PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS

DOS FAMILIAS DE OPERADORES AUTOADJUNTOS INDESCOMPONIBLES EN UN ESPACIO ORTOMODULAR

por

Carla Barrios Rodríguez.

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesor Guía: Dra. María Herminia Ochsenius Alarcón.

Comisión Informante: Dr. Claudio Fernández Jaña.
Dr. Hans Keller Zullig.
Dra. María Herminia Ochsenius Alarcón.

Agosto, 2004
Santiago, Chile

Índice

1. Introducción

Un espacio vectorial E con una forma hermitiana Φ es un **espacio ortomodular** si y sólo si para cada subespacio U de E se tiene

$$U^{\perp\perp} = U \Longrightarrow E = U \oplus U^{\perp}.$$

Antes de 1979, los ejemplos conocidos de tales espacios eran los espacios de Hilbert con cuerpo base $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ó $\mathbb{H}$, pero a partir de esa fecha se han caracterizado clases de espacios ortomodulares, de dimensión infinita, diferentes de los ejemplos clásicos ([1],[2]). Todos ellos son espacios vectoriales sobre un cuerpo con una valuación de Krull de rango infinito que es completo con respecto a la topología de la valuación y cuya forma hermitiana induce una norma no arquimediana.
El espacio ortomodular E que consideraremos en todo lo que sigue es el primer ejemplo contruido, fue presentado en [1] (con un cuerpo ordenado como cuerpo base) y generalizado (llevándolo al contexto de cuerpos valuados) en [2]. Resumimos, a continuación, su construcción.
El grupo de valores Γ de la valuación de Krull del cuerpo base K es

$$\Gamma := \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} \Gamma_j,$$

donde cada Γ_j es una copia isomorfa del grupo aditivo de los enteros. Γ está ordenado antilexicográficamente, es decir, si $0 \neq (g_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Gamma$ y $m := \text{máx}\{j \in \mathbb{N} : g_j \neq 0\}$ entonces

$$(g_j)_{j\in\mathbb{N}} > 0 \Longleftrightarrow g_m > 0 \text{ en } \Gamma_m.$$

Sea $K_0 := \mathbb{R}(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, el cuerpo de la funciones racionales en las variables $X_1, X_2, \ldots$ con coeficientes reales, dotado de la valuación no arquimediana $\nu_0 : K_0 \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ que es trivial sobre $\mathbb{R}$ y que asigna a cada X_i el elemento $(0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots) \in \Gamma$, con el -1 en el lugar i-ésimo.
Nuestro cuerpo base K es la completación de K_0 con respecto a esta valuación (ν_0 se extiende de forma única a una valuación ν en K con el mismo grupo de valores).
Y el espacio es

$$E := \left\{ (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in K^{\mathbb{N}_0} : \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i^2 X_i \text{ converge en la topología de la valuación} \right\}$$

(donde $X_0 := 1$) con las operaciones definidas por componentes.
Este espacio vectorial sobre K, junto con la forma anisótropa $\Phi : E \times E \longrightarrow K$ definida por

$$\Phi\left((\xi_i)_{i\in\mathbb{N}_0}, (\eta_i)_{i\in\mathbb{N}_0}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \eta_i X_i,$$

es un espacio ortomodular.
Entonces, siguiendo la notación de [3], tenemos que la aplicación $\|\cdot\| : E \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$, definida por $\|x\| = \nu(\Phi(x,x))$, satisface la desigualdad triangular fuerte y da lugar a una topología de E, respecto de la cual el espacio es completo.

Además, en [1] se prueba que un subespacio U de E es cerrado en la topología de $\|\cdot\|$ si y sólo si es ortogonalmente cerrado.

Trabajaremos, también, con elementos de $\mathcal{B}(E)$, el álgebra de los operadores lineales $B : E \longrightarrow E$ que son acotados, es decir, aquéllos para los que existe un $\gamma \in \Gamma$ tal que $\| B(x) \| - \| x \| \geq \gamma$ para todo $x \in E, x \neq 0$.

En esta tesis, presentamos dos familias infinitas de operadores en $\mathcal{B}(E)$ que son autoadjuntos, que no tienen subespacios cerrados invariantes a excepción de los triviales y cuyos espectros contienen exactamente un punto que, por lo tanto, no es un valor propio. Además, estudiamos la relación de las subálgebras de $\mathcal{B}(E)$ generadas por cada uno de operadores con el álgebra $\mathcal{A}$ ampliamente estudiada en [3].

2. Preliminares

En esta sección resumiremos resultados de [1], [3] y [4] que utilizaremos en la construcción de nuestros operadores. Usaremos la notación y las definiciones de la introducción.

2.1. E y sus espacios residuales.

Trabajaremos siempre expresando los vectores de E en la base canónica del espacio, que es el conjunto $\{e_i \in E : i \in \mathbb{N}_0\}$, donde para cada $i \in \mathbb{N}_0$, $e_i := (0, 0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ (i+1)}}{1}, 0, \ldots)$.

Se tiene que $\Phi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$ y que $\Phi(e_i, e_i) = X_i$. Además, cada $x \in E$ se puede escribir de forma única como

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i e_i$$

(con la convergencia de la serie en la topología de $\|\cdot\|$).
También haremos extenso uso de la reducción de nuestros operadores a los espacios residuales de E, por lo que revisaremos su definición.
Primero, tenemos que los subgrupos convexos de nuestro grupo de valores Γ son exactamente los subgrupos $\Delta_n = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_n \oplus \{0\} \oplus \{0\} \oplus \cdots$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.
A cada uno de los Δ_n le corresponde un anillo de la valuación:

$$R_n := \{\xi \in K : \nu(\xi) \geq \delta \text{ para algún } \delta \in \Delta_n\}$$

cuyo único ideal maximal es $J_n := \{\xi \in K : \nu(\xi) > \delta \text{ para todo } \delta \in \Delta_n\}$.
Entonces $\widehat{K}_n := R_n / J_n$ (con $\Theta_n : R_n \longrightarrow \widehat{K}_n$, la proyección canónica) es el cuerpo residual y se prueba que es isomorfo a $\mathbb{R}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
De la desigualdad triangular que cumple $\|\cdot\|$ en E, se tiene que

$$M_n := \{x \in E : \|x\| \geq \delta \text{ para algún } \delta \in \Delta_n\}$$

es un módulo sobre R_n y

$$S_n := \{x \in E : \|x\| > \delta \text{ para todo } \delta \in \Delta_n\}$$

es un sub-módulo.
Entonces, $\widehat{E}_n := M_n / S_n$ (con $\pi_n : M_n \longrightarrow \widehat{E}_n$, la proyección canónica) es un espacio vectorial sobre el cuerpo residual $\widehat{K}_n$ definiendo la ponderación como

$$\Theta_n(\xi)\pi_n(x) := \pi_n(\xi x),$$

cuando $x \in M_n$ y $\xi \in R_n$.
Por último, Φ induce una forma $\widehat{\Phi}_n$ en $\widehat{E}_n$ que está definida por $\widehat{\Phi}_n(\pi_n(x), \pi_n(y)) = \Theta_n(\Phi(x, y))$.

$(\widehat{E}_n, \widehat{\Phi}_n)$ es el **espacio residual** de E correspondiente al subgrupo convexo Δ_n. Y se tiene:

Teorema 2.1 ([3]) *El espacio residual* $\widehat{E}_n$ *tiene dimensión* $n+1$. *Los vectores* $\widehat{e}_i := \pi_n(e_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *forman una base ortogonal de* $(\widehat{E}_n, \widehat{\Phi}_n)$ *y* $\widehat{\Phi}_n \sim \mathrm{diag}(1, X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Además, un subespacio U de E se proyecta a un subespacio de $\widehat{E}_n$ que está definido por

$$\pi_n(U) = \{\pi_n(x) : \; x \in U \cap M_n\}.$$

Lema 2.2 ([3]) *Si* U *y* V *son subespacios ortogonales de* E, $U \perp V$, *entonces* $\pi_n(U) \perp \pi_n(V)$ *y* $\pi_n(U \oplus V) = \pi_n(U) \oplus \pi_n(V)$.

2.2. Tipos en E.

Hemos ya mencionado que utilizaremos los operadores inducidos sobre los espacios residuales para estudiar operadores lineales definidos sobre E. Para realizar esto, se vuelve fundamental el concepto de tipos. Mostraremos, a continuación, cómo se definen los tipos en nuestro espacio ([3]) y revisaremos algunos resultados que utilizan este concepto.
Asignamos un tipo $T(\gamma)$ a cada $\gamma = (g_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Gamma$ de la siguiente forma:

$$T(\gamma) := \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \in 2\Gamma \\ \text{máx}\{j \in \mathbb{N} : g_j \text{ es impar}\} & \text{si } \gamma \notin 2\Gamma \end{cases}$$

Definimos, luego, el tipo de $\xi \in K^*$ por

$$T(\xi) := T(\nu(\xi)).$$

Y, por último, asignamos a cada vector $x \in E$, $x \neq 0$, el tipo

$$T(x) := T(\Phi(x, x)).$$

Observemos que, para todo par de elementos $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $T(\gamma) = T(\gamma + 2\gamma')$. Entonces dado $\xi \in K^*$, $T(\alpha^2 \xi) = T(\xi)$ para todo $\alpha \in K^*$, pues $\nu(\alpha^2 \xi) = 2\nu(\alpha) + \nu(\xi)$. Por tanto, para todo $\lambda \in K^*$ y todo $0 \neq x \in E$, tenemos que $T(\lambda x) = T(x)$, es decir, cada recta G de E tiene un tipo asociado, que anotamos $T(G)$.

Los siguientes resultados reflejan la relación entre ciertas propiedades geométricas de E y el concepto de tipos.

Teorema 2.3 ([1])
i) *Sean* $x, y \in E$, *vectores no nulos. Si* $x \perp y$, *entonces* $T(x) \neq T(y)$.
ii) *Sea* U *un subespacio cerrado de* E. *Entonces en dos familias ortogonales maximales de* U *ocurren los mismos tipos.*

Lema 2.4 ([3]) *Sea* G *un subespacio de* E *de dimensión uno. Entonces* $\pi_n(G) = \{0\}$ *si y sólo si* $T(G) > n$.

2.3. $\mathcal{B}$(E) y la subálgebra $\mathcal{A}$.

Recordemos que $\mathcal{B}(E)$ es el álgebra de los operadores lineales acotados sobre E, es decir, los operadores $B : E \longrightarrow E$ para los cuales el conjunto $\{\|B(x)\| - \|x\| : x \in E, x \neq 0\}$ es acotado inferiormente en Γ.
Claramente, cada operador lineal está determinado por las imágenes de los vectores de la base canónica, por lo que puede ser representado por una matriz infinita. Usaremos esta representación para decidir fácilmente si un operador lineal es autoadjunto.

