PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS

SOBRE LA UNICIDAD DE SOLUCIONES RADIALES POSITIVAS DE $\Delta_p u + K(|x|)f(u) = 0$, PARA EL CASO SUPERLINEAL

por

Duvan Henao Manrique

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesor Guía: Marta García-Huidobro Campos

Comisión Informante: Carmen Cortázar Sanz
Manuel Elgueta Dedes
Raúl Manásevich Tolosa

Julio, 2006
Santiago, Chile

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El problema de la unicidad de las soluciones radiales de tipo ground state de la ecuación $\Delta_p u + f(u) = 0$, donde $\Delta_p u := \mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ denota el p-Laplaciano de u, así como de otras ecuaciones relacionadas, ha sido estudiado con gran detalle durante las últimas décadas. En [11] se dio un primer paso en el estudio de la unicidad de las soluciones radiales de tipo ground state y de algunas propiedades cualitativas de las soluciones de

$$-\mathrm{div}\,(A(|x|)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = B(|x|)f(u), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad n > 1, \tag{1.1}$$

donde $p > 1$ y A, B son funciones positivas, continuamente diferenciables y definidas en $\mathbf{R}^+$ (llamamos solución de tipo ground state a una solución no negativa de (1.1) que tiende a anularse cuando $|x| \to \infty$). Esto se logró para el caso de una función f sublineal.

En [2] Cortázar, Felmer y Elgueta trabajaron sobre la ecuación $\Delta u + f(u) = 0$ considerando funciones f de tipo superlineal, a partir de propiedades que conocían de las soluciones de la ecuación cuando f es de signo negativo, y de un método introducido por Kwong que involucra en el estudio del comportamiento de las soluciones la diferenciabilidad de estas con respecto al valor inicial. Posteriormente, en [3] Cortazar y García-Huidobro, basadas en el trabajo anteriormente mencionado lograron tratar el caso superlineal de la misma ecuación pero incluyendo un factor que depende del término espacial, un peso $K(|x|)$ que transforma la ecuación en $\Delta u(x) + K(|x|)f(u(x)) = 0$, que corresponde a (1.1) para el caso en que $p = 2$. El presente trabajo de tesis está basado en una observación del autor que lo llevó a la conclusión de que los argumentos empleados en [2], y la metolodogía que permitía el tratamiento de la ecuación con peso en [3], seguían siendo válidos al reemplazar Δu por $\Delta_p u$, a pesar de que parecía, inicialmente, que la linealidad del operador de Laplace jugaba un rol fundamental en el buen funcionamiento de las demostraciones y que no habría una extensión directa de los trabajos anteriores al caso en que se introduce en la ecuación la no linealidad del operador p-Laplaciano.

Los resultados obtenidos fueron escritos, en conjunto con García-Huidobro, M., en [7], y se presentan ahora nuevamente. Por otra parte, algunas de las propiedades de las soluciones de la ecuación diferencial a las que refiere dicho artículo son de conocimiento de quienes trabajan en el tema y para quienes se escribe el artículo, de modo que apenas se mencionan; en el presente trabajo, en cambio, todos los aspectos relevantes son tratados en detalle de modo que se ha logrado en él una exposición más acabada y mejor lograda de la problemática bajo consideración. Dadas las singularidades asociadas al operador p-Laplaciano consideramos relevante el formular por escrito la demostración de algunos hechos básicos que a veces se dan por sentado. Del mismo modo, considerando las dificultades que se presentaron al autor al enfrentarse a este área de especialidad por primera vez, este trabajo ha sido escrito pensando no sólo en el lector especializado sino que también en quien tenga interés de conocer un trabajo en este tema aunque no cuente con experiencia previa. La presente tesis tiene así una doble intencionalidad, por un lado el comunicar una contribución hecha por el autor al problema tratado, y por otro ha sido pensada como un trabajo de carácter expositivo e introductorio, se ha procurado aminorar la dificultad técnica que implica su lectura y se ha intentado, en el marco impuesto por las limitaciones de tiempo y de las propias capacidades, hacer una presentación de los resultados lo más completa y lo mejor escrita posible.

Como resultado principal, establecemos la unicidad de las soluciones de simetría radial de tipo ground state del problema

$$\begin{gathered} -\Delta_p u(x) = K(|x|)f(u(x)), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad n > p > 1, \\ u(x) \geq 0, \quad u \not\equiv 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \end{gathered} \tag{1.2}$$

como también la unicidad de las soluciones positivas de

$$\begin{gathered} -\Delta_p u(x) = K(|x|)f(u(x)), \quad x \in B_R(0), \quad n > p > 1, \\ u(x) > 0, \quad x \in B_R(0), \quad u(x) = 0, \quad |x| = R. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Tratamos también el correspondiente problema homogéneo de condiciones de frontera de Dirichlet - Neumann

$$\begin{gathered} -\Delta_p u(x) = K(|x|)f(u(x)), \quad x \in B_r(0), \quad n > p > 1, \\ u(x) > 0, \quad x \in B_R(0), \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial B_R(0), \end{gathered} \tag{1.4}$$

que puede verse como un caso particular de (1.2) (corresponde al caso de una solución de soporte compacto), o bien de (1.3).

Asumiremos que $K : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ es una función positiva y continuamente diferenciable que satisface la siguiente condición:

(K_1) la función $r \to p + r\frac{K'(r)}{K(r)}$ es estrictamente positiva y decreciente en $(0, \infty)$.

De la función $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ suponemos que

(f_1) $f(0) = 0$, y existe $u_0 > 0$ tal que $f(u) > 0$ para $u > u_0$, y $f(u) \leq 0$, $f(u) \not\equiv 0$, para $u \in (0, u_0)$.

(f_2) f es continua en $[0, \infty)$ y satsiface localmente la condición de continuidad de Lipschitz en (u_0, ∞).

Bajo la hipótesis (f_2) se tiene que f es diferenciable casi en todas partes. Denotando por D el subconjunto de $[u_0, \infty)$ en que existe f', asumiremos también que se satisfacen las siguientes condiciones de superlinealidad y convexidad:

(f_3) $(p-1)f(u) \leq f'(u)(u - u_0)$, para todo $u \in D$,

(f_4) $\frac{uf'(u)}{f(u)}$ es decreciente en D como función de u.

(K_1) no parece ser una hipótesis que exija más de lo necesario, porque casi en todas partes en donde se hace uso de ella resulta ser exactamente lo que se necesita, no proporciona mucha holgura y siempre alcanza para salvar la situacin pero no para mucho más. En particular, esto se evidencia en la integrabilidad de $K^{\frac{1}{p}}$ cerca de cero, la cual permite la transformación de la ecuación diferencial que presentamos al comienzo del próximo capítulo, o en el estudio de la integrabilidad de $r^{n-1}K(r)$, lo cual es fundamental por el papel que cumple la función $\int_0^r t^{n-1}K(t)dt$.

(f_3) expresa la condición de superlinealidad; de (f_4) diremos que está presente también en otros trabajos, como [14].

Al considerar soluciones de simetría radial, (1.2) y (1.3) se formulan en términos de los siguientes problemas:

$$\begin{gathered} -(r^{n-1}\phi_p(u'(r)))' = r^{n-1}K(r)f(u), \quad r > 0, \quad n > p > 1, \\ u'(0) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} u(r) = 0, \quad u(r) \geq 0 \text{ para } r > 0, \end{gathered} \tag{1.5}$$

y

$$\begin{gathered} -(r^{n-1}\phi_p(u'(r)))' = r^{n-1}K(r)f(u), \quad r > 0, \quad n > p > 1, \\ u'(0) = 0, \quad u(R) = 0, \quad u(r) \geq 0 \text{ para } r \in (0, R), \end{gathered} \tag{1.6}$$

respectivamente, donde hemos llamado $\phi_p(s) := |s|^{p-2}s$, $\phi(0) = 0$. Consideramos que las soluciones de la ecuación en (1.5) y (1.6) son de clase $C^1[0, \infty)$ y tales que $r^{n-1}\phi_p(u'(r)) \in C^1[0, \infty)$.

Estos son los resultados principales del trabajo que en esta tesis se expone:

Teorema 1 *Si f satisface $(f_1) - (f_4)$ y el peso K satisface (K_1) podemos asegurar que el problema* (1.5) *tiene a lo más una solución no trivial.*

Teorema 2 *Si f satisface $(f_1) - (f_4)$ y el peso K satisface (K_1) podemos asegurar que el problema* (1.6) *tiene a lo más una solución no trivial.*

Nuestros resultados cubrirán también la unicidad de las soluciones de tipo ground state de

$$-(a(r)|u'(r)|^{p-2}u'(r))' = b(r)f(u(r)), \quad r > 0, \quad n > 1, \tag{1.7}$$

versión radial del problema generalizado (1.1), donde a y b corresponden a A y a B según la convención de que $a(r) = r^{n-1}A(r)$ y $b(r) = r^{n-1}B(r)$, si $a, b : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ son funciones positivas y continuamente diferenciables tales que

(w_1) $a^{1-p'} \in L^1(1, \infty) \setminus L^1(0, 1)$, (de modo que $h(r) = \int_r^\infty a^{1-p'}(t)dt$ está bien definida) y

(w_2) $\left(\frac{1}{p}\frac{a'}{a} + \frac{1}{p'}\frac{b'}{b}\right)\frac{h}{|h'|}$ sea decreciente en $(0, \infty)$, con $\lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{p}\frac{a'}{a} + \frac{1}{p'}\frac{b'}{b}\right)\frac{h}{|h'|} \geq p - 1$.

