$. Por lo tanto tendremos que

$$\begin{aligned} P(-t \log(\phi)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\sigma^n x = x} \exp \left(\sum_{k=0}^{n-1} -t \log(\phi(\sigma^k x)) \right) \chi_{C_{i_0}}(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\sigma^n x = x} \prod_{k=0}^{n-1} (\phi(\sigma^k x))^{-t} \chi_{C_{i_0}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{j_1, \dots, j_{n-1} \in \mathbb{N}} \lambda_{i_1}^{-t} (\lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_{n-1}})^{-t} \\ &= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \lambda_{i_1}^{-t}}_{=0} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{j_1, \dots, j_{n-1} \in \mathbb{N}} (\lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_{n-1}})^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{j_1, \dots, j_{n-1} \in \mathbb{N}} (\lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_{n-1}})^{-t} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-t} \right)^{n-1} = \log \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-t}, \end{aligned}$$

de lo que podemos ver claramente que la función presión es analítica, convexa, etc. En particular tendremos que si $t = 0$, entonces $P(0) = h_{\text{top}}(\sigma) = +\infty$. Ahora, usando el hecho dado por el principio variacional, sabemos que

$$\frac{dP}{dq}(q \log \phi) = \int \log(\phi) d\mu_q,$$

para μ_q una medida de equilibrio, entonces derivando la función presión respecto a q obtenemos que

$$P'(q \log \phi) = \frac{\frac{d}{dq} \left(\sum_{n \geq 1} \lambda_n^q \right)}{\left(\sum_{n \geq 1} \lambda_n^q \right)} = \frac{\left(\sum_{n \geq 1} \frac{d}{dq} \lambda_n^q \right)}{\left(\sum_{n \geq 1} \lambda_n^q \right)} = \frac{\left(\sum_{n \geq 1} \lambda_n^q \log(\lambda_n) \right)}{\left(\sum_{n \geq 1} \lambda_n^q \right)} = \int \log(\phi) d\mu_q,$$

Por lo tanto, tendremos que las medidas μ_q asociada al potencial $q \log \phi$ están definidas por

$$\mu_q(C_n) = \frac{\lambda_n^q}{\left(\sum_{n \geq 1} \lambda_n^q \right)}.$$

Capítulo 2

Teoría de Números

Recordemos que la transformación de Ostrowski $T : (0, 1] \times (0, 1] \rightarrow (0, 1] \times (0, 1]$ está definida por

$$T(\alpha, \beta) = \left(\left\{ \frac{1}{\alpha} \right\}, \left\{ \frac{\beta}{\alpha} \right\} \right),$$

donde $\{\cdot\}$ es la función parte fraccionaria. Podemos notar que esta transformación es un *skew-product*, esto es una función $L : X \times Y \rightarrow X \times Y$ definida por

$$L(x, y) = (R(x), S_x(y)),$$

donde R es un automorfismo de X y S_x es un automorfismo de Y para cada $x \in X$. Por lo tanto, podemos ver que para la transformación T antes definida tiene como función $R(x)$ a la transformación de Gauss $G(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$ y para cada $x \in X$, tiene como función $S_x(y)$ a la transformación $S_x(y) = \left\{ \frac{y}{x} \right\}$ que puede ser re-escrita como $S_x(y) = \frac{y}{x} \pmod{1}$, es decir, $S_x(y) = B_{\frac{1}{x}}(y)$ donde $B_{\frac{1}{x}}$ es un β -shift (donde $\beta = \frac{1}{x}$) ya que $0 < x < 1$. Por lo cual es interesante estudiar en mayor profundidad la transformación de Gauss y el β -shift para así lograr tener un mayor conocimiento de la transformación T .

Además introduciremos el concepto de equidistribución, así como resultados clásicos de equidistribución llamados criterio de Weyl y criterio de Weyl generalizado.

2.1. Fracciones Continuas

Todo número irracional $x \in (0, 1)$ puede ser escrito de manera única como fracción continua de la forma

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}},$$

donde $a_i \in \mathbb{N}$ son los *dígitos*, entonces denotaremos por $[a_1 a_2 a_3 \dots]$ a x para simplificar la notación.

Ejemplo 2.1.1. Algunos ejemplos expansión en fracción continua son

$$\pi - 3 = \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}} = [7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \dots],$$

$$e - 2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}]} = [1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots],$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots].$$

Esta representación tiene ventajas y desventajas frente a la representación usual (sistema decimal). Una de las desventajas es que no existe una forma simple de operar aritméticamente con ellas, es decir, sumar $[a_1 a_2 a_3 \dots]$ con $[b_1 b_2 b_3 \dots]$ se vuelve muy complicado. Ahora de las ventajas que tiene esta representación destacaremos dos, la primera es que la representación es finita, es decir, $x = [a_1 a_2 a_3 \dots a_n]$ si y sólo si $x \in \mathbb{Q}$, y por el contrario su expansión será infinita si y sólo si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La segunda es que esta representación nos provee de la mejor aproximación racional de un número irracional en el siguiente sentido: Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces diremos que $\frac{a}{b}$ es la mejor aproximación racional de x si $|bx - a| < |qx - p|$ para cualquier racional $\frac{p}{q}$ distinto de $\frac{a}{b}$ con $|b| \geq |q|$. Definimos el n -ésimo aproximante $p_n(x)/q_n(x)$ del número x por

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}},$$

donde $\{a_1, \dots, a_n\}$ son los n primeros dígitos de la representación en fracciones continuas de x . Luego tendremos que dicho $p_n(x)/q_n(x)$ es la mejor aproximación racional de x .

A partir de esto, la siguiente proposición nos enlista una serie de propiedades y relaciones que cumplen los $p_n(x)$ y $q_n(x)$ (se denotaran simplemente p_n y q_n si el contexto lo permite) (ver [13])

Proposición 2.1.1. *Sea $x \in (0, 1)$ con expansión en fracción continua $[a_1 a_2 a_3 \dots]$, entonces*

1. $p_0 = 0, p_1 = 1, p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ y $q_0 = 1, q_1 = a_1, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.
2. $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$.
3. Si llamamos $x_n = [a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots]$, entonces

$$x = \frac{x_n p_{n-1} + p_n}{x_n q_{n-1} + q_n}.$$

4. $\frac{q_{n-1}}{q_n} = [a_n a_{n-1} \dots a_1]$.
5. Si $\theta_n = q_n x - p_n$, entonces $x_0 x_1 x_2 \dots x_n = |\theta_n|$.
6. Si $y \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$[a_1 a_2 \dots a_{n-1} y] = \frac{y p_{n-1} + p_{n-2}}{y q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Además no podemos dejar de mencionar un clásico resultado de aproximaciones diofantinas, estipulado en el siguiente lema

Lema 2.1.1. Si $x \in (0, 1)$, entonces

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Demostración. Para probar el lema, basta notar que por las propiedades que si $p_n/q_n > x$, entonces $p_{n+1}/q_{n+1} < x$ y viceversa, por lo tanto se tendrá claramente que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}},$$

y como sabemos que $q_n \leq q_{n+1}$, entonces

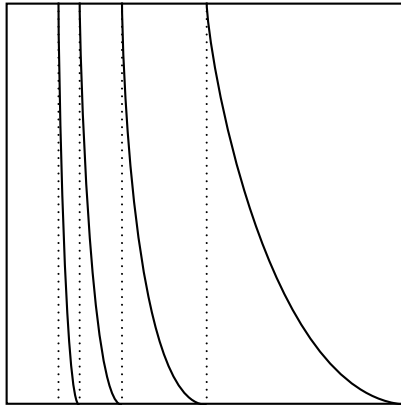
$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

□

Luego de toda la introducción a las fracciones continuas y sus propiedades, introduciremos un sistema dinámico asociado a dicha representación conocido como la transformación de Gauss. Sea $G : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ definida por

$$G(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] = \left\{ \frac{1}{x} \right\},$$

donde $[\cdot]$ y $\{\cdot\}$ representan la parte entera y fraccionaria respectivamente y que gráficamente se ve como



Esta transformación está íntimamente relacionada con la representación en fracciones continuas, ya que si tenemos un número $x \in (0, 1)$ con $x = [a_1 a_2 a_3 \dots]$, entonces

$$a_1 = \left[\frac{1}{x} \right], \quad a_2 = \left[\frac{1}{G(x)} \right], \quad a_3 = \left[\frac{1}{G^2(x)} \right], \dots, \quad a_n = \left[\frac{1}{G^{n-1}(x)} \right], \dots$$

y por ello se tendrá que $G([a_1 a_2 a_3 \dots]) = [a_2 a_3 a_4 \dots]$. Es decir, G actúa como un shift en la representación en fracciones continuas. Por ello tendremos que el sistema anterior puede ser codificado en un espacio simbólico de alfabeto numerable, donde la partición que naturalmente da la transformación de Gauss en los intervalos $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ es de Markov y por ello tendremos todas las buenas propiedades que eso conlleva.

También podemos asociar a G una medida de probabilidad invariante y absolutamente continua respecto a Lebesgue μ_G (denominada medida de Gauss) sobre $[0, 1]$ definida por

$$\mu_G(B) = \frac{1}{\log 2} \int_B \frac{1}{1+x} dx,$$

donde B es un subconjunto boreliano de $[0, 1]$. La absoluta continuidad es clara solo observando el hecho que la densidad es decreciente y por ello

$$\frac{1}{2 \log 2} \text{Leb}(B) \leq \mu_G(B) \leq \frac{1}{\log 2} \text{Leb}(B),$$

con Leb la medida de Lebesgue.

Si definimos el potencial $\varphi(x) = \log |G'(x)|$, entonces de acuerdo a los resultados obtenidos por Mayer ([19]), tenemos que

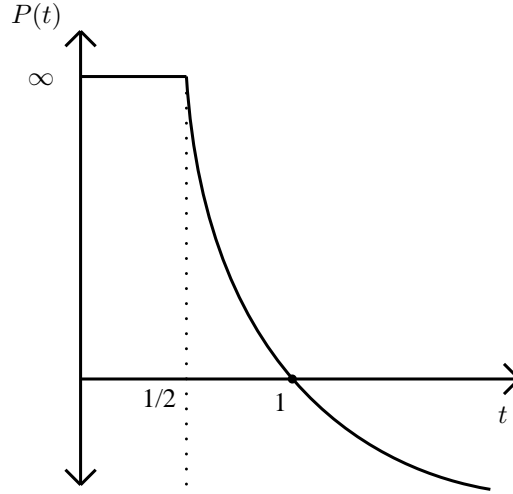
Teorema 2.1.1. *La función presión $P(-t\varphi(x))$ cumple que*

$$P(-t\varphi(x)) = \begin{cases} \infty & \text{Si } t < 1/2 \\ \text{Estrictamente decreciente, convexa y analítica real} & \text{Si } t > 1/2 \end{cases}$$

Además tendremos que

$$\lim_{t \rightarrow 1/2^+} P(-t\varphi(x)) = \infty,$$

$P(1) = 0$ y que para cada $t > 1/2$ existe una única medida de Gibbs μ_t correspondiente al potencial $-t \log |G'|$.



Observación 2.1.1. *Notemos que la función*

$$\zeta_{i_1 \dots i_n}(x) = \frac{p_n + p_{n-1}x}{q_n + q_{n-1}x},$$

cumple que, para cada $x \in \{(x_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x_j = i_j, \text{ para } j \in \{1, \dots, n\}\}$ se tiene que

$$\zeta_{i_1 \dots i_n}(G^n(x)) = x,$$

es decir, $\zeta_{i_1 \dots i_n}$ es la inversa de G^n en el conjunto $\{(x_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : x_j = i_j, \text{ para } j \in \{1, \dots, n\}\}$. Luego usando propiedades de la función inversa y derivadas, tendremos que

$$P(-t\varphi(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{G^n x = x} |(G^n)'(x)|^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{G^n x = x} |\zeta'_{i_1 \dots i_n}(x)|^t,$$

Pero

$$\zeta'_{i_1 \dots i_n}(x) = \frac{1}{(q_n + q_{n-1}x)^2},$$

por lo tanto

$$P(-t\varphi(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{G^n x=x} \frac{1}{(q_n + q_{n-1}x)^{2t}}.$$

Luego por el **teorema 2.1.1**, se tiene que

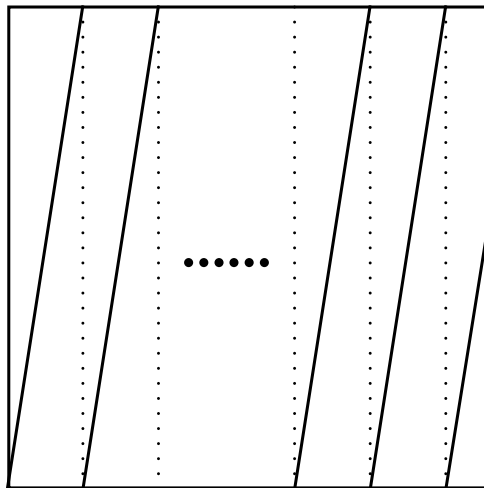
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{G^n x=x} \frac{1}{(q_n + q_{n-1}x)^2} = 0.$$

2.2. Transformación β

Sea $\beta \in \mathbb{R}$ con $\beta > 1$, entonces definimos la transformación β , $B_\beta : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ por

$$B_\beta(x) = \beta x \pmod{1},$$

que gráficamente podemos verla como



Rényi ([22]) mostró que para cada $x \in [0, 1)$, este se puede escribir en base β de la siguiente manera

$$x = \frac{\epsilon_1(x)}{\beta} + \frac{\epsilon_2(x)}{\beta^2} + \frac{\epsilon_3(x)}{\beta^3} + \dots = \sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n(x)}{\beta^n} = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \dots],$$

donde $\epsilon_n(x) = [\beta B_\beta^{n-1}(x)]$ para $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto, tendremos que los dígitos en la expansión en base β pueden tomar valores en el conjunto $\{0, 1, \dots, [\beta]\}$.

