PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SCATTERING CLÁSICO
EN POTENCIALES DISCONTINUOS Y CAMPO MAGNÉTICO

por

CLAUDIO RIVERA DE VERA

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesor Guía: Claudio Fernández Jaña.

Comisión Informante: Víctor Hugo Cortés (PUC)
Claudio Fernández Jaña (PUC)
Gustavo Perla Menzala (LNCC, U. Federal, Río de Janeiro)

Enero, 2008
Santiago, Chile

AGRADECIMIENTOS

Sin duda alguna a quienes primero debo mi gratitud por llevar a cabo esta tesis es a Dios, mi madre y mi director de tesis. A Dios porque todo lo hace posible, a mi madre que acompañó este nuevo proceso en mi vida y a Claudio Fernández por dar forma este pequeño gran proyecto.

Muchas gracias al Profesor Víctor Cortés por sus ideas aportadas en esta tesis y ser parte de la comisión de defensa. Así mismo, le doy las gracias al Profesor Gustavo Perla por sus asertivos comentarios que han permitido depurar esta tesis y por motivar mi investigación por esta brecha.

Agradezco a la Pontificia Universidad Católica de Chile y a la Facultad de Matemática quienes han ayudado en mi formación personal y matemática a lo largo de los años, sin duda, más intenso de mi vida. Por su apoyo económico y experiencial que, sin los cuales, no habría podido llevar a cabo esta empresa.

Agradezco al Padre Samuel (Decano de la Facultad de Teología) quién ha motivado mi desarrollo espiritual y dar forma a mi vocación de servicio en las aulas. A Fray Manuel Alvarado por acompañar mi vida y darle siempre un tinte diferente. A Martha y Gregorio que serán siempre una parte importante de mi vida, sin importar donde estén. A Hector, Angélica, Julián y Willy qué han alegrado y molestado en los momentos más inoportunos, pero sin ellos la vida no tendría tanto sabor. Gracias al amor que siempre está, sin importar la distancia en la que se encuentre.

Por último, a todos aquellos que sólo mi inconsciente puede recordar y han marcado mi vida a través de estos años contribuyendo a ser lo que soy. Como diría un amigo mío: "No hay amor más grande que dar la vida por los amigos", que esa sea la senda que marque nuestros rumbos y a seguir caminando compañeros, que "poco o nada hemos hecho".

PD: De ti no me olvido.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO

UNO

Preliminares

A través de la historia el hombre a sido cautivado por la naturaleza y los cambios que ésta sufre. Estos cambios han motivado a la humanidad en emprender un camino que busca explicar dichos acontecimientos, aunque en la mayoría de los casos sólo es posible referirse al acontecimiento propiamente tal y no a sus razones o consecuencias. Nuestro mundo está sujeto a constantes cambios y esa es la idea fundamental que a inspirado muchas teoría físicas y matemáticas. Ya desde la época de Aristóteles los filósofos percibieron los incesantes cambios que acontecían a su alrededor, motivando así el estudio del movimiento, dando nacimiento a la Mecánica. La formalización de esta teoría se la debemos a Newton en el siglo XVIII, teoría que hasta nuestros días es conocida por *Mecánica Newtoniana*. La Mecánica Newtoniana busca modelar aspectos *globales* de la evolución de los fenómenos, a partir del conocimiento *local* que se tenga de la misma. En la Mecánica Newtoniana podemos distingir dos fenómenos: la *cinemática* que estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las causas del mismo, y la *dinámica* que estudia las causas del movimiento.

Las Ecuaciones Diferenciales han sido la principal herramienta que ha permitido el estudio del movimiento de los cuerpos. La Segunda Ley de Newton asegura que la causa del movimiento está asociada a una *fuerza externa*, que es proporcional a la aceleración alcanzada por el móvil. La constante de proporcionalidad es la *masa* del cuerpo:

$$F(t) = ma(t).$$

Supongamos que la posición de un móvil en un instante t se representa por un punto $x(t)$ en el espacio. La ecuación diferencial que modela la dinámica del móvil n-dimensional, según la segunda ley de Newton, está dada por

$$m\ddot{x}(t) = F(t) \tag{1.1}$$

siendo $\ddot{x}(t)$ la segunda derivada de $x(t)$ respecto a t. La ecuación diferencial (1.1) es conocida en la literatura por la *ecuación de movimiento* y modela la dinámica del móvil. En general, la fuerza F puede depender de la *posición*, la *velocidad* y el *tiempo* usando así la notación $F(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t))$ siempre y cuando no haya confusiones. En la teoría de ecuaciones diferenciales, la ecuación (2.1) se puede reducir a un sistema de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t)/m \\ \dot{y}(t) = F(t) \end{cases}$$

que admite soluciones locales, en caso de existir, para condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$. Así, a partir del comportamiento local del móvil, es posible determinar el movimiento o dinámica del móvil en torno de una vecindad de las condiciones iniciales. En adelante diremos que una solución a la ecuación diferencial (1.1) es *global* si $x(t)$ está definida para todo real t. Así mismo, diremos que $x(t)$ es *única* si es la única solución a la ecuación (1.1) para condiciones iniciales dadas.

Si el móvil es considerado como una partícula puntual de masa $m = 1$, la ecuación (1.1) modela la trayectoria de una partícula que se ve enfrentada a una fuerza externa F. La trayectoria de esta partícula depende de dos parámetros: *posición* y *momentum*. Estas dos cantidades determinan la trayectoria de una partícula, es decir, dados $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ es "posible" determinar una solución $x(t)$ a la ecuación de movimiento tal que $x(0) = q$ y $y(0) = p$. Hemos de notar que es "posible" la no existencia de una solución $x(t)$ a la ecuación de movimiento que satisfagan la relación $x(0) = q$ y $y(0) = p$. Más aun, en el caso de existir, puede no ser la única. Los fenómenos que resultan de interés para esta tesis están asociados a fuerzas F que engendran soluciones únicas (al menos en una vecindad de la condición inicial), de este modo, y salvo se especifique lo contrario, supondremos que las fuerzas externas generan soluciones únicas en vecindades de las condiciones iniciales.

Un fenómeno de estudio dentro de la mecánica Newtoniana es el *Scattering Clásico*. El Scattering Clásico compara dos dinámicas diferentes para el mismo sistema: la dinámica dada y la dinámica "libre". Este es el primer problema que encontraremos, precisar una definición de "dinámica libre" la cual debe ser determinada en cada caso individual. Las características que estos sistemas dinámicos libres tienen en común ser más sencillos que los dinámicos dados y generalmente conservan el momentum del sistema físico. El fenómeno de Scattering puede ser visto como una rama de la teoría de perturbación, es decir, la dinámica dada no es más que una perturbación a la dinámica libre. En adelante nos referiremos a *dinámica perturbada* en vez de dinámica dada.

Sea Σ un subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, que denominaremos el *espacio fase*, tal que todo elemento en Σ tiene segunda corrdenada no nula. Denotaremos por Ω todos los elemento de Σ tal que el problema con valores iniciales asociado a la ecuación (1.1) admite soluciones globales y únicas. Definamos la familia de operadores $T(t) : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ por la relación

$$T(t)(q, p) = (x(t; q, p), \dot{x}(t; q, p))$$

siendo $x(t) = x(t; q, p)$ la única solución global a la ecuación (1.1) para condiciones iniciales $x(0) = q$ y $\dot{x}(0) = p$. De este modo, la dinámica de partículas que obedecen la ecuación (1.1) quedan enteramente caracterizadas a partir de la familia de operadores $T(t)$ y el conjunto Ω, ya que a cada *estado* $(q, p) \in \Omega$ le corresponde una trayectoria $T(t)(q, p)$ que determina la evolución de la partícula. La familia de operadores $T(t)$ resulta de vital importancia para representar la dinámica Newtoniana en espacios de Hilbert. En la siguiente sección nos detendremos para "observar" como se realiza este proceso, y la importancia que conlleva en el estudio del Scattering Clásico.

1. Teoría de Koopmann

Consideremos Ω el subconjunto de Σ tal que el problema con valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = F(t, x(t)) \\ \dot{x}(0) = p \\ x(0) = q \end{cases}$$

admite solución global y única. Así la familia de operadores $T(t)$, definidas anteriormente, determina la trayectoria de una partícula para cada *estado* $(q,p) \in \Omega$.

Un resultado que tiene mucho interés en el Scattering Clásico se lo debemos a Koopmann [7], quien inyecta la dinámica Newtoniana definida sobre el espacio fase Ω en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre el cual la dinámica Newtoniana tiene su análoga en una dinámica cuántica. A continuación esbozaremos, si entrar en detalles, la construcción de este espacio de Hilbert y la dinámica cuántica asociada.

Consideremos el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ con la medida de Lebesgue y definamos la familia de operadores lineales $U(t)$ por la relación

$$(U(t)f)(\sigma) = f(T(-t)\sigma)$$

para toda f en $C_0^\infty(\Omega)$ de funciones infinitamente diferenciales que convergen a cero en infinito. Esta familia de operadores $U(t)$ se puede extender continuamente a un *grupo unitario* sobre todo $L^2(\Omega)$, es decir $\|U(t)\| = 1$ donde la norma es tomada en el espacio de los operadores lineales continuos de $L^2(\Omega)$ en si mismo, cada vez que la familia de operadores $T(t)$ sea invariante bajo la medida de Lebesgue, o sea $T(t)(\Omega)$ difiere en medida cero con Ω. La prueba de esta afirmación es consecuencia del hecho que el Jacobiano asociado a la transformación $T(-t)$ es igual a 1.

Sea $A(t)$ la matriz Jacobiana inversa asociada a la transformación $T(-t)$, luego $A(t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial $A'(t) = -\Phi(-t)A(t)$ siendo

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ F_y(t, x(t)) & 0 \end{pmatrix}.$$

Gracias al teorema de Liouville en ecuaciones diferenciales se tiene que

$$\det(A(t)) = e^{-\int_0^t \operatorname{tr}(\Phi(-s))\,ds} \det(A(0))$$

donde $\det(A)$ es el determinante de la matriz A, y $\operatorname{tr}(A)$ es la traza de A. Como la matriz $\Phi(-t)$ tiene traza cero, luego $\det(A(t)) = \det(A(0)) = 1$. De este modo,

$$\int_\Omega |U(t)f(\sigma)|^2\,d\sigma = \int_{T(t)(\Omega)} |f(\tau)|^2 |A(t)^{-1}|\,d\tau = \int_\Omega |f(\tau)|^2\,d\tau$$

lo que permite extender $U(t)$ a todo $L^2(\Omega)$ con norma unitaria dada la densidad de $C_0^\infty(\Omega)$ en este espacio de Hilbert. Más aun, es posible probar que $U(t)$ es un grupo unitario fuertemente continuo [2], permitiendo asegurar la existencia de un operador autoadjunto H definido sobre $L^2(\Omega)$ tal que

$$U(t) = e^{-itH},$$

resultado que debemos a Stone [2]. Así la dinámica Newtoniana que tiene asociado un operador $T(t)$ sobre Ω puede ser visto en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$, con la medida de Lebesgue, a través de la dinámica Cuántica que le asocia un grupo unitario fuertemente continuo $U(t)$. No es difícil probar que

$$(Hf)(x,y) = -i\nabla f(x,y) \cdot (y, F(0,x)),$$

donde el dominio de H contiene a las funciones infinitamente diferenciables con decaimiento al infinito[8]. La *ecuación de Schrödinger* que determina la dinámica cuántica asociada al operador autoadjunto H está dada por

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = H\psi(t,x)$$

siendo $|\psi(t,x)|$ una función en $L^2(\Omega)$.

Volviendo a nuestro problema de Scattering hemos de notar que el Scattering Clásico tiene un análogo en espacio de Hilbert donde las dinámicas están asociadas a operadores autoadjuntos denominados *Hamiltonianos.* La teoría en espacio de Hilbert es conocida en la literatura por Scattering Cuántico, existiendo un amplio desarrollo de ésta en la dinámica Cuántica. La importancia de poder representar la dinámica Newtoniana en un espacio de Hilbert la trataremos en la sección 3 de este capítulo, y está asociada a construir una teoría de Scattering Clásico consistente con su análogo Cuántico.

2. Fuerzas Conservativas

Cuando la fuerza proviene de un potencial, es decir $F(t) = -\nabla V(t)$, la dinámica tiene asociada una cantidad H que llamaremos *Hamiltoniano* que, precisamente, es la energía conservada del sistema. Es decir, si una partícula libre obedece la ecuación de movimiento

$$\ddot{x}(t) = -\nabla V(x(t))$$

entonces $H(q,p) = (1/2)p^2 + V(q)$. Así, en lenguaje de Hamiltonianos podemos referirnos a la dinámica libre a través de $H_0(x(t), \dot{x}(t))$ y a la dinámica perturbada a través de $H(x(t), \dot{x}(t))$ como cantidades conservadas. De este modo, es pertinente asociar a cada Hamiltoniano H la familia de operadores $T(t)$ por la relación $H(T(t)) = E$ con E constante. Es decir, el Hamiltoniano libre H_0 tiene asociada una familia de operadores $T_0(t)$ mientras que el perturbado H tiene asociada una familia $T(t)$. Cada vez que una fuerza proviene de un potencial diremos que la *fuerza es conservativa*, ya que la energía total del

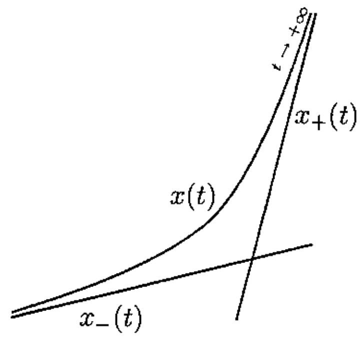

Figura 1.1: Scattering

sistema no se pierde. Un resultado de los cursos de cálculo asegura que toda fuerza conservativa proviene de un potencial continuamente diferenciable, mientras que su recíproco es inmediato por lo anteriormente expuesto.