En efecto, si a y b satisfacen $(w_1) - (w_2)$ y $N > p$ es arbitrario

$$t(r) := h^{-\frac{p-1}{N-p}}(r)$$

define un difeomorfismo creciente de $(0, \infty)$ en $(0, \infty)$, y es tal que si escribimos $v(t(r)) = u(r)$ entonces u es solución de (1.7) si y sólo si

$$\begin{aligned}
-(t^{N-1}\phi_p(v_t(t)))_t &= -(t^{N-1}(t'(r))^{1-p}\phi_p(u'(r)))'(t'(r))^{-1} \\
&= -\left(\left(-\frac{p-1}{N-p}\left(t^{-\frac{N-p}{p-1}}(r)\right)'\right)^{1-p}\phi_p(u'(r))\right)'(t'(r))^{-1} \\
&= -\left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p-1}(a(r)\phi_p(u'(r)))'(t'(r))^{-1} \\
&= t^{N-1}\tilde{K}(t)f(v(t)),
\end{aligned}$$

si es que llamamos $\tilde{K}(t)$ a

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(t) &= \left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p-1}\frac{b(r)}{t'(r)/t(r)}t^{-N}(r) \\
&= -\left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p}\frac{b(r)}{h'(r)/h(r)}t^{-N}(r) \\
&= \left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p}\left(a^{\frac{1}{p}}(r)b^{\frac{1}{p'}}(r)\right)^{p'}t^{-N-\frac{N-p}{p-1}}(r) \\
&= \left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p}\left(a^{\frac{1}{p}}(r)b^{\frac{1}{p'}}(r)t^{-(N-1)}(r)\right)^{p'};
\end{aligned}$$

esto es, (1.7) puede transformarse en la ecuación en (1.5) y $\tilde{K}(t)$ está definida, es positiva y es continuamente diferenciable en $(0, \infty)$, y es tal que

$$\begin{aligned}
p + t\frac{\tilde{K}_t(t)}{K(t)} &= p + p't\left(\left(\frac{1}{p}\frac{a'(r)}{a(r)} + \frac{1}{p'}\frac{b'(r)}{b(r)}\right)\cdot\frac{1}{t'(r)} - \frac{N-1}{t}\right) \\
&= p'\frac{N-p}{p-1}\left(\left(\frac{1}{p}\frac{a'(r)}{a(r)} + \frac{1}{p'}\frac{b'(r)}{b(r)}\right)\frac{h(r)}{|h'(r)|} - (p-1)\right),
\end{aligned}$$

i.e., $\tilde{K}(t)$ satisface (K_1) y de v podrá concluirse aquello que sea presentado en este trabajo; como todo lo que se diga sobre v es un enunciado sobre u, se concluye que lo que ha de exponerse se aplica también a (1.7) y al problema (1.1).

Esta tesis se divide en tres capítulos. El primero es éste capítulo de introducción, el segundo trata algunos aspectos preliminares, y el tercero expone los resultados principales. Esperamos que el presente trabajo sea del agrado del lector.

Capítulo 2

Aspectos preliminares

2.1. Transformación de la ecuación diferencial

Algunos aspectos del problema podrán ser tratados de una manera más conveniente y más comprensible después de transformar la ecuación

$$-(r^{n-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))' = r^{n-1}K(r)f(u(r)), \quad r > 0, \qquad n > p > 1 \tag{2.1}$$

en una en que los factores que acompañan a $|u'(r)|^{p-2}u'(r)$ y a $f(u(r))$, al lado izquierdo y al derecho de la ecuación, respectivamente, sean iguales. Esto es, haremos un cambio de variable mediante un difeomorfismo que transforme la ecuación anterior en una ecuación de la forma

$$-(q(t)|v_t(t)|^{p-2}v_t(t))_t = q(t)f(v(t)), \quad t > 0 \tag{2.2}$$

en donde t sea la nueva variable independiente y en donde el subíndice t denota diferenciación con respecto a t. Deduciremos de los cálculos siguientes las condiciones que debemos imponer sobre K así como el difeomorfismo indicado para lograr nuestro propósito. Escribamos $t = t(r)$, como si ya conociéramos el difeomorfismo que en realidad buscamos, y escribamos $u(r) = v(t(r))$. Así, $u'(r) = v_t(t)t'(r)$ y la ecuación se convierte en

$$-(r^{n-1}(t'(r))^{p-1}|v_t(t(r))|^{p-2}v_t(t(r)))_t t'(r) = r^{n-1}K(r)f(v(t(r))),$$

asumiendo que $t'(r)$ sea mayor que cero para todo r.

El cambio de variable $t = t(r)$ nos llevará a la ecuación que queremos si

$$q(t(r)) = r^{n-1}(t'(r))^{p-1} = \frac{r^{n-1}K(r)}{t'(r)}.$$

Por esta razón definimos

$$t(r) = \int_0^r K^{\frac{1}{p}}(s)ds.$$

Para que $t(r)$ esté bien definido y para que tengamos que $r = 0$ y $r = \infty$ correspondan a los valores de $t = 0$ y $t = \infty$, respectivamente, es preciso que $K^{\frac{1}{p}} \in L^1(0,1) - L^1(1,\infty)$. Esto, sin embargo, es consecuencia de $(K1)$, la propiedad que hemos pedido que cumpla $K(r)$: que $r \to p + \frac{rK'(r)}{K(r)}$ sea estrictamente positiva y decreciente en $(0,\infty)$ como función de r. En efecto, para $r \in (0,\infty)$

$$p\{rK^{\frac{1}{p}}(r)\}' = K^{\frac{1}{p}}(r)\left\{p + \frac{rK'(r)}{K(r)}\right\} > 0 \tag{2.3}$$

luego

$$\begin{aligned}\left\{p + \frac{1\cdot K'(1)}{K(1)}\right\}\int_\epsilon^1 K^{\frac{1}{p}}(r)dr &\leq \int_\epsilon^1 K^{\frac{1}{p}}(r)\left\{p + \frac{rK'(r)}{K(r)}\right\}dr \\ &= p\{1\cdot K^{\frac{1}{p}}(1) - \epsilon K^{\frac{1}{p}}(\epsilon)\},\end{aligned}$$

y como $rK^{\frac{1}{p}}(r)$ es creciente (por (2.3)) y por ende $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \epsilon K^{\frac{1}{p}}(\epsilon)$ existe, se tiene que $K^{\frac{1}{p}} \in L^1(0,1)$; dicho sea de paso, $\lim\limits_{r\to 0^+} rK^{\frac{1}{p}}(r)$ puede interpretarse como

$$\lim_{r\to 0^+} rK^{\frac{1}{p}}(r) = \lim_{r\to 0^+} \frac{K^{\frac{1}{p}}(r)}{\frac{1}{r}},$$

esto es, como una comparación de dos funciones, una que hemos demostrado integrable cerca de $r = 0$ y otra que no lo es, de esto obtenemos como consecuencia que

$$\lim_{r\to 0^+} rK^{\frac{1}{p}}(r) = 0. \tag{2.4}$$

Por otro lado

$$\lim_{r\to\infty} \frac{K^{\frac{1}{p}}(r)}{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to\infty} rK^{\frac{1}{p}}(r)$$

existe y es positivo, o infinito (nuevamente por el hecho de que $rK^{\frac{1}{p}}(r)$ crece al crecer r), luego la integral impropia $\int_1^\infty K^{\frac{1}{p}}(r)dr$ puede compararse con la integral de $\frac{1}{r}$, que es divergente, y se concluye que $K^{\frac{1}{p}} \notin L^1(1,\infty)$.

Habiendo definido así $t(r)$ se tiene que $t'(r) > 0$, esto da a la sustitución $t = t(r)$ el carácter de difeomorfismo y nos permite escribir también $r = r(t)$. Al mismo tiempo, la condición $t'(r) > 0$ era lo único que necesitábamos para concluir la validez del cálculo que nos mostraba que si $u(r)$ satisface (2.1) y definimos $q(t) = r^{n-1}(t)K^{\frac{1}{p'}}(r(t))$, p' el conjugado de Hölder de p, entonces $v(t) = u(r(t))$ satisface (2.2). Reunamos, por conveniencia, la información que tenemos y usaremos más adelante:

$$
\begin{aligned}
t(r) &= \int_0^r K^{\frac{1}{p}}(s)ds \\
q(t) &= r^{n-1}(t)K^{\frac{1}{p'}}(r(t)) \\
q(t)\phi_p(v_t(t)) &= r^{n-1}K^{\frac{1}{p'}}(r)\phi_p(v_t(t)) = r^{n-1}\phi_p(u'(r))
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

(recuérdese que hemos definido $\phi_p(s)$ como $|s|^{p-2}s$).

Dados los propósitos de nuestro trabajo es preciso que estudiemos el problema de valores iniciales

$$
\begin{aligned}
-(r^{n-1}\phi_p(u'(r)))' &= r^{n-1}K(r)f(u(r)) \\
u(0) &= \alpha \\
u'(0) &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Recordemos que de f suponemos que es no positiva entre 0 y un valor distinguido u_0, que se anula en 0 y en u_0 y que crece en forma superlineal en (u_0, ∞). Por motivos que aclararemos más adelante, consideraremos sólo valores de α mayores que u_0. En particular asumimos que $f(\alpha) > 0$.

Por *solución* del anterior problema de valores iniciales nos referimos a una función $u(r)$ que suponemos definida y de clase C^1 en $[0, \infty)$, que es tal que $r^{n-1}u'(r)$ es también de clase C^1 en $[0, \infty)$ y además satisface las ecuaciones descritas anteriormente.

Nota. Es por comodidad que le pedimos a una función, como uno de los requisitos para considerarla solución de la ecuación, que tenga como dominio todo el intervalo $[0, \infty)$. Sin embargo esto es completamente arbitrario y puede además presentarse el siguiente inconveniente: demostraremos que dado $\alpha > u_0$ hay una única solución local $u(r)$ que adopta a α como valor inicial y que se continúa en forma única hasta que $u'(r) = 0$ o bien hasta que $u(r) = 0$. Si $u(r)$ se anula es posible que sólo pueda continuarse si se le permite adoptar valores negativos. Sin embargo, si $u(r) < 0$, el sentido de la ecuación (2.1) no es claro, puesto que f está definida en principio sólo en $[0, \infty)$ (y esto es así porque nuestra intención es estudiar el comportamiento de soluciones positivas de la ecuación). Podemos de todos modos permitirnos imponer que toda solución esté definida en $[0, \infty)$ y salvar la dificultad señalada definiendo $f(s) = 0$ para valores negativos de s, según lo cual, cualquier solución $u(r)$ definida sobre un intervalo $[0, R]$ que sea tal que $u(R) = 0$ puede extenderse a $[0, \infty)$ según la expresión

$$
u(r) = -\frac{p-1}{n-p}\left\{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n-p}{p-1}}\right\} R|u'(R)|,
$$

lo cual se deduce fácilmente de la ecuación

$$
(r^{n-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))' = -r^{n-1}K(r)f(u(r)) = 0.
$$

Esta observación se propone mostrar que lo importante no es que la solución esté definida para valores arbitrariamente grandes de r, sino que lo significativo de aquello que se está pidiendo a una función para ser solución es su comportamiento alrededor de $r = 0$.

Veamos que (2.6) se transforma en

$$\begin{aligned} -(q(t)\phi_p(v_t(t)))_t &= q(t)f(v(t)) \\ v(0) &= \alpha \\ v_t(0) &= 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

en el sentido que si u es solución de (2.6), y si definimos $q(t)$ y $v(t) = u(r(t))$ tal como antes, entonces $v(t)$ y $q(t)\phi_p(v_t(t))$ son de clase $C^1[0,\infty)$ y satisfacen las ecuaciones (2.7).