Además, la aplicación B_β no es Markov, por lo que tendremos que -en general- existen diversas maneras de escribir un número x de la forma (ver [27])

$$x = \sum_{i \geq 1} \frac{a_i}{\beta^i}.$$

Sin embargo, tendremos también que existe una única medida B_β -invariante y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue, dada por la función de densidad

$$h_\beta = \sum_{\{x < B_\beta^n(1)\}} \frac{1}{\beta^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\beta^n} \cdot \chi_{\{x: x < \beta^n\}}.$$

Más aún, esta medida es de máxima entropía.

2.3. Equidistribución

En esta sección veremos principalmente el teorema de equidistribución de Weyl, el cual nos será útil al momento de ver algunos de los resultados de Sh. Ito, y Sh. Ito y H. Nakada respecto a la transformación de Ostrowski.

Lo primero que haremos será definir qué significa equidistribución,

Definición 2.3.1. Sea $(u_n)_n$ una sucesión de números reales y μ una medida de probabilidad sobre $[0, 1]$. Diremos que $(u_n)_n$ son μ -equidistribuidos o μ -uniformemente distribuidos módulo 1, si para cada subintervalo (a, b) de $[0, 1]$ tenemos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{(\{u_n\})_{n=1}^N \cap (a, b)\} = \mu(a, b),$$

donde $\{\cdot\}$ denota la función parte fraccionaria.

Observación 2.3.1. Notamos que si μ es la medida de Lebesgue, entonces la definición es simplemente

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{(\{u_n\})_{n=1}^N \cap (a, b)\} = b - a.$$

Con lo que podemos mencionar uno de los teoremas clásicos de equidistribución, con nombre en honor a Hermann Weyl

Teorema 2.3.1 (Criterio de Weyl). Sea $(u_n)_n$ una sucesión de números reales. Entonces los siguientes son equivalentes:

1. $(u_n)_n$ son equidistribuidos módulo 1.
2. Para cada $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se cumple que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k u_n} = 0.$$

3. Para cada función Riemann-Integrable $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, se cumple que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\{u_n\}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Antes de continuar, mostraremos un ejemplo clásico de equidistribución,

Ejemplo 2.3.1. Sea $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces la sucesión $(n\theta)_n$ esta equidistribuida módulo 1.

Para ver esto, usaremos la equivalencia número (2) del teorema anterior. Notemos primero que como $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces $n\theta \notin \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $1 - e^{2\pi i n\theta} \neq 0$ para todo n . Por lo tanto tendremos que para todo N , se tendrá que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n k \theta} \right| = \frac{1}{N} \left| \frac{e^{2\pi i k \theta} - e^{2\pi i k (N+1)\theta}}{1 - e^{2\pi i k \theta}} \right| \leq \frac{1}{N} \frac{2}{|1 - e^{2\pi i k \theta}|},$$

es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n k \theta} = 0.$$

De donde se concluye que $(n\theta)_n$ están equidistribuidos módulo 1.

El teorema anterior es la versión clásica del criterio, pero ésta se puede generalizar cuando se tiene una medida de probabilidad cualquiera sobre el intervalo $[0, 1]$,

Teorema 2.3.2. *Si $(x_n)_n \subset [0, 1]$ y μ una medida de probabilidad en $[0, 1]$. La sucesión $(x_n)_n$ es μ -equidistribuida si y sólo si*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(x_n) = \int_{[0,1]} f d\mu,$$

con $f \in L^1([0, 1], \mu)$.

2.4. Algoritmo de Ostrowski

Dado un par $(\alpha, \beta) \in (0, 1]^2$, la transformación de Ostrowski induce en β una representación que utiliza la representación en fracción continua de α de la siguiente manera. Sea $(\alpha, \beta) \in (0, 1]^2$ y aplicamos T sobre el, obtenemos

$$T(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{\alpha} - \left[\frac{1}{\alpha} \right], \frac{\beta}{\alpha} - \left[\frac{\beta}{\alpha} \right] \right).$$

De lo anterior, si escribimos $\left[\frac{1}{\alpha} \right] = a_1$ y $\left[\frac{\beta}{\alpha} \right] = b_1$, obtendremos que si $T(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1)$, entonces

$$\beta_1 = \frac{\beta}{\alpha} - b_1, \quad (2.1)$$

es decir,

$$\beta = \beta_1 \alpha + b_1 \alpha. \quad (2.2)$$

Siguiendo este proceso, volvemos a aplicar T al par (α_1, β_1) obteniendo

$$T(\alpha_1, \beta_1) = \left(\frac{1}{\alpha_1} - \left[\frac{1}{\alpha_1} \right], \frac{\beta_1}{\alpha_1} - \left[\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right] \right),$$

y nuevamente nombrando $\left[\frac{1}{\alpha_1} \right] = a_2$ y $\left[\frac{\beta_1}{\alpha_1} \right] = b_2$, y como $T(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$, entonces

$$\beta_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} - b_2,$$

es decir,

$$\beta_1 = \beta_2 \alpha_1 + b_2 \alpha_1, \quad (2.3)$$

y reemplazando (2.1) en (2.3), obtenemos

$$\beta = \beta_2 \alpha_1 \alpha + b_2 \alpha_1 \alpha + b_1 \alpha.$$

Continuando este proceso obtendremos que, en general, $a_n = \left[\frac{1}{\alpha_{n-1}} \right]$, $b_n = \left[\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right]$ y

$$\beta = \sum_{k=1}^n b_k \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} + \beta_n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1},$$

y por ende, tendremos que finalmente la representación de β es de la siguiente manera

$$\beta = \sum_{n \geq 1} b_n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}.$$

Ahora notemos que por la propiedad (2.1.1), $\alpha\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1} = |\theta_{n-1}|$ y por lo tanto, la representación anterior se convierte en

$$\beta = \sum_{n \geq 1} b_n |\theta_{n-1}|.$$

Ahora consideremos un $\beta \in (0, 1)$ y sean $(b_n)_n$ sus dígitos en la representación antes descrita, entonces definimos la sucesión $(N_n)_n$ por

$$N_n = \sum_{k=1}^n b_k q_{k-1},$$

y luego multiplicando cada uno de estos número por α obtenemos

$$N_n \alpha = \sum_{k=1}^n b_k q_{k-1} \alpha \equiv \sum_{k=1}^n b_k (q_{k-1} \alpha - p_{k-1}) \pmod{1},$$

es decir, $(\{N_n \alpha\})_n$ aproxima al número β .

Antes de continuar, mostraremos un ejemplo de la representación antes vista para $\beta = e/3$ con $\alpha = \sqrt{2} - 1$

Ejemplo 2.4.1. Sea $(\alpha, \beta) = (\sqrt{2} - 1, e/3)$. Entonces mediante la división Euclidiana y con ayuda del computador, tendremos que

$$(\alpha, \beta) = ([2, 2, 2, 2, 2, \dots], [2, 0, 1, 0, 0, 1, \dots]).$$

Además obtendremos que los valores de θ_n para estos primeros dígitos de β son

θ_0	$\sqrt{2} - 1$
θ_1	$2\sqrt{2} - 3$
θ_2	$5\sqrt{2} - 7$
θ_3	$12\sqrt{2} - 17$
θ_4	$29\sqrt{2} - 41$
θ_5	$70\sqrt{2} - 99$

Por lo tanto, la representación se verá como

$$\beta = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (5\sqrt{2} - 7) + (70\sqrt{2} - 99) + \beta_n.$$

Como cada vez que uno aproxima un número de cierta forma específica, uno desea saber la velocidad en que esta representación aproxima a β . Esta pregunta fue contestada parcialmente por Sh. Ito y H. Nakada ([9]) en el siguiente teorema

Teorema 2.4.1. Para casi todo punto (α, β)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \beta - \sum_{k=1}^n b_k |\theta_{k-1}| \right| = -\frac{\pi^2}{12 \log 2}.$$

Donde el casi para todo punto, es con respecto a la medida T -invariante absolutamente continua respecto a Lebesgue obtenida por Sh. Ito ([10]), definida por la función de densidad

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2 \log 2} \frac{\alpha + 2}{(1 + \alpha)^2} & \text{Si } \beta > \alpha \\ \frac{1}{2 \log 2} \frac{\alpha + 3}{(1 + \alpha)^2} & \text{Si } \beta \leq \alpha \end{cases}$$

la cual veremos cómo se obtiene en uno de los capítulos siguientes.

Capítulo 3

Teoría de Dimensión

En esta sección comenzaremos dando definiciones básicas sobre algunos conceptos utilizados en teoría de dimensión, como lo es la medida de Hausdorff y sus propiedades. Además con esta medida daremos paso a la definición de dimensión de Hausdorff, propiedades de la misma y algunos ejemplos de cómo se calcula, para finalizar dando la noción de dimensión de una medida.

3.1. Medida de Hausdorff

Lo primero será definir la noción de cubrimiento, la cuál será un objeto clave en la definición de la medida objetivo

Definición 3.1.1. Para U un subconjunto no vacío del espacio euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n , definimos su diámetro por $\text{Diam}(U) = |U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$.

Luego considerando la definición anterior, dado $F \subset \mathbb{R}^n$ diremos que la familia $(U_i)_i$ es un δ -cubrimiento de F si para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $|U_i| \leq \delta$ y si

$$F \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i.$$

Por lo que dado un $s \in \mathbb{R}^+$, definimos para cada $\delta > 0$ la siguiente expresión asociada a F

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s : (U_i)_i \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } F \right\}.$$

Para lo anterior, notemos que si δ decrece entonces la cantidad de δ -cubrimientos que se pueden considerar va disminuyendo y por consiguiente la ínfimo antes descrito crece, por ello el siguiente límite

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s,$$

existe siempre y cuando se permita que tome el valor infinito. La función $\mathcal{H}^s : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ se denomina la medida s -dimensional de Hausdorff.

Observación 3.1.1. Es necesario notar que \mathcal{H}^s así definida, es una medida exterior en \mathbb{R}^n y por ello esta tiene como dominio a todo subconjunto de \mathbb{R}^n . Sin embargo, en el párrafo anterior su dominio fue restringido a los Borelianos de \mathbb{R}^n ya que esta restricción hace que \mathcal{H}^s sea una medida.

Esta medida es una generalización de volumen que uno tiene en \mathbb{R}^n , es más, si consideramos $s = n$, entonces se tiene que

$$\mathcal{H}^n(F) = C_n \cdot \text{Vol}^n(F),$$

donde $\text{Vol}^n(F)$ es el volumen n -dimensional de F y $C_n = 2^n(\frac{1}{2}n!)/(\pi^{\frac{n}{2}})$.

Proposición 3.1.1 ([5]). *Para la s -medida de Hausdorff, se tienen la siguientes propiedades*

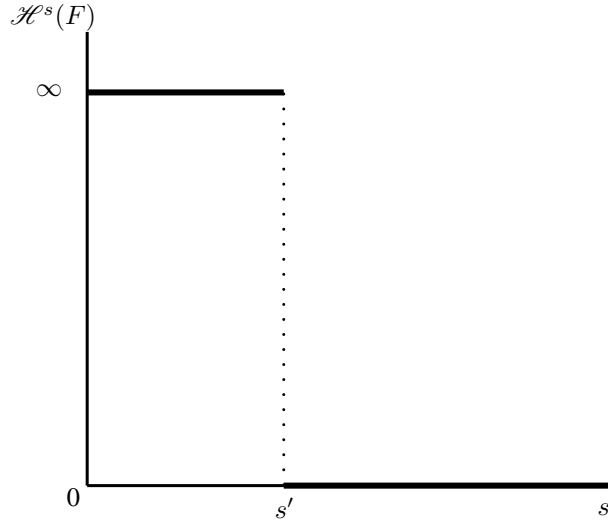
1. Si $F \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$, entonces $\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$.
2. Si f una isometría, entonces $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$.