Lema 2.5 *Sea $B \in \mathcal{B}(E)$ tal que $B(e_j) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{ij}\, e_i$ para cada $j \in \mathbb{N}_0$. Entonces B es autoadjunto si y sólo si $X_i\, b_{ij} = X_j\, b_{ji}$ para todo par $i, j \in \mathbb{N}_0$.*

Demostración: B es autoadjunto si y sólo si para todo par de vectores $x, y \in E$ se tiene

$$\Phi(x, B(y)) = \Phi(B(x), y). \tag{1}$$

Pero lo último es equivalente a pedir que sólo los vectores de la base canónica cumplan (1). Usando que la base canónica es ortogonal, tenemos

$$\Phi(e_i, B(e_j)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{kj}\, \Phi(e_i, e_k) = b_{ij}\, X_i$$

y

$$\Phi(B(e_i), e_j) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{ki}\, \Phi(e_k, e_j) = b_{ji}\, X_j.$$

De donde se obtiene la afirmación. □

Así, un operador M es autoadjunto si y sólo si todo par de elementos de su matriz que son simétricos con respecto a la diagonal principal, digamos m_{ij} y m_{ji}, cumplen la relación

$$X_i\, m_{ij} = X_j\, m_{ji}, \tag{2}$$

para $i, j \geq 0$.
Ahora, todos los operadores que estudiaremos aquí, aparte de ser autoadjuntos, comparten la propiedad definida a continuación.

Definición 2.6 *Diremos que un operador lineal $B : E \longrightarrow E$ es **indescomponible** si los únicos subespacios de E topológicamente cerrados que son invariantes bajo B son $\{0\}$ y E.*

Haremos uso, también, de los siguientes resultados:

Lema 2.7 ([3]) *Una función $B_0 : \{e_i : i \in \mathbb{N}_0\} \longrightarrow E$ se extiende a un operador lineal acotado $B : E \longrightarrow E$ si y sólo si el conjunto $R_0 := \{\|B_0(e_i)\| - \|e_i\| : i \in \mathbb{N}_0\} \subset \Gamma$ está acotado inferiormente.*

Teorema 2.8 ([3]) *Sea $B : E \longrightarrow E$ un operador lineal acotado inyectivo en E. Si el conjunto*

$$\{\|B(e_i)\| - \|e_i\| : i \in \mathbb{N}_0\}$$

tiene una cota superior en Γ, entonces B es sobre E y el inverso algebraico $B^{-1} : E \longrightarrow E$ es acotado, esto es, B^{-1} pertenece a $\mathcal{B}(E)$.

En la demostración del Lema 2.7 (ver [3]) se concluye, también, que

$$\gamma_0 \in \Gamma \text{ es cota inferior de } R_0 \Longrightarrow \gamma_0 \text{ es cota inferior de } \{\|B(x)\| - \|x\| : x \in E, x \neq 0\}$$

Ahora, si $B \in \mathcal{B}(E)$ tiene a $0 \in \Gamma$ como cota de $\{\|B(x)\| - \|x\| : x \in E, x \neq 0\}$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B(M_n) \subseteq M_n$, $B(S_n) \subseteq S_n$ y B induce un operador lineal $\widehat{B}_n : \widehat{E}_n \longrightarrow \widehat{E}_n$ definido por $\widehat{B}_n(\pi_n(x)) := \pi_n(B(x))$ para $x \in M_n$. Estos serán los **operadores inducidos** mediante los cuales estudiaremos nuestros operadores sobre E.

La idea anterior es usada en el estudio del operador $A : E \longrightarrow E$ definido sobre la base canónica por

$$A(e_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{X_i} e_i + \left(1 - \frac{1}{X_k}\right) e_k.$$

La matriz de A en esta base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \frac{1}{X_1} & 1 & \frac{1}{X_1} & \frac{1}{X_1} & \frac{1}{X_1} & \cdots \\ \frac{1}{X_2} & \frac{1}{X_2} & 1 & \frac{1}{X_2} & \frac{1}{X_2} & \cdots \\ \frac{1}{X_3} & \frac{1}{X_3} & \frac{1}{X_3} & 1 & \frac{1}{X_3} & \cdots \\ \frac{1}{X_4} & \frac{1}{X_4} & \frac{1}{X_4} & \frac{1}{X_4} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Luego, A es autoadjunto, pues los coeficientes de la matriz cumplen con la condición (2).
Además, se tiene que $\|A(e_k)\| - \|e_k\| = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Luego, $\|A(x)\| - \|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ y tenemos que A induce operadores $\widehat{A}_n$ en los espacios residuales de E por el procedimiento antes descrito.
Los siguientes resultados, probados en [3], muestran cómo propiedades de los operadores definidos en los espacios $\widehat{E}_n$ se traducen en propiedades de un operador definido en E.

Lema 2.9 ([3]) *Si $n \geq 1$, entonces la ecuación*

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{1 - \rho X_i} = 1$$

en la indeterminada ρ no tiene solución en $\widehat{K}_n$.

Lema 2.10 ([3]) *Si $n \geq 1$, entonces el operador $\widehat{A}_n : \widehat{E}_n \longrightarrow \widehat{E}_n$ no tiene vectores propios.*

Con todo lo anterior, se prueba

Teorema 2.11 ([3]) *El operador A es indescomponible.*

Demostración: Procederemos por contradicción.
Supongamos que $U \neq \{0\}$ es un subespacio cerrado propio de E que es invariante bajo la acción de A. Como E es ortomodular y U es cerrado, $E = U \oplus U^{\perp}$. Además, como A es autoadjunto, $U^{\perp}$ también es invariante.
Mirando, ahora, los tipos de los vectores de U y de $U^{\perp}$, tenemos que ningún tipo puede ocurrir en U y $U^{\perp}$ al mismo tiempo por Teorema 2.3(i). Entonces, por Teorema 2.3(ii), o bien U o bien $U^{\perp}$ posee un vector de tipo 0 y, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que es U. Luego, existe un entero $n \geq 1$ tal que U contiene vectores de tipo $0, 1, \ldots, n-1$ y $U^{\perp}$ contiene un vector de tipo n. Examinamos el operador reducido $\widehat{A}_n$ en el espacio residual

$$\widehat{E}_n = \pi_n(E) = \pi_n(U) \oplus^{\perp} \pi_n(U^{\perp})$$

y tenemos que $\pi_n(U)$ y $\pi_n(U^{\perp})$ son invariantes bajo $\widehat{A}_n$.
Sea G el subespacio de $U^{\perp}$ (de dimensión uno) generado por el vector de tipo n. Entonces $U^{\perp} = G \oplus^{\perp} (U^{\perp} \cap G^{\perp})$ y $\pi_n(U^{\perp}) = \pi_n(G) \oplus^{\perp} \pi_n(U^{\perp} \cap G^{\perp})$.
Por la elección de n y el Teorema 2.3.(i), $U^{\perp} \cap G^{\perp}$ sólo contiene vectores de tipos mayores que n, luego, por Lema 2.4, $\pi_n(U^{\perp} \cap G^{\perp}) = \{0\}$. Así, $\pi_n(U^{\perp}) = \pi_n(G)$ es un subespacio de dimensión uno de $\widehat{E}_n$ que es invariante bajo $\widehat{A}_n$, por lo tanto, $\widehat{A}_n$ tiene un vector propio. Pero esto contradice el Lema 2.10. □

Como vemos, la demostración del Teorema 2.11 no usa la definición específica de A, luego puede ser usada para cualquier operador acotado autoadjunto cuyos operadores inducidos no tienen vectores propios.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos

Corolario 2.12 ([3]) *El operador A no tiene valores propios.*

Sin embargo, el espectro de A definido, como siempre, por

$$\text{spec}(A) := \{\lambda \in K : (A - \lambda I) \text{ no tiene inversa en } \mathcal{B}(E)\}$$

no es vacío. De hecho,

Teorema 2.13 ([3]) *spec*$(A) = \{1\}$.

Por último, presentamos las características principales de la subálgebra $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}(E)$ formada por todos los operadores acotados que conmutan con A, es decir,

$$\mathcal{A} = \{C \in \mathcal{B}(E) : AC = CA\}$$

Primero, tenemos que $\mathcal{A}$ es un álgebra conmutativa (*Corolario 5.11* de [3]), cuyos elementos son todos autoadjuntos (*Corolario 5.5* de [3]).
Además, sólo por ser A indescomponible, se tiene

Lema 2.14 ([3]) *Si los operadores $B, C \in \mathcal{A}$ coinciden en algún vector no nulo, entonces $B = C$.*

y, por tanto,

Corolario 2.15 ([3]) *Todo operador no trivial de $\mathcal{A}$ es inyectivo.*

Así, todo elemento de $\mathcal{A}$ puede ser determinado completamente conociendo sólo la imagen de un vector no nulo. De hecho, en [4] se establecen las siguientes fórmulas:

Teorema 2.16 ([4]) *Sea $B \in \mathcal{A}$ y $B(e_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{X_k}\, e_k$. Si, para $m \geq 1$, $B(e_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{km}\, e_k$, entonces*

(i) si $k \neq m$

$$\beta_{km} = \frac{X_m}{X_m - X_k}\left((X_m - 1)\,\frac{\lambda_m}{X_m} - (X_k - 1)\,\frac{\lambda_k}{X_k}\right).$$

(ii) si $k = m$

$$\beta_{mm} = \lambda_0 + \sum_{j \neq 0, m} \frac{X_m - 1}{X_m - X_j}\,(\lambda_j - \lambda_m).$$

3. Construcción de operadores autoadjuntos indescomponibles

3.1. Operadores de tipo $\mathbf{B_{Q,s}}$.

Sean $p, s \in \mathbb{N}$, con $1 < p < s$. Consideramos el conjunto $Q = \{q_1, \ldots, q_p\}$ donde $q_1 < \cdots < q_p$ y $q_j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ para $j = 1, \ldots, p$.

Escribimos $u := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{X_k}\, e_k$ y definimos la función $B^0_{Q,s} : \{e_i : i \in \mathbb{N}_0\} \longrightarrow E$ por:

$$B^0_{Q,s}(e_i) = A(e_i) = u + \left(1 - \frac{1}{X_i}\right) e_i, \qquad \text{para } i \neq q_1, \ldots, q_p, s.$$

$$B^0_{Q,s}(e_{q_j}) = A(e_{q_j}) - \frac{1}{X_s}\, e_s = u + \left(1 - \frac{1}{X_{q_j}}\right) e_{q_j} - \frac{1}{X_s}\, e_s, \qquad \text{para } j = 1, \ldots, p.$$

$$B^0_{Q,s}(e_s) = A(e_s) - \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{X_{q_j}}\, e_{q_j} = u + \left(1 - \frac{1}{X_s}\right) e_s - \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{X_{q_j}}\, e_{q_j}.$$

Es fácil comprobar que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $\| \, B^0_{Q,s}(e_i) \, \| - \|e_i\| = 0$.
Luego, por Lema 2.7, $B^0_{Q,s}$ se extiende linealmente a un elemento de $\mathcal{B}(E)$, $B_{Q,s} : E \longrightarrow E$ que cumple:

$$\|B_{Q,s}(x)\| - \|x\| \geq 0$$

para todo $x \in E$. Luego, $B_{Q,s}$ induce un operador en cada espacio residual.
La matriz de $B_{Q,s}$ con respecto a la base canónica es:

$$\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\frac{1}{X_{q_1}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{1}{X_{q_1}} & \cdots & \frac{1}{X_{q_1}} & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\frac{1}{X_{q_2}} & \cdots & \frac{1}{X_{q_2}} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{1}{X_{q_2}} & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\
\frac{1}{X_{q_p}} & \cdots & \frac{1}{X_{q_p}} & \cdots & \frac{1}{X_{q_p}} & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \\
\frac{1}{X_s} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}\right)
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow q_1 \\ \\ \leftarrow q_2 \\ \\ \leftarrow q_p \\ \\ \leftarrow s \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & & q_1 & & q_2 & & q_p & & s &
\end{array}
&
\end{array}$$

Es decir, es igual a la matriz de A en la misma base, excepto por los ceros indicados. Por tanto, se cumple, claramente, la condición (2) y $B_{Q,s}$ es autoadjunto.