Tenemos, en primer lugar, que

$$\begin{aligned} \frac{q_t}{q}(t) = \frac{d}{dt}\log q(t) &= (n-1)\frac{r_t}{r}(t) + \frac{1}{p'}\frac{K'(r(t))}{K(r(t))}r_t(t) \\ &= \frac{1}{p'r(t)K^{\frac{1}{p}}(r(t))}\left\{\frac{n-1}{p-1}p + \frac{r(t)K'(r(t))}{K(r(t))}\right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

luego, como $n > p$ y $K(r)$ satisface $(K1)$, $q_t(t) > 0$ en $(0,\infty)$; en segundo lugar, sabiendo que

$$\lim_{t\to 0^+} q(t)\phi_p(v_t(t)) = \lim_{r\to 0^+} r^{n-1}\phi_p(u'(r)) = 0,$$

(2.2) nos permite escribir

$$\phi_p(v_t(t)) = -\frac{1}{q(t)}\int_0^t q(s)f(v(s))ds.$$

Esto muestra que mientras que el factor $f(v(s))$ se mantenga positivo (lo cual sucede por lo menos para valores pequeños de s porque $v = u \circ r$ es continua[1] y $v(0) = \alpha > u_0$) $v(t)$ es decreciente; así, mientras $v(s)$ sea mayor que u_0, como $q(t)$ se demostró creciente[2] en $(0,\infty)$ y puesto que f es creciente en (u_0,∞) tendremos que

$$\phi_p(|v_t(t)|) = \frac{1}{q(t)}\int_0^t q(s)f(v(s))ds \leq f(\alpha)\frac{\int_0^t q(s)}{q(t)}ds \leq f(\alpha)t, \tag{2.9}$$

y esto implica finalmente que $\lim_{t\to 0^+} v_t(t) = 0$. No es claro que $t(r)$ sea diferenciable en $r = 0$, o, en caso que exista $t'(0)$, no es claro que sea positivo; todo depende de que exista y de cuánto valga $\lim_{r\to 0^+} K^{\frac{1}{p}}(r)$. En consecuencia no es posible establecer

[1] estamos suponiendo que u es solución de (2.1), en particular que es continua

[2] Otra manera de ver que es creciente es escribiendo $q(t(r)) = r^{n-p}(r^pK(r))^{\frac{1}{p'}}$.

que $v(t)$ es diferenciable en $t = 0$ y que $v_t(0) = 0$ sólo del hecho que $u'(0) = 0$. Sin embargo sí podemos terminar de establecer que v es de clase C^1 en $[0, \infty)$ usando la regla de L'Hôpital: sí tenemos que $v(t) = u(r(t))$ es continua en $t = 0$ y que $v(0) = \alpha$ luego

$$v_t(0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{v(t) - \alpha}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{v_t(t)}{1} = 0.$$

Análogamente $q(t)\phi_p(v_t(t))$ es de clase $C^1[0, \infty)$, y su derivada se anula en $t = 0$: esto se puede ver, por ejemplo, escribiendo

$$q(t)\phi_p(v_t(t)) = -\int_0^t q(s)f(v(s))ds$$

y considerando que

$$q(t) = r^{n-1}(t)K^{\frac{1}{p'}}(r(t)) = r^{n-p}(rK^{\frac{1}{p}}(r))^{p-1},$$

de manera que $\lim_{t\to 0^+} q(t) = 0$ pues $n > p$ y el factor $rK^{\frac{1}{p}}$ es acotado (debido a su monotonía[3]).

Nuestra intención de estudiar una ecuación con el mismo peso a ambos lados de la igualdad está motivada por lo mucho que se ha estudiado la ecuación $-\Delta u = f(u)$, cuya versión radial es $-(r^{n-1}u'(r))' = r^{n-1}f(u)$, y de la extensión de los argumentos que se han ofrecido para estas ecuaciones a la ecuación $-\Delta_p u = f(u)$ y su versión radial $-(r^{n-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))' = r^{n-1}f(u)$ (para ser más explícitos respecto a cuál es la motivación, obsérvese que el factor que acompaña a $\phi_p(u')$ es el mismo que acompaña a $f(u)$). Concretamente, basados en el tratamiento de estas ecuaciones podremos demostrar, por un lado, la existencia y unicidad locales del problema de valores iniciales (2.7) y, por otra parte, la diferenciabilidad de la solución de dicho problema con respecto al dato inicial α; finalmente, valiéndonos de los recursos expuestos en esta sección, seremos capaces de transferir estos resultados al problema (2.6), que es del que trata esta tesis.

2.2. El problema de Cauchy

La ecuación diferencial (2.2) puede escribirse como

$$(\phi_p(v_t))_t + \frac{q_t}{q}\phi_p(v_t) + f(v) = 0. \tag{2.10}$$

Se puede decir que la conveniencia de que la ecuación tenga el mismo peso a ambos lados está relacionada con el hecho de que el último término en la ecuación anterior depende directamente de v y de t depende sólo indirectamente.

[3] refiérase nuevamente a (2.3); también se deduce de (2.4).

Recordemos que hemos establecido que $\lim_{r\to 0^+} rK^{\frac{1}{p}}(r) = 0$ (ver (2.4)). Considerando esto y que, según $(K1)$, $\lim_{r\to 0^+} \left\{\frac{n-1}{p-1}p + \frac{rK'(r)}{K(r)}\right\}$ existe y es positivo (o infinito), vemos de la expresión (2.8):

$$\frac{q_t}{q}(t) = \frac{1}{p' r K^{\frac{1}{p}}(r)} \left\{\frac{n-1}{p-1}p + \frac{rK'(r)}{K(r)}\right\}, \quad r = r(t)$$

que el problema de valores iniciales para la ecuación (2.10) en $t = 0$ es singular debido al término $\frac{q_t}{q}(t)$ y a la posible singularidad de $\phi_p(s) = |s|^{p-2}s$ cuando $s = 0$. Esto hace que no nos sea posible abordar el problema de la existencia y unicidad locales para dicho problema de valores iniciales según el tratamiento usual del problema de Cauchy. Con esto nos referimos a lo siguiente: (2.10) puede ser vista como[4]

$$(p-1)v_{tt}(t) = \frac{q_t}{q}(t)|v_t(t)| - f(v(t))|v_t(t)|^{2-p},$$

una ecuación diferencial de segundo orden $v_{tt}(t) = g(t, v(t), v_t(t))$. La teoría estándar nos dice que si alrededor del trío (t_0, v_0, ρ_0) que determina el problema de valores iniciales

$$v_{tt} = g(t, v(t), v_t(t)), \quad v(t_0) = v_0, \quad v_t(t_0) = \rho_0$$

g es Lipschitz con respecto a su segundo y tercer argumentos podemos asegurar la existencia y unicidad locales para soluciones de ese problema. Si $t_0 > 0$, $\rho_0 < 0$ y $v_0 > u_0$, dado que f es localmente Lipschitz en (u_0, ∞), no se presenta ninguna dificultad. Sin embargo, cuando $t_0 = 0$, como queremos que $v_t(0) = 0$, el factor $|v_t(t)|^{2-p}$ hará que establecer la unicidad local requiera un tratamiento diferente. Es más, ni siquiera seremos capaces de demostrar de ese modo la existencia local de soluciones, por la falta de continuidad debida a la singularidad del factor $\frac{q_t}{q}(t)$ en $t = 0$. Seremos capaces de reemplazar la condición de Lipschitz y demostrar existencia y unicidad locales, así como la dependencia continua con respecto a las condiciones iniciales, valiéndonos de características propias de nuestro operador el p-Laplaciano, y de las hipótesis que hemos supuesto para el peso $q(t)$ que lo acompaña en la ecuación. Una vez superada la dificultad que se encuentra en $t = 0$ podríamos recurrir a la teoría estándar. No obstante, nos econtramos con una segunda dificultad: que dado $\alpha > u_0$ hay una única solución del problema y que ella puede continuarse podrá establecerse mientras la función permanezca en (u_0, ∞), en donde f satisface localmente la condición de Lipschitz, pero no

[4]siendo el valor inicial mayor que u_0, sabemos que toda solución $v(t)$ de (2.10) es decreciente inicialmente y su derivada puede escribirse como

$$v_t(t) = -\left\{\int_0^t \frac{q(s)}{q(t)} f(v(s))ds\right\}^{p'-1};$$

esto nos muestra que $v_{tt}(t)$ existe si $t > 0$.

podremos argumentar del mismo modo que pueda continuarse en forma única debajo de u_0. Para salvar esta situación, y considerando que las soluciones de esta ecuación son decrecientes por lo menos hasta alcanzar el valor u_0, y por lo tanto invertibles, deduciremos los resultados que necesitamos aplicando la teoría clásica a las funciones inversas, deduciendo para ellas una ecuación diferencial; de esta manera, en la nueva ecuación f aparecerá evaluada en la variable independiente, y no en la solución de la ecuación, y no requeriremos de f que sea Lipschitz-continua. Esto lo veremos en detalle, por el momento sólo digamos que será más fácil conseguir este último resultado trabajando directamente con (2.1) y no con la ecuación transformada (2.2).

Para demostrar existencia escribimos la ecuación como una ecuación integral y hacemos uso del teorema de punto fijo de Schauder. Este resultado de existencia no hace uso del hecho que f es localmente Lipschitz-continua en (u_0, ∞) y por lo tanto no discrimina entre soluciones que permanecen en ese intervalo y soluciones que atraviesan u_0.

Teorema 3 (Teorema de Existencia) *Dados $t_0 \geq 0$, v_0 y ρ_0 arbitrarios existe $T > t_0$ y una solución $v(t)$ del problema de valores iniciales*[5]

$$\begin{aligned} -(q(t)\phi_p(v_t(t)))_t &= q(t)f(v(t)) \\ v(t_0) &= v_0 \\ v_t(t_0) &= \rho_0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

definida en $[t_0, T)$. En particular, dados $R > 0$ y $T > 0$ lo suficientemente pequeños es posible garantizar que los problemas (2.6) *y* (2.7) *tienen una solución definida en $[0, R)$ y $[0, T)$, respectivamente.*

Demostración. Sea c un real arbitrario. Llamemos $\mathcal{C}$ al conjunto de funciones

$$\mathcal{C} = \{v \in C[t_0, T] : \|v - v_0\|_\infty \leq c\}$$

donde T es un valor que pronto elegiremos y $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma estándar en el espacio de Banach $C[t_0, T]$ de funciones reales continuas definidas en $[t_0, T]$,

$$\|v\|_\infty = \sup_{t \in [t_0, T]} |v(t)|.$$

$\mathcal{C}$ es cerrado y convexo. Definimos sobre $\mathcal{C}$ el operador $\mathcal{T}$ dado por

$$\mathcal{T}[v](t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} \phi_{p'} \left(\frac{q(t_0)}{q(s)} \phi_p(\rho_0) - \int_{t_0}^{s} \frac{q(\tau)}{q(s)} f(v(\tau)) d\tau \right) ds,$$

[5]Si $v_0 \leq 0$ definimos, tal como hemos señalado en una instancia anterior, $f \equiv 0$ en $(-\infty, 0)$ para que la ecuación diferencial en (2.11) tenga sentido. De cualquier modo, si $v_0 > 0$, veremos que del teorema podemos concluir, si así lo deseamos, la existencia de una solución positiva del problema de valores iniciales según lo cual el que f esté definida en $[0, \infty)$ no es un inconveniente.

donde hacemos notar que $\phi_{p'}$ es función inversa de ϕ_p, $\phi_{p'}(s) = |s|^{p'-2}s$. Demostraremos que $\mathcal{T}$ tiene un punto fijo, que es la solución buscada al problema de valores iniciales.