3.2. Dimensión de Hausdorff

Es claro notar que si $F \subset \mathbb{R}^n$ y $\delta < 1$, entonces \mathcal{H}_δ^s es una expresión no creciente en s y como δ es arbitrario, entonces podemos concluir que \mathcal{H}^s es no creciente en s . Si $s \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, entonces para todo $t > s$ se tendrá que para todo δ -cubrimiento $(U_i)_i$ de F , se cumple

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s,$$

por lo tanto, si tomamos el ínfimo sobre los δ -cubrimiento obtenemos que $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ y luego haciendo tender δ a 0, se obtiene que $\mathcal{H}^t(F) = 0$ ya que $t - s > 0$. Ahora si consideramos $t < s$ con $\mathcal{H}^s(F) > 0$ y procediendo de manera análoga a la anterior se puede concluir que $\mathcal{H}^t(F) = +\infty$. De lo anterior podemos ver que la función posee un valor crítico s' en el cual pasa de ser infinito a ser 0, como se muestra en la siguiente gráfica



Donde dicho valor crítico es el que denominaremos dimensión de Hausdorff, que lo formalizaremos en la siguiente definición

Definición 3.2.1. *Dado $F \subset \mathbb{R}^n$, se define $\dim_H(F)$ como la dimensión de Hausdorff del conjunto F por*

$$\text{Dim}_h(F) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

La dimensión de Hausdorff nos da otra forma de medir cuan grande es un conjunto y no sólo eso, esta es capaz de diferenciar -asignando tamaño- conjuntos que con la medida de Lebesgue no podíamos, por ejemplo la medida de Lebesgue asigna la misma medida a un

punto que al conjunto de Cantor Tercio, el cual claramente es mucho más grande que un punto. Pero antes de ver en concreto esta diferencia, enumeraremos algunas propiedades que tiene este nuevo objeto

Proposición 3.2.1. *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$,*

1. *Si $\dim_H(F) = n$, entonces F contiene una bola n -dimensional de volumen positivo.*
2. *Si F es una subvariedad suave m -dimensional, entonces $\dim_H(F) = m$.*
3. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $E \subset F$, entonces $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$.*
4. *Si $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\dim_H \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{ \dim_H(F_i) \}$$

5. *Si F es numerable, entonces $\dim_H(F) = 0$.*
6. *Si $\dim_H(F) < 1$, entonces F es totalmente desconexo.*

Las propiedades enlistadas en la proposición anterior son las que nos permiten llamar al número $\dim_H(F)$ dimensión. Además de esto, tendremos que hay una cierta clase de morfismos para los cuales se preserva la dimensión de Hausdorff, los cuales vemos en el siguiente teorema,

Teorema 3.2.1. *Sea $F \subset \mathbb{R}^n$, y $L : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función bi-Lipschitz, es decir, existen constantes $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$ tales que*

$$c_1|x - y| \leq |L(x) - L(y)| \leq c_2|x - y|,$$

para todo $x, y \in F$. Entonces $\dim_H(L(F)) = \dim_H(F)$.

Demostración. Primero veremos que $\dim_H(L(F)) \leq \dim_H(F)$ y para ello basta notar que dado cualquier $(U_i)_i$ un δ -cubrimiento de F , entonces tendremos que para cada U_i se cumple que $|L(U_i)| \leq c_2|U_i| \leq c_2\delta$, entonces tendremos que

$$\mathcal{H}_{c_2\delta}^s(L(F)) \leq \mathcal{H}_\delta^s(F),$$

y como δ es arbitrario, podemos concluir entonces que $\mathcal{H}^s(L(F)) \leq \mathcal{H}^s(F)$, de donde podemos concluir que $\dim_H(L(F)) \leq \dim_H(F)$.

Luego para la otra desigualdad, basta restringir el recorrido de L a su imagen, es decir, definir $L : F \rightarrow L(F)$ y en dicho caso L será biyectiva y podemos repetir el proceso anterior para L^{-1} obteniendo la desigualdad restante. \square

El cálculo de la dimensión de Hausdorff en general es un trabajo duro, por ello los resultados que nos presentan formas de estimar dicho número son interesantes y en virtud de esto, presentamos el siguiente lema

Lema 3.2.1 (Lema de Frostman). *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y $s > 0$, entonces los siguientes son equivalentes:*

1. $\mathcal{H}^s(A) > 0$.
2. *Existe una medida μ boreliana tal que $\mu(A) > 0$ y $\mu(B(x, r)) \leq r^s$.*

Y antes de continuar con la teoría, mostraremos cómo se hace el cálculo de la dimensión de Hausdorff para el conjunto de Cantor Tercio,

Ejemplo 3.2.1. *Sea K el conjunto de Cantor Tercio. Partiremos por hacer un cálculo poco formal que nos servirá para obtener la dimensión de Hausdorff, con el cual podremos probar de manera rigurosa que efectivamente ese es el valor buscado.*

Partiremos definiendo los conjuntos $K_L = [0, 1/3] \cap K$ y $K_R = [2/3, 1] \cap K$, de los cuales se puede notar inmediatamente que $K_L \cup K_R = K$ y que K_L, K_R son un reescalamiento de K en $1/3$, por ello y en virtud de la propiedad número dos de la proposición (3.1.1), obtenemos que suponiendo $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$ entonces

$$\mathcal{H}^s(K) = \mathcal{H}^s(K_L) + \mathcal{H}^s(K_R) = \frac{1}{3^s} \mathcal{H}^s(K) + \frac{1}{3^s} \mathcal{H}^s(K) = \frac{2}{3^s} \mathcal{H}^s(K),$$

y como estamos bajo el supuesto que $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$, entonces obtenemos que $3^s = 2$, es decir,

$$s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

En lo anterior supusimos que $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$, lo que no sabemos a priori si es cierto o no, por ello, probaremos ahora de manera formal que para el s obtenido antes, entonces si se tiene que $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$, es más obtendremos que $1/2 \leq \mathcal{H}^s(K) \leq 1$.

Partamos definiendo el cantor de la siguiente manera: Llamaremos $E_0 = [0, 1]$, al cual le removeremos el intervalo de largo un tercio del medio, obteniendo $E_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. A este nuevo conjunto, le removeremos a cada uno de los intervalos que lo compone el intervalo de largo $1/9$ del medio, obteniendo el conjunto $E_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ y seguimos este proceso de manera infinita. Entonces los conjunto E_k será un conjunto formado por 2^k intervalos cerrados disjuntos de largo 3^{-k} y $K = \bigcap E_k$. Luego el cubrimiento de E_k consiste en los 2^k intervalos de largo 3^{-k} . Entonces $\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(K) \leq \sum |U_i| = 2^k 3^{-ks} = 1$ si $s = \log(2)/\log(3)$. Luego, haciendo tender $k \rightarrow \infty$ nos da $\mathcal{H}^s(K) \leq 1$.

Ahora, solo nos falta probar que $1/2 \leq \mathcal{H}^s(K)$, esto es

$$\sum |U_i|^s \leq \frac{1}{2} = 3^{-s} \quad (3.1)$$

Para cualquier cubrimiento $\{U_i\}$. Es claro, que podemos asumir que como U_i son intervalos y usando que F es compacto, solo nos falta probar (3.1) si $\{U_i\}$ es una colección finita de subintervalos cerrados de $[0, 1]$. Para cada U_i , existe k entero tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| \leq 3^{-k} \quad (3.2)$$

Luego, cada U_i no puede intersectar a más de un intervalo básico de E_k (ya que tiene largo 3^{-k}). Ahora, si $j \geq k$, entonces U_i intersecta $2^{j-k} = 2^j 3^{-ks} \leq 2^j 3^s \sum |U_i|^s$ intervalos básicos de E_j , usando (3.2). Ahora, escogiendo j lo suficientemente grande para que $3^{-(k+1)} \leq |U_i|$ se cumpla para todo U_i , entonces U_i intersecta a 2^j de largo 3^{-j} , entonces contando los intervalos nos da $2^j \leq \sum 2^j 3^s |U_i|^s$, por lo que se reduce a (3.1) y obtenemos lo que buscábamos.

3.3. Dimensión puntual y dimensión de una medida

El siguiente paso que daremos, y aprovechando lo definido anteriormente, remite a la introduciremos del concepto de dimensión puntual, para luego definir la dimensión de una medida,

Definición 3.3.1. Sea $T : X \rightarrow X$ una transformación y μ una medida de probabilidad. Definimos entonces la dimensión puntual de $x \in X$ con respecto a la medida μ por

$$d_\mu(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\mu(B(x, r)))}{\log(r)},$$

siempre y cuando el límite anterior exista.

Esta definición refiere al comportamiento de la medida de la bola en relación a su radio y no sólo eso, si no que también mide en cierta manera la concentración de la medida alrededor del punto, lo cual quedará ilustrado de mejor manera en los siguientes dos ejemplos,

Ejemplo 3.3.1. Consideremos λ la medida de Lebesgue en $[0, 1]$, entonces dado $x \in [0, 1]$ tendremos que su dimensión puntual respecto a la medida de Lebesgue es

$$d_\lambda(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\lambda(B(x, r)))}{\log(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(2r)}{\log(r)} = 1,$$

es decir,

$$\lambda(B(x, r)) \asymp r,$$

de lo que se concluye, que la medida de Lebesgue de una bola de radio r crece en la misma proporción que su radio.

Ejemplo 3.3.2. Sea $x_0 \in [0, 1]$ y esta vez consideremos δ_{x_0} la medida de Dirac soportada en x_0 , entonces se tendrá que

$$d_{\delta_{x_0}}(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\delta_{x_0}(B(x_0, r)))}{\log(r)},$$

donde claramente $x_0 \in B(x_0, r)$ y por lo tanto $\delta_{x_0}(B(x_0, r)) = 1$, lo que nos permite concluir que $d_{\delta_{x_0}}(x_0) = 0$.

Ahora si consideramos un $x_1 \in [0, 1]$ tal que $x_1 \neq x_0$, entonces se tendrá que

$$d_{\delta_{x_0}}(x_1) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\delta_{x_0}(B(x_1, r)))}{\log(r)},$$

entonces como $r \rightarrow 0$, podemos considerar $r < \text{Dist}(x_1, x_0)$, y en dicho caso tendremos que $\delta_{x_0}(B(x_1, r)) = 0$, obteniendo entonces que $d_{\delta_{x_0}}(x_1) = \infty$.

Hecho lo anterior, obtendremos que mientras más concentrada está la medida alrededor de un punto, su dimensión puntual será menor y al contrario, mientras menos concentrada está la medida alrededor del punto, su dimensión puntual será mayor.