El resultado principal de esta sección es el siguiente

Teorema 3.1 *$B_{Q,s}$ es un operador indescomponible.*

$B_{Q,s}$ es un operador acotado y autoadjunto, luego, si mostráramos que ninguno de los operadores inducidos por él en los espacios residuales tiene vectores propios, podríamos usar la demostración del Teorema 2.11 para $B_{Q,s}$ y habríamos probado nuestro resultado.
Sea $\widehat{B}_n := \widehat{(B_{Q,s})}_n$, el operador inducido por $B_{Q,s}$ en $\widehat{E}_n$. Para probar que, para todo $n \geq 1$, $\widehat{B}_n$ no tiene vectores propios debemos considerar por separado dos casos:
Primero, si $n < s$, $\widehat{B}_n$ es igual al operador inducido por el operador A en $\widehat{E}_n$ y, por tanto, $\widehat{B}_n = \widehat{A}_n$ no tiene vectores propios (ver Lema 2.10).

Ahora, el caso $n \geq s$ requiere un estudio más detallado. Notemos, primero, que como $\widehat{B}_n$ es un operador en un espacio vectorial de dimensión finita, el problema de determinar si tiene vectores propios equivale a decidir si un sistema finito de ecuaciones lineales tiene solución. Entonces, el objetivo de todo lo que sigue será probar que tal sistema no tiene solución.
Sea $\widehat{u} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{X_k}\, \widehat{e}_k$. Entonces, $\widehat{B}_n$ está definido por:

$$\begin{aligned}
\widehat{B}_n(\widehat{e}_i) &= \widehat{u} + \left(1 - \frac{1}{X_i}\right) \widehat{e}_i, && \text{para } 0 \leq i \leq n,\ i \neq q_1, \ldots, q_p, s. \\
\widehat{B}_n(\widehat{e}_{q_j}) &= \widehat{u} + \left(1 - \frac{1}{X_{q_j}}\right) \widehat{e}_{q_j} - \frac{1}{X_s}\, \widehat{e}_s, && \text{para } j = 1, \ldots, p. \\
\widehat{B}_n(\widehat{e}_s) &= \widehat{u} + \left(1 - \frac{1}{X_s}\right) \widehat{e}_s - \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{X_{q_j}}\, \widehat{e}_{q_j}.
\end{aligned}$$

Así, $\widehat{0} \neq \widehat{x} = \sum_{i=0}^{n} \xi_i \widehat{e}_i$ es vector propio de $\widehat{B}_n$ correspondiente al valor propio λ si y sólo si

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{X_i} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \xi_j \widehat{e}_i - \sum_{j=1}^{p} \frac{\xi_s}{X_{q_j}} \widehat{e}_{q_j} - \frac{1}{X_s} \sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j} \widehat{e}_s = (\lambda - 1) \sum_{i=0}^{n} \xi_i \widehat{e}_i.$$

Lo que equivale a que el sistema de $(n+1)$ ecuaciones en indeterminadas $\lambda, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$

$$\begin{cases}
[1 + (\lambda - 1) X_i] \xi_i = \sum_{k=0}^{n} \xi_k & \text{para } 0 \leq i \leq n,\ i \neq q_1, \ldots, q_p, s \\
[1 + (\lambda - 1) X_{q_j}] \xi_{q_j} + \xi_s = \sum_{k=0}^{n} \xi_k & \text{para } j = 1, \ldots, p \\
[1 + (\lambda - 1) X_s] \xi_s + \sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j} = \sum_{k=0}^{n} \xi_k &
\end{cases} \tag{3}$$

tenga solución en $\widehat{K}_n$.

Para simplificar la escritura, anotamos $\eta := \sum_{k=0}^{n} \xi_k$ y $\lambda_i := 1 + (\lambda - 1)X_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.
Por todo lo anterior, para probar el Teorema 3.1 basta obtener el siguiente resultado.

Lema 3.2 *El sistema en variables* $\lambda, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$

$$\begin{cases} (a_i) & \lambda_i \xi_i = \eta & \text{para } 0 \leq i \leq n, \ i \neq q_1, \ldots, q_p, s \\ (b_j) & \lambda_{q_j} \xi_{q_j} + \xi_s = \eta & \text{para } j = 1, \ldots, p \\ (c) & \lambda_s \xi_s + \sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j} = \eta & \end{cases} \tag{4}$$

no tiene solución en $\widehat{K}_n$.

Veamos, primero, varios resultados parciales que nos permitirán demostrar el Lema 3.2.

Lema 3.3 *Si* $\lambda_i = 0$ *para algún* i, *entonces* $\lambda_k = 1 - \dfrac{X_k}{X_i} \neq 0$ *para todo* $k \neq i$.

La demostración es directa de la definición de los λ_i.

Lema 3.4 *Si el sistema* (4) *tiene solución y* $\lambda = 1$, *entonces* $\eta = 0$

Demostración: Si $\lambda = 1$, entonces para todo $k = 0, \ldots, n$ se tiene que $\lambda_k = 1$ y el sistema (4) queda:

$$\begin{cases} (a_i) & \xi_i = \eta & \text{para } i \neq q_1, \ldots, q_p, s \\ (b_j) & \xi_{q_j} + \xi_s = \eta & \text{para } j = 1, \ldots, p \\ (c) & \xi_s + \sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j} = \eta & \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones $(b_1), \ldots, (b_p)$, tenemos que $\sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j} + p\, \xi_s = p\, \eta$ y despejando $\sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j}$ de (c), obtenemos que $\xi_s = \eta$. Por tanto, para $j = 1, \ldots, p$, $\xi_{q_j} = 0$ (por (b_j)).
Así, recordando que $\eta = \sum_{i=0}^{n} \xi_i$, tenemos

$$\eta = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq q_1, \ldots, q_p}}^{n} \xi_i \quad = (n + 1 - p)\, \eta.$$

Y como $n \geq s > p$, tenemos que $\eta = 0$. $\square$

Lema 3.5 *Si el sistema* (4) *tiene solución, entonces* $\eta \neq 0$.

Demostración: Supongamos que $\eta = 0$. Entonces (4) queda

$$\begin{cases} (a_i) & \lambda_i \xi_i = 0 & \text{para } i \neq q_1, \dots, q_p, s \\ (b_j) & \lambda_{q_j} \xi_{q_j} + \xi_s = 0 & \text{para } j = 1, \dots, p \\ (c) & \lambda_s \xi_s + \sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j} = 0 & \end{cases}$$

Si $\lambda_{i_0} = 0$ para algún $i_0 \neq q_1, \dots, q_p, s$, entonces tenemos, por Lema 3.3, que $\xi_i = 0$ para todo $i \neq i_0, q_1, \dots, q_p, s$ y, además, para $j = 1, \dots, p$, $\xi_{q_j} = -\dfrac{1}{\lambda_{q_j}}\, \xi_s$.

Así, por (c), $\lambda_s \xi_s - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{q_j}}\, \xi_s = 0$. Pero $\xi_s \neq 0$ (si no, $\widehat{x} = \widehat{0}$), luego $\lambda_s = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{q_j}}$, es decir,

$$X_{i_0} - X_s = X_{i_0}^2 \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{X_{i_0} - X_{q_j}}.$$

Pero esta igualdad equivale a la identidad polinomial

$$(X_{i_0} - X_s) \prod_{j=1}^{p} (X_{i_0} - X_{q_j}) - X_{i_0}^2 \sum_{j=1}^{p} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} (X_{i_0} - X_{q_k}) = 0$$

y si evaluamos el polinomio en $X_{i_0} = 0$, obtenemos que $X_s \displaystyle\prod_{j=1}^{p} X_{q_j} = 0$, lo que no es posible.

Ahora, si $\lambda_{q_{j_0}} = 0$ para algún $j_0 \in \{1, \dots, p\}$, tenemos, por (b_{j_0}), que $\xi_s = 0$. Luego, $\lambda_{q_j} \xi_{q_j} = 0$ para $j \neq j_0$ y, por Lema 3.3, esto implica que $\xi_{q_j} = 0$ para todo $j \neq j_0$.

Entonces, como $\xi_s = 0$, por (c), tenemos que $0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j} = \xi_{q_{j_0}}$. Además, $\xi_i = 0$ para todo $i \neq q_1, \dots, q_p, s$. Pero, entonces, $\widehat{x} = \widehat{0}$ y se contradice la definición de $\widehat{x}$.

Así, $\lambda_i \neq 0$ para todo $i \neq s$. Luego, $\xi_i = 0$ para todo $i \neq q_1, \dots, q_p, s$, $\xi_{q_j} = -\dfrac{1}{\lambda_{q_j}}\, \xi_s$ para todo j y

$$0 = \eta = \xi_s + \sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j} = \xi_s - \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{q_j}}\, \xi_s. \tag{5}$$

Pero, por (c), $\lambda_s \xi_s - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{q_j}} \xi_s = 0$, lo que implica, junto a (5), que $(\lambda_s - 1)\xi_s = 0$.

Si $\xi_s = 0$, entonces $\widehat{x} = \widehat{0}$. Luego, $\xi_s \neq 0$ y $\lambda_s = 1$, lo que implica que $\lambda_k = 1$ para todo k. Así, por (5), $0 = 1 - \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{1} = 1 - p$, pero $p > 1$. Y llegamos, nuevamente, a una contradicción.

Por lo tanto, $\eta \neq 0$. □

Lema 3.6 *Si el sistema* (4) *tiene solución, entonces* $\eta \neq \xi_s$.