Usando la continuidad y la monotonía de $\phi_{p'}$ en $(-\infty, \infty)$, la continuidad de f, el hecho de que toda función $v \in \mathcal{C}$ permanece en el intervalo acotado $[v_0 - c, v_0 + c]$ y la monotonía de $q(t)$ deducimos la existencia de $M > 0$ tal que $|f(v(t))| \leq M$ para toda $v \in \mathcal{C}$, $t \in [t_0, T]$; que $\mathcal{T}$ está bien definido, y que

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{T}[v](t) - v_0| &\leq \int_{t_0}^{T} \phi_{p'}(|\rho_0|^{p-1} + M(T - t_0))ds \\
&= (T - t_0)\{|\rho_0|^{p-1} + M(T - t_0)\}^{p'-1}.
\end{aligned}
$$

Pediremos a T únicamente que el lado derecho de la igualdad anterior esté acotado por c, de modo que $\mathcal{T}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ (no hay problema en imponer esto puesto que M es independiente de la elección de T).

Para aplicar el teorema de Schauder debemos verificar que $\mathcal{T}$ sea continuo y que $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ sea relativamente compacto. Consideremos una sucesión $\{v_k\}$ de funciones en $\mathcal{C}$, sean $t_1, t_2 \in [t_0, T]$, $t_1 < t_2$. Entonces

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{T}[v_k](t_1) - \mathcal{T}[v_k](t_2)| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{q(t_0)}{q(s)}\phi_p(\rho_0) - \int_{t_0}^{s} \frac{q(\tau)}{q(s)} f(v(\tau))d\tau \right|^{p'-1} ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} (|\rho_0|^{p-1} + M(s - t_0))^{p'-1} ds,
\end{aligned}
$$

luego la familia $\{\mathcal{T}[v_k]\}$ es equicontinua. Apelando al teorema de Arzela - Ascoli se tiene que toda sucesión en $\mathcal{T}(C)$ tiene una subsucesión que converge en $\mathcal{C}$, porque $\mathcal{C}$ es cerrado.

Finalmente, demostremos la continuidad de $\mathcal{T}$. Sean $v \in \mathcal{C}$ y $\{v_k\} \subset \mathcal{C}$ tales que $\lim_{k\to\infty} \|v_k - v\|_\infty = 0$. Considerado que en

$$
\mathcal{T}[v_k](t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} \phi_{p'} \left(\frac{q(t_0)}{q(s)}\phi_p(\rho_0) - \int_{t_0}^{s} \frac{q(\tau)}{q(s)} f(v_k(\tau))d\tau \right) ds
$$

todas las expresiones están uniformemente acotadas[6] con respecto a k y la integración se realiza sobre intervalos finitos, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para intercambiar dos veces el límite con el signo integral y concluir que $\mathcal{T}[v_k]$ converge puntualmente a $\mathcal{T}[v]$ en $[t_0, T]$ cuando $k \to \infty$. Usando esto y que toda sucesión en $\mathcal{T}(\mathcal{C})$ tiene un punto límite en $\mathcal{C}$ obtenemos que $\{\mathcal{T}[v_k]\}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente a $\mathcal{T}[v]$ en $[t_0, T]$; sin

[6]La acotación proviene de la constante M encontrada para f, válida para toda función de $\mathcal{C}$; las fracciones que involucran a q podrían, en principio, hacer dudar que los integrandos sean acotados debido al hecho de que $\lim_{t\to 0^+} q(t) = 0$, pero esto se resuelve con su monotonía.

embargo, como el mismo argumento es válido no sólo para $\{\mathcal{T}[v_k]\}$ sino también para cualquiera de sus subsucesiones, podemos establecer que la sucesión completa converge a $\mathcal{T}[v]$.

La validez de lo que será expuesto a continuación se tiene cualquiera sea la elección de t_0, v_0 y ρ_0. Sin embargo nos interesa más, se entiende mejor y es más significativo si nos restringimos al caso en que $t_0 = 0$, $v_0 = \alpha > u_0$, $\rho_0 = 0$, y el problema (2.11) se convierte en (2.7). En este caso, elegimos c de modo que $[\alpha - c, \alpha + c] \subset (u_0, \infty)$, donde f es positiva.

Por el teorema del punto fijo de Schauder, existe $v \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{T}[v] = v$. Como $v \in \mathcal{C}$ entonces v es continua en $[0, T]$. A partir de la expresión

$$v(t) = \alpha - \int_0^t \left\{ \int_0^s \frac{q(\tau)}{q(s)} f(v(\tau)) d\tau \right\}^{p'-1} ds$$

se obtiene que $v(0) = \alpha$. Se obtiene también que $v \in C^1[0, T)$: por un lado

$$v_t(t) = -\left\{ \int_0^t \frac{q(s)}{q(t)} f(v(s)) ds \right\}^{p'-1}$$

si $t > 0$ y, por otro lado, usando la regla de L'Hôpital tenemos que

$$v_t(0) = \lim_{t\to 0^+} v_t(t) = -\left\{ \lim_{t\to 0^+} \int_0^t \frac{q(s)}{q(t)} f(v(s)) ds \right\}^{p'-1} = 0,$$

habiéndose obtenido la última de las igualdades acotando $\int_0^t \frac{q(s)}{q(t)} f(v(s)) ds$ por Mt. Finalmente,

$$q(t)\phi_p(v_t(t)) = q(t)\phi_p \left(-\left\{ \int_0^t \frac{q(s)}{q(t)} f(v(s)) ds \right\}^{p'-1} \right),$$

$$q(t)\phi_p(v_t(t)) = -\int_0^t q(s) f(v(s)) ds, \qquad (2.12)$$

de esto se infiere que $q(t)\phi_p(v_t(t)) \in C^1[0, T)$, que $\lim_{t\to 0^+} q(t)\phi_p(v_t(t)) = 0$, y que

$$\{q(t)\phi_p(v_t(t))\}_t = -q(t) f(v(t)),$$

como deseábamos. Nótese que hemos establecido también que v es decreciente.

Una vez sabida la existencia de una solución v del problema (2.7), definida en $[0, T)$, definamos $R = r(T)$, $u(r) = v(t(r))$, $r \in [0, R)$, donde, recordemos,

$$t(r) = \int_0^r K^{\frac{1}{p}}(s) ds$$

y $r(t)$ denota su inversa. En términos de u, la representación

$$v(t) = \alpha - \int_0^t \left\{ \int_0^s \frac{q(\tau)}{q(s)} f(v(\tau)) d\tau \right\}^{p'-1} ds$$

se convierte en

$$u(r) = \alpha - \int_0^{t(r)} \left\{ \int_0^s \frac{q(\tau)}{q(s)} f(v(\tau)) d\tau \right\}^{p'-1} ds$$

y, haciendo las sustituciones $\tau = t(\sigma)$, $s = t(\rho)$,

$$d\tau = K^{\frac{1}{p}}(\sigma) d\sigma, \quad ds = K^{\frac{1}{p}}(\rho) d\rho,$$

nos dice que

$$u(r) = \alpha - \int_0^r \left\{ \int_0^\rho \frac{q(t(\sigma))}{q(t(\rho))} f(u(\sigma)) K^{\frac{1}{p}}(\sigma) d\sigma \right\}^{p'-1} K^{\frac{1}{p}}(\rho) d\rho.$$

Usando (2.5), en particular que

$$q(t) = r^{n-1}(t) K^{\frac{1}{p'}}(r(t)),$$

y que $\frac{p'-1}{p'} = \frac{1}{p}$ obtenemos finalmente que

$$u(r) = \alpha - \int_0^r \left\{ \int_0^\rho \frac{s^{n-1}}{\rho^{n-1}} K(s) f(u(s)) ds \right\}^{p'-1} d\rho, \quad r \in [0, R)$$

de donde deducimos, del mismo modo como se dedujo para v, que:

- $u(0) = \alpha$.
- $u \in C^1[0, R)$ y $u'(r) = -\left\{ \int_0^r \frac{s^{n-1}}{r^{n-1}} K(s) f(u(s)) ds \right\}^{p'-1}$.
- $u'(0) = 0$.
- $r^{n-1} \phi_p(u'(r)) = -\int_0^r s^{n-1} K(s) f(u(s)) ds$.
- $r^{n-1} \phi_p(u'(r)) \in C^1[0, R)$ y tiende a cero cuando $r \to 0^+$, y
- $\{r^{n-1} \phi_p(u'(r))\}' = -r^{n-1} K(r) f(u(r))$.

Esto demuestra la existencia de una solución local del problema (2.6). ■

Nota. La última parte de la demostración anterior completa lo que comenzó a exponerse en la sección anterior y ahora enunciamos mediante la siguiente proposición:

a cada solución del problema de valores iniciales (2.6) corresponde una solución del problema de valores iniciales (2.7) y viceversa.

En particular, resulta claro que para obtener la unicidad local de ambos problemas basta demostrar la unicidad de uno de ellos. Tal como habíamos anticipado, preferiremos tratar con (2.7) cuando el problema sea en $t = 0$, y con (2.6) cuando podamos controlar que $u'(r)$ no se anule.

Teorema 4 *Sean v_1 y v_2 dos soluciones de* (2.7) *definidas sobre un intervalo* $[0, t_0]$, *cuyos valores iniciales $v_1(0) = \alpha_1 > u_0$ y $v_2(0) = \alpha_2 > u_0$ no son necesariamente los mismos. Supongamos que $v_1(t)$ y $v_2(t)$ permanecen en un cierto intervalo $[c_1, c_2] \subset (u_0, \infty)$ mientras $t \in [0, t_0]$. Entonces, para todo t en ese intervalo* [7]

$$|q(t)\phi_p(v_1'(t)) - q(t)\phi_p(v_2'(t))| \leq LQ(t) \exp\left(C \int_0^t \left(\frac{Q(s)}{q(s)}\right)^{p'-1} ds\right) |\alpha_1 - \alpha_2|$$

$$|v_1'(t) - v_2'(t)| \leq \frac{d}{dt} \exp\left(C \int_0^t \left(\frac{Q(s)}{q(s)}\right)^{p'-1} ds\right) |\alpha_1 - \alpha_2|$$

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq \exp\left(C \int_0^t \left(\frac{Q(s)}{q(s)}\right)^{p'-1} ds\right) |\alpha_1 - \alpha_2|,$$

donde hemos escrito $Q(t) = \int_0^t q(s)ds$, y C es un cierto valor que depende sólo de $[c_1, c_2]$, no depende de α_1, de α_2 ni de t.