Luego de la definición de dimensión puntual y ejemplos sobre ella, daremos paso a la definición de dimensión de una medida y después a una interesante conexión entre estas dos nociones,

Definición 3.3.2. Dada μ una medida de probabilidad, definimos la dimensión de Hausdorff de una medida por

$$\dim_H(\mu) = \inf\{\dim_H(A) : \mu(A) = 1\}.$$

Y ahora presentaremos una serie de resultados que muestran interesantes conexiones entre las distintas nociones de dimensión que tenemos hasta ahora,

Teorema 3.3.1. Si $\underline{d}_\mu(x) \geq d$ para casi todo $x \in X$, entonces $\dim_H(\mu) \geq d$, donde

$$\underline{d}_\mu = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\mu(B(x, r)))}{\log(r)}.$$

Demostración. Consideremos $A \subset X$ con $\mu(A) = 1$ tal que $\underline{d}_\mu(x) \geq d$ para todo $x \in A$. En particular podemos ver que para cada $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ tendremos que

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^{d-\varepsilon}} = 0.$$

Entonces fijemos $C > 0$ y dado $\delta > 0$ definimos el siguiente conjunto

$$X_\delta = \{x \in A : \mu(B(x, r)) \leq Cr^{d-\varepsilon}, \forall 0 < r \leq \delta\}.$$

Ahora sea $(U_i)_i$ un δ -cubrimiento de X , entonces si $x \in X_\delta$ se tiene que $\mu(U_i) \leq C|U_i|^{d-\varepsilon}$. En particular

$$\mu(X_\delta) \leq \sum_{U_i \cap X_\delta \neq \emptyset} \mu(U_i) \leq C \sum_i |U_i|^{d-\varepsilon},$$

para luego tomar ínfimo sobre los cubrimientos, obteniendo que

$$\mu(X_\delta) \leq C \mathcal{H}_\delta^{d-\varepsilon}(X_\delta) \leq C \mathcal{H}^{d-\varepsilon}(X).$$

Ahora como δ es arbitrario, entonces obtenemos que $1 = \mu(A) \leq C \mathcal{H}^{d-\varepsilon}(X)$. Pero C fue fijado de manera arbitraria, por ello obtenemos que $\mathcal{H}^{d-\varepsilon}(X) = \infty$ y por ende $\dim_H(X) \geq d-\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, por lo tanto se concluye que $\dim_H(X) \geq d$ y entonces $\dim_H(\mu) \geq d$. \square

Teorema 3.3.2. Si $\bar{d}_\mu \leq d$ para casi todo $x \in X$, entonces $\dim_H(X) \leq d$ donde

$$\bar{d}_\mu = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\mu(B(x, r)))}{\log(r)}.$$

Demostración. Notemos primeramente que para $\varepsilon > 0$ y $x \in X$ tenemos que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^{d+\varepsilon}} = \infty,$$

y al igual que antes, fijemos $C > 0$ y dado $\delta > 0$ consideremos el siguiente cubrimiento de X por bolas

$$\{B(x, r) : 0 < r \leq \delta \text{ y } \mu(B(x, r)) > Cr^{d+\varepsilon}\}.$$

Luego usando el lema de cubrimiento de Besicovitch, tenemos que

$$\mathcal{H}_\delta^{d+\varepsilon}(X) \leq \sum_i |U_i|^{d+\varepsilon} \leq \frac{1}{C} \sum_i \mu(U_i) \leq \frac{N}{C}.$$

por lo tanto se puede concluir que si $\delta \rightarrow 0$ entonces $\mathcal{H}^{d+\varepsilon}(X) \leq \frac{N}{C}$. Ahora como C es arbitrario, entonces claramente se tendrá que $\mathcal{H}^{d+\varepsilon}(X) = 0$ y por ello tendremos $\dim_H(X) \leq d + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, es decir, $\dim_H(X) \leq d$. \square

Corolario 3.3.1. Si $\bar{d}_\mu(x) \leq d$ para casi todo $x \in X$, entonces $\dim_H(\mu) \leq d$.

Demostración. La demostración nuevamente es directa de la definición. \square

Corolario 3.3.2. Si $d_\mu(x)$ existe para casi todo $x \in X$ y es igual a d , entonces se tiene que $\dim_H(\mu) = \dim_H(X) = d$.

Demostración. Basta notar que si $d_\mu(x) = d$ para casi todo $x \in X$, entonces se tiene que $\bar{d}_\mu \leq d$ y $\underline{d}_\mu(x) \geq d$, y en virtud de los teoremas (3.3.1) y (3.3.2) se obtiene lo pedido. \square

Luego con estos resultados y aprovechando el ejemplo (3.3.1), podemos ver que $d_\lambda(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$ donde λ es la medida de Lebesgue, entonces por el corolario (3.3.2) obtenemos que $\dim_H(\lambda) = 1$.

Antes de continuar, consideremos $x \in X$ entonces definimos el exponente de Lyapunov $\lambda(x)$ de x como

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(T^{(n)})'(x)|.$$

Luego podemos ver que la expresión al lado derecho de la igualdad se puede escribir por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(T^{(n)})'(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |T'(T^k(x))|,$$

y si μ_t es una medida de ergódica para un potencial $t\phi(x) = t \log |T'(x)|$, entonces tendremos que μ_t -ctp se tiene que

$$\lambda(x) = \int \phi d\mu_t.$$

Luego, definimos el exponente de Lyapunov de una medida ergódica por:

$$\lambda(\mu_t) = \int \phi d\mu_t.$$

Diremos que un sistema expansivo es *conforme* si para cada punto, las tasas de expansividad, es decir, cuanto expande el sistema dinámico en cada dirección, son las mismas en todas las direcciones. El exponente de Lyapunov representa la tasa promedio de expansividad del sistema y por ende, en el caso no conforme tendremos que lidiar con más de un exponente de Lyapunov.

Notemos que en el caso conforme, los cilindros representan bolas y según las definiciones alternativas de dimensión de Hausdorff, es "más sencillo" el cálculo de la misma (ver Falconer [5], Ch. 2). Ahora, la transformación de Ostrowski es un sistema expansivo no conforme (ya que en una dirección tiene la misma expansividad que la transformación de Gauss, mientras que en las fibras tiene la expansividad de un β -shift), lo que transforma el problema anterior en uno muy complicado, ya que al tener al menos dos tasas de expansión distintas, produce que las imágenes de las bolas se transformen en elipses, y por ello las técnicas usuales no pueden ser utilizadas.

Para el caso conforme existen diversos trabajos donde se relacionan estos objetos, como trabajos de Manning ([15]), Mañé ([16]), Ledrappier y Misiurewicz ([14]) donde prueban que

$$\dim_H(\mu) = \frac{h(\mu)}{\lambda(\mu)},$$

en distintos contextos de sistemas conformes.

Para el caso no conforme, haremos referencia a un trabajo de H. Hu ([7]) donde relaciona la entropía de una medida con la dimensión de Hausdorff de la siguiente manera

Teorema 3.3.3. *Sea f una transformación de clase C^2 de una variedad Riemanniana X en sí mismo y sea Λ un conjunto compacto f -invariante. Si f es expansiva en Λ y μ una medida ergódica sobre Λ , entonces*

$$\dim_H(\mu) \geq h(\mu).$$

Otros resultados relacionados con esta relación fueron obtenidos por W. Huang y P. Zhang ([8]).

Capítulo 4

Transformación de Ostrowski

El objetivo de esta sección es principalmente dar una descripción exhaustiva de la presión topológica de la transformación T respecto al potencial $\log |\det DT^{-1}|$, para ellos necesitaremos estudiar la transformación de Ostrowski.

Para lograr nuestro objetivo, utilizaremos el resultado mostrado en el capítulo 1 (teorema 1.2.7) y así obtener una descripción clara de la presión, esto es, ver que es analítica real, estrictamente decreciente, posee medidas de equilibrio únicas para cada potencial, etc. Además también probaremos que dichas medidas no sólo son de equilibrio, si no que son también de Gibbs y obtendremos de manera exacta el valor de t^* que describe el teorema 1.2.7.

Las principales dificultades son que para poder usar el teorema 1.2.7, necesitamos que la transformación T se pueda conjugar a un espacio simbólico. Para ello probaremos que la transformación de Ostrowski cumple necesariamente tres propiedades: La transformación T es de Markov sobre un alfabeto numerable, posee la propiedad BIP (Big Images and Pre-Images property) y además necesitamos que el potencial que usaremos tenga cierta regularidad, es decir, que el potencial sea débilmente Hölder continuo. Probando estas tres propiedades podremos utilizar los resultados del capítulo uno, obteniendo el resultado deseado.

4.1. Propiedades de la transformación de Ostrowski.

Recordemos que la transformación de Ostrowski $T : (0, 1]^2 \rightarrow (0, 1]^2$ se define por

$$T(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{\alpha} - \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor, \frac{\beta}{\alpha} - \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor \right).$$

Si llamamos $a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$, $b_1 = \left\lfloor \frac{\beta}{\alpha} \right\rfloor$ y $T(\alpha, \beta) = (\alpha_1, \beta_1)$, entonces tendremos que la aplicación T induce las siguientes representaciones para α y β respectivamente

$$\alpha = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \alpha_n}}}}, \quad (4.1)$$

y

$$\beta = \sum_{k=1}^n b_k \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} + \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \beta_n, \quad (4.2)$$

donde α_n y β_n están definidos por $T^n(\alpha, \beta) = (\alpha_n, \beta_n)$, $b_k = \left\lfloor \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}} \right\rfloor$ y $a_k = \left\lfloor \frac{1}{\alpha_{k-1}} \right\rfloor$. Lo anterior genera las sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ de dígitos correspondientes a las representaciones antes descritas, las cuales cumplen las siguientes condiciones: $b_n \leq a_n$ y si $a_n = b_n$, entonces $b_{n+1} = 0$ para todo $n \geq 1$, a las cuales denominaremos condiciones de Markov. Luego considerando lo anterior y el siguiente conjunto como nuestro alfabeto

$$S = \left\{ \binom{n}{k} : n, k \in \mathbb{N}, k \leq n \right\},$$

diremos que una sucesión formada por elementos del alfabeto S es *admisibile* si cumple con las condiciones de Markov antes expuestas, es decir,

$$\left(\binom{a_1}{b_1} \binom{a_2}{b_2} \binom{a_3}{b_3} \cdots \right),$$

es admisible si $b_i \leq a_i$ y si $a_i = b_i$ entonces $b_{i+1} = 0$ para todo $i \geq 1$. Luego podemos definir -para $n \in \mathbb{N}$ - $A(n)$ como el conjunto de todas las palabras de largo n admisibles, es decir,

$$A(n) = \left\{ \left(\binom{a_1}{b_1} \binom{a_2}{b_2} \cdots \binom{a_n}{b_n} \right) : (a_n)_n, (b_n)_n \text{ corresponden a dígitos de } (\alpha, \beta) \in X \right\}.$$

Como forma de abreviación denominaremos por c_n a los elementos del conjunto $A(n)$, y para cada uno de ellos definiremos el conjunto X_{c_n} -al cual llamaremos cilindro de profundidad o nivel n - por

$$X_{c_n} = \left\{ (\alpha, \beta) \in X : \binom{a_i(\alpha, \beta)}{b_i(\alpha, \beta)} = \binom{a_i}{b_i}, \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ donde } c_n = \left(\binom{a_1}{b_1} \binom{a_2}{b_2} \cdots \binom{a_n}{b_n} \right) \right\}.$$

Luego podemos notar que dichos conjuntos forman una partición del espacio X , es decir,

$$X = \bigcup_{c_n \in A(n)} X_{c_n},$$

y $X_{c_n} \cap X_{c'_n} = \phi$ si $c_n \neq c'_n$. Más aún, podemos formular el siguiente lema

Lema 4.1.1. *Sean los conjuntos*

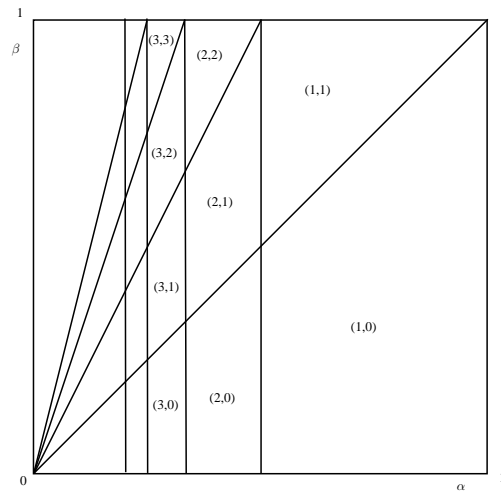
$$U_0 = \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha, \beta < 1\} = X,$$

$$U_1 = \{(\alpha, \beta) : 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < \alpha\},$$

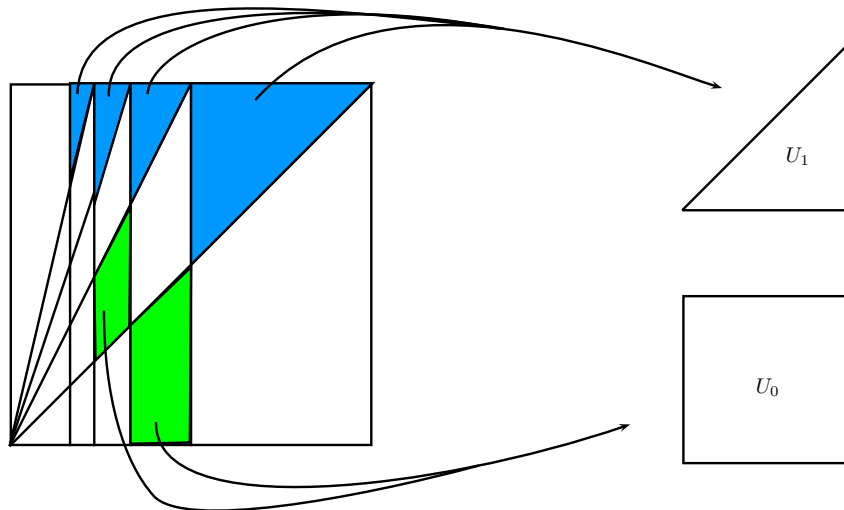
entonces para cada $c_n \in A(n)$ tendremos que

$$T^n X_{c_n} = \begin{cases} U_0 & \text{Si } a_n \neq b_n \\ U_1 & \text{Si } a_n = b_n \end{cases}$$

Demostración. La demostración es inmediata dado que para cualquier $c_n \in A(n)$, X_{c_n} es admisible. \square



De lo que revisando el esquema que se muestra anteriormente, se deduce que los triángulos son mapeados en el semi-triángulo inferior, mientras que los trapecios son mapeados en el cuadrado completo, como mostramos en la siguiente figura



Ahora tenemos que para esta partición formada por cilindros, podemos definir para cada $c_n \in A(n)$, la función ψ_{c_n} por

$$\psi_{c_n}(\alpha, \beta) = \left(\frac{p_n + p_{n-1}\alpha}{q_n + q_{n-1}\alpha}, \sum_{k=1}^n \alpha^0(\alpha)\alpha^1(\alpha)\cdots\alpha^{k-1}(\alpha)b(k) + \alpha^0(\alpha)\alpha^1(\alpha)\cdots\alpha^{n-1}(\alpha)\beta \right),$$

donde

$$\alpha^{k-1}(\alpha) = \frac{1}{a_k + \frac{1}{a_{k+1} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \alpha}}}},$$

para $k \in \{1, \dots, n\}$. Luego se tiene que

$$\psi_{c_n}(T^n x) = x,$$

para todo $x \in X_{c_n}$, ya que $T^n(\alpha, \beta) = (\alpha_n, \beta_n)$ y por la forma de escribir α y β como fracción continua y serie respectivamente, tendremos que $\psi_{c_n}(T^n(\alpha, \beta)) = (\alpha, \beta)$ para cada $(\alpha, \beta) \in X_{c_n}$.