Demostración: Supongamos que $\eta = \xi_s$. Entonces, el sistema (4) queda

$$\begin{cases} (a_i) \quad \lambda_i \xi_i = \xi_s & \text{para } i \neq q_1, \ldots, q_p, s \\ (b_j) \quad \lambda_{q_j} \xi_{q_j} = 0 & \text{para } j = 1, \ldots, p \\ (c) \quad \lambda_s \xi_s + \sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j} = \xi_s & \end{cases}$$

Además, por la definición de η, se tiene

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq s}}^{n} \xi_i = 0. \tag{6}$$

Si $\lambda_{q_{j_0}} = 0$ para algún $j_0 \in \{1, \ldots, p\}$, entonces , por Lema 3.3, tenemos que $\xi_{q_j} = 0$ para todo $j \neq j_0$ y que $\xi_i = \dfrac{1}{\lambda_i}\, \xi_s$ para todo $i \neq q_1, \ldots, q_p, s$. Luego, de (c) se obtiene que $\xi_{q_{j_0}} = (1 - \lambda_s)\, \xi_s$ y (6) queda

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq q_1, \ldots, q_p, s}}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\, \xi_s + (1 - \lambda_s)\, \xi_s = 0.$$

Por Lema 3.5, tenemos que $\xi_s \neq 0$. Entonces

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq q_1, \ldots, q_p, s}}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \quad + (1 - \lambda_s) = 0.$$

Recordando que $\lambda_k = 1 - \dfrac{X_k}{X_{q_{j_0}}}$, concluimos que la última igualdad no puede ser cierta.
De hecho, si $n > s$, la igualdad equivale a

$$\frac{1}{\lambda_n} = \lambda_s - 1 - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq q_1, \ldots, q_p, s}}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

y esto implica que $X_n \in \widehat{K}_{n-1} \cong \mathbb{R}(X_1, \ldots, X_{n-1})$. Ahora, si $n = s$, tenemos que

$$\frac{1}{\lambda_n} - \lambda_n = -1 - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq q_1, \ldots, q_p}}^{n-1} \frac{1}{\lambda_i}$$

y, nuevamente, X_n debe estar en $\widehat{K}_{n-1}$.
Así, $\lambda_j \neq 0$ y $\xi_{q_j} = 0$ para todo j. Por tanto, (c) queda $(\lambda_s - 1)\, \xi_s = 0$.
Pero los lemas 3.4 y 3.5 nos dicen, respectivamente, que $\lambda_s \neq 1$ y que $\xi_s \neq 0$.
Por lo tanto, $\eta \neq \xi_s$. $\square$

Lema 3.7 *Si el sistema* (4) *tiene solución, entonces* $\eta \neq \sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j}$.

Demostración: Si suponemos que $\eta = \sum_{k=1}^{p} \xi_{q_k}$, entonces (4) queda

$$\begin{cases} (a_i) & \lambda_i \xi_i = \eta & \text{para } i \neq q_1, \ldots, q_p, s \\ (b_j) & \lambda_{q_j} \xi_{q_j} + \xi_s = \eta & \text{para } j = 1, \ldots, p \\ (c) & \lambda_s \xi_s = 0 \end{cases}$$

Y, de la definición de η, tenemos

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq q_1, \ldots, q_p}}^{n} \xi_i = 0. \tag{7}$$

Si $\lambda_s = 0$, tenemos que $\lambda_k \neq 0$ para todo $k \neq s$, luego $\xi_i = \frac{1}{\lambda_i} \eta$ para cada $i \neq q_1, \ldots, q_p, s$ y $\xi_{q_j} = \frac{1}{\lambda_{q_j}} (\eta - \xi_s)$ para $j = 1, \ldots, p$.
Reemplazando estos resultados en (7), tenemos

$$\eta \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq q_1, \ldots, q_p, s}}^{n} \frac{1}{\lambda_i} + \xi_s = 0. \tag{8}$$

Sumando sobre j, obtenemos $\sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j} = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{q_j}} (\eta - \xi_s)$, es decir,

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{q_j}} \xi_s = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{q_j}} - 1 \right) \eta. \tag{9}$$

De (8), (9) y Lema 3.5, se obtiene

$$\left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq q_1, \ldots, q_p, s}}^{n} \frac{1}{\lambda_i} + 1 \right) \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{q_j}} = 1. \tag{10}$$

Recordando que $\lambda_k = 1 - \frac{X_k}{X_s}$ para todo $k \neq s$, (10) queda

$$\left[X_s \sum_{\substack{i=0 \\ i \notin M}}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i \\ j \notin M}}^{n} (X_s - X_j) + \prod_{\substack{i=0 \\ i \notin M}}^{n} (X_s - X_i) \right] \left(X_s \sum_{k=1}^{p} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} (X_s - X_{q_j}) \right) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq s}}^{n} (X_s - X_i),$$

donde $M = \{q_1, \dots, q_p, s\}$.

Y evaluando esta igualdad de polinomios en $X_s = 0$, tenemos que $0 = \prod_{\substack{i=0\\i\neq s}}^{n} X_i$, pero $X_i \neq 0$ para todo i.

Por lo tanto, $\lambda_s \neq 0$ y $\xi_s = 0$.

Entonces, como $\eta \neq 0$, tenemos, de las ecuaciones (a_i) y de las ecuaciones (b_j), que $\lambda_k \neq 0$ y, por tanto, $\xi_k = \dfrac{1}{\lambda_k}\eta$ para todo $k \neq s$. Luego, sumando $\xi_{q_1}, \dots, \xi_{q_p}$, tenemos que $\eta = \eta \sum_{j=1}^{p} \dfrac{1}{\lambda_{q_j}}$, es decir,

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{q_j}} = 1. \tag{11}$$

Además, por (7), se tiene que

$$\sum_{\substack{i=0\\i\neq q_1,\dots,q_p,s}}^{n} \frac{1}{\lambda_i} = 0. \tag{12}$$

Sumando (11) y (12), tenemos

$$\sum_{\substack{i=0\\i\neq s}}^{n} \frac{1}{\lambda_i} = 1.$$

Pero esta ecuación, cuya única variable es λ, no tiene solución en $\widehat{K}_n$.

De hecho, si suponemos que existe $\widetilde{\lambda} \in \widehat{K}_n$ tal que

$$\sum_{\substack{i=0\\i\neq s}}^{n} \frac{1}{1 + (\widetilde{\lambda} - 1)X_i} = 1, \tag{13}$$

podemos escribir $\widetilde{\lambda} - 1 = \dfrac{\varphi(X_n)}{\tau(X_n)}$ con $\varphi(X_n), \tau(X_n) \in \widehat{K}_{n-1}[X_n]$, primos relativos.

Y con esto, si $n = s$, (13) queda $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tau(X_n)}{\tau(X_n) + \varphi(X_n)\,X_i} = 1$.

Considerando la última igualdad en $\overline{\widehat{K}}_{n-1}(X_n)$, donde $\overline{\widehat{K}}_{n-1}$ es la clausura algebraica de $\widehat{K}_{n-1}$, tendremos que si $\deg \varphi(X_n) > 0$, existe $\xi \in \overline{\widehat{K}}_{n-1}$ tal que $\varphi(\xi) = 0$ y $\tau(\xi) \neq 0$ y, entonces,

$$1 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tau(\xi)}{\tau(\xi) + \varphi(\xi)X_i} = n,$$

pero $1 < p < s = n$. Ahora, si $\deg \tau(X_n) > 0$, existe $\zeta \in \overline{\widehat{K}}_{n-1}$ tal que $\varphi(\zeta) \neq 0$ y $\tau(\zeta) = 0$ y, entonces,

$$1 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tau(\zeta)}{\tau(\zeta) + \varphi(\zeta)X_i} = 0.$$

Por lo tanto, $\widetilde{\lambda}-1 \in \widehat{K}_{n-1}$. Pero, por Lema 2.9, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\lambda-1)\,X_i}=1$ no tiene solución en $\widehat{K}_{n-1}$.

Si, ahora, $n>s$, (13) queda $\displaystyle\sum_{\substack{i=0\\ i\neq s}}^{n} \frac{\tau(X_n)}{\tau(X_n)+\varphi(X_n)\,X_i}=1$. Y considerando la igualdad, nuevamente, en $\overline{\widehat{K}}_{n-1}(X_n)$, tendremos que si $\deg\varphi(X_n)>0$, existe $\xi \in \overline{\widehat{K}}_{n-1}$ tal que $\varphi(\xi)=0$ y $\tau(\xi)\neq 0$. De lo que se obtiene, como antes, que $n=1$. Por lo tanto, $\varphi(X_n)=\varphi \in \widehat{K}_{n-1}$ y $\widetilde{\lambda}-1=\dfrac{\varphi}{\tau(X_n)}$.
Ahora, si $\deg\tau(X_n)>0$, tenemos dos casos:

i) Existe $\zeta \in \overline{\widehat{K}}_{n-1}$, $\zeta\neq 0$, tal que $\tau(\zeta)=0$ (recordemos que $\lambda\neq 1$, luego $\varphi\neq 0$), entonces

$$1=\sum_{\substack{i=0\\ i\neq s}}^{n-1} \frac{\tau(\zeta)}{\tau(\zeta)+\varphi\,X_i}+\frac{\tau(\zeta)}{\tau(\zeta)+\varphi\,\zeta}=0.$$

ii) $\tau(X_n)=\beta X_n^{\alpha}$, con $\beta \in \widehat{K}_{n-1}$ y $\alpha \in \mathbb{N}$. Sin perder generalidad, podemos asumir $\beta=1$. Entonces,

$$1=\sum_{\substack{i=0\\ i\neq s}}^{n-1} \frac{X_n^{\alpha}}{X_n^{\alpha}+\varphi\,X_i}+\frac{X_n^{\alpha-1}}{X_n^{\alpha-1}+\varphi}.$$

Luego, si evaluamos en $X_n=0$, tendremos $\alpha=1$, pues si no $1=0$. Pero en este caso, obtenemos que $1=\frac{1}{1+\varphi}$, lo que sólo se cumple si $\varphi=0$. Esto contradice, por Lema 3.4, el hecho que $\eta\neq 0$.

Así, $\widetilde{\lambda}-1 \in \widehat{K}_{n-1}$. Luego, (13) implica que $X_n \in \widehat{K}_{n-1}$, y tenemos, nuevamente, una contradicción.

Por lo tanto, $\eta \neq \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \xi_{q_j}$. □

Demostración del Lema 3.2: Supongamos que el sistema tiene solución.
Por los lemas 3.5, 3.6 y 3.7, se tiene que $\lambda_k\neq 0$ y $\xi_k\neq 0$ para todo $k\in\{0,1,\ldots,n\}$. Por lo tanto, combinando las ecuaciones (b_1), …, (b_p) y (c) del sistema (4), éste se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \xi_i=\dfrac{\eta}{\lambda_i} & \text{para } 0\leq i\leq n,\ i\neq q_1,\ldots,q_p,s \\[2ex] \xi_{q_j}=\dfrac{\eta}{\lambda_{q_j}}\left[1-\dfrac{1}{\lambda_s}-\dfrac{(1-\lambda_s)\theta}{\lambda_s(\lambda_s-\theta)}\right] & \text{para } j=1,\ldots,p \\[2ex] \xi_s=\dfrac{\eta}{\lambda_s}\left[1+\dfrac{(1-\lambda_s)\theta}{\lambda_s-\theta}\right] & \end{cases}$$

donde $\theta = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_{q_j}}$.