Nota. Como $q(t)$ es creciente de las anteriores relaciones entre v_1 y v_2 se deducen las siguientes:

$$|v_1'(t) - v_2'(t)| \leq Ct^{p'-1} e^{C\frac{t^{p'}}{p'}} |\alpha_1 - \alpha_2|$$

$$\text{y} \quad |v_1(t) - v_2(t)| \leq e^{C\frac{t^{p'}}{p'}} |\alpha_1 - \alpha_2|.$$

Demostración del teorema 4. Estamos suponiendo que $v_1(t)$ y $v_2(t)$ permanecen en (u_0, ∞), de modo que $v_1'(t) < 0$ y $v_2'(t) < 0$ en virtud de las expresiones

$$\begin{aligned} q(t)\phi_p(v_1'(t)) &= -\int_0^t q(s) f(v_1(s)) ds, \\ q(t)\phi_p(v_2'(t)) &= -\int_0^t q(s) f(v_2(s)) ds. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Llamemos $\Theta_1(t)$ y $\Theta_2(t)$ a $q(t)|v_1'(t)|^{p-1}$ y $q(t)|v_2'(t)|^{p-1}$, respectivamente; al restar en (2.13) observamos que

$$|\Theta_2(t) - \Theta_1(t)| \leq \int_0^t q(s) |f(v_2(s)) - f(v_1(s))| ds.$$

[7] No habiendo ahora riesgo de confusión, por simplicidad hemos modificado la notación con la que indicamos la diferenciación con respecto a la variable independiente t.

Recordemos que f es localmente Lipschitz en (u_0,∞); si L es la constante de Lipschitz para f sobre el intervalo $[c_1,c_2]\subset(u_0,\infty)$ obtenemos entonces que

$$|\Theta_2(t)-\Theta_1(t)|\leq L\int_0^t q(s)|v_2(s)-v_1(s)|ds;$$

si además tenemos en cuenta que

$$|v_2(t)-v_1(t)|\leq|\alpha_2-\alpha_1|+\int_0^t|v_2'(s)-v_1'(s)|ds, \tag{2.14}$$

podremos deducir la siguiente inecuación:

$$|\Theta_2(t)-\Theta_1(t)|\leq LQ(t)\left\{|\alpha_2-\alpha_1|+\int_0^t|v_2'(s)-v_1'(s)|ds\right\},\quad t\in[0,t_0]. \tag{2.15}$$

Tenemos de este modo una relación entre $|\Theta_1(t)-\Theta_2(t)|$ y $|v_1'(t)-v_2'(t)|$ obtenida, indirectamente, a través de la ecuación diferencial; obtenemos una segunda relación entre dichas expresiones, una relación directa, a partir de la definición misma de $\Theta(t)$ y aplicando el teorema del valor medio a $\phi_{p'}$:

$$q(t)^{p'-1}|v_2'(t)-v_1'(t)|=|\phi_{p'}(\Theta_2(t))-\phi_{p'}(\Theta_1(t))|=(p'-1)\xi(t)^{p'-2}|\Theta_2(t)-\Theta_1(t)|$$

donde $\xi(t)$ es algún valor entre $\Theta_1(t)$ y $\Theta_2(t)$. La ecuación (2.13) nos muestra[8] que $\xi(t)$ está entre $f(c_1)Q(t)$ y $f(c_2)Q(t)$ luego, sin importar el signo de $p'-2$ tenemos que

$$|v_2'(t)-v_1'(t)|\leq\frac{C}{LQ(t)}\left(\frac{Q(t)}{q(t)}\right)^{p'-1}|\Theta_2(t)-\Theta_1(t)|, \tag{2.16}$$

donde hemos escogido C como el valor que resulta de multiplicar L, $p'-1$, y el más grande de los valores $f(c_1)^{p'-2}$ y $f(c_2)^{p'-2}$,

$$C=(p'-1)L\,\text{máx}\{f(c_1)^{p'-2},f(c_2)^{p'-2}\}.^9$$

Así,

$$|v_2'(t)-v_1'(t)|\leq C\left(\frac{Q(t)}{q(t)}\right)^{p'-1}\left\{|\alpha_2-\alpha_1|+\int_0^t|v_2'(s)-v_1'(s)|ds\right\};$$

[8]dado que f es creciente en (u_0,∞),

[9]Es aquí donde se evidencia que las soluciones deben estar estrictamente por sobre u_0 para que el argumento funcione: la positividad de f en c_1 y c_2 nos permite concluir que aunque $\Theta(t)$ tiende a anularse cuando $t\to0$, lo hace al menos con la misma rapidez que $Q(t)$, lo cual, en últimas, permitirá salvar la singularidad asociada al operador p-Laplaciano en el caso en que $p>2$.

una vez obtenida esta inecuación diferencial de primer orden, el argumento concluye de la manera usual: como función[10] de t

$$\exp\left(-C\int_0^t\left(\frac{Q(s)}{q(s)}\right)^{p'-1}ds\right)\left\{|\alpha_2-\alpha_1|+\int_0^t|v_2'(s)-v_1'(s)|ds\right\}$$

es decreciente, lo cual, al ser aplicado en (2.14), luego en (2.15) y finalmente en (2.16) se traduce en las conclusiones que se nos pidió formular. Esto completa la demostración. ∎

Observamos inmediatamente que si $\alpha_1=\alpha_2$, eligiendo adecuadamente $[c_1,c_2]$ y t_0 se obtiene que $v_1\equiv v_2$ en un intervalo a la derecha de $t=0$, esto es, de este teorema se deduce, en particular, la unicidad local de las soluciones al problema de valores iniciales (2.7). Posteriormente obtendremos también, usando este teorema, la dependencia continua de las soluciones respecto de los valores iniciales.

Extender el argumento de unicidad del teorema anterior no reviste ninguna complicación; por el contrario, el argumento se simplifica porque el problema de no poder controlar la magnitud de $|\xi(t)|^{p'-2}$, con un $\xi(t)$ entre $q(t)|v_1'(t)|^{p-1}$ y $q(t)|v_2'(t)|^{p-1}$, ambos cercanos a cero, deja de ser vigente si nos alejamos de $t=0$ y se pide que $|v_1'(t)|$ y $|v_2'(t)|$ sean uniformemente positivas, apelando a la continuidad de las derivadas de v_1 y v_2. Debemos sólo tener presente que hemos hecho uso de la continuidad de Lipschitz de f.

Sea $v(t)$ una solución de (2.7), supongamos definida en $[0,T)$. Mientras que $v(t)$ permanezca en (u_0,∞),

$$q(t)\phi_p(v_t(t))=-\int_0^t q(s)f(v(s))ds$$

nos muestra no sólo que v es decreciente y que en consecuencia $\lim\limits_{t\to T^-}v(t)$ existe y es finito, sino que también $\lim\limits_{t\to T^-}|v_t(t)|$ existe y es finito por la monotonía de $q(t)\phi_p(v_t(t))$. Haciendo uso de la teoría estándar de continuación de ecuaciones diferenciales ordinarias, concluímos entonces que dado $\alpha>u_0$ hay una única solución de (2.7) definida, en principio, en un pequeño intervalo que incluye a $t=0$, y, a posteriori, extendible en forma única hasta un cierto intervalo maximal de tal suerte que $v(t)$ permanezca en (u_0,∞). Sólo pueden presentarse dos situaciones: o bien v queda definida en un intervalo $[0,T]$, $T<\infty$, caso en el cual $v(T)=u_0$ y $v_t(T)$ es estrictamente negativa, o bien la solución de (2.7) se define en $[0,\infty)$ y $v(t)>u_0$ para todo t. Insistimos que, en ambos casos, la solución es estrictamente decreciente[11].

[10] La integrabilidad de $(\frac{Q}{q})^{p'-1}$ se sigue de acotar $\frac{Q}{q}$ por t, consecuencia a su vez de la monotonía de q.

[11] Posteriomente demostraremos que, en el segundo caso, se tiene que $\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=u_0$, luego puede decirse que en ambos casos la solución decrece estrictamente hasta llegar a u_0, sólo que en el segundo esto se produce en $t=\infty$.

Todo lo dicho hasta el momento puede por supuesto traducirse en términos de $u(r)$ y (2.6). A continuación nos proponemos demostrar que para todo $\alpha > u_0$ existe una solución de (2.7) y que ella puede extenderse en forma única no sólo hasta que $u(r) = u_0$, sino hasta que $u(r) = 0$ o bien hasta que $u'(r) = 0$, esto es, podremos asegurar que u puede extenderse mientras sea positiva y decreciente. Tal como se ha dicho anteriormente, el problema de la existencia local está ya resuelto incluso por debajo de u_0, luego debemos proceder a resolver los problemas de la unicidad local y el de la dependencia continua de los valores iniciales, debajo de u_0; con este objeto y considerando que estamos tratando con soluciones que son decrecientes, plantearemos el problema en términos de sus respectivas funciones inversas.

Sea $u(r)$ una solución de la ecuación diferencial (2.1), definida en un cierto intervalo (r_0, r_1), tal que $u'(r) < 0$ para todo $r \in (r_0, r_1)$. Sean $s_0 = u(r_0)$, $s_1 = u(r_1)$, $s_0 > s_1$. Dado que $r^{n-1}\phi_p(u'(r)) \in C^1(r_0, r_1)$, que $r > 0$ y que $u'(r) \neq 0$ para $r \in (r_0, r_1)$ se concluye que $u \in C^2(r_0, r_1)$. La función inversa de u, $t(s)$, definida en el intervalo (s_1, s_0), es entonces diferenciable, satisface las relaciones

$$\begin{aligned} t(u(r)) &= r, \quad r \in (r_0, r_1) \\ t'(s) &= \frac{1}{u'(t(s))}, \quad s \in (s_1, s_0), \end{aligned}$$

y, considerando nuevamente que $u'(r) \neq 0$ en (r_0, r_1), obtenemos finalmente que $t \in C^2(s_1, s_0)$ y que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{|t'(u(r))|^{p-1}}\right\} + \frac{n-1}{r}\frac{1}{|t'(u(r))|^{p-1}} &= K(r)f(u(r)) \\ \frac{p-1}{|t'(u(r))|^{p}}t''(u(r))u'(r) + \frac{n-1}{r}\frac{1}{|t'(u(r))|^{p-1}} &= K(r)f(u(r)) \\ \text{i.e.} \quad (p-1)t''(u(r)) &= \frac{n-1}{r}|t'(u(r))|^2 - K(r)f(u(r))|t'(u(r))|^{p+1}. \end{aligned}$$

En resumen, dada $u(r)$ una solución decreciente de (2.1), su función inversa es solución de

$$(p-1)t''(s) = \frac{n-1}{t(s)}|t'(s)|^2 - K(t(s))f(s)|t'(s)|^{p+1}, \tag{2.17}$$

$s \in (s_1, s_0)$. La regularidad de K terminará por suplir, de este modo, la falta de Lipschitz-continuidad de f.