Tanto el Scattering Newtoniano como el Cuántico tiene una estructura geométrica, que relaciona el comportamiento asintótico de la dinámica perturbada con el comportamiento asintótico de la dinámica libre. Más explícitamente, como lo muestra la figura 1.1, la evolución del sistema perturbado para un estado dado tiene comportamiento libre para tiempos al infinito. En el caso del Scattering Clásico la evolución del sistema perturbado está dado por $T(t)(q,p)$ entonces existen soluciones al sistema libre $T_0(t)(a_\pm, b_\pm)$ tales que

$$\lim_{t\to\pm\infty} |T(t)(q,p) - T_0(t)(a_\pm, b_\pm)| = 0$$

El operador de Scattering Clásico, que relaciona el comportamiento libre con el perturbado, es un mapeo S definido por la relación

$$S(T_0(0)(a_-, b_-)) = T_0(0)(a_+, b_+)$$

Así resulta fundamental la existencia y unicidad de soluciones globales tanto para el sistema libre como su perturbado. Similarmente se entiende el Scattering Cuántico en espacios de Hilbert, donde los estados son elementos en dicho espacio y el operador $T(t)$ es remplazado por un grupo unitario fuertemente continuo.

3. Una buena teoría de Scattering Clásico

En el Scattering Cuántico se dice tener una "buena teoría" si el operador de Scattering cuántico es unitario. Gracias a la teoría de Koopmann y otros resultados conocidos [8], la unitariedad del operador de Scattering Cuántico en espacios de Hilbert es equivalente a la invarianza en medida del operador $T(t)$ definido sobre un subconjunto Ω de Σ que difiere en medida cero de Σ. Así, en el capítulo 3, introduciremos el concepto de *asintóticamente completo*, que refleja la idea de invarianza en medida como Scattering para casi toda energía, salvo un conjunto de medida de Lebesgue cero.

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y H_0 un operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}$. Consideremos la ecuación que modela la *dinámica libre*

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = H_0\varphi$$

tal que el grupo unitario $U_0(t) = e^{-itH_0}$ determina la dinámica del sistema libre para todo estado $\psi \in \mathcal{H}$. Sea H otro operador autoadjunto definido sobre $\mathcal{H}$ que determina la *dinámica perturbada* a través de la ecuación

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = H\varphi$$

siendo $U(t) = e^{-itH}$ el grupo unitario que determina la dinámica perturbada del sistema. El Scattering Cuántico asociado a estos sistemas determina el comportamiento asintótico del sistema perturbado en relación al sistema libre, es decir, busca determinar los estados $\psi \in \mathcal{H}$ para los cuales existen $\phi_\pm \in \mathcal{H}$ tal que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|U(t)\psi - U_0(t)\phi_\pm\| = 0$$

La relación anterior permite definir el operador de Scattering S sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ que mapea el estado ϕ_- en el estado ϕ_+. La teoría de Scattering Cuántico nos permite asegurar que en caso de S estar definido sobre todo $\mathcal{H}$, entonces S debe ser unitario.

En la teoría de Scattering Clásico resulta, en la mayoría de los casos, imposible definir S sobre todo Σ. Gracias a la teoría de Koopmann podemos representar el dinámica clásica en algún espacio de Hilbert, probando así que la unitariedad de operadores es equivalente a la invarianza en medida de la familia de operadores $T(t)$. De este modo, en los siguiente capítulos, trataremos el problema de Scattering para potenciales V tales que $T(t)$ sea un invariante en medida.

CAPÍTULO

DOS

Introducción

Un problema importante dentro de la mecánica clásica es determinar la trayectoria de una partícula. La *ecuación de movimiento*, según las leyes de la mecánica Newtoniana, de una partícula n-dimensional está dada por la ecuación

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)) \tag{2.1}$$

donde F es la fuerza que actúa sobre la partícula. Cuando $F(x) = -\nabla V(x)$, para algún *potencial* V, entonces la ecuación (2.1) es conservativa en el sentido que

$$E = \frac{1}{2}\|\dot{x}(t)\|^2 + V(x(t)) \tag{2.2}$$

es constante. La ecuación (2.1) modela el comportamiento de una partícula clásica que es afectada por una fuerza F, mientras que (2.2) relaciona la dinámica de la partícula frente al potencial V. Ambas ecuaciones permiten determinar la evolución del sistema de una partícula al enfrentarse a dicho potencial. La *ecuación de energía* (2.2) es la energía conservada del sistema a lo largo del tiempo.

Un problema que se ha tratado con mucho interés a lo largo de los últimos siglos es determinar el comportamiento de dichas partículas para tiempos significativamente grandes. La *Teoría de Scattering Clásico* ha permitido dar parcialmente una respuesta a esta interrogante comparando la dinámica dada por la fuerza F con una dinámica más simple (libre) que, generalmente, conserva energía y momentum. Una de las primeras problemáticas en el Scattering Clásico es determinar la "dinámica libre". Nosotros abordaremos dos problemas a lo largo de esta tesis, que denominaremos *Scattering Clásico en Partícula Libre* y *Scattering Clásico en Campo Magnético.* Cuando nos referimos a "partícula libre" lo que estamos intentando decir es que la dinámica libre de una partícula está asociada a una fuerza constante e igual a cero, mientras que "campo magnético" hace referencia a dinámica libre con fuerza constante e igual a -1. De este modo, no deberemos confundir partícula libre con partícula en dinámica libre, a pesar que en nuestro lenguaje no lo diferenciaremos, salvo sea necesario.

Un aspecto importante, en el cual no profundizaremos en esta tesis, es la relación que existe entre el Scattering clásico y el Scattering cuántico. Pero si es fundamental mencionar que la caracterización de una "buena teoría de Scattering clásica" está asociada directamente a una "buena teoría de Scattering cuántico". En otras palabras, en el Scattering cuántico se considera tener una buena teoría cuando el operador de Scattering cuántico resulta ser un operador unitario. Mediante la *teoría de Koopman*[7] es posible traducir la dinámica clásica a un problema en espacios de Hilbert, donde operadores unitarios en espacios de Hilbert es equivalente a invarianza de medida (ver sección 3 del capítulo 1). Más explícitamente, una buena teoría de Scattering clásico equivale a definir el operador de Scattering clásico S sobre un conjunto que denotaremos por $D(S)$ que difiere en medida de Lebesgue cero con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. El concepto de invarianza de medida es denominado la literatura por *asintóticamente completo*, significado en el que profundizaremos en los capítulos siguientes.

Como anteriormente lo hemos mencionado, nuestro interés está centrado en el desarrollo de una teoría de Scattering Clásico que compara las dinámicas asociadas a los Hamiltonianos $H_0 = (1/2)\dot{x}(t)^2 + V_0(x(t))$ y $H = (1/2)\dot{x}(t)^2 + V_0(x(t)) + V(x(t))$, con V admitiendo una cantidad finita de discontinuidades. En el capítulo 3 abordaremos el problema de Scattering para $V_0(x) \equiv 0$ mientras que en el capítulo 4 $V_0(x) \equiv 1$. En ambos casos haremos un análisis acabado para potenciales V continuamente diferenciables con cierto decaimiento al infinito, para luego hacer una extensión el caso discontinuo. El problema que conlleva el desarrollo de esta teoría en el caso de potenciales V discontinuos es la ausencia de soluciones globales a la ecuación (2.1) sobre un conjunto "muy grande" de condiciones iniciales. Teniendo así, vernos en la necesidad de construir una teoría que extienda el concepto de *solución fuerte* a *solución clásica*. Caracterizaremos una familia de potenciales V tales que el Scattering clásico admita una buena teoría (en el sentido anteriormente mencionado), determinando una forma explícita del operador de Scattering S y su problema inverso, es decir recuperar el potencial V a partir de S. Comenzaremos haciendo un análisis acabado del caso continuo, para luego extendernos al caso discontinuo considerando los resultados precedentes.

CAPÍTULO

TRES

Scattering Clásico en Partícula Libre

1. Scattering Clásico

Una partícula clásica puede verse afectada por una fuerza F que provienen o no de un potencial V. El Scattering clásico busca caracterizar el comportamiento asintótico de partículas perturbadas por una fuerza $F(x) = -\nabla V(x)$, en relación a un sistema dinámico libre. En esta sección y en lo que sigue del capítulo diremos que un sistema dinámico libre es aquel que no se ve afectado por fuerzas a lo largo de su trayectoria. En la dinámica clásica dichas partículas tienes ecuación de movimiento

$$\ddot{x}(t) = 0$$

para todo real t. En ocasiones resulta ser más conveniente representar esta ecuación a partir de su Hamiltoniano $H_0(x(t), \dot{x}(t)) = (1/2)\dot{x}(t)^2$ como una cantidad conservada a través del tiempo. La ecuación de movimiento de una partícula libre tiene solución para toda condición inicial (q, p) en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Más aun, las soluciones son *globales*, es decir, están definidas para todo real t. En la siguiente definición consideraremos el conjunto de todas las condiciones iniciales que entregan soluciones libres, globales y no acotadas.

Similarmente, la ecuación de movimiento de una partícula perturbada está dada por

$$\ddot{x}(t) = F(x(t)) \tag{3.1}$$

para todo real t. En el caso que $F(t) = -\nabla V(x(t))$, es decir la fuerza F proviene de un potencial V, el sistema perturbado tiene asociado el Hamiltoniano $H = (1/2)\dot{x}(t)^2 + V(x(t))$ cantidad conservada a través del tiempo.

Definición 1. Definamos el **espacio de los estados**

$$\Sigma = \{(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \, : \, p \neq 0\}$$

Diremos que $(q, p) \in \Sigma$ es un **estado de Scattering** si existe $y(t)$ solución al sistema dinámico libre, con $(y(0), \dot{y}(0)) = (q, p)$, y $x(t)$ una solución a la ecuación (3.1), no necesariamente global, tales que una de las siguientes condiciones se satisface:

(i)
$$\lim_{t\to\infty}\{(x(t),\dot{x}(t))-(y(t),\dot{y}(t))\}=0$$

(ii)
$$\lim_{t\to-\infty}\{(x(t),\dot{x}(t))-(y(t),\dot{y}(t))\}=0$$

De acuerdo a la notación de la definición anterior, una partícula con trayectoria $x(t)$ que tiene asociado un estado de scattering (q,p) no puede permanecer mucho tiempo en un mismo lugar. Dicho también de otro modo, la partícula está constantemente escapando de la influencia del potencial V, con un comportamiento asintótico a una recta de ecuación $y(t)=pt+q$. Evidentemente no todo potencial V admite que todo par $(q,p)\in\Sigma$ sea un estados de Scattering, más aun existen potenciales que nunca permiten dicho fenómeno. Un ejemplo claro de ello, que se deja como ejercicio al lector, es considerar $V(x)=x^2$. Este potencial atrapa las partículas y las hace oscilar en una región acotada de manera periódica a lo largo del tiempo.

Un aspecto fundamental dentro de la teoría de Scattering es determinar soluciones únicas y globales, ya que éstas caracterizan de manera única el comportamiento de la partícula a lo largo del tiempo. Así, a cada estado le corresponde a lo más una solución del sistema (3.1). Esto motiva la siguientes preguntas ¿para qué potenciales V la ecuación (3.1) admite soluciones globales y únicas? y ¿cuáles de estas soluciones admiten estados de tipo Scattering? Estas respuestas las desarrollaremos en las siguientes secciones.

1.1. Operador de Scattering

Sin duda alguna el problema de existencia y unicidad para la ecuación diferencial $\ddot{x}(t)=-\nabla V(x(t))$ depende directamente del potencial V. Como lo habíamos mencionado anteriormente, existen potenciales V para los cuales no existen estados de tipo Scattering. Entonces determinar una familia de potenciales V que engendre soluciones globales, únicas y que admitan estados de tipo Scattering resulta ser una tarea fundamental dentro de esta teoría. El problema de Scattering que abordaremos a lo largo del capítulo será para partículas unidimensionales. Por lo tanto, la ecuación diferencial a trabajar será

$$\ddot{x}(t)=-V'(x(t)) \tag{3.2}$$

con V una función definida sobre la recta real.

Si $x(t)$ es una solución del sistema perturbado que admite un estado de Scattering (q,p), entonces, y sin perdida de generalidad, se satisface

$$\lim_{t\to-\infty}(\dot{x}(t)-p)=0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to-\infty}(x(t)-pt)=q$$

Una de las primeras consecuencias de esta idea es la ausencia de la presencia del potencial (que perturba a la partícula) para tiempos grandes. De este modo, una buena familia de potenciales V para los cuales (3.2) admite soluciones globales, únicas y con estados de tipo Scattering son aquellos que tienen decaimiento al infinito, es decir

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0$$

En este capítulo consideraremos fuerzas conservativas continuas $F(x) = -V'(x)$ que satisfacen las siguientes condiciones [4]:

(I) Existe $C > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|F(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}$$

(II) $F(x)$ es localmente Lipshitz continua en $\mathbb{R}$.