Sumando todas las ecuaciones y dividiendo el resultado por η, se obtiene la siguiente ecuación, cuya única variable es λ:

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\theta(1 - 2\lambda_s + \lambda_s\theta)}{\lambda_s(\lambda_s - \theta)}. \tag{14}$$

Claramente, si el sistema (4) tiene solución, entonces la ecuación (14) debe tener una solución $\widetilde{\lambda} \in \widehat{K}_n$.

Escribimos $\widetilde{\lambda} - 1 = \dfrac{\varphi(X_n)}{\tau(X_n)}$, donde $\varphi(X_n), \tau(X_n)$ son primos relativos en $\widehat{K}_{n-1}[X_n]$.

Reemplazando en (14), tenemos

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\tau(X_n)}{\tau(X_n) + \varphi(X_n)X_i} + \frac{\theta(X_n)\ \tau(X_n)}{\tau(X_n) + \varphi(X_n)X_s}\left[\frac{\tau(X_n) + (\tau(X_n) + \varphi(X_n)X_s)(\theta(X_n) - 2)}{\tau(X_n) + \varphi(X_n)X_s - \tau(X_n)\theta(X_n)}\right] = 1 \tag{15}$$

con $\theta(X_n) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\tau(X_n)}{\tau(X_n) + \varphi(X_n)\ X_{q_j}}$.

Consideramos la igualdad (15) en $\overline{\widehat{K}}_{n-1}(X_n)$ ($\overline{\widehat{K}}_{n-1}$ es la clausura algebraica de $\widehat{K}_{n-1}$) y tenemos que si $\deg \varphi(X_n) > 0$, entonces existe $\xi \in \overline{\widehat{K}}_{n-1}$ tal que $\varphi(\xi) = 0$ y $\tau(\xi) \neq 0$. Luego, $\theta(\xi) = p$ y (15) queda

$$1 = \sum_{i=0}^{n} 1 + \frac{p\ \tau(\xi)}{\tau(\xi) + \varphi(\xi)X_s}\left[\frac{\tau(\xi) + \tau(\xi)(p-2)}{\tau(\xi) - \tau(\xi)p}\right] = n + 1 - p.$$

Pero $n \geq s > p$. Por lo tanto, $\varphi(X_n) = \varphi \in \widehat{K}_{n-1}$, $\varphi \neq 0$ y $\widetilde{\lambda} - 1 = \dfrac{\varphi}{\tau(X_n)}$.

Ahora, si $\deg \tau(X_n) > 0$, debemos considerar por separado los casos $n > s$ y $n = s$. Y, en cada uno, debemos estudiar lo que sucede con (15) cuando $\tau(X_n)$ tiene raíces no nulas en $\overline{\widehat{K}}_{n-1}$ y cuando 0 es su única raíz. En la última situación, es claro que podemos suponer $\tau(X_n) = X_n^\alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{N}$.

Así, suponiendo $n > s$, tenemos dos posibilidades:

i) Existe $\zeta \in \overline{\widehat{K}}_{n-1}$, $\zeta \neq 0$, tal que $\tau(\zeta) = 0$. Entonces $\theta(\zeta) = 0$ y (15) queda

$$1 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tau(\zeta)}{\tau(\zeta) + \varphi X_i} + \frac{\tau(\zeta)}{\tau(\zeta) + \varphi\zeta} + \frac{0}{\varphi^2 X_s^2} = 0.$$

ii) $\widetilde{\lambda} - 1 = \dfrac{\varphi}{X_n^\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{N}$. Luego, $\theta(X_n) = \sum_{j=1}^{p} \dfrac{X_n^\alpha}{X_n^\alpha + \varphi X_{q_j}}$ y (15) queda

$$1 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{X_n^\alpha}{X_n^\alpha + \varphi X_i} + \frac{X_n^{\alpha-1}}{X_n^{\alpha-1} + \varphi} + \frac{\theta(X_n)X_n^\alpha}{X_n^\alpha + \varphi X_s}\left[\frac{X_n^\alpha + (X_n^\alpha + \varphi X_s)(\theta(X_n) - 2)}{X_n^\alpha + \varphi X_s - X_n^\alpha\ \theta(X_n)}\right].$$

Evaluando en $X_n = 0$, tenemos que $\alpha = 1$, pues si no, $1 = 0$. Pero, en este caso, tenemos que $1 = \frac{1}{1+\varphi}$, pero $\varphi \neq 0$.

Por tanto, si $n > s$, concluimos que $\tau(X_n) = \tau \in \widehat{K}_{n-1}$. Luego, $\theta(X_n) = \theta \in \widehat{K}_{n-1}$ y (15) implica que $X_n \in \widehat{K}_{n-1}$, lo que no es posible.

Ahora, en el caso $n = s$, tenemos dos posibilidades también:

i) Existe $\zeta \in \overline{\widehat{K}}_{s-1}$, $\zeta \neq 0$, tal que $\tau(\zeta) = 0$. Entonces $\theta(\zeta) = 0$ y (15) queda

$$1 = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\tau(\zeta)}{\tau(\zeta) + \varphi X_i} + \frac{\tau(\zeta)}{\tau(\zeta) + \varphi\zeta} + \frac{0}{\varphi^2\zeta^2} = 0.$$

ii) $\widetilde{\lambda} - 1 = \frac{\varphi}{X_s^\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{N}$. Luego, $\theta(X_s) = \sum_{j=1}^{p} \frac{X_s^\alpha}{X_s^\alpha + \varphi X_{q_j}}$ y (15) queda

$$1 = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{X_s^\alpha}{X_s^\alpha + \varphi X_i} + \frac{X_s^{\alpha-1}}{X_s^{\alpha-1} + \varphi} + \frac{\theta(X_s) X_s^{\alpha-1}}{X_s^{\alpha-1} + \varphi} \left[\frac{X_s^{\alpha-1} + (X_s^{\alpha-1} + \varphi)(\theta(X_s) - 2)}{X_s^{\alpha-1} + \varphi - X_s^{\alpha-1}\,\theta(X_s)} \right].$$

Y, nuevamente, al evaluar en $X_s = 0$, tenemos que $\alpha = 1$, pues si no, $1 = 0$. Pero, con $\alpha = 1$ obtenemos $1 = \frac{1}{1+\varphi}$, lo que sólo se cumple si $\varphi = 0$.

Por tanto, también en este caso, concluimos que $\tau(X_n) = \tau \in \widehat{K}_{n-1}$ y que $\theta(X_n) = \theta \in \widehat{K}_{n-1}$. Con más trabajo algebraico que en el primer caso, también se prueba que, entonces, (15) implica que $X_n \in \widehat{K}_{n-1}$. Por tanto, la ecuación (14) no puede tener solución en $\widehat{K}_n$ y el sistema (4) tampoco, lo que concluye la demostración. $\square$

Así, hemos establecido la veracidad del Teorema 3.1 y, por tanto, probamos que la familia infinita de operadores de tipo $B_{Q,s}$ contiene sólo operadores acotados, autoadjuntos e indescomponibles.

3.2. Operadores del tipo $\mathbf{B_{pqr}}$.

En esta sección presentamos otra familia de infinitos operadores acotados y autoadjuntos que son indescomponibles.

Sean $p, q, r \in \mathbb{N}_0$, con $p < q < r$ y $r \geq 3$. Usando, nuevamente, $u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{X_k}\, e_k$, definimos la función $B^0_{pqr} : \{e_i : i \in \mathbb{N}_0\} \longrightarrow E$ por:

$$
\begin{aligned}
B^0_{pqr}(e_i) &= A(e_i) = u + \left(1 - \frac{1}{X_i}\right) e_i, && \text{para } i \neq p, q, r, r+1.\\
B^0_{pqr}(e_p) &= A(e_p) - \frac{1}{X_r}\, e_r = u + \left(1 - \frac{1}{X_p}\right) e_p - \frac{1}{X_r}\, e_r.\\
B^0_{pqr}(e_q) &= A(e_q) - \frac{1}{X_r}\, e_r - \frac{1}{X_{r+1}}\, e_{r+1} = u + \left(1 - \frac{1}{X_q}\right) e_q - \frac{1}{X_r}\, e_r - \frac{1}{X_{r+1}}\, e_{r+1}.\\
B^0_{pqr}(e_r) &= A(e_r) - \frac{1}{X_p}\, e_p - \frac{1}{X_q}\, e_q = u + \left(1 - \frac{1}{X_r}\right) e_r - \frac{1}{X_p}\, e_p - \frac{1}{X_q}\, e_q.\\
B^0_{pqr}(e_{r+1}) &= A(e_{r+1}) - \frac{1}{X_q}\, e_q = u + \left(1 - \frac{1}{X_{r+1}}\right) e_{r+1} - \frac{1}{X_q}\, e_q.
\end{aligned}
$$

Nuevamente, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, tenemos que $\| B^0_{pqr}(e_i) \| - \|e_i\| = 0$. Luego, B^0_{pqr} se extiende linealmente a un elemento de $\mathcal{B}(E)$, $B_{pqr} : E \longrightarrow E$ tal que para todo $x \in E$ se cumple $\|B_{pqr}(x)\| - \|x\| \geq 0$ (ver Lema 2.7) y, por tanto, B_{pqr} induce operadores en todos los espacios residuales.

Su matriz con respecto a la base canónica es:

$$
\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\frac{1}{X_p} & \cdots & 1 & \cdots & \frac{1}{X_p} & \cdots & 0 & \frac{1}{X_p} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\frac{1}{X_q} & \cdots & \frac{1}{X_q} & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
\frac{1}{X_r} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{X_r} & \cdots \\
\frac{1}{X_{r+1}} & \cdots & \frac{1}{X_{r+1}} & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{X_{r+1}} & 1 & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right)
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow p \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \leftarrow r \\ \leftarrow r+1 \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \\
& & p & & q & & r & r+1 &
\end{array}
&
\end{array}
$$

que cumple la condición (2), luego B_{pqr} también es un operador autoadjunto.