Lema 4.1.2. *Para cada $c_n \in A(n)$, se tiene que*

$$|\det D\psi_{c_n}(\alpha, \beta)| = \frac{1}{(q_n + q_{n-1}\alpha)^3}.$$

Demostración. Basta con notar que se tiene que

$$[a_1 a_2 \dots a_{n-1} x] = \frac{p_n + p_{n-1}x}{q_n + q_{n-1}x},$$

y que ello implica que

$$\alpha^0(\alpha)\alpha^1(\alpha)\dots\alpha^{n-1}(\alpha) = \frac{1}{q_n + q_{n-1}\alpha}.$$

□

Observación 4.1.1. *Observamos que la función ψ_{c_n} es una función definida sobre el cilindro X_{c_n} , lo que nos permite la diferenciabilidad de la función dentro de dicho dominio.*

Lema 4.1.3. *Se tiene la siguiente relación cuando cualquiera de los límites exista,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log q_n = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} \log |\det D\psi_{c_n}(\alpha, \beta)|.$$

Demostración. Si notamos que $q_n \leq q_n + q_{n-1}\alpha \leq q_n(1 + \alpha)$ y por el lema 4.1.2, entonces tendremos que

$$-\frac{1}{3n} \log |\det D\psi_{c_n}(\alpha, \beta)| = \frac{1}{n} \log(q_n + \alpha q_{n-1}),$$

y como $q_n \leq q_n + q_{n-1}\alpha \leq q_n(1 + \alpha)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(q_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(q_n + \alpha q_{n-1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(q_n(1 + \alpha)),$$

y suponiendo que el límite izquierdo del enunciado existe, se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log q_n = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n} \log |\det D\psi_{c_n}(\alpha, \beta)|.$$

Ahora si suponemos que el límite derecho es el que existe, podemos proceder igual usando la desigualdad $q_n + q_{n-1}\alpha \leq q_n(1 + \alpha) \leq q_{n+1} + q_n\alpha$, donde se puede concluir igual que antes. □

A continuación mostraremos que la transformación de Ostrowski satisface dos propiedades importantes, estas son ser Markov sobre una partición numerable y la propiedad BIP, donde además definiremos un potencial ϕ , el cual será débilmente Hölder continuo, y recopilando todo esto podremos ocupar teoremas fuertes sobre la presión topológica.

El siguiente lema hace referencia a la primera propiedad que mostraremos sobre esta transformación que es Markov, que fue definido en (1.1.1)

Lema 4.1.4. *La transformación de Ostrowski es Markov sobre una partición numerable.*

Demostración. Para probar esto, veremos que para cada $x \in (0, 1]^2 \setminus \{\bigcup_n T^{-n}(B)\}$ donde B es el conjunto compuesto por todos los bordes de la partición, puedo asociar una única sucesión admisible y recíprocamente, toda sucesión admisible corresponde a un solo punto.

Vemos que la primera dirección es directa, por la construcción de las escrituras para α y β .

Para la segunda dirección, sea $\left(\begin{smallmatrix} a_n \\ b_n \end{smallmatrix}\right)_n$ una sucesión admisible, luego debemos probar que el conjunto

$$\bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X_{\begin{smallmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{smallmatrix}}),$$

cuando $n \rightarrow \infty$ corresponde a un solo punto. Pero observamos de inmediato que por las escrituras expresadas en (4.1) y (4.2), es claro que el diámetro de los conjuntos antes descritos tiende a 0 y son decrecientes, por lo tanto de manera inmediata se tiene que

$$\bigcap_{n \geq 1} \bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k}(X_{\begin{smallmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{smallmatrix}}) = x,$$

para algún $x \in (0, 1]^2$, lo que completa la prueba. \square

Lo anterior nos dice que existe un homeomorfismo entre $(0, 1]^2 \setminus \{\bigcup_n T^{-n}(B)\}$ y el Shift de Markov que induce las escrituras descritas en (4.1) y (4.2), es decir, existe $\pi : \Sigma \rightarrow (0, 1]^2$ tal que $T \circ \pi = \pi \circ \sigma$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ \pi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \pi \\ (0, 1]^2 \setminus \{\bigcup_n T^{-n}(B)\} & \xrightarrow{T} & (0, 1]^2 \setminus \{\bigcup_n T^{-n}(B)\} \end{array}$$

Observación 4.1.2. Notemos que como T es un Skew-Product de la forma $T(x, y) = (G(x), B_{1/x}(y))$, donde G es la transformación de Gauss y $B_{1/x}$ es el β -shift para $\beta = 1/x$. Ahora como cualquier medida invariante μ para la transformación T está asociada a una medida invariante para la transformación de Gauss, y no hay medidas de Gauss invariantes asociadas a los elementos de la partición $\{1/n\}_n$ entonces la transformación T no posee medidas soportadas en los bordes de la partición.

La segunda propiedad -que fue definida en (1.1.2)- será plasmada en el siguiente lema

Lema 4.1.5. La transformación de Ostrowski satisface la propiedad BIP.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

entonces tendremos que si $a \in S$ es de la forma $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$, entonces las palabras $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son admisibles.

Si tenemos $a \in S$ de la forma $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ con $a > b > 0$, entonces las palabras $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son admisibles.

Si tenemos $a \in S$ de la forma $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces las palabras $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son admisibles. \square

4.2. Formalismo Termodinámico para la Transformación de Ostrowski.

En esta sección, introduciendo la función $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ -que llamaremos *potencial*- la cual se define por

$$\phi(x) = \log(|\det DT^{-1}(x)|).$$

Para poder utilizar los resultados que exhibimos en el primer capítulo, necesitamos que el potencial que hemos definido tenga cierta regularidad.

Proposición 4.2.1. *El potencial ϕ es débilmente Hölder continuo.*

Demostración. Sea $c_n \in A(n)$ y considere $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in X_{c_n}$. Si

$$c_n = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \right)$$

Entonces tendremos que

$$T^{-1}(z, w) = \left(\frac{1}{z + a_1}, \frac{w + b_1}{z + a_1} \right),$$

y luego

$$|\phi(\alpha, \beta) - \phi(\alpha', \beta')| = \left| 3 \log \left(\frac{\alpha' + a_1}{\alpha + a_1} \right) \right|.$$

Ahora notemos que si tomamos un borde vertical de un cilindro, este va en un borde vertical vía T^{-1} y ello solo depende de la primera coordenada. Luego, si aplicamos $\phi_{c_{n-1}}$ a los vértices inferiores del cilindro $X_{\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}}$, obtendremos en las primeras coordenadas $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$, por lo que reemplazando estos valores de α y α' obtendremos que

$$\left| 3 \log \left(\frac{\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} + a_1}{\frac{p_n}{q_n} + a_1} \right) \right|.$$

Luego, la expresión $\frac{\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} + a_1}{\frac{p_n}{q_n} + a_1}$ puede ser escrita como

$$1 + \frac{1}{q_n(p_n + a_1 q_n) + q_n(p_{n-1} + a_1 q_{n-1})},$$

si n es impar y

$$1 + \frac{1}{q_n(p_n + a_1 q_n) + q_{n-1}(p_n + a_1 q_n)},$$

si n es par. Por lo tanto, tendremos que

$$q_n(p_n + a_1 q_n) + q_n(p_{n-1} + a_1 q_{n-1}) \geq q_n,$$

$$q_n(p_n + a_1 q_n) + q_{n-1}(p_n + a_1 q_n) \geq q_n.$$

Más Aún, si q_n es el n -ésimo denominador de la fracción continua de x ($x \in (0, 1)$), entonces $q'_n \leq q_n$ para todo n , donde q'_n es la sucesión de Fibonacci (q'_n es el n -ésimo denominador de la fracción continua de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Por lo tanto, tendremos que existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$q'_n = ax_1^n + bx_2^n,$$

donde $x_1 > 1 > x_2$ son soluciones de la ecuación $x^2 = x + 1$. Por lo tanto, $q'_n \geq ax_1^n$. Luego, reemplazando esto en lo anterior, obtenemos que

$$1 + \frac{1}{q_n(p_n + a_1 q_n) + q_n(p_{n-1} + a_1 q_{n-1})} \leq 1 + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x_1} \right)^n,$$

y

$$1 + \frac{1}{q_n(p_n + a_1 q_n) + q_{n-1}(p_n + a_1 q_n)} \leq 1 + \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x_1} \right)^n,$$

y notando que $\log(1+x) \leq x$, entonces tendremos que

$$|\phi(\alpha, \beta) - \phi(\alpha', \beta')| \leq \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x_1} \right)^n,$$

y finalmente, tomamos supremos obtenemos

$$V_n(\phi) \leq \frac{1}{a} \left(\frac{1}{x_1} \right)^n,$$

es decir, ϕ es débilmente Hölder continua. □

Ahora consideremos la función presión $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$P(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{T^n(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)} \exp \left(\sum_{i=0}^{n-1} \log |\det DT^{-1}(T^i(\alpha, \beta))|^t \right). \quad (4.3)$$

En virtud de todo lo desarrollado antes, podemos formular el siguiente lema

Teorema 4.2.1. *La función presión satisface que*

$$P(t) = \begin{cases} \infty & \text{Si } t < 2/3 \\ \text{Estrictamente decreciente, estrictamente convexa y analítica real} & \text{Si } t > 2/3 \end{cases}$$

Además tendremos que

$$\lim_{t \rightarrow 2/3^+} P(t) = \infty.$$

Más aún, para cada $t > 2/3$ existe una única medida de Gibbs μ_t asociada al potencial $t \log |\det DT^{-1}|$.