(III) Existe $r > 0$, $C > 0$ y $\delta > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{C}{r^{2+\delta}}|x-y|$$

para todo x, y verificando $|x|, |y| \geq r$.

Las hipótesis (I) y (II) aseguran la existencia y unicidad global de soluciones a la ecuación (3.2) para condiciones iniciales dadas [3]. En cambio, las condiciones (I) y (III) aseguran que cada estado $(q,p) \in \Sigma$ es de tipo Scattering para $t \to \pm\infty$ [3]. Estas afirmaciones serán probadas en los siguientes teoremas [3].

Teorema 2. *Sea F una función real que satisface las condiciones (I) y (II). Luego el problema con valores iniciales*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = F(x(t)) \\ \dot{x}(0) = p \\ x(0) = q \end{cases}$$

admite una única solución para todo $(q,p) \in \Sigma$.

Demostración. Consideremos el problema con valores iniciales del teorema. Como F es localmente Lipshitz, entonces dado q existen $r > 0$ y $K > 0$ tales que

$$|F(x) - F(y)| \leq K|x-y|$$

para todo $|q-x| \leq r$, $|q-y| \leq r$. Definamos los números reales $t_1 < t_2$ como las raíces de la ecuación $Mt^2 + 2pt - 2r = 0$ y el conjunto

$$\mathcal{F} = \{u(t) \in C[t_1,t_2] \,:\, \|q-x\|_\infty \leq r\}$$

donde $|F(x)| \leq M < \infty$ para todo real x, y $C[t_1, t_2]$ es el espacio métrico de las funciones reales continuas definidas sobre $[t_1, t_2]$ con la norma del supremos. Definamos el operador T sobre $\mathcal{F}$ por la relación

$$T(x(t)) = q + pt + \int_0^t \int_0^s F(x(\tau))\, d\tau\, ds$$

De la relación (I) se deduce que $\|T(x) - q\| \leq r$, por lo tanto el operador T se inyecta en $\mathcal{F}$. Además, para todo $x, y \in \mathcal{F}$ se satisface

$$\|T(x) - T(y)\|_\infty \leq \frac{t_1^2 K}{2} \cdot \|x - y\|_\infty$$

ya que F es Lipshitz continua de constante K sobre $\mathcal{F}$. Si $T^{(n)} = T^{(n-1)} \circ T$ es la n-ésima composición del operador T, se prueba la relación

$$\|T^{(n)}(x) - T^{(n)}(y)\|_\infty \leq \frac{(t_1^2 K)^n}{(2n)!} \cdot \|x - y\|_\infty$$

para todo $x, y \in \mathcal{F}$. Luego existe un natural n tal que $T^{(n)}$ es contracción. Esto prueba la existencia de un único punto fijo $x \in \mathcal{F}$ para el operador T, que satisface la ecuación diferencial con condiciones iniciales $\dot{x}(0) = p$ y $x(0) = q$. ■

El teorema anterior nos asegura la existencia y unicidad en vecindades de $(q,p) \in \Sigma$. Dado que estamos interesados en soluciones globales para el caso $F = -V'$ nos gustaría extender esta solución a toda la recta real. Si multiplicamos la ecuación de movimiento (3.2) por $\dot{x}(t)$ e integramos entre $[0, t]$ se tiene

$$\dot{x}(t)^2 = p^2 + 2\int_q^{x(t)} F(u)\, du$$

De esta relación se obtiene, dado (I), que $\dot{x}(t)^2 \leq p^2 + 2C\pi$, para todo $t \in [t_1, t_2]$. Así, podemos definir los problemas con valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -V'(x(t)) \\ \dot{x}(0) = p_- \\ x(0) = q - r \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x}(t) = -V'(x(t)) \\ \dot{x}(0) = p_+ \\ x(0) = q + r \end{cases} \tag{3.3}$$

donde

$$p_- = \lim_{t \to t_1} \dot{x}(t) \qquad \text{y} \qquad p_+ = \lim_{t \to t_2} \dot{x}(t)$$

Por lo tanto, dada la solución $x(t)$ sobre $[t_1, t_2]$ es posible extenderse por el teorema anterior a vecindades cerradas de t_1 y t_2 cada vez que $V'(q \pm r) \neq 0$ y $p_\pm \neq 0$. Puesto que es estos casos es posible tener por solución global $x_\pm(t) = q \pm r$ para todo real t. Una condición necesaria pero no suficiente, que se deja como ejercicio al lector, para obtener soluciones globales y únicas es que $H(q,p) \neq V(x_0)$ cada vez que $V'(x_0) = 0$.

Recordemos que estamos interesados en determinar una teoría tal que el conjunto de estados de Scattering difiera en medida cero con Σ. En vista de lo anterior, el teorema siguiente nos permitirá asegurar la existencia de estados de Scattering para todo $(q,p) \in \Sigma$.

Teorema 3. *Sea F una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que satisface las condiciones (I) y (III). Sean $(q,p) \in \Sigma$, entonces existe una única solución (no necesariamente global) de la ecuación diferencial*

$$\ddot{x}(t) = F(x(t))$$

que satisface las relaciones

$$\lim_{t\to-\infty} |\dot{x}(t) - p| = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to-\infty} |x(t) - (pt+q)| = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Construiremos una solución sobre $(-\infty, T)$, donde $T \neq q/p$ es un real negativo que satisface las siguientes relaciones:

(i) $Cp^{-2}\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon)^{-1}|q+pT|^{-\varepsilon} < 1$.

(ii) $\gamma = C(\frac{p}{4})^{-(2+\delta)}\delta^{-1}(1+\delta)^{-1}|T|^{-\delta} < 1$.

(iii) $|pt| \leq 4|q+pt-1|$, para todo $t \leq T$.

Consideremos el espacio métrico completo

$$\mathcal{F} = \{u \in C(-\infty, T) \,:\, \|u\|_\infty \leq 1\}$$

donde $\|\cdot\|_\infty$ es la norma del supremos sobre las funciones continuas definidas en $(-\infty, T)$. Definamos el operador T sobre $\mathcal{F}$ dado por

$$T(u(t)) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} F(q + p\tau + u(\tau))\, d\tau\, ds$$

Gracias a que F satisface (I) y T satisface (i), entonces $\|T(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$. Es decir, T es un operador de $\mathcal{F}$ en si mismo. Además, la condición (I) junto con (ii) y (iii) nos dicen que T es contracción sobre $\mathcal{F}$, o sea

$$\|T(u) - T(v)\|_\infty \leq \gamma\|u - v\|_\infty$$

para todo $u, v \in \mathcal{F}$ y $0 < \gamma < 1$ definido por (iii). Entonces, por el teorema del punto fijo de Banach, sigue que existe un único $u \in \mathcal{F}$ tal que $T(u) = u$. Ahora consideremos la función continua $x(t)$ definida sobre todo $(-\infty, T)$ dada por

$$x(t) = q + pt + u(t)$$

No es difícil probar que $x(t)$ satisface todas las condiciones del teorema, dado que $u(t)$ decrece a cero cuando $t \to -\infty$ gracias a que $\|u\|_\infty \leq 1$ y F satisface (III). ■

Como en el comentario del teorema 2, es posible que una solución que admite comportamiento asintótico a una recta $q + pt$ cuando $t \to -\infty$ pueda no ser única, puesto que al extenderla se tenga $\dot{x}(t_0) = 0$ y $x(t_0) = x_0$ con $V'(x_0) = 0$ para algún real t_0.

Gracias al teorema 2 podemos asegurar la existencia de soluciones (no necesariamente globales) a la ecuación diferencial $\ddot{y}(t) = F(y(t))$ que satisfacen

$$\lim_{t\to\infty} |\dot{y}(t) - b| = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to\infty} |y(t) - (bt + a)| = 0$$

para $(a, b) \in \Sigma$ dado. Esta afirmación es consecuencia de considerar en el teorema la solución $y(t) = x(-t)$ y estado $(a, b) = (q, -p)$. Por otro lado, no es difícil probar que toda solución global a la ecuación (3.2) que tiene comportamiento asintótico a una recta cuando $t \to -\infty$ debe necesariamente ser no acotada cuando $t \to +\infty$. Más aun, también tendrá comportamiento asintótico a una recta cuando $t \to +\infty$. Esta última afirmación será consecuencia de lema 7 que probaremos en la sección 1.2.

Definición 4. Sea $x_-(t)$ solución a la ecuación (3.2) que tiene comportamiento asintótico $q+pt$ cuando $t \to -\infty$. Definimos el **operador de onda** $\Omega_+ : \Sigma_0 \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ por la relación

$$\Omega_+(q, p) = (x_-(0), \dot{x}_-(0))$$

Donde Σ_0 son todos los estados $(q, p) \in \Sigma$ tales que $p^2 \neq 2V(x_0)$ con $V'(x_0) = 0$. Similarmente, definimos Ω_- por la relación

$$\Omega_-(a, b) = (x_+(0), \dot{x}_+(0))$$

para $x_+(t)$ una solución al sistema perturbado con comportamiento asintótico $a + bt$ cuando $t \to \infty$.

Es bien sabido [6] que estos operadores están bien definidos y que los conjuntos $\operatorname{Ran} W_+$, $\operatorname{Ran} W_-$ y $\Sigma - \Sigma_{\text{bound}}$ coinciden, salvo un conjunto de medida cero, donde Σ_{bound} representa el conjunto de las condiciones iniciales que generan soluciones acotadas de la ecuación (3.2). Los operadores de onda nos permiten caracterizar el comportamiento asintótico de soluciones al sistema perturbado. Así, la siguiente definición determina explícitamente el comportamiento de soluciones no acotada que tienen comportamiento asintótico libre.

Definición 5. Definimos el **operador de Scattering** $S : D(S) \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ por la relación $Sw = \Omega_-^{-1}\Omega_+ w$, donde $D(S)$ es un subconjunto de Σ_0.

La caracterización del dominio $D(S)$ del operador de Scattering depende directamente del recorrido de los operadores de onda. En la siguiente sección caracterizaremos el dominio del operador de Scattering para potenciales definidos sobre la recta real que satisfacen (I), (II) y (III) anteriormente dadas. Antes de finalizar esta sección daremos una definición que caracteriza una buena teoría de Scattering.

Definición 6. Diremos que el operador de Scattering S es **asintóticamente completo** si $\operatorname{Ran} W_+$, $\operatorname{Ran} W_-$ y $\Sigma - \Sigma_{\text{bound}}$ coinciden, salvo un conjunto de medida cero.

Esto nos deja la idea, salvo por un conjunto de medida cero, que todo estado en Σ es imagen o preimagen de un estado en Σ. Dicho de otro modo, casi todos los elementos de Σ son estados de Scattering. Es importante hacer notar que $\Sigma - \Sigma_{\mathbf{bound}}$ no es el conjunto de estados de Scattering, sino mas bien el conjunto que engendra soluciones no acotadas al sistema perturbado. No es difícil de probar que asintóticamente completo es equivalente a que el conjunto de estados de Scattering difiere en un conjunto de medida cero con Σ. Esta afirmación se deja como ejercicio al lector, haciendo mención al hecho que los operadores de onda son mapeos invertibles entre su dominio y recorrido.

1.2. Dominio del Operador de Scattering

El dominio $D(S)$ del operador de Scattering S depende directamente de los recorridos de los operadores de onda $\Omega_{\pm}$. Esto conlleva a preguntarnos si el operador de Scattering S, asociado a un potencial V, admite dominio no vacío. La finalidad de esta sección es caracterizar el dominio del operador de Scattering asociado a potenciales que satisfacen (I), (II) y (III) de la sección 1.1. Probaremos que dichos potenciales inducen una buena teoría de Scattering, en el sentido que S es asintóticamente completo, es decir $\operatorname{Ran} W_+$, $\operatorname{Ran} W_-$ y $\Sigma - \Sigma_{\mathbf{bound}}$ coinciden, salvo un conjunto de medida cero.

Un papel fundamental, para caracterizar el dominio del operador de Scattering, juegan los conjuntos que definiremos a continuación:

$$\begin{aligned} E_- &= \{x \in \mathbb{R} : V'(x) = 0 \text{ y } V(x) > V(y), \text{ para todo } y < x\}, \\ E_+ &= \{x \in \mathbb{R} : V'(x) = 0 \text{ y } V(x) > V(y), \text{ para todo } y > x\}. \end{aligned}$$

Estos conjuntos, E_- y E_+ consisten de los máximos locales del potencial $V(x)$ que pueden verse desde $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente. Es claro que $V(E_-)$ y $V(E_+)$ son conjuntos medibles con medida de Lebesgue cero.