Con un procedimiento análogo al desarrollado en la sección 3.1, se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3.8 *B_{pqr} es un operador indescomponible.*

Para probar esta afirmación basta ver que ninguno de los operadores inducidos por B_{pqr} en los espacios residuales tiene vectores propios.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos $\widehat{(B_{pqr})}_n : \widehat{E}_n \longrightarrow \widehat{E}_n$ y, para abreviar, anotamos $\widehat{B}_n := \widehat{(B_{pqr})}_n$.
Si $n < r$, entonces $\widehat{B}_n = \widehat{A}_n$ y, por tanto, el operador inducido no tiene vectores propios.
Si $n = r$, entonces $\widehat{B}_n = \widehat{(B_{Q,r})}_n$ con $Q = \{p, q\}$ y por lo visto en 3.1, este operador inducido tampoco tiene vectores propios.
Mostrar que $\widehat{B}_n$ no tiene vectores propios cuando $n \geq r+1$ requiere más trabajo. A continuación, presentamos un esquema de esta demostración.
Escribimos $\widehat{u} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{X_k}\, \widehat{e}_k$ y, entonces, $\widehat{B}_n$ queda definido por:

$$\widehat{B}_n(\widehat{e}_i) = \widehat{u} + \left(1 - \frac{1}{X_i}\right)\widehat{e}_i, \qquad \text{para } 0 \leq i \leq n,\ i \neq p, q, r, r+1.$$

$$\widehat{B}_n(\widehat{e}_p) = \widehat{u} + \left(1 - \frac{1}{X_p}\right)\widehat{e}_p - \frac{1}{X_r}\,\widehat{e}_r.$$

$$\widehat{B}_n(\widehat{e}_q) = \widehat{u} + \left(1 - \frac{1}{X_q}\right)\widehat{e}_q - \frac{1}{X_r}\,\widehat{e}_r - \frac{1}{X_{r+1}}\,\widehat{e}_{r+1}.$$

$$\widehat{B}_n(\widehat{e}_r) = \widehat{u} + \left(1 - \frac{1}{X_r}\right)\widehat{e}_r - \frac{1}{X_p}\,\widehat{e}_p - \frac{1}{X_q}\,\widehat{e}_q.$$

$$\widehat{B}_n(\widehat{e}_{r+1}) = \widehat{u} + \left(1 - \frac{1}{X_{r+1}}\right)\widehat{e}_{r+1} - \frac{1}{X_q}\,\widehat{e}_q.$$

Así, $\widehat{0} \neq \widehat{x} = \sum_{k=0}^{n} \xi_k \widehat{e}_k$ es vector propio de $\widehat{B}_n$ con valor propio correspondiente a λ si y sólo si

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{X_i} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \xi_j \widehat{e}_i - \frac{1}{X_p}(\xi_p + \xi_q)\widehat{e}_r - \frac{\xi_q}{X_{r+1}}\widehat{e}_{r+1} - \frac{\xi_r}{X_p}\widehat{e}_p - \frac{1}{x_q}(\xi_r + \xi_{r+1})\widehat{e}_q = (\lambda - 1)\sum_{i=0}^{n} \xi_i \widehat{e}_i.$$

De donde, si anotamos $\eta := \sum_{i=0}^{n} \xi_i$ y $\lambda_i := 1 + (\lambda - 1)X_i$, para $i = 0, \ldots, n$, obtenemos el sistema con indeterminadas $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ y λ:

$$\begin{cases} \lambda_i \xi_i = \eta & \text{para } 0 \leq i \leq n,\ i \neq p, q, r, r+1. \\ \lambda_p \xi_p + \xi_r = \eta \\ \lambda_q \xi_q + \xi_r + \xi_{r+1} = \eta \\ \lambda_r \xi_r + \xi_p + \xi_q = \eta \\ \lambda_{r+1} \xi_{r+1} + \xi_q = \eta \end{cases} \tag{16}$$

Así, $\widehat{B}_n$ tendrá vectores propios si y sólo si el sistema (16) tiene solución en $\widehat{K}_n$. Pero tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.9 *Si el sistema* (16) *tiene solución, entonces:*

i) $\eta \neq 0$

ii) $\eta \neq \xi_r$

iii) $\eta \neq \xi_r + \xi_{r+1}$

iv) $\eta \neq \xi_p + \xi_q$

v) $\eta \neq \xi_q$

La demostración de este lema es análoga a las de los lemas 3.5, 3.6 y 3.7.

Entonces, si suponemos que existe una solución del sistema (16), tendremos que $\lambda_k \neq 0$ y $\xi_k \neq 0$ para todo k. Por tanto, el sistema se puede expresar como sigue:

$$\begin{cases} \xi_i = \dfrac{\eta}{\lambda_i} & \text{para } i \neq p, q, r, r+1 \\[2ex] \xi_p = \dfrac{\eta}{\lambda_p}\left[1 + \dfrac{(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_p\lambda_q)\lambda_{r+1} - 1}{\lambda_p(\lambda_q\lambda_r\lambda_{r+1} - \lambda_r - \lambda_{r+1}) - \lambda_q\lambda_{r+1} + 1}\right] \\[2ex] \xi_q = \dfrac{\eta}{\lambda_q}\left[1 + \dfrac{\lambda_p(1-\lambda_q)(\lambda_r + \lambda_{r+1}) + \lambda_q(1+\lambda_{r+1}) - 1}{\lambda_p(\lambda_q\lambda_r\lambda_{r+1} - \lambda_r - \lambda_{r+1}) - \lambda_q\lambda_{r+1} + 1}\right] \\[2ex] \xi_r = \dfrac{\eta}{\lambda_r}\left[1 - \dfrac{1}{\lambda_p} - \dfrac{1}{\lambda_q} - \dfrac{\lambda_p^2(1-\lambda_q)\lambda_r + (\lambda_p\lambda_q - \lambda_p - \lambda_q)(1 - \lambda_p\lambda_{r+1} - \lambda_q\lambda_{r+1})}{\lambda_p\lambda_q[\lambda_p(\lambda_q\lambda_r\lambda_{r+1} - \lambda_r - \lambda_{r+1}) - \lambda_q\lambda_{r+1} + 1]}\right] \\[2ex] \xi_{r+1} = \dfrac{\eta}{\lambda_{r+1}}\left[1 - \dfrac{1}{\lambda_q} - \dfrac{\lambda_p(1-\lambda_q)(\lambda_r + \lambda_{r+1}) + \lambda_q(1+\lambda_{r+1}) - 1}{\lambda_q[\lambda_p(\lambda_q\lambda_r\lambda_{r+1} - \lambda_r - \lambda_{r+1}) - \lambda_q\lambda_{r+1} + 1]}\right] \end{cases}$$

Sumando todas las ecuaciones y dividiendo el resultado por $\eta \neq 0$, obtenemos la siguiente ecuación en la variable λ:

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_q\lambda_{r+1}} - \frac{1}{\lambda_p\lambda_r} - \frac{1}{\lambda_q\lambda_r} + \frac{\theta}{\lambda_p(\lambda_q\lambda_r\lambda_{r+1} - \lambda_r - \lambda_{r+1}) - \lambda_q\lambda_{r+1} + 1}, \tag{17}$$

donde

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{(\lambda_{r+1} - 1)[\lambda_p(1-\lambda_q)(\lambda_r + \lambda_{r+1}) + \lambda_q(1+\lambda_{r+1}) - 1]}{\lambda_q\lambda_{r+1}} \\ &+ \frac{(\lambda_p + \lambda_q - \lambda_p\lambda_q)\lambda_{r+1} - 1}{\lambda_p} - \frac{\lambda_p^2(1-\lambda_q)\lambda_r + (\lambda_p\lambda_q - \lambda_p - \lambda_q)(1 - \lambda_p\lambda_{r+1} - \lambda_q\lambda_{r+1})}{\lambda_p\lambda_q\lambda_r}. \end{aligned}$$

Pero si el sistema (16) tiene solución, debe existir $\widetilde{\lambda} \in \widehat{K}_n$ que satisface la ecuación (17). Como antes, escribimos $\widetilde{\lambda} - 1 = \dfrac{\varphi(X_n)}{\tau(X_n)}$ con $\varphi(X_n), \tau(X_n) \in \widehat{K}_{n-1}[X_n]$, primos relativos. Reemplazamos en (17) y siguiendo procedimientos análogos a los de la demostración del Lema 3.2, obtenemos una contradicción. Con esto, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.10 *El sistema* (16) *no tiene solución.*

Por tanto, $\widehat{B}_n$, $n \geq r+1$, tampoco tiene vectores propios. Y se establece el Teorema 3.8.

3.3. Los espectros de $\mathbf{B_{Q,s}}$ y de $\mathbf{B_{pqr}}$.

A continuación, probaremos que los espectros de cada uno de los operadores de tipo $B_{Q,s}$ y de tipo B_{pqr}, al igual que el de A, contienen exactamente un punto.
Hemos probado que estos operadores son indescomponibles, luego, no tienen vectores propios. Por esto, se tiene que para todo $\lambda \in K$ los operadores de $\mathcal{B}(E)$, $B_{Q,s} - \lambda I$ y $B_{pqr} - \lambda I$ son inyectivos. Entonces, podemos aplicar el Lema 2.8, según el cual un operador inyectivo $C \in \mathcal{B}(E)$ es invertible si y sólo si el conjunto $\{\|C(e_i)\| - \|e_i\| : i \in \mathbb{N}_0\}$ está acotado superiormente en Γ.
Ahora, para cada $\lambda \in K$ fijo, los conjuntos

$$R_{Q,s} = \{\|(B_{Q,s} - \lambda I)(e_i)\| - \|e_i\| : i \in \mathbb{N}_0\}$$

y

$$R_{pqr} = \{\|(B_{pqr} - \lambda I)(e_i)\| - \|e_i\| : i \in \mathbb{N}_0\}$$

difieren en un número finito de elementos con el conjunto

$$R_A = \{\|(A - \lambda I)(e_i)\| - \|e_i\| : i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Luego, $R_{Q,s}$ y R_{pqr} son acotados superiormente en Γ si y sólo R_A lo es.
Así, por el resultado de [3] que presentamos en el Teorema 2.13, tenemos que spec$(A) = \{1\}$. Entonces R_A está acotado únicamente cuando $\lambda = 1$. Todo lo anterior prueba el siguiente resultado.

Teorema 3.11 *Todo operador B perteneciente a alguna de las familias de operadores definidas en las secciones* 3.1 *y* 3.2 *cumple*

$$spec(B) = \{1\}.$$

4. Las subálgebras de $\mathcal{B}(\mathrm{E})$: $\mathcal{B}_{\mathbf{Q,s}}$ y $\mathcal{B}_{\mathbf{pqr}}$

Al igual que A, cada uno de los infinitos operadores definidos en las secciones 3.1 y 3.2, da origen a una subálgebra de $\mathcal{B}(E)$. Para cada operador de tipo $B_{Q,s}$ tenemos el álgebra

$$\mathcal{B}_{Q,s} = \{C \in \mathcal{B}(E) : CB_{Q,s} = B_{Q,s}C\}, \tag{18}$$

y cada operador de tipo B_{pqr} origina el álgebra

$$\mathcal{B}_{pqr} = \{C \in \mathcal{B}(E) : CB_{pqr} = B_{pqr}C\}. \tag{19}$$

Por el Lema 2.14, resultado demostrado en [3], tenemos

Lema 4.1 *Si los operadores C, D en $\mathcal{B}_{Q,s}$ (resp. en $\mathcal{B}_{pqr}$) coinciden en algún vector no nulo, entonces $C = D$.*

Este lema tiene dos consecuencias inmediatas. Primero, claramente, un operador no inyectivo de $\mathcal{B}_{Q,s}$ (resp. en $\mathcal{B}_{pqr}$) coincidiría con el operador nulo en un vector distinto de cero. Luego:

Corolario 4.2 *Todo operador no trivial de $\mathcal{B}_{Q,s}$ (resp. en $\mathcal{B}_{pqr}$) es inyectivo.*

Y como un operador B que esté en alguna de las familias presentadas en las secciones 3.1 y 3.2 coincide con cualquier otro operador C que también esté en una de las familias en infinitos vectores de la base canónica, tenemos que B sólo pertenece al álgebra generada por él y, por tanto:

Corolario 4.3 *Cada una de las infinitas subálgebras de $\mathcal{B}(E)$ presentadas en* (18) *y en* (19) *es distinta de las demás.*

Ahora, también tenemos que cada operador de tipo $B_{Q,s}$ o de tipo B_{pqr} coincide con A en infinitos vectores de la base canónica, entonces cada una de las álgebras presentadas en (18) y en (19) es distinta de $\mathcal{A}$. Pero se puede establecer un resultado mucho más fuerte. A continuación, probamos que la intersección de cada una de estas álgebras con el álgebra $\mathcal{A}$ es trivial.