Demostración. Comenzaremos la demostración desarrollando la función $P(t)$ para obtener una expresión más manipulable. Para ello notemos que por propiedades del logaritmo tendremos que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \log |\det DT^{-1}(T^i(\alpha, \beta))|^t = \log \prod_{i=0}^{n-1} |\det DT^{-1}(T^i(\alpha, \beta))|^t$$

y por lo tanto, la expresión dada en (4.3) se reduce a

$$\begin{aligned} P(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{T^n(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)} \exp \log \prod_{i=0}^{n-1} |\det DT^{-1}(T^i(\alpha, \beta))|^t \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{T^n(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)} \prod_{i=0}^{n-1} |\det DT^{-1}(T^i(\alpha, \beta))|^t. \end{aligned}$$

Además, nosotros sabemos que para $(z, w) \in X_{\binom{a_1}{b_1}}$ entonces

$$T^{-1}(z, w) = \left(\frac{1}{z + a_1}, \frac{w + b_1}{z + a_1} \right),$$

y por tanto se tendrá claramente que

$$|\det DT^{-1}(z, w)| = \frac{1}{(z + a_1)^3}.$$

Luego como $z \in (0, 1)$ entonces es claro que

$$\frac{1}{(1 + a_1)^3} \leq |\det DT^{-1}(z, w)| \leq \frac{1}{a_1^3}. \quad (4.4)$$

Finalmente notando que

$$|\det DT^{-1}(T^{i-1}(z, w))| = \frac{1}{(z + a_i)^3},$$

ya que $T^{i-1}(z, w) \in X_{\binom{a_i}{b_i}}$, entonces la expresión para la función presión puede ser escrita de la siguiente manera

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{T^n(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(z + a_i)^{3t}}.$$

Podemos notar de la expresión anterior que el sumando, es decir, $\prod_{i=1}^n \frac{1}{(z + a_i)^{3t}}$ no depende del término β , por lo tanto la expresión anterior puede ser escrita de la forma

$$P(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \sum_{G^n(\alpha) = \alpha} \sum_{\{\beta : T^n(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(z + a_i)^{3t}}, \quad (4.5)$$

donde G representa la transformación de Gauss. Ahora, es consecuencia de la estructura de Markov de T que para cada α tal que $G^n(\alpha) = \alpha$ se tiene que

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \#\{\beta : T^n(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\} \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n).$$

Esto último más la desigualdad exhibida en (4.4), nos da que

$$\sum_{G^n(\alpha) = \alpha} \sum_{\{\beta : T^n(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(z + a_i)^{3t}} \leq \sum_{G^n(\alpha) = \alpha} \prod_{i=1}^n \frac{(1 + a_i)}{a_i^{3t}},$$

y

$$\sum_{G^n(\alpha) = \alpha} \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{(1 + a_i)^{3t}} \leq \sum_{G^n(\alpha) = \alpha} \sum_{\{\beta : T^n(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(z + a_i)^{3t}}.$$

Luego notamos que dado $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ un conjunto numerable de números, entonces se cumple que

$$\sum_{j_1, j_2, \dots, j_n \in \mathbb{N}} \prod_{i=1}^n \lambda_{j_i} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right)^n,$$

entonces obtenemos que

$$\sum_{G^n(\alpha)=\alpha} \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{(1+a_i)^{3t}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^{3t}} \right)^n,$$

y

$$\sum_{G^n(\alpha)=\alpha} \prod_{i=1}^n \frac{(1+a_i)}{a_i^{3t}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^{3t}} \right)^n.$$

Entonces tendremos que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^{3t}} \right)^n \leq \sum_{G^n(\alpha)=\alpha} \sum_{\{\beta : T^n(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)\}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{(z+a_i)^{3t}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^{3t}} \right)^n,$$

por lo que aplicando logaritmo, dividiendo por n y luego tomando límite, obtendremos que

$$\log \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^{3t}} \right) \leq P(t) \leq \log \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^{3t}} \right).$$

Luego, observamos que si k es lo suficientemente grande entonces $\frac{k+1}{k^{3t}} \sim \frac{1}{k^{3t-1}}$, y como esta última expresión converge para $t > 2/3$, se cumple que $P(t) < \infty$ y si $t < 2/3$, por las mismas razones se tendrá que $P(t) = +\infty$. Más aún, se tiene que

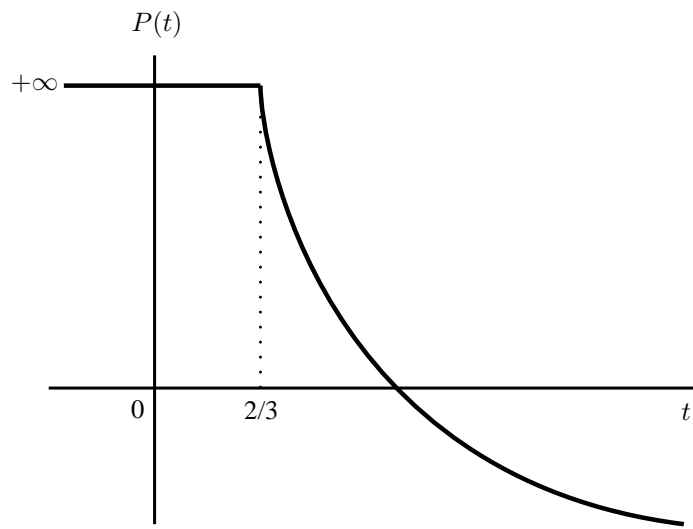
$$\lim_{t \rightarrow 2/3^+} \log \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)^{3t}} \right) = \infty,$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow 2/3^+} P(t) = +\infty.$$

Luego, como $P(1) < \infty$ y en virtud del teorema 1.2.7 obtendremos que para cada $t > 2/3$ el potencial $t\phi$ tiene una única medida asociada μ_t de equilibrio. Más aún, estas medidas -por la proposición 1.2.1 y el teorema 1.2.6- son medida de Gibbs. \square

Luego de lo anterior, podemos notar que la gráfica de la función $P(t)$ tiene la siguiente forma



Capítulo 5

Medida Absolutamente Continua para la Transformación de Ostrowski

En esta sección mostraremos un resultado obtenido por Sh. Ito ([10]), en el cual prueba que la transformación de Ostrowski posee una medida invariante absolutamente continua respecto a Lebesgue, y no sólo eso, si no que da una fórmula explícita para su densidad.

Teorema 5.0.2 (Sh. Ito, 1986). *La transformación de Ostrowski T tiene una única medida absolutamente continua respecto a Lebesgue, cuya densidad esta dada por*

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2 \log 2} \frac{\alpha + 2}{(1 + \alpha)^2} & \text{Si } \beta > \alpha \\ \frac{1}{2 \log 2} \frac{\alpha + 3}{(1 + \alpha)^2} & \text{Si } \beta \leq \alpha \end{cases}$$

La demostración de este teorema, es la construcción de la densidad anterior y luego probar que efectivamente es absolutamente continua e invariante. Para ello, necesitamos hacer una construcción, previa referencia a una extensión de la transformación T .

Sea $Y = \{(\gamma, \delta) : 0 < \gamma < 1, -\gamma < \delta < 1\}$ y

$$c(\gamma) = \left\lfloor \frac{1}{\gamma} \right\rfloor \text{ y } d(\gamma, \delta) = \max \left\{ \left\lfloor \frac{1}{\gamma} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1 - \delta}{\gamma} \right\rfloor, 0 \right\}.$$

Entonces definimos T^* de T por

$$T^*(\gamma, \delta) = \left(\frac{1}{\gamma} - c(\gamma), -\frac{\delta}{\gamma} + d(\gamma, \delta) \right).$$

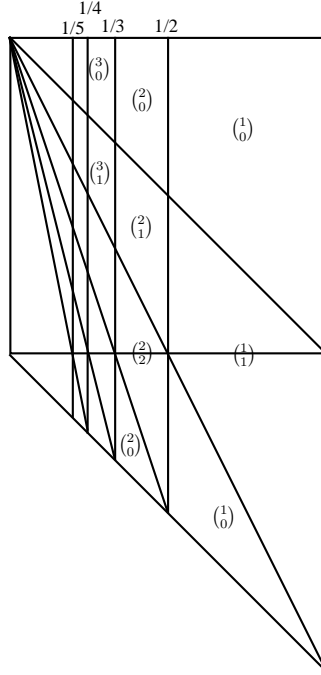
Desde ahora y para simplificar la notación, denotaremos $c_n = c(\gamma_{n-1})$ y $d_n = d(\gamma_{n-1}, \delta_{n-1})$, para $(\gamma_n, \delta_n) = (T^*)^n(\gamma, \delta)$. Entonces trabajando de manera análoga a como lo hicimos con T , tendremos que la primera coordenada sigue siendo la transformación de Gauss, pero la segunda estará induciendo la siguiente escritura

$$\delta = \sum_{k=1}^n \theta_{k-1}^* d_k + \frac{(-1)^n \delta_n}{q_n^* + q_{n-1}^* \gamma_n},$$

donde $\theta_n^* = q_n^* \gamma - p_n^*$ y p_n^*/q_n^* es el n -ésimo aproximante de γ mediante fracciones continuas. Por lo tanto, de la expansión anterior y su construcción se deduce que para $(\gamma, \delta) \in Y$, se tiene que

$$\begin{cases} d_i \leq c_1 & \text{Para } i \geq 1 \\ \text{Si } d_i \neq 0, \text{ entonces } d_{i+1} \neq c_{i+1} & \text{Para } i \geq 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

Lo que nos permite decir que la palabra $((c_1), (c_2), \dots, (c_n))$ es admisible sí y sólo sí las sucesiones $(c_i)_{i=1}^n$ y $(d_i)_{i=1}^n$ -dígitos de las representaciones de γ y δ respectivamente- cumplen las condiciones expuestas en (5.1). Luego el conjunto Y se particiona de la siguiente manera



Ahora consideremos para cada $(c, d) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ con $c \geq d$ la función dada por

$$\phi_{\binom{c}{d}}(\gamma, \delta) = \left(\frac{1}{\gamma + c}, \frac{d - \delta}{\gamma + c} \right).$$

Definimos los conjuntos

$$Y_{\binom{c}{d}} = \begin{cases} \phi_{\binom{c}{d}}(V_0) & \text{Si } d = 0 \\ \phi_{\binom{c}{d}}(V_1) & \text{Si } d \neq 0 \end{cases}$$

donde $V_0 = Y$ y $V_1 = \{(\gamma, \delta) : 0 < \gamma < 1, -\gamma < \delta < 1 - \gamma\}$.

Con todo lo dicho antes, se puede concluir el siguiente lema,

Lema 5.0.1. *La familia de conjuntos $\{Y_{\binom{c}{d}} : c \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ y } c \geq d\}$ tiene las siguientes propiedades*

1. *La familia es una partición de Y , es decir,*

$$Y_{\binom{c}{d}} \cap Y_{\binom{c'}{d'}} = \phi, \text{ si } \binom{c}{d} \neq \binom{c'}{d'}.$$

2. Para cada $Y_{\binom{c}{d}}$ se cumple que

$$T^*(Y_{\binom{c}{d}}) = \begin{cases} V_0 & \text{Si } d = 0 \\ V_1 & \text{Si } d \neq 0 \end{cases}$$

Definamos el conjunto Z por

$$Z = \left\{ (\gamma, \delta, \alpha, \beta) \in Y \times X : \left(\binom{c_1}{d_1} \binom{a_1}{b_1} \right) \in A(2) \right\},$$

y los conjuntos $V_{\binom{c}{d}} = T^*(Y_{\binom{c}{d}})$ y $U_{\binom{a}{b}} = T(X_{\binom{a}{b}})$, entonces como consecuencia de los lemas (4.1.1) y (5.0.1), entonces tendremos que Z puede ser particionado de las siguientes maneras

$$Z = \bigcup_{\binom{a}{b} \in A(1)} V_{\binom{a}{b}} \times X_{\binom{a}{b}} = \bigcup_{\binom{a}{b} \in A(1)} Y_{\binom{a}{b}} \times U_{\binom{a}{b}}.$$

Luego, definimos la extensión natural de T -la cual denotamos por \bar{T} - por

$$\bar{T}(\gamma, \delta, \alpha, \beta) = \left(\frac{1}{\gamma + a_1}, \frac{b_1 - \delta}{\gamma + a_1}, \alpha_1, \beta_1 \right),$$

para la cual tendremos el siguiente teorema

Teorema 5.0.3. *La extensión natural de T definida como antes, tiene una medida invariante $\bar{\mu}$ que satisface*

$$\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{\lambda}} = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{(1 + \gamma\alpha)^3},$$

donde $\bar{\lambda}$ es la medida de Lebesgue sobre Z .