Lema 7. *Sea $x(t)$ la única solución global a la ecuación (3.2) que tiene comportamiento asintótico $pt + q$ cuando $t \to -\infty$. Entonces existen $(a, b) \in \Sigma$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = b \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to\infty} (x(t) - bt) = a$$

DEMOSTRACIÓN. Sin perdida de generalidad supondremos que $p > 0$. Definamos $I(t) = x(t)^2/2$, que satisface las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= \dot{x}(t)x(t) \\ \ddot{I}(t) &= p^2 - (V'(x(t)) + 2V(x(t))) \end{aligned}$$

Como $F(x) = -V'(x)$ satisface (I), se tiene que $V'(x)$ y $V(x)$ van a cero cuando x va al infinito. Además, por conservación de energía tendremos que $|x(t)| \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$|V'(x(t)) + 2V(x(t))| < \frac{p^2}{2}$$

para todo $t > t_0$. Luego existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $I(t) \geq \frac{p^2}{2}t^2 + ct + d$, y podemos deducir que $|x(t)| \geq pt$ para t suficientemente grande. Así, podemos definir

$$b = \dot{x}(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} F(x(s))\, ds = \lim_{t\to\infty} \dot{x}(t)$$

y

$$a = x(t_0) - bt_0 - \int_{t_0}^{\infty}\int_{s}^{\infty} F(x(\tau))\, d\tau\, ds = \lim_{t\to\infty} (x(t) - bt)$$

dado que

$$\int_{t_0}^{t} F(x(s))\, ds \qquad \text{y} \qquad \int_{t_0}^{t}\int_{s}^{\infty} F(x(\tau))\, d\tau\, ds$$

convergen cuando $t \to \infty$, gracias a que F satisface (I) y que $|x(t)| \geq pt$ para todo t suficientemente grande. ■

Teorema 8. *Sea S el operador de Scattering asociado a un potencial V que satisface (I), (II) y (III).*

(a) Sea $p > 0$. Entonces $(q,p) \in D(S)$ si y sólo si $p^2/2 \notin V(E_-)$.

(b) Sea $p < 0$. Entonces $(q,p) \in D(S)$ si y sólo si $p^2/2 \notin V(E_+)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $p > 0$ con $p^2 < 2\|V\|_\infty$. Sea $(q,p) \in D(S)$ y $(a,b) = S(q,p)$, entonces por el Lema 14 tendremos que $b = -p$. Entonces existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\dot{x}(t_1) = 0$.

Supondremos que existe $x_0 \in E_-$ con $p^2 = 2V(x_0)$. Por la ecuación de conservación de energía $V(x(t_1)) = 2p^2$, entonces es necesario que $x(t_1) \geq x_0$. De este modo, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ que satisface $x(t_0) = x_0$. Por lo tanto, el problema con valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -V'(x(t)) \\ \dot{x}(t_0) = 0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admite por solución $x(t) \equiv x_0$, lo que contradice la unicidad.

Recíprocamente, para p positivo supondremos que $p^2/2 \notin V(E_-)$. En este caso los operadores de onda está bien definidos y el recorrido de Ω_- contiene al recorrido de Ω_+, consecuencia del Teorema 3 y el Lema 7. La prueba de la parte (b) es similar a lo ya expuesto. ■

Este resultado termina por asegurar que el operado de Scattering S asociado a potenciales que satisfacen (I), (II) y (III) es asintóticamente completo, y por lo tanto admite una buena teoría de Scattering.

Un problema interesante es determinar una teoría de Scattering para "alguna" familia de potenciales discontinuos. En la siguiente sección, y en lo que resta del capítulo, trataremos el problema de Scattering para dichos potenciales. Abordaremos el problema que se enfrenta por consecuencia de la discontinuidad del potencial, determinaremos una definición de Scattering consistente con el caso continuo y representación del operador. Además trataremos el problema inverso, que es recuperar el potencial a partir del operador S.

2. Potencial discontinuo con decaimiento al infinito

Recordemos que el modelo físico que caracteriza la dinámica de una partícula clásica que interactúa con una fuerza conservativa está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + V(x(t)) = E$$

donde V es el potencial asociado a la fuerza conservativa y E la energía conservada. En la sección anterior hemos probado que dicha ecuación de movimiento admite solución global y única para una familia específica de potenciales V.

Figura 3.1: Potencial con discontinuidad

Nuestro principal interés es determinar una teoría de Scattering para potenciales con un número finito de discontinuidades, con límites laterales finitos en la derivada. Sea V un potencial positivo con una única discontinuidad en $x = x_0$, tal que existen V_1 y V_2, positivos, continuamente diferenciables satisfaciendo:

(I) Existe $C > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|V_i'(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}$$

(II) $V_i'(x)$ es localmente Lipshitz continua en $\mathbb{R}$.

(III) Existe $r > 0$, $C > 0$ y $\delta > 0$ tal que

$$|V_i'(x) - V_i'(y)| \leq \frac{C}{r^{2+\delta}}|x-y|$$

para todo $x, y \neq x_0$ verificando $|x|, |y| \geq r$.

(IV) $V_1(x) = V(x)$ para todo $x < x_0$ y $V_2(x) = V(x)$ para todo $x > x_0$.

A esta familia de potenciales V la denotaremos por $\mathcal{M}$. Consideremos el siguiente problema con valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -V'(x(t)) \\ \dot{x}(0) = p \\ x(0) = q \end{cases} \tag{3.4}$$

tal que $p \neq 0$ y $q \neq x_0$. De la ecuación de energía asociada al sistema se deduce que $2E = p^2 + 2V(q)$, donde E es la energía conservada. Si $E < V(x_0)$ es posible construir soluciones globales, fuertes y únicas al problema con valores iniciales (3.4). Sin pérdida de generalidad, supondremos que $q < x_0$ entonces la partícula se ve enfrentada, en un primer instante, al potencial V_1. Sea $x(t)$ la solución al problema con valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -V_1'(x(t)) \\ \dot{x}(0) = p \\ x(0) = q \end{cases}$$

Si existiera t_0 tal que $x(t_0) = x_0$, entonces de la ecuación de energía se obtendría que $\dot{x}(t_0)^2 < 0$, una clara contradicción. Así $x(t) < x_0$, para todo real t, de modo que esta solución es global, fuerte y única al problema con valores iniciales (3.4). Por otro lado, si $E > \|V\|_\infty$ no es posible construir soluciones fuertes al problema con valores iniciales (3.4). Supongamos que si es posible construir una solución $x(t)$ que sea global, fuerte y única a (3.4), luego por conservación de energía se tiene que $\dot{x}(t) > 0$ para todo real t. Entonces $x(t)$ es no acotada que recorre toda la recta real. Si $x(t)$ fuera una solución fuerte, tendríamos que $\dot{x}(t)$ sería continua, pero por conservación de energía $\dot{x}(t_0)^2$ toma los valores $2(E - V_1(x_0))$ y $2(E - V_2(x_0))$ lo que es una clara contradicción.

Este es el principal problema que debemos enfrentar para determinar una teoría de Scattering para potenciales con un número finito de discontinuidades: la ausencia de soluciones fuertes para energías suficientemente grandes. Consecuencia de ello surge la siguiente pregunta ¿qué entenderemos por solución con comportamiento asintótico libre al problema (3.4) para energías suficientemente grandes? La siguiente definición nos dará la intuición de soluciones globales, únicas y que generalicen el concepto de soluciones fuertes.

Definición 9. Diremos que $x(t)$ es una **solución clásica** para el problema con valores iniciales (3.4) si satisface las siguientes condiciones:

(i) $x(t)$ es global y continua.

(ii) $x(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$$

para todo t tal que $x(t) \neq x_0$.

(iii) Si existe t_0 tal que $x(t_0) = x_0$ entonces

- Si $\max\{E - V_1(x_0), E - V_2(x_0)\} \leq 0$. Luego, o bien $x(t) \leq x_0$ para todo t, o bien $x(t) \geq x_0$ para todo t.
- Si $\max\{E - V_1(x_0), E - V_2(x_0)\} > 0$. Luego existe $\delta > 0$ tal que, o bien $x(t_0 + t) > x_0$ y $x(t_0 - t) < x_0$ para todo $0 < t < \delta$, o bien $x(t_0 + t) < x_0$ y $x(t_0 - t) > x_0$ para todo $0 < t < \delta$.

Evidentemente las condiciones (i) y (ii) en la definición anterior caracterizan una solución global, fuerte y única, cuando V es continuo. La condición (iii) es un fenómeno natural en el comportamiento de una solución fuerte: "si la energía cinética $\dot{x}(t)^2/2$ en un instante de tiempo t es diferente de cero, entonces existe $\delta > 0$ tal que la solución $x(t)$ seguirá la misma dirección para todo $0 < t < \delta$".
A partir de la definición 7 construiremos una teoría de Scattering, que será asintóticamente completa para los potenciales V en la familia $\mathcal{M}$. En lo sucesivo definiremos los operadores de onda y Scattering asociados a *soluciones clásicas* no acotadas, y determinaremos una representación explícita del operador de Scattering S asociado a este problema.

La caracterización de los operadores de onda, y por ende del operador de Scattering, dependen fundamentalmente de la unicidad de soluciones de la ecuación (3.4). Al introducir la idea de *solución clásica* en la definición 7, abrimos una nueva veta de Scattering Clásico, pero ahora para potenciales que admiten un número finito de discontinuidades. Todo el análisis que desarrollaremos en adelante será para potenciales V en $\mathcal{M}$ definidos al comienzo de esta sección. Cada uno de los resultados que a continuación expondremos tiene una extensión inmediata a potenciales con un número finito de discontinuidades, así no distinguiremos en nuestro lenguaje si nos referimos a uno o varios puntos de discontinuidad.

A continuación, previo a definir los operadores de Onda y Scattering para potenciales discontinuos, propondremos dos resultados que aseguran la unicidad de *soluciones clásicas* a la ecuación (3.4), y la existencia de *estados de Scattering.* Definamos

$$\Sigma_{x_0} = \{(q,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, q \neq x_0,\, p \neq 0\}$$

que denominaremos el **espacio de estados** asociado a la familia $\mathcal{M}$.

Proposición 10. *Sea V un potencial en $\mathcal{M}$. Luego el problema con valores iniciales*

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -V'(x(t)) \\ \dot{x}(0) = p \\ x(0) = q \end{cases}$$

admite una única solución clásica para todo $(q,p) \in \Sigma_{x_0}$.

Proposición 11. *Sea V un potencial en $\mathcal{M}$ y sea $(q,p) \in \Sigma_{x_0}$. Luego existe una única solución clásica (no necesariamente global) de la ecuación diferencial*

$$\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$$

que satisface las relaciones

$$\lim_{t\to-\infty} |\dot{x}(t) - p| = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to-\infty} |x(t) - (pt+q)| = 0$$

La prueba de estas dos proposiciones es consecuencia inmediata del teorema 2 y el teorema 3 de la sección 1.1, dejándose como ejercicio al lector. Así, gracias a las proposiciones anteriores, tendremos una definición consistente para los operadores de onda y Scattering asociados a soluciones clásicas. Definamos

$$\Sigma_0 = \{(q,p) \in \Sigma_{x_0} \, : \, p^2 \neq 2V(x) \text{ si } V'(x) \neq 0\}.$$

que será el dominio de los operadores de onda.

Definición 12. Sea $x_-(t)$ una solución clásica que tiene comportamiento asintótico $q+pt$ cuando $t \to -\infty$. Definimos el **operador de onda clásico** $\Omega_+ : \Sigma_0 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por la relación

$$\Omega_+(q,p) = (x_-(0), \dot{x}_-(0))$$

Similarmente, definimos Ω_- por la relación

$$\Omega_-(q,p) = (x_+(0), \dot{x}_+(0))$$

para $x_+(t)$ una solución al sistema perturbado con comportamiento asintótico $a + bt$ cuando $t \to \infty$.

Análogamente al caso de potenciales continuos, se obtiene que $\operatorname{Ran} W_+$, $\operatorname{Ran} W_-$ y $\Sigma - \Sigma_{\text{bound}}$ coinciden, salvo un conjunto de medida cero. Teniendo así una teoría consistente que relaciona los comportamientos asintóticos de partículas que interactúan con potenciales que admiten un número finito de discontinuidades. La siguiente definición engloba sintéticamente el desarrollo anterior.

Definición 13. Definimos el **operador de Scattering clásico** $S : D(S) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ por la relación $Sw = \Omega_-^{-1}\Omega_+ w$, donde $D(S)$ es un subconjunto de Σ_0.

Posiblemente, en la definición anterior, resulta inconsistente definir el operador de Scattering sin decir nada respecto a su dominio. Por el Teorema 15 podemos decir que $D(S)$ son todos los estados (q,p) tales que $q \neq x_0$ y, si $p > 0$ entonces $p^2/2 \notin V(E_-)$ y, si $p < 0$ entonces $p^2/2 \notin V(E_+)$; con $E_\pm$ están definidos en la Sección 1.2. Así mismo, tomaremos como una buena teoría de Scattering aquella en que S es asintóticamente completa (ver Definición 6).

En la siguiente sección, a partir de un resultado conocido [4] para el caso de potenciales continuos, caracterizaremos el operador de Scattering clásico mediate una representación explícita.

3. Representación del operador S

Uno de los aspectos más importantes y relevantes de soluciones clásica no acotada a la ecuación diferencial (3.4) es el comportamiento asintótico del momentum. El siguiente lema resultará ser de fundamental ayuda en el camino que trazaremos para determinar una representación del operador de Scattering, asociado a potenciales con un número finito de discontinuidades, con límites laterales finitos.

Lema 14. *Sea* $(q,p) \in D(S)$ *y* $S(q,p) = (a,b)$.

(a) Si $p^2 > 2\|V\|_\infty$*, entonces* $b = p$.

(b) Si $p^2 < 2\|V\|_\infty$*, entonces* $b = -p$.