Podemos finalmente establecer la conclusión que deseábamos:

Teorema 5 (Teorema de continuación) *Dado $\alpha > u_0$ existe una única solución del problema de Cauchy* (2.6)*, positiva y de derivada estrictamente negativa, definida en $[0, \infty)$ o bien en un intervalo maximal $[0, R]$, caso en el cual $u(R) = 0$ o bien $u'(R) = 0$.*

Este teorema, y la dependencia continua de la solución de (2.6) con respecto a α, se obtienen aplicando la teoría estándar de ecuaciones diferenciales ordinarias, esto es, como consecuencia del siguiente teorema.

Teorema 6 *Sean t_1 y t_2 soluciones estrictamente positivas de* (2.17)*, definidas sobre un mismo intervalo cerrado $[s_1, s_0]$, de derivadas estrictamente negativas en dicho intervalo. Existe entonces $M > 0$ independiente de s tal que*

$$\begin{array}{rcl} |t_1'(s) - t_2'(s)| & \leq & (|t_1'(s_0) - t_2'(s_0)| + M|t_1(s_0) - t_2(s_0)|)e^{M(s_0-s)}, \\ |t_1(s) - t_2(s)| & \leq & |t_1'(s_0) - t_2'(s_0)|\dfrac{e^{M(s_0-s)} - 1}{M} + |t_1(s_0) - t_2(s_0)|e^{M(s_0-s)}, \end{array}$$

para cada $s \in [s_1, s_0]$.

Demostración. Escribamos

$$\begin{array}{lll} w_1(s) = |t_1'(s)| = -t_1'(s) & \rho_1 = t_1(s_0) & \rho_2 = t_2(s_0) \\ w_2(s) = |t_2'(s)| = -t_2'(s)^{,} & \mu_1 = w_1(s_0)^{,} & \mu_2 = w_2(s_0)^{.} \end{array}$$

Se satisfacen entonces las siguientes ecuaciones integrales:

$$\left.\begin{array}{l} t_1(s) = \rho_1 + \displaystyle\int_s^{s_0} w_1(\xi)d\xi \\ t_2(s) = \rho_2 + \displaystyle\int_s^{s_0} w_2(\xi)d\xi \end{array}\right., \quad s \in [s_1, s_0],$$

y para sus derivadas:

$$\left.\begin{array}{l} w_1(s) = \mu_1 + (p' - 1)\displaystyle\int_s^{s_0} \left\{\frac{n-1}{t_1(\zeta)} w_1^2(\zeta) - K(t_1(\zeta))f(\zeta)w_1(\zeta)^{p+1}\right\} d\zeta \\ w_2(s) = \mu_2 + (p' - 1)\displaystyle\int_s^{s_0} \left\{\frac{n-1}{t_2(\zeta)} w_2^2(\zeta) - K(t_2(\zeta))f(\zeta)w_2(\zeta)^{p+1}\right\} d\zeta \end{array}\right., \quad s \in [s_1, s_0].$$

En general, dada una función de dos variables $h(x, y)$ definida y continuamente diferenciable sobre algún dominio del plano se tiene por el teorema del valor medio que

$$|h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)| \leq c_x|x_2 - x_1| + c_y|y_2 - y_1|$$

si las derivadas parciales h_x y h_y de h están acotadas por constantes c_x y c_y en el dominio sobre el cual h está definida y al cual pertenecen (x_1, y_1) y (x_2, y_2). En particular, esto podrá aplicarse a $h(x, y) = -\frac{y^2}{x}$, de derivadas parciales

$$h_x(x, y) = \frac{y^2}{x^2}, \quad h_y(x, y) = -2\frac{y}{x},$$

si x es uniformemente positivo e y es acotada, y a $h(x,y) = K(x)y^{p+1}$, de derivadas parciales

$$h_x(x,y) = K'(x)y^{p+1}, \quad h_y(x,y) = (p+1)K(x)y^p,$$

si x e y son acotados en el dominio sobre el que aplicamos el teorema del valor medio.

Por lo tanto, considerando que t_1' y t_2' son estrictamente negativas y continuas, así como t_1 y t_2 son estrictamente positivas y continuas sobre el intervalo cerrado y acotado $[s_1, s_0]$, además de la continuidad de f, se concluye la existencia de $L > 0$ tal que para todo $s \in [s_1, s_0]$

$$\begin{aligned}
|w_1(s) - w_2(s)| &\leq |\mu_1 - \mu_2| + \frac{n-1}{p-1} \int_s^{s_0} \left| \frac{w_1^2(\xi)}{t_1(\xi)} - \frac{w_2^2(\xi)}{t_2(\xi)} \right| d\xi \\
&\quad + (p'-1) \int_s^{s_0} |f(\xi)||K(t_1(\xi))w_1(\xi)^{p+1} - K(t_2(\xi))w_2(\xi)^{p+1}| d\xi \\
&\leq |\mu_1 - \mu_2| + L \int_s^{s_0} |w_1(\xi) - w_2(\xi)| d\xi + L \int_s^{s_0} |t_1(\xi) - t_2(\xi)| d\xi.
\end{aligned}$$

Uniendo esto a las expresiones que teníamos para t_1 y t_2 obtenemos que

$$\begin{aligned}
|w_1(s) - w_2(s)| &\leq |\mu_1 - \mu_2| + L \int_s^{s_0} |w_1(\xi) - w_2(\xi)| d\xi \\
&\quad + L|\rho_1 - \rho_2|(s_0 - s) + L \int_s^{s_0} \int_\xi^{s_0} |w_1(\zeta) - w_2(\zeta)| d\zeta d\xi \\
&\leq |\mu_1 - \mu_2| + L|\rho_1 - \rho_2|(s_0 - s) \\
&\quad + L(1 + (s_0 - s)) \int_s^{s_0} |w_1(\xi) - w_2(\xi)| d\xi \\
&\leq |\mu_1 - \mu_2| + M|\rho_1 - \rho_2| + M \int_s^{s_0} |w_1(\xi) - w_2(\xi)| d\xi \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

para cada $s \in [s_1, s_0]$, donde hemos llamado M a $L(1 + s_0 - s_1)$.

Podemos, a partir de esta inecuación diferencial, obtener los resultados pedidos:

$$\begin{aligned}
&-\frac{d}{ds} \left\{ e^{-M(s_0-s)} \int_s^{s_0} |w_1(\xi) - w_2(\xi)| d\xi \right\} \\
&= \; -e^{-M(s_0-s)} \left\{ M \int_s^{s_0} |w_1(\xi) - w_2(\xi)| d\xi - |w_1(s) - w_2(s)| \right\} \\
&\leq \; e^{-M(s_0-s)} \{ |\mu_1 - \mu_2| + M|\rho_1 - \rho_2| \}
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
&e^{-M(s_0-s)}\int_s^{s_0}|w_1(\xi)-w_2(\xi)|d\xi \\
&= \; -\int_s^{s_0}\frac{d}{d\xi}\left\{e^{-M(s_0-\xi)}\int_\xi^{s_0}|w_1(\zeta)-w_2(\zeta)|d\zeta\right\}d\xi \\
&\leq \; (|\mu_1-\mu_2|+M|\rho_1-\rho_2|)\int_s^{s_0}e^{-M(s_0-\zeta)}d\zeta,
\end{aligned}$$

i.e.

$$\int_s^{s_0}|w_1(\xi)-w_2(\xi)|d\xi \leq (|\mu_1-\mu_2|+M|\rho_1-\rho_2|)\frac{e^{M(s_0-s)}-1}{M}.$$

Al reemplazar en las expresiones (2.18) y

$$|t_1(s)-t_2(s)| \leq |\rho_1-\rho_2| + \int_s^{s_0}|w_1(\xi)-w_2(\xi)|d\xi$$

se completa la demostración del teorema. ■

Nota. La constante M depende del largo del intervalo, de alguna cota inferior positiva y una cota superior válidas tanto para $t_1(s)$ como para $t_2(s)$, y de una cota superior común para $|t_1'(s)|$ y $|t_2'(s)|$. Esta observación hemos de tenerla presente cuando consideremos el problema de la dependencia continua con respecto a los valores iniciales puesto que en ese caso trataremos al mismo tiempo con las inversas de soluciones cuyos valores iniciales pertenecen a toda una vecindad de un $\alpha > u_0$ fijo, y esto impone un requerimiento de uniformidad que no se alcanza a apreciar cuando se consideran sólo dos funciones $t_1(s)$ y $t_2(s)$ para las cuales es fácil establecer límites comunes para ellas y sus derivadas.

Demostración del teorema 5. Sea $\alpha > u_0$, llamemos S al conjunto de todos los $R > 0$ tales que existe alguna solución $u(r)$ de (2.6) definida sobre $[0, R)$ que sea tal que $u(r) > 0$ y $u'(r) < 0$ para todo $r \in (0, R)$. Hemos de establecer, en primer lugar, que si $u_1(r)$ y $u_2(r)$ son dos soluciones que satisfacen estas propiedades y están definidas sobre un intervalo común $[0, R)$, entonces $u_1 \equiv u_2$ en dicho intervalo. El teorema 4 nos permite concluir que $u_1 \equiv u_2$ en un pequeño subintervalo $[0, r_0)$ de $[0, R)$. En general, si $u_1 \equiv u_2$ en $[0, r_1)$ y $r_1 < R$ entonces $u_1(r)$ y $u_2(r)$ y sus derivadas están definidas en $r = r_1$ y a la derecha de r_1, y $u_1(r_1) = u_2(r_1) > 0$ y $u_1'(r_1) = u_2'(r_1) < 0$. Del teorema 6 se obtiene como consecuencia la existencia de un $\delta > 0$ tal que $u_1 \equiv u_2$ en $[r_1, r_1+\delta) \subset [0, R)$. Es fácil ver que esto demuestra que el conjunto de los $r_1 < R$ tales que $u_1 \equiv u_2$ en $[0, r_1)$ es no vacío y que su supremo no puede ser inferior a R, esto es, que $u_1 \equiv u_2$ en $[0, R)$ como deseábamos.