Demostración. Lo primero que haremos es calcular el Jacobiano de la transformación \bar{T} sobre $V_{\binom{a}{b}} \times X_{\binom{a}{b}}$, de la siguiente manera

$$|J(\bar{T})| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2} & -\frac{1}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{(\gamma+a_1)^2} & \frac{\delta-b_1}{(\gamma+a_1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma+a_1} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha^3(\gamma + a_1)^3}.$$

Por lo tanto, definiendo la función K por

$$K(\gamma, \delta, \alpha, \beta) = \frac{1}{\log 2(1 + \gamma\alpha)^3},$$

podemos notar que

$$\begin{aligned} K(\bar{T}(\gamma, \delta, \alpha, \beta)) \cdot |J(\bar{T}(\gamma, \delta, \alpha, \beta))| &= \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\gamma + a_1} \left(\frac{1}{\alpha} - a_1\right)\right)^3} \cdot \frac{1}{\alpha^3(\gamma + a_1)^3} \\ &= \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{\left(\left(1 + \frac{1}{\gamma + a_1} \left(\frac{1}{\alpha} - a_1\right)\right) \alpha(\gamma + a_1)\right)^3} = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{\alpha(\gamma + a_1) + (1 - \alpha a_1)} \\ &= \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{(1 + \gamma\alpha)^3} = K(\gamma, \delta, \alpha, \beta), \end{aligned}$$

es decir, K define una densidad invariante para \bar{T} . \square

Pero como nosotros estamos interesados en la densidad para la función T y no para \bar{T} , tendremos el siguiente corolario

Corolario 5.0.1. *T tiene una única medida absolutamente continua respecto a Lebesgue, cuya densidad esta dada por*

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2 \log 2} \frac{\alpha + 2}{(1 + \alpha)^2} & \text{Si } \beta > \alpha \\ \frac{1}{2 \log 2} \frac{\alpha + 3}{(1 + \alpha)^2} & \text{Si } \beta \leq \alpha \end{cases}$$

Demostración. Para la prueba basta un cálculo de la distribución marginal de la densidad anterior, integrando de manera adecuada. Observemos que el conjunto

$$U_1 = \{(\alpha, \beta) \in X : \beta \leq \alpha\} = \bigcup_{\{\binom{a}{b} \in A(1) : b=0\}} X_{\binom{a}{b}} = \bigcup_{a \in \mathbb{N}} X_{\binom{a}{0}},$$

por lo que el correspondiente subconjunto de Z a integrar es

$$\bigcup_{\{\binom{a}{b} \in A(1) : b=0\}} V\left(\binom{a}{b}\right) \times X_{\binom{a}{b}} = \bigcup_{a \in \mathbb{N}} V\left(\binom{a}{0}\right) \times X_{\binom{a}{0}}.$$

Pero notemos que $V\left(\binom{a}{0}\right) = T^*(Y_{\binom{a}{0}}) = V_0$, por lo que tendremos que

$$\bigcup_{a \in \mathbb{N}} V\left(\binom{a}{0}\right) \times X_{\binom{a}{0}} = V_0 \times \bigcup_{a \in \mathbb{N}} X_{\binom{a}{0}} = V_0 \times U_1,$$

por lo tanto, la densidad se define como

$$\frac{1}{\log 2} \iint_{V_0} \frac{1}{(1 + \gamma\alpha)^3} dV_0,$$

sobre U_1 , es decir,

$$I = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + \gamma\alpha)^3} d\gamma d\delta + \frac{1}{\log 2} \int_{-1}^0 \int_{-\delta}^1 \frac{1}{(1 + \gamma\alpha)^3} d\gamma d\delta,$$

la cual utilizando el cambio de variable $\theta = 1 + \gamma\alpha$ se obtiene que

$$I = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \int_1^{1+\alpha} \frac{1}{\alpha\theta^3} d\theta d\delta + \frac{1}{\log 2} \int_{-1}^0 \int_{1-\delta\alpha}^{1+\alpha} \frac{1}{\alpha\theta^3} d\theta d\delta = \frac{\alpha + 3}{2 \log 2 (\alpha + 1)^2}.$$

Ahora por otro lado, para conseguir la densidad en $X \setminus U_1 = \{(\alpha, \beta) \in X : 0 < \alpha < 1, 1 > \beta \geq \alpha\} = \bigcup_{\{\binom{a}{b} \in A(1) : b \neq 0\}} X_{\binom{a}{b}}$ tenemos que considerar el subconjunto de Z

$$\bigcup_{\{\binom{a}{b} \in A(1) : b \neq 0\}} V\left(\binom{a}{b}\right) \times X_{\binom{a}{b}},$$

pero $V\left(\binom{a}{b}\right) = V_1$ cuando $b \neq 0$, por lo tanto tendremos que lo anterior es igual a

$$V_1 \times \bigcup_{\{\binom{a}{b} \in A(1) : b \neq 0\}} X_{\binom{a}{b}} = V_1 \times (X \setminus U_1).$$

Por lo tanto, la densidad sobre $X \setminus U_1$ está dada por la integral

$$I = \frac{1}{\log 2} \iint_{V_1} \frac{1}{(1 + \gamma\alpha)^3} dV_1,$$

es decir,

$$I = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \int_0^{1-\delta} \frac{1}{(1 + \gamma\alpha)^3} d\gamma d\delta + \frac{1}{\log 2} \int_{-1}^0 \int_{-\delta}^1 \frac{1}{(1 + \gamma\alpha)^3} d\gamma d\delta,$$

en la cual usando el mismo cambio de variables que antes, se obtiene que

$$I = \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \int_1^{1+(1-\delta)\alpha} \frac{1}{\alpha\theta^3} d\theta d\delta + \frac{1}{\log 2} \int_{-1}^0 \int_{1-\delta\alpha}^{1+\alpha} \frac{1}{\alpha\theta^3} d\theta d\delta = \frac{\alpha + 2}{2 \log 2 (1 + \alpha)^2},$$

lo que completa la prueba. □

Capítulo 6

Aplicaciones a Teoría de Números

La presente sección tiene por objetivo presentar un resultado que generaliza la proposición 2.4.1, en donde utilizando la medida absolutamente continua obtenida en el capítulo anterior, se demuestra que Lebesgue casi todo punto la velocidad exponencial de aproximación de un número β por números de la forma $\{N\alpha\}$ es $e^{-n\pi^2/12 \log^2}$. De lo anterior, nosotros investigamos el conjunto de medida de Lebesgue cero para los cuales la proposición no se cumple. Estudiaremos las posibles velocidades de aproximación que pueden tener dichos números. Para ello tomaremos el método utilizado en la proposición 6.0.4 pero esta vez ya no usando la medida absolutamente continua que conocemos, si no que utilizaremos una de las medidas de Gibbs que obtuvimos en el teorema 4.2.1 y con ella probaremos que necesariamente existen pares $(\alpha, \beta) \in (0, 1]^2$ tales que las velocidades de aproximación son distintas a la mencionada, y no sólo eso, además mostraremos que dichos conjuntos a pesar de tener medida de Lebesgue cero, no son tan pequeños ya que poseen dimensión de Hausdorff positiva.

Si definimos los conjunto $J(\gamma)$ por

$$J(\gamma) = \left\{ (\alpha, \beta) \in (0, 1]^2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\{N_n \alpha\} - \beta| = \gamma \right\},$$

entonces se tiene el siguiente resultado

Teorema. Para cada $\gamma \in (-\infty, -\log((\sqrt{5} + 1)/2))$, se cumple que $\dim_H(J(\gamma)) > 0$.

La dificultad más clara es que como utilizamos una medida de Gibbs para la cual no conocemos una fórmula de densidad, el método utilizado por Sh. Ito y H. Nakada ([9]) no puede ser utilizado de igual manera ya que ellos usan de manera muy fuerte el hecho de conocer la densidad de la medida. Por ello, de su método tomaremos la idea de su demostración que es probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n = 0,$$

y con ello podremos de manera clara mostrar que existen distintas velocidad. Ahora, lo anterior lo probaremos haciendo restricción del dominio de T al cuadrado $[\varepsilon, 1]^2$ para algún $\varepsilon > 0$ y luego tomaremos el subconjunto $K_\varepsilon \subset [\varepsilon, 1]^2$ que es compacto e invariante bajo T . Luego para cada $\varepsilon > 0$, tendremos que para todo $\beta \in K_\varepsilon$ se cumple que $\frac{1}{n} \log \beta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y luego utilizando el teorema 1.2.4, se puede concluir lo que queremos.

Para partir, revisaremos algunos de los resultados que obtuvieron Sh. Ito y H. Nakada, en los cuales revisaremos los métodos utilizados para así posteriormente mostrar nuestro resultado.

Proposición 6.0.2. *Para casi todo (α, β)*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{n : 1 \leq n \leq N, b_n = k\} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{Si } k = 0 \\ \frac{2 \log(k+1) - \log k - \log(k+1)}{2 \log 2} & \text{Si } k > 0 \end{cases}$$

Demostración. Esto se puede probar usando el hecho que (T, μ) es ergódico, y por lo tanto se tendrá que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{n : 1 \leq n \leq N, b_n = k\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_{\{(\alpha, \beta) : b_1 = k\}}(T^i(\alpha, \beta)) \\ &= \iint_{\{b_1 = k\}} \frac{d\mu}{d\lambda} d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Luego resolviendo la integral anterior, se tiene lo pedido. \square

Teorema 6.0.4. *Para casi todo (α, β)*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \beta - \sum_{k=1}^n b_k |\theta_{k-1}| \right| = -\frac{\pi^2}{12 \log 2}.$$

Demostración. Notemos que

$$\left| \beta - \sum_{k=1}^n b_k |\theta_{k-1}| \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k |\theta_{k-1}| \right| = |\beta_n| \alpha_0 \dots \alpha_{n-1},$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{n} \log \left| \beta - \sum_{k=1}^n b_k |\theta_{k-1}| \right| = \frac{1}{n} \log \alpha_0 \dots \alpha_{n-1} + \frac{1}{n} \log |\beta_n|.$$

Luego, basta con mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\beta_n| = 0,$$

para casi todo (α, β) . Ahora como

$$\mu(|\beta_n| < \eta) = \mu(|\beta| < \eta) = \frac{\eta \log 2 + \log(1 + \eta)}{2 \log 2},$$

para cualquier $\eta, 0 < \eta < 1$, tendremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(|\beta_n| < e^{-n\varepsilon}) < +\infty,$$

para cualquier $\varepsilon > 0$. Luego, usando el lema de Borel-Cantelli se tiene que

$$\#\left\{n : -\frac{1}{n} \log |\beta_n| > \varepsilon\right\} < +\infty,$$

para casi todo (α, β) . Por lo tanto, se tiene lo pedido. \square

Corolario 6.0.2. *Para casi todo (α, β)*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{n : |\theta_{n-1}|^{-1} |\beta - \sum_{i=1}^n b_i |\theta_{i-1}| < z\}}{N} = \frac{1}{2 \log 2} [z \log 2 + \log(1+z)],$$

para cualquier z , $0 \leq z \leq 1$.

Demostración. Para ello basta notar que

$$|\theta_{n-1}|^{-1} \left| \beta - \sum_{i=1}^n b_i |\theta_{i-1}| \right| = |\beta_n|,$$

por lo que tendremos que la pregunta se traduce a $\mu(|\beta_n| < z)$ y por la proposición anterior tendremos que

$$\mu(\beta_n < z) = \frac{1}{2 \log 2} [z \log 2 + \log(1+z)].$$

□

Notemos que la proposición 6.0.4 hace referencia a la velocidad exponencial de aproximación de un cierto β por números de la forma $\sum_{k=1}^n b_k |\theta_{k-1}|$. En efecto, tendremos que para N suficientemente grande

$$\left| \beta - \sum_{k=1}^N b_k |\theta_{k-1}| \right| \asymp \exp\left(-\frac{\pi^2 n}{12 \log 2}\right),$$

por lo que es válido preguntarse por otras posibles velocidades de aproximación, ya que dicha proposición es válida para casi todo punto en $(0, 1)^2$. Esta última pregunta tiene una respuesta afirmativa y es lo que mostraremos a continuación.

Sabemos que $T : (0, 1]^2 \rightarrow (0, 1]^2$, donde $(0, 1]^2$ es claramente no compacto, por ello consideraremos la restricción de T al conjunto $[\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 1]$ para algún $\varepsilon > 0$. Notamos que este conjunto es claramente compacto pero no necesariamente T mapea $[\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 1]$ si no que claramente sale de él, por ello llamaremos K_ε al subconjunto de $[\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 1]$ que es compacto e invariante por T .

Lema 6.0.2. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente cercano a 0, el conjunto K_ε es no vacío y no numerable.*

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ mayor o igual que 3 y consideremos entonces $\varepsilon = \frac{1}{N+1}$. Notemos que en dicho caso, los términos invariantes para T en la primera coordenada son las fracciones continuas que pueden ser escritas en el alfabeto $\{1, \dots, N\}$ por lo tanto es claro que todo elemento $(\alpha, \beta) \in [\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 1]$ de la forma $\alpha = [a_1 a_2 a_3 \dots]$ con $a_i \in \{N, N-1\}$ y $\beta = [1111111 \dots]$ están claramente en K_ε . Más aún, los números como fracción continua que pueden ser escritos con dos símbolos son no numerables, es decir, K_ε es no numerable. □

Luego el lema anterior nos dice que para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un subconjunto de $[\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 1]$ compacto e invariante, que es lo suficientemente grande y además $K_{\varepsilon_1} \subset K_{\varepsilon_2}$ si $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

Ahora en virtud del teorema 1.2.4, tendremos que la función presión $P(t)$ puede ser aproximado por $P(t)|_{K_\varepsilon}$ puntualmente y se tendrá también que para cada $t \in \mathbb{R}$ existe μ_{t, K_ε} medida Gibbs de equilibrio para el correspondiente potencial.

Luego si volvemos a la demostración de la proposición 6.0.4, podemos notar que

$$\frac{1}{n} \log \left| \beta - \sum_{k=1}^n b_k |\theta_{k-1}| \right| = \frac{1}{n} \log \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} + \frac{1}{n} \log \beta_n.$$

Pero si consideramos cualquier $(\alpha, \beta) \in K_\varepsilon$, entonces $\beta_n > \varepsilon$ y por lo tanto,

$$\frac{1}{n} \log \varepsilon < \frac{1}{n} \log \beta_n \leq 0,$$

por lo que haciendo tender $n \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \beta_n = 0,$$

para todo $(\alpha, \beta) \in K_\varepsilon$. Por lo tanto, para cada $(\alpha, \beta) \in K_\varepsilon$ se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \beta - \sum_{k=1}^n b_k |\theta_{k-1}| \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}.$$

El siguiente lema, que gracias a trabajos de M. Kesseböhmer y B. Stratmann ([12]), M. Pollicott y H. Weiss ([21]), podemos obtener resultados sobre el rango de la derivada de la función presión.