DEMOSTRACIÓN. Sea x_0 el punto sobre la recta real, en el cual el potencial V tiene su salto de discontinuidad. Comenzaremos suponiendo que $p^2 > 2\|V\|_\infty$ y $p > 0$. Si $b = -p$ podemos separar en los siguientes casos:
Caso 1. Si $x(t) < x_0$, evidentemente $x(t)$ es solución fuerte de (3.4). Entonces,

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = -\infty$$

luego existe t_1 tal que $\dot{x}(t_1) = 0$ lo que es una contradicción, pues tendríamos que $p^2 = 2V(x(t_1))$.
Caso 2. Si $x(t) \leq x_0$ y existe t_0 tal que $x(t_0) = x_0$. Como $p^2 > 2\|V\|_\infty$ entonces existe una solución fuerte $u(t)$ a la derecha de x_0 del problema con valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) = V_2(u(t)) \\ \dot{u}(0) = \sqrt{p^2 - 2V_2(x_0)} \\ u(0) = x(t_0) \end{cases}$$

que extiende de manera natural a $x(t)$ como solución clásica, contradiciendo así nuestra suposición.
Caso 3. Existe t_0 y $\delta > 0$ tal que $x(t) > x_0$ para $t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Éste un caso análogo al Caso 1. Se puede concluir, dado que $b = -p$, la existencia de un t_1 tal que $\dot{x}(t_1) = 0$ y obtener la contradicción esperada.

Finalmente, consideremos el caso en que $p^2 < 2\|V\|_\infty$. Si $p > 0$ y suponemos que $b = p$, entonces

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \pm\infty$$

luego existe t_0 tal que $V(x(t_0)) = \|V\|_\infty$, y en la ecuación de conservación de energía se obtiene la relación

$$\dot{x}(t_0)^2 = p^2 - 2\|V\|_\infty < 0$$

lo que es una contradicción.

Los casos en que $p < 0$ es análogo a las demostraciones ya expuestas.

$\blacksquare$

El lema recién probado nos permite determinar con certeza el comportamiento del momentum de una partícula clásica no acotada, cuando el tiempo va al infinito. En esta prueba hemos supuesto la continuidad por la izquierda del potencial V.

El siguiente teorema, al igual que el lema anterior, son una pequeña generalización de los resultados expuestos en un paper de Scattering Newtoniano [4]. El siguiente teorema nos permitirá caracterizar con mayor precisión el operador de Scattering clásico. Para ello definimos

$$\alpha(p) = \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} : p^2 = 2V(x)\}, \quad \text{cuando } p > 0$$
$$\beta(p) = \sup\{x \in \mathbb{R} : p^2 = 2V(x)\}, \quad \text{cuando } p < 0$$

y

$$A(x,p) = \frac{p}{\sqrt{p^2 - 2V(x)}} - \frac{p}{|p|}$$

Teorema 15. *Sea $(q,p) \in D(S)$ y $(a,b) = S(q,p)$.*

(i) Si $p^2 > 2\|V\|_\infty$, entonces

$$a = q - \int_{-\infty}^{\infty} A(x,p)\, dx.$$

(ii) Si $p^2 < 2\|V\|_\infty$ y $p > 0$, entonces

$$a = -q + 2\alpha(p) + 2\int_{-\infty}^{\alpha(p)} A(x,p)\, dx.$$

(iii) Si $p^2 < 2\|V\|_\infty$ y $p < 0$, entonces

$$a = -q + 2\beta(p) + 2\int_{\beta(p)}^{\infty} A(x,p)\, dx.$$

Demostración. En la prueba de (i) consideremos el caso en que $p > 0$. Por ley de conservación de energía tenemos que

$$\dot{x}(t)^2 = p^2 - 2V(x(t)) \geq p^2 - 2\|V\|_\infty > 0$$

Puesto que $\dot{x}(-\infty) > 0$, y $x(t)$ es solución fuerte excepto para $x = x_0$ entonces $\dot{x}(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, de lo contrario sólo podría cambiar de signo en algún t_0 para el cual $x(t_0) = x_0$; en este punto podríamos definir $x(t - t_0) = x(t + t_0)$ que sería la solución clásica de (3.4) lo que es una contradicción, ya que $b = p$. Por lo tanto, $\dot{x}(t) > 0$ para todo real t y tendremos que

$$\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = \pm\infty$$

Resolviendo la ecuación de la energía e integrando en $[t_0, t]$, obtenemos

$$t - t_0 = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{p^2 - 2V(x)}}$$

que implica la siguiente igualdad

$$-(x(t) - bt) + (x(t_0) - pt_0) = -x(t) + x(t_0) + p(t - t_0) = \int_{x(t_0)}^{x(t)} A(x,p)\, dx$$

Puesto que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ y $\lim_{t_0\to-\infty} x(t_0) = -\infty$ tendremos en la ecuación anterior

$$-a + q = \int_{-\infty}^{\infty} A(x,p)\,dx$$

de donde se obtiene la prueba de (i), ya que para $p < 0$ la demostración es análoga.

Para la demostración de la parte (ii), deberemos separar en tres casos:

Caso 1. Si $x(t) < x_0$ para todo real t, entonces $x(t)$ es solución fuerte de (3.4) luego existe un único $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\dot{x}(t_0) = 0$ y $x(t_0 - t) = x(t_0 + t)$ dada la unicidad de solución para el problema con valores iniciales. Entonces, tendremos que

$$x(t) - bt = x(2t_0 - t) + pt = (x(2t_0 - t) - p(2t_0 - t)) + 2pt_0$$

que luego de hacer tender $t \to \infty$ se tiene que $a = q + 2pt_0$. Además, para todo $t \leq t_0$

$$\begin{aligned} a - q = 2pt_0 &= 2pt + 2\int_{x(t)}^{x(t_0)} \frac{p}{\sqrt{p^2 - 2V(x)}}\,dx \\ &= -2(x(t) - pt) + 2x(t_0) + 2\int_{x(t)}^{x(t_0)} A(x,p)\,dx \end{aligned}$$

de donde se concluye el punto (ii), luego de hacer tender $t \to -\infty$, ya que $\alpha(p) = x(t_0)$.

Caso 2. Si $x(t) \leq x_0$ y existe t_0 tal que $x(t_0) = x_0$. Luego $\dot{x}(t_0) = \pm\sqrt{p^2 - 2V(x_0)}$ y $x(t - t_0) = x(t + t_0)$ que es la única solución clásica de (3.4). El resto de la demostración prosigue como el Caso 1.

Caso 3. Existe t_0 y $\delta > 0$ tal que $x(t) > x_0$ para $t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Como $b = -p$ entonces existe un único real t_1, que además es mayor que t_0, tal que $\dot{x}(t_0) = 0$ y $x(t_0 - t) = x(t_0 + t)$ dada la unicidad de solución para el problema con valores iniciales. Y, al igual que en el Caso 2, el resto de la demostración es análogo al Caso 1. ■

Una consecuencia inmediata del lema anterior es:

- Si $p^2 > 2\|V\|_\infty$,
$$S(q,p) = \left(q - \int_{-\infty}^{\infty} A(x,p)\,dx, p\right).$$
- Si $p^2 < 2\|V\|_\infty$ y $p > 0$,
$$S(q,p) = \left(-q + 2\alpha(p) + 2\int_{-\infty}^{\alpha(p)} A(x,p)\,dx, -p\right).$$
- Si $p^2 < 2\|V\|_\infty$ y $p < 0$,
$$S(q,p) = \left(-q + 2\beta(p) + 2\int_{\beta(p)}^{\infty} A(x,p)\,dx, -p\right).$$

Por las características del problema, uno puede extender este resultado a potenciales con un número finito de discontinuidades. En la sección siguiente, además utilizaremos una extensión de este resultado para potenciales con discontinuidad en la derivada, pero que siguen entregando soluciones de tipo Scattering.

3.1. Scattering sobre potencial caja

Consideremos la función $V(x)$ que toma el valor $h > 0$ en el intervalo $[r, R]$ y cero en su complemento. A la función V lo llamaremos *potencial caja.* Así, la ecuación de movimiento asociado al potencial caja estará dada por

$$\ddot{x}(t) = 0, \quad \text{si } x \notin \{r, R\}$$

Esta ecuación nos dice que la solución $x(t)$ es de la forma $q + pt$ si $x(t) < r$ y $a + bt$ si $x(t) > R$. Mientras que la solución en el intervalo $[r, R]$ es de la forma $A + Bt$. No es difícil demostrar que es imposible construir una solución a nuestra ecuación diferencial que sea continuamente diferenciable, salvo en caso en que $b = p = 0$.

En esta sección nuestro central interés será determinar el operador de Scattering clásico asociado a un potencial caja V. Para ello supondremos que $\dot{x}(t)$ no es idénticamente cero (suposición válida ya que $p \neq 0$), entonces de la ecuación de conservación de energía (??) se obtiene la relación

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + V(x(t)), \qquad x(t) > r$$

ya que la velocidad de la partícula antes de interactuar con el potencial es p, y el potencial es evidentemente cero. Por lo tanto, si $p^2 > 2h$ tendremos que

$$\dot{x}(t) = \text{sign}(p) \cdot \sqrt{p^2 - 2h}$$

En cambio, si $p^2 < 2h$ la ecuación de energía nos dice que la partícula no pudo atravesar el potencial, luego por conservación de momentum tendremos que $\dot{x}(t) = -p$. Es decir, la solución para $t \to \infty$ es de la forma $a - pt$.

En los dos casos recién expuestos podemos observar que es posible construir al menos una solución $x(t)$ continua, pero con salto de continuidad en $x = r$ para la derivada $\dot{x}(t)$. He aquí el primer conflicto que enfrentaremos para definir apropiadamente el operador de Scattering clásico cuando V es potencial caja. Evidentemente si $p^2 < 2h$ solo es posible construir una solución $x(t)$ global y continua que satisface (3.1), en el sentido fuerte, en el complemento de $\{r, R\}$. En cambio, cuando $p^2 > 2h$ es posible construir dos soluciones: una que es simétrica a partir de algún punto t_0 (por conservación de momentum) y otra que cruza el potencial.

Un hecho importante a considerar es que el operador de Scattering clásico S no tiene sentido para el valor $p = 0$. Esto se debe, desde el punto de vista físico, que la partícula clásica tiene momentum (velocidad) cero en $-\infty$, lo que no permitiría la evolución de la misma en dirección del potencial.

Ahora concentraremos nuestros esfuerzos en determinar explícitamente el operador S para nuestro potencial caja. Como $p \neq 0$ y el soporte de $V(x)$ es compacto, entonces $2E = p^2 = b^2$ y tendremos que $b = \pm p$. Para determinar el signo de b debemos utilizar la relación (??). Si $p^2 < 2h$ entonces la partícula no cruza el potencial, luego por conservación de momentum tendremos que $b = -p$. En cambio, si $p^2 > 2h$ la partícula atraviesa el potencial y mantiene su momentum (velocidad), por lo tanto $b = p$.

Así, para el caso que $p^2 < 2h$ y $p > 0$ la solución a la ecuación (3.1) estará dada por

$$x(t) = \begin{cases} q + pt & \text{si } t \leq \frac{r-q}{p} \\ (2r - q) - pt & \text{si } t > \frac{r-q}{p} \end{cases}$$

luego de imponer las condiciones de continuidad sobre $x(t)$ en $t = \frac{r-q}{p}$. De este modo tendremos que $S(q,p) = (2r - q, -p)$. Análogamente, uno puede probar que $S(q,p) = (2R - q, -p)$ en el caso que $p^2 < 2\|V\|_\infty$ y $p < 0$.

Si $p^2 > 2\|V\|_\infty$ y $p > 0$ luego de la ecuación de energía se deduce que

$$\dot{x}(t)^2 \geq p^2 - 2\|V\|_\infty > 0$$

entonces $\dot{x}(t) > 0$ para todo real t. Esto quiere decir que $x(t)$ es una función creciente en t, y se puede probar que está dada por

$$x(t) = \begin{cases} q + pt & \text{si } t < \frac{r-q}{p} \\ r - \sqrt{p^2 - 2h}(\frac{r-q}{2}) + \sqrt{p^2 - 2h} \cdot t & \text{si } t \in [\frac{r-q}{p}, \frac{R-(r-\sqrt{p^2-2h}(\frac{r-q}{p}))}{\sqrt{p^2-2h}}] \\ q - (R - r)\left(\frac{p}{\sqrt{p^2-2h}} - \frac{p}{|p|}\right) + pt & \text{si } t > \frac{R-(r-\sqrt{p^2-2h}(\frac{r-q}{p}))}{\sqrt{p^2-2h}} \end{cases}$$

por lo tanto, el operador de Scattering para $p^2 > 2\|V\|_\infty$ estará dado por

$$S(q,p) = \left(q - (R - r)\left\{\frac{p}{\sqrt{p^2 - 2h}} - \frac{p}{|p|}\right\}, p\right)$$

para $p \neq 0$. Un caso que falta por verificar es cuando $p^2 = 2h$. Pero en este caso es posible construir dos soluciones clásicas diferentes al problema con valores iniciales, asociado a la ecuación (3.1), lo que produce un problema con la definición del operador de Scattering clásico.

Esta representación del operador de Scattering para un potencial de tipo caja, es exactamente el mismo que se obtendría mediante la fórmula determinada para el operador de Scattering asociado a potenciales con un número finito de discontinuidades. Este resulta ser un claro y sencillo ejemplo que nos permite determinar de manera constructiva el operador S, siendo a su vez consistente con lo anteriormente demostrado.

4. Problema Inverso

El problema que surge al intentar recuperar el potencial V a partir de su operador de Scattering S depende intrínsecamente de la geometría del potencial. En general este problema divide el conjunto de los potenciales admiten operador de Scattering en dos partes: aquellos que pueden recuperarse a partir del operador S, y los que no. Anticipando lo que probaremos a continuación podemos afirmar que es posible recuperar la totalidad del potencial V a partir de su operador de Scattering S siempre y cuando V posea a lo más un máximo a lo largo de la recta real. En lo sucesivo de esta sección determinaremos una condición necesaria y suficiente para que un potencial V en $\mathcal{M}$ pueda ser recuperado a partir de su operador de Scattering clásico.