Teorema 4.4 *Sean $p, s \in \mathbb{N}$, con $1 < p < s$ y $Q = \{q_1, \ldots, q_p\}$ con cada $q_j \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ y $q_1 < q_2 < \cdots < q_p$. Entonces*

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_{Q,s} = \{\alpha I : \alpha \in K\}.$$

Demostración: Sea $K_{Q,s} \in \mathcal{B}(E)$, el operador definido por:

$$\begin{aligned}
K_{Q,s}(e_i) &= 0 && \text{para } i \neq q_1, \ldots, q_p, s. \\
K_{Q,s}(e_{q_j}) &= -\frac{1}{X_s}\, e_s && \text{para } j = 1, \ldots, p. \\
K_{Q,s}(e_s) &= -\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{X_{q_j}}\, e_{q_j}.
\end{aligned}$$

Entonces, $B_{Q,s} = A + K_{Q,s}$ y, por tanto, $C \in \mathcal{B}_{Q,s} \cap \mathcal{A}$ si y sólo si C conmuta con A y con $K_{Q,s}$. Por las propiedades de la subálgebra $\mathcal{A}$, vistas en 2.3, sabemos que C es autoadjunto. Así, si ponemos $C(e_k) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ik} e_i$, por Lema 2.5, tendremos para todo par de elementos $i, k \in \mathbb{N}_0$,

$$c_{ik} X_i = c_{ki} X_k. \tag{20}$$

Determinaremos las condiciones para que $C \in \mathcal{A}$ conmute con $K_{Q,s}$. Para esto, calculamos:

$$\begin{aligned} K_{Q,s}(C(e_k)) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_{ik} K_{Q,s}(e_i) = \sum_{j=1}^{p} c_{q_j k} K_{Q,s}(e_{q_j}) + c_{sk} K_{Q,s}(e_s) \\ &= -\frac{1}{X_s} \sum_{j=1}^{p} c_{q_j k} e_s - c_{sk} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{X_{q_j}} e_{q_j} \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} C(K_{Q,s}(e_i)) &= 0 \in E & &\text{para } i \neq q_1, \ldots, q_p, s. \\ C(K_{Q,s}(e_{q_j})) &= -\frac{1}{X_s} C(e_s) = -\frac{1}{X_s} \sum_{i=0}^{\infty} c_{is} e_i & &\text{para } j = 1, \ldots, p. \\ C(K_{Q,s}(e_s)) &= -\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{X_{q_j}} C(e_{q_j}) = -\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{X_{q_j}} c_{iq_j} e_i. \end{aligned}$$

Igualando las imágenes de cada vector de la base y usando (20), obtenemos:

(i) $c_{sj} = c_{js} = 0$ para todo $j \neq q_1, \ldots, q_p, s$.

(ii) $c_{sq_1} = c_{sq_2} = \cdots = c_{sq_p}$ $(=: a)$ y, por tanto, $c_{q_j s} = \dfrac{X_s}{X_{q_j}} a$ para $j = 1, \ldots, p$.

(iii) $\sum_{k=1}^{p} c_{q_k j} = 0$ para todo $j \neq q_1, \ldots, q_p, s$.

(iv) $\sum_{k=1}^{p} c_{q_k q_j} = c_{ss}$ para todo $j = 1, \ldots, p$.

Ahora, si escribimos $C(e_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{X_k} e_k$, entonces, por Teorema 2.16, para $n \geq 1$,

$$c_{kn} = \frac{X_n}{X_n - X_k} \left((X_n - 1) \frac{\lambda_n}{X_n} - (X_k - 1) \frac{\lambda_k}{X_k} \right), \qquad \text{si } k \neq n \tag{21}$$

$$c_{nn} = \lambda_0 + \sum_{j \neq 0, n} \frac{X_n - 1}{X_n - X_j} (\lambda_j - \lambda_n). \tag{22}$$

Por las condiciones (i) y (ii), tenemos que

$$C(e_s) = aX_s \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{X_{q_j}} e_{q_j} + c_{ss} e_s. \tag{23}$$

Con esto determinaremos λ_k para todo $k \in \mathbb{N}_0$, obtendremos $C(e_0)$ y, por Teorema 2.16, tendremos determinada la imagen bajo C de la base canónica.

Primero, consideramos el caso en que $q_1 \neq 0$.
Por (i), $0 = c_{0s} = c_{s0} = \dfrac{\lambda_s}{X_s}$, luego $\lambda_s = 0$. Además, por (21), (22) y (23), tenemos:

- Para $k \neq 0, q_1, \ldots, q_p, s$, $c_{ks} = 0 = \dfrac{X_s}{X_s - X_k}\left((X_s - 1)\cdot 0 - (X_k - 1)\dfrac{\lambda_k}{X_k}\right)$.
  Luego, $(X_k - 1)\lambda_k = 0$. Y por tanto, $\lambda_k = 0$ para todo $k \neq 0, q_1, \ldots, q_p$.

- Si $k = q_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, p\}$, entonces

$$c_{q_j s} = \frac{aX_s}{X_{q_j}} = \frac{X_s}{X_s - X_{q_j}}\left((X_s - 1)\cdot 0 - (X_{q_j} - 1)\frac{\lambda_{q_j}}{X_{q_j}}\right).$$

  Por tanto, $\lambda_{q_j} = \dfrac{X_s - X_{q_j}}{1 - X_{q_j}} a$ para $j = 1, \ldots, p$.

- Por último, $c_{ss} = \lambda_0 + \displaystyle\sum_{j \neq 0, s} \frac{X_s - 1}{X_s - X_j}(\lambda_j - 0) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{p} \frac{X_s - 1}{X_s - X_{q_j}} \frac{(X_s - X_{q_j})a}{1 - X_{q_j}}$.

  Luego, $\lambda_0 = c_{ss} + a(X_s - 1)\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{X_{q_j} - 1}$.

Y tenemos todos los λ_k en términos de a y de c_{ss}.
Utilizando ahora (21) con $n = s + 1$, tenemos que para $k \neq s + 1$

$$c_{k(s+1)} = \frac{X_{s+1}(1 - X_k)\lambda_k}{X_k(X_{s+1} - X_s)}.$$

Y la condición (iii) obliga a que

$$0 = \sum_{j=1}^{p} c_{q_j(s+1)} = X_{s+1}\, a \sum_{j=1}^{p} \frac{X_s - X_{q_j}}{X_{q_j}(X_{s+1} - X_{q_j})}.$$

Pero $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{X_s - X_{q_j}}{X_{q_j}(X_{s+1} - X_{q_j})} \neq 0$ (Si no, $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{p} X_{q_l} = 0$). Por lo tanto, $a = 0$.
Entonces, $\lambda_0 = c_{ss}$ y $\lambda_k = 0$ para $k \geq 1$, es decir, $C(e_0) = c_{ss}\, e_0 = c_{ss} I(e_0)$. Y como, claramente, $c_{ss} I \in \mathcal{A}$, por Lema 2.14, $C = c_{ss} I$.

Si, ahora, $q_1 = 0$, entonces por (ii) $a = c_{s0} = c_{sq_1} = \dfrac{\lambda_s}{X_s}$. Por tanto, $\lambda_s = aX_s$.
Usando nuevamente (21), (22) y (23), obtenemos:

- $\lambda_k = \dfrac{X_s - 1}{X_k - 1} aX_s$ para $k \neq q_1, \ldots, q_p, s$.
- $\lambda_{q_j} = aX_s$ para $j = 2, 3, \ldots, p$.
- $\lambda_{q_1} = c_{ss} + a(X_s - 1) \sum\limits_{k \neq q_1, \ldots, q_p, s} \dfrac{1}{1 - X_k}$.

Además, por (21), se tiene que

$$c_{k(s+1)} = \frac{X_{s+1}}{X_{s+1} - X_k} \left((X_s - 1)a - (X_k - 1)\frac{\lambda_k}{X_k} \right), \qquad \text{cuando } k \neq s + 1.$$

En particular, $c_{q_l(s+1)} = \dfrac{X_{s+1}(X_s - X_{q_l})a}{X_{q_l}(X_{s+1} - X_{q_l})}$ para $l = 1, 2, \ldots, p$. Y, por (iii), se debe cumplir

$$0 = \sum_{l=1}^{p} c_{q_l(s+1)} = aX_{s+1} \underbrace{\sum_{l=1}^{p} \frac{X_s - X_{q_l}}{X_{q_l}(X_{s+1} - X_{q_l})}}_{\neq 0}.$$

Luego, nuevamente, $a = 0$ y $C(e_0) = c_{ss}e_0 = c_{ss}I(e_0)$. Y en este caso, también se tiene que $C = c_{ss}I$.

Es decir,

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_{Q,s} = \{\alpha\ I : \alpha \in K\}$$

en ambos casos. Esto termina la demostración. □

Un resultado análogo se obtiene para las subálgebras originadas por operadores del segundo tipo.

Teorema 4.5 *Sean $p, q, r \in \mathbb{N}_0$, con $p < q < r$ y $r \geq 3$. Entonces*

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_{pqr} = \{\alpha\ I : \alpha \in K\}.$$

Demostración: En este caso, sea $K_{pqr} \in \mathcal{B}(E)$ el operador definido por:

$$\begin{aligned}
K_{pqr}(e_i) &= 0 \in E && \text{para todo } i \neq p, q, r, r+1 \\
K_{pqr}(e_p) &= -\frac{1}{X_r}\ e_r \\
K_{pqr}(e_q) &= -\frac{1}{X_r}\ e_r - \frac{1}{X_{r+1}}\ e_{r+1} \\
K_{pqr}(e_r) &= -\frac{1}{X_p}\ e_p - \frac{1}{X_q}\ e_q \\
K_{pqr}(e_{r+1}) &= -\frac{1}{X_q}\ e_q
\end{aligned}$$

Luego, $B_{pqr} = A + K_{pqr}$. Y para determinar los elementos de $\mathcal{A}$ que conmutan con B_{pqr}, basta exigirles que conmuten con K_{pqr}.