Lema 6.0.3. *El recorrido de la función $-P'(t)$ es $(3 \log((\sqrt{5} + 1)/2), +\infty)$ para $t > 2/3$.*

Demostración. Sabemos que $\alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} = |\theta_{n-1}| = |q_n \alpha - p_n|$, por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log q_n,$$

y además como

$$\frac{1}{2q_{n+1}^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2},$$

entonces obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log q_n$$

y no sólo eso, si no que combinando lo anterior con el lema 4.1.3, obtendremos que para cada $t > 2/3$, μ_t casi todo punto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\det DT^{-n}(\alpha, \beta)| = \frac{1}{3} \int \log |\det DT^{-1}(\alpha, \beta)| d\mu_t,$$

donde μ_t es medida de equilibrio ergódica para el potencial $t \log |\det DT^{-1}|$. Observemos que por lo hecho antes, tenemos que

$$\frac{1}{3} \int \log |\det DT^{-1}(\alpha, \beta)| d\mu_t = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log q_n,$$

es decir,

$$- \int \log |\det DT^{-1}(\alpha, \beta)| d\mu_t = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log q_n.$$

Pero para la expresión del lado derecho, se conoce que el rango es $(\log((\sqrt{5} + 1)/2), +\infty)$, por lo que se concluye que necesariamente que el rango de $-P'(t)$ es $(3 \log((\sqrt{5} + 1)/2), +\infty)$. \square

Observación 6.0.1. Notemos que si μ es una medida de equilibrio para la transformación de Gauss, entonces se cumple que μ_G casi todo punto

$$\int \log |G'| d\mu = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} q_n,$$

de lo que se desprende inmediatamente que

$$\frac{1}{2} \int \log |G'| d\mu = -\frac{1}{3} \int \log |\det DT^{-1}(\alpha, \beta)| d\mu_t.$$

Luego lo mismo puede ser aplicado para la restricción que hicimos de la función presión, obteniendo en ese caso que μ_{t, K_ε} casi todo punto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} = \frac{1}{3} \int \log |\det DT^{-1}(\alpha, \beta)| d\mu_{t, K_\varepsilon}.$$

Luego tendremos que para estas medidas μ_{t, K_ε} con ε fijo, obtenemos todo un rango de velocidades para esta aproximación, rango que aumenta a medida que ε se hace más pequeño.

Pero la pregunta que le sigue es, que tan grande es este conjunto? Si intentamos dar un respuesta apresurada usando la medida de Lebesgue tendremos que el conjunto tiene medida 0, pero con un poco más de cuidado y utilizando las medidas μ_{t, K_ε} podemos obtener el siguiente teorema

Teorema 6.0.5. Para cada $t \in \mathbb{R}$ y $0 < \varepsilon < 1$, definimos el conjunto $J(t, K_\varepsilon)$ por

$$J(t, K_\varepsilon) = \left\{ (\alpha, \beta) \in (0, 1]^2 : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\{N_n \alpha\} - \beta| = \frac{1}{3} \int \log |\det DT^{-1}(\alpha, \beta)| d\mu_{t, K_\varepsilon} \right\},$$

entonces se cumple que $\dim_H J(t, K_\varepsilon) > 0$.

Demostración. Notemos que las medidas μ_{t, K_ε} son medidas de Gibbs, las cuales poseen entropía positiva, es decir, $h(\mu_{t, K_\varepsilon}) > 0$ y en virtud del resultado del lema 3.3.3, se tiene de inmediato que $\dim_H J(t, K_\varepsilon) > 0$. \square

Observamos que el resultado anterior utiliza muy fuertemente que estamos utilizando un restricción de la función presión al compacto invariante K_ε , y sabemos que el rango de $P'(t)|_{K_\varepsilon}$ es finito, luego para poder extender este resultado para todos los valores del intervalo $(-\infty, -\log((\sqrt{5}+1)/2))$ necesitamos probar que el rango de la derivada de la presión restringida al compacto invariante K_ε contiene al rango de la derivada de la presión, o dicho de otra forma, necesitamos que para cada $\bar{t} > 2/3$ exista N de modo tal que para todo $n \geq N$ tengamos un $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $t_n \rightarrow \bar{t}$ y $P'(\bar{t}) = P'(t_n)|_{K_{1/n}}$, que es en esencia la siguiente proposición

Proposición 6.0.3. Para todo $t > 2/3$ existe un $\varepsilon > 0$ y de modo que, para todo $\varepsilon^* < \varepsilon$ se tiene que $P'(t) \in \text{Rango}(P'(t)|_{K_{\varepsilon^*}})$.

Demostración. Notemos que en el cuadrado compacto invariante K_ε para ε lo suficientemente pequeño, esta contenido el punto fijo $\bar{1} = ([\bar{1}], [\bar{1}])$ y por lo tanto, como la pendiente de la asíntota a la presión cuando $t \rightarrow \infty$ se puede calcular por (ver ([11]))

$$\text{máx} \left\{ \int \log |\det DT^{-1}| d\mu, \mu\text{-invariante} \right\},$$

entonces si consideramos la medida $\delta_{\bar{1}}$ (la medida atómica soportada en un punto fijo, por ende invariante) entonces tendremos que

$$\text{máx} \left\{ \int \log |\det DT^{-1}| d\mu, \mu\text{-invariante} \right\} \geq \int \log |\det DT^{-1}| d\delta_{\bar{1}}.$$

Luego como $|\det DT^{-1}(\bar{1})| = \frac{1}{(\gamma+1)^3}$, con $\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ entonces

$$\int \log |\det DT^{-1}| d\bar{1} = -3 \log \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right),$$

por lo que necesariamente la pendiente de la asíntota es al menos lo anterior y además, como la presión se aproxima por los compactos invariantes K_ε , entonces $P(0)|_{K_\varepsilon} \rightarrow P(0)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y $P(0) = +\infty$ entonces necesariamente la aproximación tiene a tener una asíntota vertical. Luego como una asíntota vertical es una recta vertical, es decir, que posee "pendiente infinita", entonces el valor $P'(0)|_{K_\varepsilon}$ tiende a ser igual a la asíntota y por ello necesariamente se tiene que $P'(0)|_{K_\varepsilon} \rightarrow -\infty$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Luego se tiene el resultado deseado. \square

Y para finalizar la sección, definamos los conjuntos $J(\gamma)$ por

$$J(\gamma) = \left\{ (\alpha, \beta) \in (0, 1]^2 : \lim_{n \rightarrow \infty} |\{N_n \alpha\} - \beta| = \gamma \right\}.$$

Con esto, presentamos el teorema principal de este trabajo

Teorema 6.0.6. *Para cada $\gamma \in (-\infty, -\log((\sqrt{5}+1)/2))$, se cumple que $\dim_H(J(\gamma)) > 0$.*

Demostración. Dado $\gamma \in (-\infty, -\log((\sqrt{5}+1)/2))$, sabemos por la afirmación 6.0.3 que existe N de modo tal que $\gamma \in \text{Rango}(P'(t)|_{K_{1/n}})$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto, para cada $n \geq N$ existe $t_n \in \mathbb{R}$ de modo tal que $\gamma = P'(t_n)|_{K_{1/n}}$. Luego si consideramos los conjunto $J(t_n, K_{1/n})$ definidos por

$$J(t_n, K_{1/n}) = \left\{ (\alpha, \beta) \in K_{1/n} : \lim_{n \rightarrow \infty} |\{N_n \alpha\} - \beta| = \gamma \right\},$$

entonces como $K_{1/n} \subset (0, 1]^2$ se puede deducir que $J(t_n, K_{1/n}) \subset J(\gamma)$ para cada $n \geq N$ y por tanto, necesariamente se tendrá que $\dim_H(J(t_n, K_{1/n})) \leq \dim_H(J(\gamma))$, y por el teorema 6.0.5 sabemos que $\dim_H(J(t_n, K_{1/n})) > 0$, concluyendo así que $\dim_H(J(\gamma)) > 0$. \square

Bibliografía

- [1] V. Berthé, *Autour du Système de Numération d'Ostrowski*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **8**, 209 - 239 (2001).
- [2] R. Bowen, *Hausdorff dimension of quasi-circles.*, Publications Mathematiques (I.H.E.S. Paris) **50**, 11-26 (1979)
- [3] A. Boyarsky, P. Góra, *Laws of Chaos: Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension*, Probability and its applications, Birkhäuser Boston (1997).
- [4] J. Buzzi, O. Sarig, *Uniqueness of equilibrium measures for countable Markov shifts and multidimensional piecewise expanding maps*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** (2003) 1383 - 1400.
- [5] K. Falconer, *Fractal Geometry*, Mathematical Foundations and Applications, John Wiley and Sons, 1990.
- [6] B.M. Gurevič, *Topological entropy for denumerable Markov chains*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **10** (1969) 911 - 915.
- [7] H. Hu, *Dimensions of Invariant Sets of Expanding Maps*, Commun. Math. Phys. **176** 307 - 300 (1996).
- [8] W. Huang, P. Zhang, *Pointwise dimension, entropy and Lyapunov exponents for C^1 maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), **12**, 6355-6370.
- [9] Sh. Ito, H. Nakada, *Approximations of real numbers by sequence $\{n\alpha\}$ and their metrical theory*, Acta Math. Hungar. **52** (1988) 91 - 100.
- [10] Sh. Ito, *Some skew product transformations associated with continued fractions and their invariant measures*, Tokyo J. Math. **9** (1986) 115 - 133.
- [11] O. Jenkinson, R. Mauldin, M. Urbański, *Zero temperature limits of Gibbs-equilibrium states for countable alphabet subshifts of finite type*, Journal of Statistical Physics, **119** (2005), 765-776.
- [12] M. Kesseböhmer, B. Stratmann, *A multifractal analysis for Stern-Brocot intervals, continued fractions and Diophantine growth rates* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) **605** (2007) 133-163.
- [13] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, Dover publications, Mineola, New York (1997).
- [14] F. Ledrappier, M. Misiurewicz, *Dimension of Invariant Measure of Maps with Exponent Zero*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **5**, 595 - 610 (1985).
- [15] A. Manning, *The Dimension of the Maximal Measure for a Polynomial Map*, Ann. Math. **119** 425 - 430 (1984).

- [16] R. Mañe, *The Hausdorff Dimension of invariant Probabilities of Rational Maps*, Dynamical Systems, Valparaiso, 86 - 117 (1986), Lectures Notes in Math. **1331** Springer, Berlín (1988)
- [17] R. Mauldin, M. Urbański, *Dimensions and measures in infinite iterated function systems*, Proc. London Math. Soc. (3) **73** (1996) 105 - 154.
- [18] R. Mauldin, M. Urbański, *Gibbs states on the symbolic space over an infinite alphabet*, Israel J. Math. **125** (2001) 93 - 130.
- [19] D. Mayer, *On the thermodynamics formalism for the Gauss map*, Commun. Math. Phys. **130**, 3611 - 333 (1990).
- [20] A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der diophantischen Approximationen*, Hamb. Abh. **1**, 77-98 (1921).
- [21] M. Pollicott, H. Weiss, *Multifractal analysis of Lyapunov exponent for continued fraction and Manneville-Pomeau transformations and applications to Diophantine approximation*. Comm. Math. Phys. **207** (1999), no. 1, 145-171.
- [22] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **8**, 477 - 493 (1957).
- [23] D. Ruelle, *Statistical mechanics on a compact set with Z^{ν} action satisfying expansiveness and specification*, Trans. Amer. Math. Soc. **185**, 237 - 251 (1973).
- [24] O. Sarig, *Thermodynamic formalism for countable Markov shifts*, Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1999) 1565 - 1593.
- [25] O. Sarig, *Phase transitions for countable Markov shifts*, Comm. Math. Phys. **217** (2001) 555 - 577.
- [26] O. Sarig, *Existence of Gibbs measures for countable Markov shifts*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003) 1751 - 1758.
- [27] N. Sidorov, *Almost every number has a continuum of β -expansions*, Amer. Math. Monthly **110**, **9** 838 - 842 (2003)
- [28] P. Walters, *An introduction to Ergodic Theory*, Graduate Text in Mathematics 79, Springer, 1981.
- [29] P. Walters, *A variational principle for the pressure of continuous transformations*, Amer. J. Math. **17**, 937 - 971 (1976).