Sea V un potencial en la familia $\mathcal{M}$ con dos máximos (ver 3.2) y $\tilde{V}$ el potencial definido a trazos

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} V(x) & \text{si } x \in (-\infty, x_0) \cup (x_1, \infty) \\ V(x_0 + x_1 - x) & \text{si } x \in [x_0, x_1] \end{cases}$$

con x_0 el menor $x \in \mathbb{R}$ tal que $V'(x_0) = 0$ y x_1 es el menor $x > x_0$ tal que $V(x_1) = V(x_0)$. Entonces, el siguiente teorema prueba la existencia de dos potenciales en $\mathcal{M}$ que generan el mismo operado de Scattering.

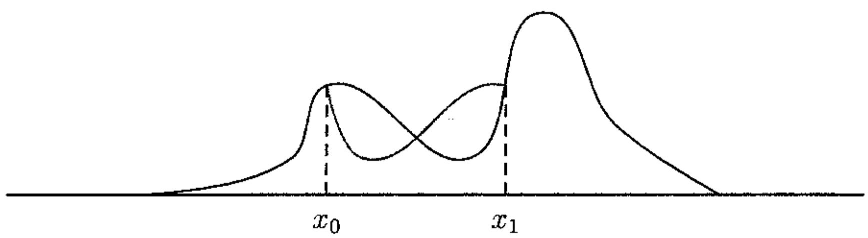

Figura 3.2: Potenciales asociados

Teorema 16. *Sean $V \in \mathcal{M}$ un potencial como en la figura 3.2 con operador de Scattering S_V. Luego existe un potencial $\tilde{V} \in \mathcal{M}$, con operador de Scattering $S_{\tilde{V}}$, tal que $S_V = S_{\tilde{V}}$ salvo un conjunto de medida cero.*

DEMOSTRACIÓN. Mediante un simple cambio de variable se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} A_V(x,p)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} A_{\tilde{V}}(x,p)\,dx$$

donde

$$A_F(x,p) = \frac{p}{\sqrt{p^2 - 2F(x)}}$$

El resto de la demostración es consecuencia del Teorema 15, para potenciales en $\mathcal{M}$. ■

El teorema anterior, puede extenderse a todo $V \in \mathcal{M}$ con al menos dos máximos locales. Esto nos permite dividir en dos el conjunto $\mathcal{M}$: en aquellos potenciales que poseen un máximo, y los que no. Esta sección la finalizaremos con un teorema que nos determina explícitamente los potenciales que admiten solución al problema inverso, es decir, bajo que condiciones del potencial es posible reconstruirlo a partir de su operador de Scattering.

Teorema 17. *Sea V un potencial en $\mathcal{M}$ con sólo un máximo local. Entonces es posible recuperar V a partir de su operador de Scattering S_V.*

DEMOSTRACIÓN. Sea p un real positivo con $p^2 < 2\|V\|_\infty$. Definamos

$$S_1(p) = \alpha(p) + \int_{-\infty}^{\alpha(p)} A_V(x,p), dx$$

Como V tiene sólo un máximo, entonces V^{-1} es uno a uno en el intervalo $(0, \sqrt{2\|V\|_\infty})$. Si $p = \sqrt{2E}$, entonces

$$S_1(\sqrt{(2E)}) = V^{-1}(E) + \int_{-\infty}^{V^{-1}(E)} \left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E - V(x)}} - 1\right) dx$$

Haciendo el cambio de variable $x = V^{-1}(s)$, podemos deducir en la ecuación anterior que para todo $y > E$ se tiene

$$\frac{S_1(\sqrt{2E})}{\sqrt{E(y-E)}} = \frac{V^{-1}(E)}{\sqrt{E(y-E)}} + \int_0^E \left(\frac{1}{\sqrt{E-s}} - \frac{1}{\sqrt{E}}\right) \cdot \frac{V^{-1}(s)'}{\sqrt{y-E}}\, ds$$

Integrando respecto a E la ecuación anterior, entre 0 e y, y usando el teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{S_1(\sqrt{2E})}{\sqrt{E(y-E)}}\, dE &= \int_0^y \frac{V^{-1}(E)}{\sqrt{E(y-E)}}\, dE + \int_0^y \int_0^E \left(\frac{1}{\sqrt{E-s}} - \frac{1}{\sqrt{E}}\right) \cdot \frac{V^{-1}(s)'}{\sqrt{y-E}}\, ds\, dE \\
&= \int_0^y \frac{V^{-1}(E)}{\sqrt{E(y-E)}}\, dE + \int_0^y \int_s^y \left(\frac{1}{\sqrt{E-s}} - \frac{1}{\sqrt{E}}\right) \cdot \frac{V^{-1}(s)'}{\sqrt{y-E}}\, dE\, ds \\
&= \pi \int_0^y V^{-1}(s)'\, ds + \pi \lim_{\delta \to 0} V^{-1}(\delta) \\
&= \pi V^{-1}(y)
\end{aligned}$$

debido a que

$$\int_a^y \frac{dE}{\sqrt{E-a}\sqrt{y-E}} = \pi$$

■

Puede parecer que el teorema anterior determina una expresión para V^{-1} en función del mismo potencial. La verdad es que $a = -q + 2S_1(p)$ lo que permite recuperar la autonomía de S_1 como función de V, notando que esta dependencia es en exclusiva del parámetro p. El siguiente corolario es consecuencia inmediata del teorema anterior, y no amerita demostración.

Corolario 18. *Sea V un potencial un potencial en $\mathcal{M}$ con a lo más un máximo. Luego, para todo $y < \|V\|_\infty$*

$$V^{-1}(y) = \int_0^y \frac{S_1(\sqrt{2E})}{\sqrt{E(y-E)}}\, dE$$

Por lo tanto, cada vez que un potencial V en $\mathcal{M}$ posee a lo más un máximo a lo largo de la recta real resulta posible recuperar en su totalidad dicho potencial a partir de su operador de Scattering. Mientras que de poseer más de un máximo, es posible construir otro potencial en $\mathcal{M}$ que genere el mismo operador de Scattering

CAPÍTULO

CUATRO

Scattering Clásico en Campo Eléctrico

1. Campo Eléctrico

En el Scattering clásico que hemos expuesto en el capítulo anterior se comparan dos dinámicas, una de ellas asociada a la ecuación $\ddot{x}(t) = 0$, que modela el comportamiento de una partícula libre de fuerzas, con el caso perturbado $\ddot{x}(t) = -V'(x(t))$, donde la fuerza que actúa sobre la partícula es producida por un potencial V. En la mecánica Newtoniana uno de los modelos más comunes de partículas clásicas es el de *caída libre*, con ecuación de movimiento

$$\ddot{x}(t) = -g \tag{4.1}$$

donde g es una constante que depende de la ley de Coulomb. La ecuación (4.1) es también conocida como *ecuación de campo eléctrico*, cuando $g = 1$, que tiene asociada el Hamiltoniano $H_0(q,p) = (1/2)p^2 + q$. A H_0 se le conoce como el *Hamiltoniano Stark libre* que es una cantidad conservada en el tiempo, es decir H_0 es constante. Este Hamiltoniano, como ya lo habíamos mencionado, modela el comportamiento de una partícula que se ve afectada por un campo eléctrico (que se puede entender como campo magnético o gravitacional) constante a lo largo del tiempo. La solución de la (4.1) para condiciones iniciales $\dot{x}(0) = p$, $x(0) = q$ está dada por

$$x(t) = -\frac{t^2}{2} + pt + q$$

que caracteriza la ecuación de una parábola con término principal $-1/2$. Esto nos permite afirmar que una partícula libre que es modelada por (4.1) nunca permanece mucho tiempo en cualquier región acotada del espacio, es decir, la partícula clásica se "escapa" a infinito, abandonando cualquier región acotada a tiempo infinito. Como ya lo habíamos mencionado la ecuación (4.1) modela el comportamiento libre de una partícula bajo la acción de una fuerza constante (sea esta gravitatoria o magnética), así H_0 será considerado a lo largo de este capítulo como el Hamiltoniano libre. Si $H = H_0 + V$ es una perturbación del

Hamiltoniano libre H_0 cabe hacernos la siguiente pregunta ¿Es posible hacer una buena teoría de Scattering clásico para el Hamiltoniano H respecto al libre H_0? En el capítulo anterior la respuesta a esta pregunta es equivalente a la existencia de soluciones al sistema perturbado que tienen comportamiento asintótico a partículas libres.

De este modo, diremos que el Hamiltoniano H admite una buena teoría de Scattering respecto al Hamiltoniano libre H_0 si cada vez que $x(t)$ es una solución a la ecuación de movimiento asociada a H que explota a tiempo infinito, entonces existen $y_\pm(t)$, solución a las ecuaciones de movimiento asociadas a H_0, tales que

$$\lim_{t\to\pm\infty}(|x(t)-y_\pm(t)|+|\dot{x}(t)-\dot{y}_\pm(t)|)=0$$

Para el Hamiltoniano Stark libre existe una familia de potenciales V tales que $H = H_0 + V$ admite una buena teoría de Scattering respecto a H_0 [5]. Sea $\mathcal{M}$ la familia de potenciales V que satisfacen las siguientes propiedades:

(I) V en $C^1(\mathbb{R})$ tal que $V, V' \in L^\infty(\mathbb{R})$ y V' es Lipshitz continua.

(II) Existen $C > 0$, $k \geq 1$, $\alpha > 1$ y $x_0 < 0$ tal que

$$|V(x)| \leq C\varphi_\alpha(x)$$

para todo $x \leq x_0$, con

$$\varphi(x) = \left[\prod_{j=1}^{k-1} f^{(j)}(1+|x|)\right]^{-1} \times [f^{(k)}(1+|x|)]^{-\alpha}$$

donde $f(x) = 1+\log(x)$ y $f^{(j)} = f^{(j-1)} \circ f$ la j-ésima composición de f.

(III) Existen $\beta > 1$, $\rho_0 > 1$, y $C > 0$, tal que para todo $\rho \geq \rho_0$, $|x_1| \geq \rho$, $|x_2| \geq \rho$

$$|V(x_1)-V(x_2)| \leq C\varphi_\beta(\rho)|x_1-x_2|$$

donde $\varphi_\beta(\rho)$ es la función definida en (II).

Un aspecto importante en la función φ_α, que utilizaremos en futuras demostraciones, es el siguiente

$$\int_t^\infty \frac{\varphi_\alpha(s)}{s}\,ds < \infty \qquad\qquad \int_t^\infty\int_s^\infty \frac{\varphi_\alpha(s)}{s^2}\,ds < \infty \tag{4.2}$$

para todo $t > 0$. La condición (I) sobre el potencial V nos asegura la existencia y unicidad local de soluciones a la ecuación diferencial asociada al Hamiltoniano H. Mientras que (I), (II) y (III) nos permiten afirmar que el Scattering clásico asociado al Hamiltoniano

Stark libre es asintóticamente completo. En lo sucesivo consideraremos potenciales en $\mathcal{M}$ tales que la constante

$$\alpha = \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} : V(x) \neq 0\} \tag{4.3}$$

sea finita.

La finalidad de este capítulo, al igual que el anterior, es determinar una expresión explícita para el operador de Scattering clásico asociado al Hamiltoniano Stark. Además el determinar condiciones sobre los potenciales V bajo las cuales el problema inverso tenga solución explícita. En adelante, salvo evitar confusiones, nos referirnos a H_0 como el Hamiltoniano libre (sin especificar Stark) y H el Hamiltoniano perturbado. Un resultado que dejaremos como ejercicio al lector, pero con demostración análoga al expuesto en el Teorema N del Capítulo 2, es la existencia y unicidad local de soluciones a la ecuación diferencial

$$\ddot{x}(t) = -1 - V'(x(t))$$

En las siguientes secciones introduciremos las definiciones y resultados asociados a la teoría de Scattering Clásico, similarmente al capítulo 2, que nos permitirán describir rigurosamente el comportamiento asintótico de partículas perturbadas por potenciales V en $\mathcal{M}$ en relación al Hamiltoniano Stark libre H_0.

2. Scattering en Campo Eléctrico

Consideremos la ecuación de movimiento asociada al Hamiltoniano libre

$$\ddot{x}(t) = -1 \tag{4.4}$$

que tiene por solución

$$x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + pt + q \tag{4.5}$$

para condiciones iniciales $\dot{x}(0) = p$, $x(0) = q$. Sea V un potencial en $\mathcal{M}$ que perturba nuestro sistema (4.4). La ecuación de movimiento asociado a esta perturbación está dada por

$$\ddot{x}(t) = -1 - V'(x(t)) \tag{4.6}$$

La siguiente definición introduce la idea esencial en el Scattering Clásico: "partículas perturbadas con comportamiento asintótico libre para tiempos al infinito".

Definición 1. Diremos que $x(t)$ es **solución de tipo scattering** a la ecuación (4.6) si existen $x_-(t)$ y $x_+(t)$ soluciones de (4.4) tales que

$$\lim_{t\to\pm\infty} (|x_\pm(t) - y(t)| + |\dot{x}_\pm(t) - \dot{y}(t)|) = 0$$

Definimos el operador de Scattering clásico asociado al Hamiltoniano H por la relación

$$S(x_-(0), \dot{x}_-(0)) = (x_+(0), \dot{x}_+(0))$$

es decir, si $x_-(t) = (-1/2)t^2 + pt + q$ y $x_+(t) = (-1/2)t^2 + bt + a$ el operador de Scattering está dado por $S(q,p) = (a,b)$.