Si $C \in \mathcal{A}$, entonces C es autoadjunto y, nuevamente, si $C(e_k) = \sum_{i=0}^{n} c_{ik}\ e_i$ entonces se cumple (20) para todo par $i, k \in \mathbb{N}_0$.

Ahora, queremos que $CK_{pqr} = K_{pqr}C$. Pero,

$$\begin{aligned} K_{pqr}(C(e_k)) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_{ik} K_{pqr}(e_i) \\ &= -\frac{c_r k}{X_p}\ e_p - \frac{c_{rk} + c_{(r+1)k}}{X_q}\ e_q - \frac{c_{pk} + c_{qk}}{X_r}\ e_r - \frac{c_{qk}}{X_{r+1}}\ e_{r+1}, \qquad (k \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} C(K_{pqr}(e_i)) &= 0 \qquad\qquad \text{para } i \neq p, q, r, r+1 \\ C(K_{pqr}(e_p)) &= -\frac{1}{X_r} \sum_{i=0}^{\infty} c_{ir}\ e_i \\ C(K_{pqr}(e_q)) &= -\frac{1}{X_r} \sum_{i=0}^{\infty} c_{ir}\ e_i - \frac{1}{X_{r+1}} \sum_{i=0}^{\infty} c_{i(r+1)}\ e_i \\ C(K_{pqr}(e_r)) &= -\frac{1}{X_p} \sum_{i=0}^{\infty} c_{ip}\ e_i - \frac{1}{X_q} \sum_{i=0}^{\infty} c_{iq}\ e_i \\ C(K_{pqr}(e_{r+1})) &= -\frac{1}{X_q} \sum_{i=0}^{\infty} c_{iq}\ e_i. \end{aligned}$$

Luego, los coeficientes de C deben cumplir:

(i') Si $k \in \{p, q, r, r+1\}$ y $j \notin \{p, q, r, r+1\}$, entonces $c_{kj} = c_{jk} = 0$.

(ii') $c_{pp} = \left(\frac{X_q}{X_p} - \frac{X_r}{X_{r+1}}\right) c_{r(r+1)} + c_{(r+1)(r+1)}$.

(iii') $c_{qp} = c_{r(r+1)}$.

(iv') $c_{qq} = c_{r(r+1)} + c_{(r+1)(r+1)}$.

(v') $c_{rp} = \left(\frac{X_q}{X_r} - \frac{X_p}{X_{r+1}}\right) c_{p(r+1)} + \frac{X_q}{X_r} c_{q(r+1)}$.

(vi') $c_{rq} = \frac{X_q}{X_r} c_{p(r+1)} + \frac{X_q}{X_r} c_{q(r+1)}$.

(vii') $c_{rr} = \left(\frac{X_q}{X_p} - \frac{X_r}{X_{r+1}} + 1\right) c_{r(r+1)} + c_{(r+1)(r+1)}$.

Además, si escribimos $C(e_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{X_k} e_k$, tenemos que (21) y (22) son válidas para $n \geq 1$.
Para determinar C, nuevamente debemos considerar dos casos. Primero suponemos que $p = 0$.
Por (i'), $C(e_0) = c_{00}e_0 + c_{q0}e_q + c_{r0}e_r + c_{(r+1)0}e_{r+1}$, es decir, $\lambda_k = 0$ para todo $k \neq 0, q, r, r+1$.
Por otro lado, usando (ii'), (iii'), (v') y (20), obtenemos respectivamente:

$$\lambda_0 = \left(X_q - \frac{X_r}{X_{r+1}}\right) c_{r(r+1)} + c_{(r+1)(r+1)}$$

$$\lambda_q = X_q c_{r(r+1)}$$

$$\lambda_r = \left(X_q - \frac{X_r}{X_{r+1}}\right) c_{0(r+1)} + X_q c_{q(r+1)}$$

$$\lambda_{r+1} = c_{0(r+1)}$$

Con esto, hemos determinado C sólo en función de $c_{0(r+1)}$, $c_{q(r+1)}$, $c_{r(r+1)}$ y $c_{(r+1)(r+1)}$.
Ahora, nuevamente por (i'), $C(e_{r+1}) = c_{0(r+1)}e_0 + c_{q(r+1)}e_q + c_{r(r+1)}e_r + c_{(r+1)(r+1)}e_{r+1}$ y usando (21) y (22) para $n = r+1$, obtenemos:

- Si $k \neq 0, q, r, r+1$, $\quad 0 = \frac{X_{r+1}}{X_{r+1} - X_k}\left((X_{r+1} - 1)\frac{c_{0(r+1)}}{X_{r+1}} - (X_k - 1)\cdot 0\right)$.
  Luego, $c_{0(r+1)} = 0 = \lambda_{r+1}$.
- Si $k = q$, $\quad c_{q(r+1)} = \frac{X_{r+1}}{X_{r+1} - X_k}\left((X_{r+1} - 1)\cdot 0 - (X_q - 1)\frac{\lambda_q}{X_q}\right)$.
  Luego, $c_{q(r+1)} = \frac{X_{r+1}(X_q - 1)}{X_q - X_{r+1}}\, c_{r(r+1)}$.
- Por último, si $k = r+1$,

$$\begin{aligned} c_{(r+1)(r+1)} &= \lambda_0 + \sum_{j \neq 0, r+1} \frac{X_{r+1} - 1}{X_{r+1} - X_j}(\lambda_j - \lambda_{r+1}) \\ &= \left(X_q - \frac{X_r}{X_{r+1}}\right) c_{r(r+1)} + c_{(r+1)(r+1)} + \frac{X_{r+1} - 1}{X_{r+1} - X_q}\, \lambda_q + \frac{X_{r+1} - 1}{X_{r+1} - X_r}\, \lambda_r. \end{aligned}$$

Reemplazando λ_q y λ_r en la última igualdad, tenemos

$$0 = \underbrace{\left(X_q - \frac{X_r}{X_{r+1}} + \frac{X_q(X_{r+1} - 1)}{X_{r+1} - X_q}\left[1 + \frac{X_{r+1}(X_q - 1)}{X_r - X_{r+1}}\right]\right)}_{\rho} c_{r(r+1)}.$$

Pero $\rho \neq 0$ (si no, $X_q = 0$). Por tanto, $c_{r(r+1)} = 0$ y $c_{q(r+1)} = 0$.
Entonces, $C(e_0) = c_{(r+1)(r+1)}\; e_0 = c_{(r+1)(r+1)} I(e_0)$ y $C = c_{(r+1)(r+1)} I$.

Si, ahora, $p \neq 0$, nuevamente se tiene que

$$C(e_{r+1}) = c_{p(r+1)}e_p + c_{q(r+1)}e_q + c_{r(r+1)}e_r + c_{(r+1)(r+1)}e_{r+1}.$$

Y utilizando (21) y (22) para $n = r+1$, tenemos:

- Si $k \neq 0, p, q, r, r+1$,

$$0 = c_{k(r+1)} = \frac{X_{r+1}}{X_{r+1} - X_k}\left((X_{r+1} - 1)\frac{\lambda_{r+1}}{X_{r+1}} - (X_k - 1)\frac{\lambda_k}{X_k}\right)$$

  Luego, $(X_k - 1)\dfrac{\lambda_k}{X_k} = (X_{r+1} - 1)\dfrac{\lambda_{r+1}}{X_{r+1}} = (X_{r+1} - 1)c_{(r+1)0} = 0$ (por (i')).
  Por tanto, $\lambda_k = 0$ para todo $k \neq 0, p, q, r$.

- Si $k \in \{p, q, r\}$, entonces $\quad c_{k(r+1)} = \dfrac{X_{r+1}}{X_{r+1} - X_k}\left((X_{r+1} - 1)\cdot 0 - (X_k - 1)\dfrac{\lambda_k}{X_k}\right)$.

  Luego, $\lambda_k = \dfrac{X_k(X_{r+1} - X_k)}{X_{r+1}(1 - X_k)}\ c_{k(r+1)}$ cuando $k = p, q$ ó r.

- Por último, $c_{(r+1)(r+1)} = \lambda_0 + \displaystyle\sum_{j \neq 0, r+1} \frac{X_{r+1} - 1}{X_{r+1} - X_j}(\lambda_j - 0)$.

  Luego,

$$\lambda_0 = \frac{X_{r+1} - 1}{X_{r+1}}\left(\frac{X_p}{X_p - 1}\ c_{p(r+1)} + \frac{X_q}{X_q - 1}\ c_{q(r+1)} + \frac{X_r}{X_r - 1}\ c_{r(r+1)}\right) + c_{(r+1)(r+1)}.$$

Con lo que ya tenemos determinada C en función de $c_{p(r+1)}$, $c_{q(r+1)}$, $c_{r(r+1)}$ y $c_{(r+1)(r+1)}$. Finalmente, usando nuevamente (i') y (21), tendremos para $k \neq 0, p, q, r, r+1$:

$$0 = c_{kp} = \frac{X_p}{X_p - X_k}\left((X_p - 1)\frac{\lambda_p}{X_p} - (X_k - 1)\cdot 0\right)$$

$$0 = c_{kq} = \frac{X_q}{X_q - X_k}\left((X_q - 1)\frac{\lambda_q}{X_q} - (X_k - 1)\cdot 0\right)$$

$$0 = c_{kr} = \frac{X_r}{X_r - X_k}\left((X_r - 1)\frac{\lambda_r}{X_r} - (X_k - 1)\cdot 0\right)$$

Lo que implica que $\lambda_p = \lambda_q = \lambda_r = 0$ y, por tanto, $c_{p(r+1)} = c_{q(r+1)} = c_{r(r+1)} = 0$.
Así, $C(e_0) = c_{(r+1)(r+1)}I(e_0)$ y $C = c_{(r+1)(r+1)}I$.
Y tenemos, también, que

$$\mathcal{B}_{pqr} \cap \mathcal{A} = \{\alpha\ I : \alpha \in K\}.$$

Lo que establece el teorema. $\square$

Referencias

[1] KELLER, H.A. *Ein nicht-klassischer Hilbertscher Raum*, Math. Z. **172** (1980), 41–49.

[2] GROSS,H. – KÜNZI, U.M. *On a class of orthomodular quadratic spaces*, Enseing. Math. (2) **31** (1985), 187–212.

[3] KELLER, H. - OCHSENIUS H. *Bounded operators on Non-Archimedean Orthomodular Spaces*, Math. Slovaca **45** (1995) No. 4, 413–434.

[4] KELLER, H. – OCHSENIUS H. *An Algebra of Self-Adjoint Operators on a Non-Archimedean Orthomodular Space*, Lect. Notes Pure Appl. Math., **192**, eds.: W.H. Schikhof, J. Kąkol, C. Pérez-García, M. Dekker (1997), 253–264.