Observemos, en segundo lugar, que el teorema de existencia (teorema 3) nos garantiza que S es no vacío. Es claro a partir de este par de observaciones que podemos definir una solución $u_1(r)$ de (2.6) sobre $[0, R)$, donde $R = \sup S$, y que hay una única manera de hacerlo. Se tiene además que $u_1(r) > 0$ y $u_1'(r) < 0$

para todo $r \in [0, R)$. Si $R = \infty$ hemos demostrado ya el resultado pedido, luego supondremos en adelante que $R < \infty$. Consecuencia de la monotonía de u_1 es la existencia de $\lim_{r \to R^-} u_1(r)$, valor al que denominaremos $u_1(R)$. Que dicho valor es finito se sigue de la positividad de u_1. Claramente se tiene que $u_1(r) > u_1(R)$ para todo $r < R$. Si $u_1(R) \geq u_0$ escojamos $r_1 = 0$ y si $u_1(R) < u_0$ sea $r_1 < R$ tal que $u_1(r) < u_0$ para $r \in (r_1, R)$. La elección de r_1 es tal que $f(u_1(r))$ tiene un mismo signo para todo $r \in (r_1, R)$. A partir de la ecuación

$$r^{n-1}|u_1'(r)|^{p-1} = r_1^{n-1}|u_1'(r_1)|^{p-1} + \int_{r_1}^{r} t^{n-1} K(t) f(u_1(t)) dt$$

se concluye entonces la monotonía de $r^{n-1}|u_1'(r)|^{p-1}$ con respecto a r y la existencia de un límite, finito por el hecho de tratarse de la integral de un integrando continuo sobre un intervalo cerrado y acotado, para dicha expresión cuando $r \to R^-$. Siendo $R < \infty$ ello implica la existencia de un valor finito de $\lim_{r \to R^-} u_1'(r)$ que llamaremos $u_1'(R)$. Finalmente, si $u_1(R) > 0$ y $u_1'(R) < 0$ el teorema de existencia aplicado al problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} -(r^{n-1}\phi_p(u'(r)))' &= r^{n-1}K(r)f(u(r)) \\ u(R) &= u_1(R) \\ u'(R) &= u_1'(R) \end{aligned}$$

nos permitiría extender u_1 a una solución $u(r)$ definida sobre un intervalo más grande que $[0, R)$ el cual, considerando que u es de clase C^1, puede ser escogido de modo tal que u y u' permanezcan positiva y negativa, respectivamente. No obstante esto es imposible dada la elección de R, razón por la cual debe tenerse, necesariamente, que $u_1(R) = 0$ o bien que $u_1'(R) = 0$, completando así la demostración del teorema. ∎

2.3. Clasificación de las soluciones

Estudiemos ahora algunas propiedades generales de las soluciones del problema de valores iniciales (2.6) que nos permitirán hacer de ellas una clasificación en términos de la cual podrán expresarse adecuadamente tanto el problema del que se ocupa el presente trabajo como la manera en que este problema ha sido enfrentado.

Sea $u(r)$ una solución del problema; no supondremos, por ahora, que el valor inicial α sea necesariamente mayor que u_0, y, en particular, no asumiremos aún que u' sea negativa. Sea $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ y definamos el funcional

$$E(r) = \frac{|u'(r)|^p}{p'K(r)} + F(u(r)).$$

Dicho funcional puede ser pensado como $\frac{\Phi_*(\phi_p(u'(r)))}{K(r)} + F(u(r))$, en donde $\Phi_*(s)$ denota la integral

$$\int_0^s \phi_{p'}(\xi)d\xi = \int_0^{|s|} \xi^{p'-1}d\xi = \frac{|s|^{p'}}{p'}$$

de $\phi_{p'}$, función inversa de ϕ_p. Por otra parte, para $r > 0$, sabemos por la diferenciabilidad de $r^{n-1}\phi_p(u'(r))$ que $\phi_p(u'(r))$ es diferenciable[12] con respecto a r y que (2.1) puede ser reescrita como

$$(\phi_p(u'(r)))' + \frac{n-1}{r}\phi_p(u'(r)) + K(r)f(u(r)) = 0. \tag{2.19}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E'(r) &= \frac{\phi_{p'}(\phi_p(u'(r)))(\phi_p(u'(r)))'}{K(r)} - \frac{K'(r)}{K(r)}\frac{|u'(r)|^p}{p'K(r)} + f(u)u'(r) \\ &= -\frac{|u'(r)|^p}{p'rK(r)}\left\{\frac{n-1}{p-1}p + \frac{rK'(r)}{K(r)}\right\}. \end{aligned}$$

Puesto que $n > p$ tenemos en virtud de $(K1)$ y de esta expresión que E es decreciente con respecto a r. Además podemos establecer que $\lim\limits_{r\to 0^+} \frac{|u'(r)|^p}{p'K(r)} = 0$, usando, por ejemplo, la regla de L'Hôpital[13]:

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0^+} \frac{|u'(r)|^p}{p'K(r)} &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\Phi_*(r^{n-1}\phi_p(u'(r)))}{r^{\frac{n-1}{p-1}p}K(r)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\{\Phi_*(r^{n-1}\phi_p(u'(r)))\}'}{\left\{r^{\frac{n-1}{p-1}p}K(r)\right\}'} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^{(n-1)(\frac{p}{p-1}-1)}u'(r)(r^{n-1}\phi_p(u'(r)))'}{r^{\frac{n-1}{p-1}p-1}K(r)\left\{\frac{n-1}{p-1}p + r\frac{K'(r)}{K(r)}\right\}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{-rf(u(r))u'(r)}{\frac{n-1}{p-1}p + \frac{rK'(r)}{K(r)}}. \end{aligned}$$

Se concluye que $E(0) = F(u(0)) = F(\alpha)$. Como consecuencia de esto se tiene que si $\alpha \leq u_0$, entonces $E(r) < 0$ para todo $r > 0$ y no existe $0 < R \leq \infty$ tal que $u(R) = 0$. Como el problema del presente trabajo consiste en demostrar que dado $R \in (0, \infty]$ existe a lo más un valor de α tal que la correspondiente solución $u(r)$ se anula en $r = R$, esto es, como estamos interesados en soluciones que llegan a valer cero, aunque sea bajo la modalidad descrita por $\lim\limits_{r\to\infty} u(r) = 0$, *consideraremos, por lo tanto, sólo valores de* α *mayores que* u_0.

Una vez dicho esto, podemos acudir finalmente al teorema 5. En adelante denotaremos por $u(r,\alpha)$ y por $R(\alpha)$, respectivamente, a la única solución de (2.6), y al valor de R mencionados en este teorema. En el caso en que $u(r,\alpha)$ esté definida en $[0,\infty)$, diremos que $R(\alpha) = \infty$. Así, dado $\alpha > u_0$, $u(r,\alpha)$ está definida en

[12] incluso cuando $u'(r) = 0$

[13] Que el denominador $r^{\frac{n-1}{p-1}p}K(r)$ tiende a desaparecer puede deducirse de lo que ha sido dicho sobre $r^pK(r)$ considerando que $n > p$

$[0, R(\alpha))$, $u(r,\alpha) > 0$ y $u'(r,\alpha) < 0$ para $r \in (0, R(\alpha))$. Se sigue de esto que $u(r,\alpha)$ es invertible. Denotaremos su inversa por $t(s,\alpha)$.

Si $R(\alpha) < \infty$, el teorema 5 nos dice también que $u(r,\alpha)$ tiene una extensión continuamente diferenciable a $[0, R(\alpha)]$ de modo que $u(R(\alpha)) = 0$ o bien $u'(R(\alpha)) = 0$, resultado cuya obtención, recordemos, se hizo posible gracias a la monotonía de $u(r,\alpha)$ y de $r^{n-1}|u'(r,\alpha)|^{p-1}$ con respecto a r (además de los teoremas de existencia y unicidad locales 6, 3 y 4). Análogamente, si $R(\alpha) = \infty$ se tiene, como consecuencia de la monotonía de $u(r,\alpha)$, la existencia de $\lim\limits_{r\to\infty} u(r,\alpha)$, que será denotado por $u(R(\alpha),\alpha)$. La existencia de $u'(R(\alpha),\alpha) = \lim\limits_{r\to\infty} u'(r,\alpha)$, en cambio, no puede asegurarse a menos que $u(R(\alpha),\alpha) < u_0$. Si tal es el caso, no sólo sabemos que $u'(R(\alpha),\alpha)$ existe sino también que su valor es cero, y que $\lim\limits_{r\to\infty} r|u'(r,\alpha)| = 0$ (lo primero es consecuencia de lo segundo).

Para demostrar esto observemos que si elegimos $r_1 > 0$ tal que $f(u(r,\alpha)) < 0$ para $r \in (r_1, \infty)$ entonces la expresión

$$r^{n-1}|u'(r,\alpha)|^{p-1} = r_1^{n-1}|u'(r_1,\alpha)|^{p-1} + \int_{r_1}^{r} t^{n-1}K(t)f(u(t,\alpha))dt$$

es decreciente y converge a un límite finito y no negativo, que llamaremos λ, cuando $r \to \infty$ [14]. Como $n > p$ tenemos que

$$\lim_{r\to\infty} r|u'(r,\alpha)| = \lim_{r\to\infty} \frac{(r^{n-1}|u'|^{p-1})^{p'-1}}{r^{\frac{n-p}{p-1}}} = 0$$

puesto que el numerador tiende a $\lambda^{p'-1}$ y el denominador tiende a infinito.

Mediante un razonamiento parecido podemos demostrar una propiedad adicional de $u(r,\alpha)$: $u(R(\alpha),\alpha) \leq u_0$, y en el caso en que $R(\alpha) < \infty$ esta desigualdad es estricta. En efecto, si $R(\alpha)$ es finito y $u(r,\alpha) > u_0$ para todo $r \in (0, R(\alpha))$, necesariamente $u'(R(\alpha),\alpha) = 0$ porque $u(R(\alpha),\alpha)$ no puede ser cero, y sería imposible que

$$r^{n-1}|u'(r,\alpha)|^{p-1} = \int_0^r t^{n-1}K(t)f(u(t,\alpha))dt.$$

Supongamos ahora que $R(\alpha) = \infty$ y que $u(R(\alpha),\alpha) = \gamma > u_0$, y lleguemos a una contradicción. Como $n > p$ y $p + \frac{rK'(r)}{K(r)}$ es estrictamente positiva y decreciente como función de r en $(0,\infty)$ tenemos que $n + \frac{rK'(r)}{K(r)}$ converge a un valor $0 < \lambda < \infty$.

$$\begin{aligned}
\lambda\frac{\int_0^r t^{n-1}K(t)dt}{r^nK(r)} - 1 &= \frac{\lambda\int_0^r t^{n-1}K(t)dt}{\int_0^r t^{n-1}K(t)\left\{n + \frac{tK'(t)}{K(t)}\right\}dt} - 1 \\
&= \frac{\int_0^r t^{n-1}K(t)\left\{\lambda - \left(n + \frac{tK'(t)}{K(t)}\right)\right\}dt}{r^nK(r)}.
\end{aligned}$$

[14]Hacemos notar que hasta este punto no hemos hecho más que proceder tal como en la demostración del teorema 5.