Antes de proseguir será necesario dar sentido a la anterior definición probando el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea V un potencial en $\mathcal{M}$ y $(a,b) \in \Sigma$. Si $y(t) = -(1/2)t^2 + bt + a$, entonces existe $x_+(t)$ y $x_-(t)$ soluciones a la ecuación (4.6) tales que*

$$\lim_{t\to\pm\infty} (|x_\pm(t) - y(t)| + |\dot{x}_\pm(t) - \dot{y}(t)|) = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $(a,b) \in \Sigma$ y sea $y(t) = -(1/2)t^2 + bt + a$. Si $x(t)$ tiene comportamiento asintótico a $y(t)$ cuando $t \to \infty$, probaremos que existe $u(t)$ que decrece a cero para $t \to \infty$ tal que $x(t) = y(t) + u(t)$ para todo t suficientemente grande. En este caso, tendremos que $u(t)$ satisface la ecuación diferencial $\ddot{u}(t) = -V'(y(t) + u(t))$ o el sistema equivalente

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = w(t) \\ \dot{w}(t) = -V'(y(t) + u(t)) \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
w(t_0) - w(t) &= -\int_t^{t_0} V'(y(s) + u(s))\, ds \\
&= -\int_t^{t_0} \frac{V'(y(s) + u(s))(\dot{y}(s) + \dot{u}(s))}{\dot{y}(s) + \dot{u}(s)}\, ds \\
&= -\frac{V(y(t) + u(t))}{\dot{y}(t) + \dot{u}(t)}\Bigg|_t^{t_0} - \int_t^{t_0} \frac{V(y(s) + u(s))(\ddot{y}(s) + \ddot{u}(s))}{(\dot{y}(s) + \dot{u}(s))^2}\, ds \\
&= -\frac{V(y(t) + u(t))}{\dot{y}(t) + \dot{u}(t)}\Bigg|_t^{t_0} + \int_t^{t_0} \frac{V(y(s) + u(s))(1 + V'(y(s) + u(s)))}{(\dot{y}(s) + \dot{u}(s))^2}\, ds
\end{aligned}$$

Cómo $x(t)$ tiene comportamiento asintótico a $y(t)$, esto obliga a que $|u(t)| + |\dot{u}(t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$. Luego de hacer tender $t_0 \to \infty$ tendremos

$$w(t) = -\frac{V(y(t) + u(t))}{\dot{y}(t) + \dot{u}(t)} + \int_t^\infty \frac{V(y(s) + u(s))(1 + V'(y(s) + u(s)))}{(\dot{y}(s) + w(s))^2}\, ds$$

Análogamente se deduce que

$$u(t) = \int_t^\infty \frac{V(y(s) + u(s))}{\dot{y}(s) + \dot{u}(s)}\, ds + \int_t^\infty \int_s^\infty \frac{V(y(r) + u(r))(1 + V'(y(r) + u(r)))}{(\dot{y}(r) + w(r))^2}\, dr\, ds$$

Definamos para cada $t_0 > 0$ el conjunto

$$\mathcal{F}_{t_0} = \{(u,w) \in C(t_0,\infty) \times C(t_0,\infty) \, : \, \lim_{t\to\infty} |u(t)|+|w(t)| = 0, \ |u(t)|+|w(t)| \leq 1 \text{ si } t \geq t_0\}$$

que es un espacio métrico completo con la métrica

$$\|(u,w)\|_\infty = \|u\|_\infty + \|w\|_\infty$$

Ahora definamos el operador T sobre $\mathcal{F}_{t_0}$ por la relación $T(u,w) = (\overline{u},\overline{w})$ donde

$$\overline{u}(t) = \int_t^\infty \frac{V(y(s)+u(s))}{\dot{y}(s)+\dot{u}(s)}\, ds + \int_t^\infty \int_s^\infty \frac{V(y(r)+u(r))(1+V'(y(r)+u(r)))}{(\dot{y}(r)+w(r))^2}\, dr\, ds$$
$$\overline{w}(t) = -\frac{V(y(t)+u(t))}{\dot{y}(t)+\dot{u}(t)} + \int_t^\infty \frac{V(y(s)+u(s))(1+V'(y(s)+u(s)))}{(\dot{y}(s)+w(s))^2}\, ds$$

Dado que $|u(t)|+|w(t)| \leq 1$ para todo $t \geq t_0$ y V satisface (I), (II) y (III) tendremos que

$$\begin{aligned}|\overline{u}(t)| + |\overline{w}(t)| \leq \|1+V'\|_{L^\infty} \int_t^\infty \int_s^\infty \frac{\varphi_\alpha(r)}{(r/2)^2}\, dr\, ds + \int_t^\infty \frac{\varphi_\alpha(s)}{(s/2)}\, ds \\ + \frac{\|V\|_\infty}{(t/2)} + \|V\|_{L^\infty}\|1+V'\|_{L^\infty} \int_t^\infty \frac{ds}{(s/2)^2}\end{aligned}$$

luego existe t_0 tal que $|\overline{u}(t)| + |\overline{w}(t)| \leq 1$ si $t \geq t_0$, y más aun gracias al teorema de convergencia dominada se tiene que $|\overline{u}(t)| + |\overline{w}(t)| \to 0$ cuando $t \to \infty$. De este modo, T resulta ser un operador de $\mathcal{F}_{t_0}$ en si mismo, para todo t_0 suficientemente grande. Por otro lado, si (u_1,w_1), (u_2,w_2) están en $\mathcal{F}_{t_0}$ entonces

$$|\overline{u}_1(t) - \overline{u}_2(t)| \leq \|u_1-u_2\|_\infty \left(\int_t^\infty \frac{\varphi_\alpha(r)}{(s/2)}\, ds + \int_t^\infty \int_s^\infty \frac{\varphi_\alpha(r)}{(r/2)^2}\, dr\, ds \right)$$

y

$$|\overline{w}_1(t) - \overline{w}_2(t)| \leq K\|w_1-w_2\|_\infty \left(\frac{1}{(t/2)} + \|1+V'\|_{L^\infty} \int_t^\infty \frac{ds}{(s/2)} \right)$$

donde K es la constante Lipschitz de la función V. Por lo tanto, existe $t_0 > 0$ tal que

$$|T(u_1(t),w_1(t)) - T(u_2(t),w_2(t))| \leq C\|(u_1,w_1)-(u_2,w_2)\|_\infty$$

para todo $t \geq t_0$ y $0 < C < 1$. Así podemos concluir para t_0 suficientemente grande, que T es una contracción de $\mathcal{F}_{t_0}$ en si mismo. Por lo tanto, existe un único punto fijo $(u,w) \in \mathcal{F}_{t_0}$ del operador T. No es difícil de probar que (u,w) satisfacen el sistema de ecuaciones planteados al comienzo de la demostración y que $x(t) = y(t)+u(t)$ para $t \geq t_0$. Como la ecuación (4.6) admite una única solución global para condiciones iniciales dadas, podemos extender $x(t) = y(t)+u(t)$ a toda la recta real.

Para analizar el caso de $t \to -\infty$, se hace de manera similar al comentario expuesto después del Teorema 3 del Capítulo 1. ∎

El teorema recién expuesto da sentido a la existencia de los operadores de ondas, introducidos en el capítulo 2, asociados a los hamiltonianos Stark H_0 y H. En este capítulo hemos querido evitar la introducción de dichos operadores, simplificando el problema a través de la definición 1. El siguiente teorema termina de dar real sentido al operador de scattering, probando la existencia de soluciones de tipo scattering.

Teorema 3. *Sea V un potencial en M. Sea $x(t)$ es una solución global y única a la ecuación (4.6) que tiene comportamiento asintótico $-(1/2)t^2 + pt + q$ cuando $t \to -\infty$. Entonces existe $(a, b) \in \Sigma$ tal que $x(t)$ tiene comportamiento asintótico $-(1/2)t^2 + bt + a$ cuando $t \to \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x(t)$ satisfaciendo las condiciones del teorema. Lo primero que es necesario probar es que $x(t)$ es no acotada para $t \to \infty$. Como $x(t)$ esta definida para todo t en los reales, luego debe satisfacer la ecuación de energía

$$\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + x(t) + V(x(t)) = q + \frac{p^2}{2}.$$

Luego debe existir t_0 tal que $\dot{x}(t_0) = 0$. Puesto que $x(t)$ es única y no idénticamente constante debe satisfacerse que $x(t_0+t) = x(t_0-t)$ lo que termina de probar la divergencia de $x(t)$ cuando $t \to \infty$.

Como $x(t)$ es no acotada para $t \to \infty$, por conservación de energía y el decaimiento de V en el infinito se deduce que $\dot{x}(t)$ también es no acotada para $t \to \infty$. Además,

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t_0) = -(t - t_0) - \frac{V(x(t))}{\dot{x}(t)} + \frac{V(x(t_0))}{\dot{x}(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \frac{V(x(s))(1 + V'(x(s)))}{\dot{x}(s)} \, ds$$

elegimos t_0 suficientemente grande de modo que el siguiente límite exista

$$b = \lim_{t \to \infty} (\dot{x}(t) + t) = t_0 + \frac{V(x(t_0))}{\dot{x}(t_0)} + \int_{t_0}^{\infty} \frac{V(x(s))(1 + V'(x(s)))}{\dot{x}(s)} \, ds$$

Integrando la expresión anterior obtenemos

$$x(t) - x(t_0) = b(t - t_0) - \frac{t^2 - t_0^2}{2} - \int_{t_0}^{t} \frac{V(x(s))}{\dot{x}(s)} \, ds - \int_{t_0}^{t} \int_{s}^{\infty} \frac{V(x(r))(1 + V'(x(s)))}{\dot{x}(r)} \, dr \, ds$$

Nuevamente, para t_0 suficientemente grande, haremos tender $t \to \infty$ en la expresión anterior definiendo

$$\begin{aligned} a &= \lim_{t \to \infty} (x(t) + (1/2)t^2 - bt) \\ &= -bt_0 + \frac{t_0^2}{2} - \int_{t_0}^{\infty} \frac{V(x(s))}{\dot{x}(s)} \, ds - \int_{t_0}^{\infty} \int_{s}^{\infty} \frac{V(x(r))(1 + V'(x(s)))}{\dot{x}(r)} \, dr \, ds \end{aligned}$$

que concluye el teorema. ∎

Una de las primera consecuencias de este teorema es darle sentido a la definición del operador de Scattering definido al comienzo del capítulo. Pero otra consecuencia inmediata es que el operador de Scattering S asociado a los hamiltoniano Stark resulta ser asintóticamente completo.

El operador de Scattering S relaciona los comportamientos asintóticos libres de una solución $x(t)$ de la ecuación (4.6). Como H es una cantidad conservada, entonces la ecuación de energía asociada a la ecuación (4.6) está dada por

$$\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + x(t) + V(x(t)) = E$$

donde E es una constante que depende del par (q,p) de la Definición 1. Como la constante α definida en (4.3) es finita, luego de hacer tender $t \to \pm\infty$ podemos deducir que la constante E estará dada por

$$\frac{p^2}{2} + q = E = \frac{b^2}{2} + a \tag{4.7}$$

De este modo, la energía de una partícula que interactúa con un potencial V es igual a la energía de alguna partícula libre. Esto no nos debería resultar extraño, ya que el Hamiltoniano H es una cantidad conservada a través del tiempo, y dado que una solución de tipo Scattering tiene comportamiento asintótico libre, es natural pensar que deben tener la misma energía.

Al igual que en el capítulo anterior, es posible caracterizar el dominio $D(S)$ del operador de Scattering S. Similarmente a la demostración del Lema 7 del capítulo 2, se puede probar que $(q,p) \in D(S)$ si y sólo si $q + p^2/2 \notin (V_0 + V)(E)$, donde

$$E = \{x \in \mathbb{R} : V_0'(x) + V'(x) = 0 \text{ y } V_0(x) + V(x) > V_0(y) + V(y), \text{ para todo } y < x\}$$

siendo $V_0(x) = x$. El siguiente lema nos permitirá caracterizar en dos regiones conexas el plano real $\mathbb{R}^2$, tal que en una de ellas el operador de Scattering es la identidad.

Lema 4. *Sea V un potencial en $\mathcal{M}$ tal que α, definido en (4.3), es finito. Sea E la energía de una partícula de tipo Scattering. Si $E \leq \alpha$ entonces el operador de Scattering S es la identidad.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x(t)$ una solución de (4.1) de tipo Scattering con energía $E = (1/2)p^2 + q$. Dado que α es finito, entonces existe t_0 tal que

$$x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + pt + q$$

para todo $t < t_0$. Para estos t la solución $x(t)$ tiene la forma de una parábola con término principal negativo, luego $x(t)$ tiene máximo E en el punto $t = p$. Cómo $E \leq \alpha$ podemos deducir que la partícula no interactúa con el potencial V y, por lo tanto, se mantiene libre. Así resulta evidente que $S(q,p) = (q,p)$. ∎

Como ya lo habíamos postulado, el lema anterior nos permite dividir el plano en dos regiones delimitadas por la parábola $\mathcal{P} : p^2 + 2q = \alpha$. Así, al interior de la parábola $\mathcal{P}$ (incluyendo el borde) el operador S actúa como la identidad.

Supongamos que V es un potencial no negativo. Sea (q, p) es un punto fijo de S, es decir $S(q,p) = (q,p)$, y $x(t)$ la solución a la ecuación (4.6) tal que $x(t) \sim (-1/2)t^2 + pt + q$ cuando $t \to \pm\infty$. Por conservación de energía sabemos que existe un único t_0 tal que $x(t_0 - t) = x(t_0 + t)$, además existe $t_{1,2}$ que satisfacen la ecuación

$$-\frac{1}{2}t_{1,2} + pt_{1,2} + q = \alpha$$

de este modo $x(t)$ debe satisfacer la relación $x(t_1) = x(t_2)$ para que (q, p) se punto fijo de S. Más aun, ésta es una condición necesaria y suficiente para que una par (q,p) sea punto fijo del operador de Scattering S. Así,

$$x(t_2) = x(t_1) = x(2t_0 - t_1)$$

y obtenemos la relación $2t_0 = t_1 + t_2$. Por lo tanto, (q, p) es un punto fijo de S si y sólo si $t_0 = p$. De este modo, es estrictamente necesario que la influencia del potencial sea nula sobre la partícula. Por lo tanto, la energía E debe no superar α.

El siguiente teorema nos permitirá caracterizar el operador de Scattering para valores de energía $E > \alpha$.

Teorema 5. *Sea V un potencial en $\mathcal{M}$ tal que α, definido en (4.3), es finito. Sea E la energía de una partícula de tipo Scattering. Si $E > \alpha$ entonces*

$$b = p - \sqrt{2(E - \alpha)} + \int_{\alpha}^{x(t_0)} \frac{dx}{\sqrt{P^2 - 2\hat{V}(x)}}$$

donde $P^2 = p^2 + 2q$, $\hat{V}(x) = x + V(x)$ y $2E = P^2$.

Demostración. Sea $x(t)$ la solución a (4.6) de tipo Scattering con energía $E > \alpha$. Por conservación de energía sabemos que existe un único t_0 tal que $x(t_0 - t) = x(t_0 + t)$. Como $x(t)$ es derivable sobre toda la recta real, obtenemos la siguiente relación para la derivada

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\dot{x}(2t_0 - t) \\ \dot{x}(t) + t &= -(\dot{x}(2t_0 - t) + (2t_0 - t)) + 2t_0 \end{aligned}$$

que, luego de hacer tender $t \to \infty$, se obtiene la relación

$$b = -p + 2t_0$$

Por otra parte, despejando de la ecuación de energía la velocidad $\dot{x}(t)$ e integrando respecto entre t y t_0 se tiene la relación

$$\begin{aligned} t_0 - t &= \int_t^{t_0} \frac{\dot{x}(s)}{\sqrt{P^2 - 2\hat{V}(x(s))}} ds \\ &= \int_{x(t)}^{x(t_0)} \frac{dx}{\sqrt{P^2 - 2\hat{V}(x)}} \end{aligned}$$

El resto del teorema sigue de remplazar t por la menor raíz de la ecuación

$$-\frac{1}{2}t^2 + pt + q = \alpha$$

■

Recordemos que la ecuación (4.7) nos relaciona los pares (q, p) y (a, b) por

$$\frac{p^2}{2} + q = \frac{b^2}{2} + a$$

que, junto al teorema anterior, se obtiene una fórmula explícita para el operador de Scattering para toda partícula cuya energía conservada E sea mayor estricta que α. Además, el Lema 4 nos permite concluir una acabada caracterización del operador de Scattering para distintos valores de enegías, y motiva el siguiente corolario.

Corolario 6. *Sea V un potencial en $\mathcal{M}$ tal que α, definido en (4.3), es finito. Si S es el operador de Scattering asociado a los Hamiltonianos Stark H y H_0, luego*

(i) si $p^2 + 2q \leq 2\alpha$, entonces

$$S(q, p) = (q, p),$$

(ii) si $p^2 + 2q > 2\alpha$, entonces

$$S(q, p) = \left(q + \frac{p^2 - b^2}{2}, b\right)$$

donde

$$b = p - \sqrt{p^2 + 2(q - \alpha)} + \int_{\alpha}^{x(t_0)} \frac{dx}{\sqrt{(p^2 - 2V(x)) + 2(q - x)}}$$

En el capítulo anterior además que caracterizar el operador de Scattering clásico para una familia de potenciales V, hemos resuelto el problema inverso para potenciales que a lo más tienen un máximo. En la sección siguiente notaremos que no es necesaria esta condición sobre los potenciales V para resolver el problema inverso, a pesar que si deberemos exigir una propiedad geométrica de dichos potenciales.

3. Problema Inverso y Potenciales Discontinuos

El problema inverso para el Hamiltoniano Stark $H = H_0 + V(x)$, donde H_0 es el Hamiltoniano Stark libre, admite una colección más amplia de potenciales V que el problema inverso del capítulo 2. Recordemos, del capítulo 1, que el problema inverso para "Scattering Clásico en Partícula Libre" nos permitía recuperar todo el potencial siempre y cuando éste tenga a lo más un máximo. Ahora bien, el problema inverso que fue tratado en el capítulo 2 estaba relacionado a potenciales que admitían una cantidad finita de discontinuidades. Por ello, aunque no es completamente necesario para resolver el problema de Scattering inverso, extenderemos los resultados expuestos a lo largo de este capítulo a potenciales discontinuos V que coinciden con funciones V_i en la familia $\mathcal{M}$, con $i = 1, \ldots, n$ y n un número natural. Así, la siguiente definición nos permitirá caracterizar una teoría de Scattering para potenciales discontinuos.

Definición 7. Diremos que $x(t)$ es una **solución clásica** para el problema con valores iniciales asociado a la ecuación (4.6) si satisface las siguientes condiciones:

(i) $x(t)$ es global y continua.

(ii) $x(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{x}(t) = -1 - V'(x(t))$$

para todo t tal que $x(t) \neq x_0$.

(iii) Si existe t_0 tal que $x(t_0) = x_0$ entonces

- Si $\max\{E - V_1(x_0), E - V_2(x_0)\} \leq 0$. Luego, o bien $x(t) \leq x_0$ para todo t, o bien $x(t) \geq x_0$ para todo t.
- Si $\max\{E - V_1(x_0), E - V_2(x_0)\} > 0$. Luego existe $\delta > 0$ tal que, o bien $x(t_0 + t) > x_0$ y $x(t_0 - t) < x_0$ para todo $0 < t < \delta$, o bien $x(t_0 + t) < x_0$ y $x(t_0 - t) > x_0$ para todo $0 < t < \delta$.

Al igual que en el capítulo 1 podemos extender a potenciales discontinuos cada uno de los resultados válidos en potenciales continuos. De este modo, tenemos una teoría de Scattering asintóticamente completa para potenciales que admiten un número finito de discontinuidades, junto con una representación de su operador de Scattering S en función del potencial V asociado. Así, resta uno de los problema cruciales en la teoría de Scattering: recuperar el potencial V a partir de su operador de Scattering S.

Nosotros presentaremos una solución al problema inverso para potenciales V en $\mathcal{M}$ tales que $V'(x) > -1$. La condición $V'(x) > -1$ nos asegura la monotonía de la función $\hat{V}(x) = x + V(x)$ que es fundamental para recuperar V. Al exigir que la derivada del potencial sea mayor que -1 amplía significativamente el universo de posibles potenciales que podemos recuperar a partir de su operador de Scattering S, ya que es posible que V admita varios máximos locales siempre y cuando la depresión del potencial a medida que x crece sea menor de 45 grados.

Teorema 8. *Sea V un potencial que satisface en $\mathcal{M}$, con α finito. Entonces, si $V'(x) > 1$ se tiene*

$$V^{-1}(y) = -y + \alpha + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{y} \frac{S_1(\sqrt{2E})}{\sqrt{y - E}} \, dE$$

donde

$$S_1(p) = \sqrt{2}(b - p + \sqrt{p^2 + 2(q - \alpha)})$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 4 de la sección anterior tenemos que

$$S_1(\sqrt{2E}) = \int_{\alpha}^{\hat{V}^{-1}(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - \hat{V}(x)}}.$$

donde $\hat{V}(x) = x + V(x)$. Luego para todo $\alpha \leq E \leq y$ se tiene

$$\int_s^y \frac{S_1(\sqrt{2E})}{\sqrt{y-E}}\, dE = \int_s^y \int_{\alpha}^{E} \frac{\hat{V}^{-1}(s)'}{\sqrt{y-E}\sqrt{E-s}}\, ds\, dE.$$

Gracias al teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_s^y \frac{S_1(\sqrt{2E})}{\sqrt{y-E}}\, dE &= \int_s^y \hat{V}^{-1}(s)' \left(\int_s^y \frac{dE}{\sqrt{y-E}\sqrt{E-s}} \right) ds \\
&= \pi \int_s^y \hat{V}^{-1}(s)'\, ds \\
&= \pi(\hat{V}^{-1}(y) - \alpha).
\end{aligned}$$

Y la demostración concluye considerando la igualdad $\hat{V}^{-1}(y) = y + V^{-1}(y)$. ∎

La fórmula determinada en el teorema anterior, que nos permite recuperar el potencial V a partir del operador de Scattering S, es similar al encontrado en el Corolario 18 del capítulo 2. Un aspecto que se puede pasar por alto es que las integrales estén bien definidas. Un cálculo sencillo demuestra que la familia de potenciales V en $\mathcal{M}$ permiten que las integrales en el anterior teorema estén bien definidas, y no tengan problema al intercambiar integrales por medio del teorema de Fubini.

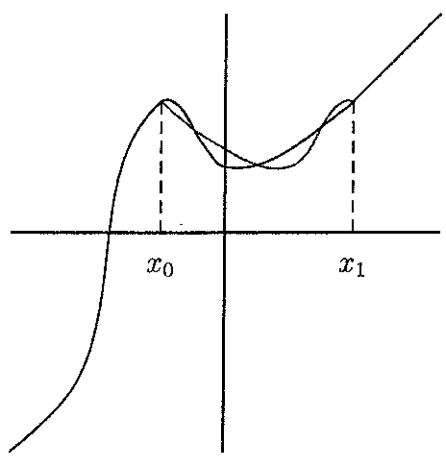

Figura 4.1: Potenciales asociados

En general, el problema inverso de Scattering Clásico para los Hamiltonianos Stark depende fuertemente de la geometría del potencial. Ya hemos visto que es posible recuperar el potencial V si este satisface la relación $V'(x) > -1$, pero deja la incógnita para el resto de los casos.

El siguiente resultado permite sanjar categóricamente la pregunta de qué potenciales en $\mathcal{M}$ pueden ser recuperados en su totalidad a partir del operador de Scattering

Teorema 9. *Sean $V \in \mathcal{M}$ y S_V su operador de Scattering asociado. Supongamos que existe x tal que $V'(x) \leq -1$. Luego existe un potencial $V_0 \in \mathcal{M}$, con operador de Scattering S_{V_0}, tal que $S_V = S_{V_0}$ salvo un conjunto de medida cero.*

DEMOSTRACIÓN. Mediante un simple cambio de variable se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{P^2 - 2\hat{V}(x)}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{P^2 - 2\hat{V}_0(x)}}$$

donde P^2 es el doble de la energía conservada del sistema, x_0 es un punto de máximo de V y x_1 es el menor $x > x_0$ tal que $V(x_0) = V(x_1)$. El resto de la demostración es consecuencia del Teorema 5, para potenciales en $\mathcal{M}$. ∎

Notemos que V_0 puede no ser un potencial que admita derivada en todo punto de la recta real. Por ello la extensión de la teoría de Scattering a potenciales que admiten discontinuidades es fundamental para la demostración anterior, ya que V_0 puede ser considerado como una función con discontinuidades en x_0 y x_1, siendo así posible construir el operador de Scattering asociado al potencial V_0.

REFERENCIAS

[1] Claudio Fernández and Rolando Rebolledo. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Santiago, Ediciones Universidad Católica de Chile, 1999

[2] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol 1, Funcional Analysis*, Academic Press, New York, 1980.

[3] M. Reed and B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol 3, Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1979.

[4] M.A. Astaburuaga, V. Cortés and C. Fernández. *The direct and inverse problem in Newtonian scattering.*

[5] Arne Jensen and Tohru Ozawa. *Classical and quantum scattering for Stark Hamiltonians with slowly decaying potencials.* Annales de l'I. H. P., section A, tome 54, n^o 3 (1991), p. 229-243.

[6] B. Simon. *Wave Operators for Classical Particle Scattering.* Comm. Math. Phys. 23 (1971), p. 37-48.

[7] Arnold Vladimir Igorevich. *Ergodic problems of classical mechanics.* W. A. Benjamin, 1968, p. 23.

[8] M.A. Astaburuaga and C. Fernández. *Newtonian Scattering in Hilbert Space.* J. Math. Anal. Appl. (in press)

[9] B. Koopman, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **17** 315 (1931)

[10] I. Antoniou, W. A. Majewki and Z. Suchanecki. *Implementability of Liouville Evolution, Koopman and Banach-Lamperti Theorems in Classical and Quantum Dynamics.* OpenSys. & Information Dyn. **9**: 301-313, 2002.

[11] Novikov, Roman G. *Small angle scattering and X-ray transform in classical mechanics.* Ark. Mat. 37 (1999), no. 1, 141-169.