Si consideramos además que

$$\frac{\int_0^r t^{n-1}K(t)dt}{r^nK(r)} = r^{-(n-p)}\int_0^r t^{n-p-1}\frac{t^pK(t)}{r^pK(r)}dt \leq r^{-(n-p)}\int_0^r t^{n-p-1}dt = \frac{1}{n-p}$$

y que $r^nK(r)$ tiende a infinito cuando r se hace muy grande, podemos concluir que

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\int_0^r t^{n-1}K(t)dt}{r^nK(r)} = \frac{1}{\lambda}.$$

A partir de esto deducimos que

$$r^{n-1}|u'(r,\alpha)|^{p-1} = \int_0^r t^{n-1}K(t)f(u(t,\alpha))dt \geq Cf(\gamma)r^nK(r)$$

para alguna constante positiva C y r lo suficientemente grande; luego, como $r^pK(r)$ es creciente, $r^{p-1}|u'(r,\alpha)|^{p-1} \geq C_0 > 0$ para alguna constante positiva C_0, y esto contradice la integrabilidad de u' en $(0,\infty)$.

No puede garantizarse que la desigualdad $u(R(\alpha),\alpha) \leq u_0$ sea estricta en el caso en que $R(\alpha) = \infty$, como lo muestra el siguiente ejemplo, extraído de [3]: sea $u_0 = 1$, $f(u) = 8(u-1)^3$ para $u \geq 1$ y tal que $f(0) = 0$, $f(u) \leq 0$ para $u \in (0,1)$, $f(u) \not\equiv 0$ en $(0,1)$. Sea $n = 4$, entonces

$$u(r) = 1 + \frac{1}{1+r^2}$$

satisface

$$\begin{aligned} -\Delta u(r) &= f(u(r)) \\ u(0) &= 2 \\ u'(0) &= 0 \end{aligned}$$

y es tal que $u(r) > 1$ para todo $r > 0$.

Tal como en [12], [13] y, posteriormente, en [3], artículo del cual el presente trabajo es una extensión, definimos los siguientes conjuntos de valores iniciales:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{\alpha > u_0 : \ u(R(\alpha),\alpha) = 0 \text{ y } u'(R(\alpha),\alpha) < 0\} \\ \mathcal{G} &= \{\alpha > u_0 : \ u(R(\alpha),\alpha) = 0 \text{ y } u'(R(\alpha),\alpha) = 0\} \\ \mathcal{P} &= \{\alpha > u_0 : \ u(R(\alpha),\alpha) > u_0\} \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathcal{N}$ nos referiremos a $u(\cdot,\alpha)$ como una solución de tipo *crossing*, y si $\alpha \in \mathcal{G}$ nos referiremos a $u(\cdot,\alpha)$ como una solución de tipo *ground state*.

Así como hablamos de $u(r,\alpha)$ en vez de $u(r)$, en vez de $E(r)$ nos referiremos al funcional $E(r,\alpha)$. Cada uno de los tres tipos de soluciones puede caracterizarse en términos de este funcional:

Si $\alpha \in \mathcal{N}$ entonces $R(\alpha) < \infty$ y $E(R(\alpha), \alpha) > 0$ luego

$$E(r, \alpha) = E(R(\alpha), \alpha) + \int_r^{R(\alpha)} \frac{|u'(t,\alpha)|^p}{p' t K(t)} \left\{ \frac{n-1}{p-1} p + \frac{tK'(t)}{K(t)} \right\} dt > 0$$

para $r \in [0, R(\alpha)]$.

Sea ahora $\alpha \in \mathcal{G}$. Como $\lim\limits_{r \to R(\alpha)^-} r|u'(r,\alpha)| = 0$ y $r^p K(r)$ es creciente se concluye que $E(R(\alpha), \alpha) = \lim\limits_{r \to R(\alpha)^-} E(r, \alpha) = 0$, y que para $r \in [0, R(\alpha))$

$$E(r, \alpha) = \int_r^{R(\alpha)} \frac{|u'(t,\alpha)|^p}{p' t K(t)} \left\{ \frac{n-1}{p-1} p + \frac{tK'(t)}{K(t)} \right\} dt > 0.$$

Finalmente, si $\alpha \in \mathcal{P}$ tenemos que $E(R(\alpha), \alpha) = F(u(R(\alpha), \alpha)) < 0$ puesto que $\lim\limits_{r \to R(\alpha)^-} \frac{|u'(r,\alpha)|^p}{K(r)}$ existe y vale cero. En efecto, este límite existe porque $E(r, \alpha)$ tiene algún límite cuando $r \to R(\alpha)^-$, porque es decreciente con respecto a r. Este límite claramente es cero si $R(\alpha) < \infty$. En el caso en que $R(\alpha) = \infty$, y usando que

$$\lim_{r \to \infty} \frac{|u'(r)|^p}{K(r)} = \lim_{r \to \infty} \frac{r^p |u'(r,\alpha)|^p}{r^p K(r)},$$

concluimos, dado que $r^p K(r)$ es creciente y converge a un límite positivo o bien a infinito cuando $r \to \infty$, que debe ser igual a cero[15] (o si no $\liminf\limits_{r \to \infty} r|u'(r,\alpha)| > 0$, y esto va en contra de la integrabilidad de u' en $(0, \infty)$).

En lo que resta de la presente tesis nos abocaremos a probar que $\mathcal{N}$ y $\mathcal{P}$ son conjuntos abiertos de valores iniciales, y que alrededor de cada valor inicial $\alpha \in \mathcal{G}$ hay un intervalo cuyos elementos pertenecen a $\mathcal{N}$ o bien a $\mathcal{P}$, dependiendo de si son mayores o menores que α, respectivamente. Esto nos llevará, en última instancia, a las conclusiones que deseamos. Por lo pronto sólo haremos notar que la caracterización de las soluciones con valores iniciales cercanos a un $\alpha \in \mathcal{G}$ constituye el resultado fundamental de este trabajo[16], y se ha llegado a él estudiando cómo cambia la solución con respecto al valor inicial α; será preciso, por lo tanto, que estudiemos la continuidad y la diferenciabilidad de la solución de la ecuación con respecto a su valor inicial.

2.4. Dependencia continua con respecto al valor inicial

Teorema 7 *$t(s,\alpha)$ y $t'(s,\alpha)$ son continuas, como funciones de α, en $\alpha = \alpha_0$ cualesquiera sean los valores de s y α_0 tales que $\alpha_0 > s > u_0$.*

[15]Recordemos que solo podemos asegurar que $r|u'| \to 0$ si $u < u_0$ desde un cierto r en adelante.

[16]como también el de trabajos similares como el expuesto en los artículos [3], [2],

Demostración. Sean c_1 un valor entre u_0 y s cualquiera, y c_2 cualquier valor mayor que α_0. Sea $\alpha \in (c_1, c_2)$ un valor inicial cercano a α_0; denotemos por r_0 y r_α, respectivamente, a los valores $t(s, \alpha_0)$ y $t(s, \alpha)$, que identifican a los puntos de corte de $u(r, \alpha_0)$ y $u(r, \alpha)$ con la recta horizontal $u = s$, que ciertamente existen dado que $s > u_0$ y $u(R(\alpha), \alpha) \leq u_0$ sea cual sea el valor de α. Sea $\epsilon > 0$ un número pequeño, de modo que $u(r_0 + \epsilon, \alpha_0)$ siga siendo mayor que c_1. Sea h la menor de las cantidades $|u(r_0 - \epsilon, \alpha_0) - s|$ y $|s - u(r_0 + \epsilon, \alpha_0)|$.

Si consideramos sólo valores de $r \in [0, r_0 + \epsilon]$, usando la continuidad del factor exponencial de magnificación que aparece en el enunciado del teorema 4 podemos acotar dicho factor e inferir de este teorema la existencia de una constante $M > 0$ tal que

$$|u(r, \alpha) - u(r, \alpha_0)| \leq M|\alpha - \alpha_0|, \qquad r \in [0, r_0 + \epsilon] \tag{2.20}$$

siempre que $u(r, \alpha) \geq c_1$. Pretendemos demostrar que para todo α en alguna vecindad de α_0, $|r_\alpha - r_0| < \epsilon$ y concluir, dado que ϵ se eligió en forma arbitraria, que $r_\alpha \to r_0$ cuando $\alpha \to \alpha_0$. Si supiéramos de antemano que $u(r, \alpha)$ permanece sobre c_1 por lo menos mientras $r \leq r_0 + \epsilon$, podríamos usar (2.20) y demostrar que $|r_\alpha - r_0| < \epsilon$ de este modo: si δ es tal que $\delta M < h$ y $\alpha \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$ entonces $u(r_0 - \epsilon, \alpha) > s$ y $u(r_0 + \epsilon, \alpha) < s$ luego el corte con $u = s$ debió producirse en $r_0 - \epsilon < r_\alpha < r_0 + \epsilon$ en virtud de la continuidad de $u(r, \alpha)$ y el teorema del valor intermedio. Sin embargo no sabemos de antemano que $u(r_0 + \epsilon, \alpha) \geq c_1$. Para salvar la situación basta que le pidamos a δ en forma adicional que sea tal que $s - \delta M > c_1$. Así, no puede ser que $u(r_0 - \epsilon, \alpha) < c_1$ puesto que si llamamos r_1 a $t(c_1, \alpha)$, el valor de r tal que $u(r, \alpha) = c_1$, tendremos que $r_1 < r_0 - \epsilon$ y que $u(r, \alpha)$ y $u(r, \alpha_0)$ permanecen en $[c_1, c_2]$ mientras que $r \in [0, r_1]$ y, por lo tanto, tendremos que $|u(r_1, \alpha) - u(r_1, \alpha_0)| < \delta M$, lo cual es imposible porque $u(r_1, \alpha_0) > u(r_0 - \epsilon, \alpha_0) > s$. Si, por otra parte, $u(r_0 + \epsilon, \alpha) < c_1$, considerando que podemos concluir legítimamente que $u(r_0 - \epsilon, \alpha) > s$ a partir de todo lo anterior y dado que $c_1 < s$, usando el teorema del valor intermedio tendremos una vez más que $r_0 - \epsilon < r_\alpha < r_0 + \epsilon$ lo cual termina de demostrar lo que queríamos.

Una vez que hemos demostrado que $t(s, \alpha) \to t(s, \alpha_0)$ cuando $\alpha \to \alpha_0$ no tendremos problemas para concluir del teorema 4 la continuidad de $t'(s, \alpha)$, basta considerar lo siguiente: $t'(s, \alpha)$ es el recíproco de $u'(r_\alpha, \alpha)$; si $u'(r_\alpha, \alpha)$ y $u'(r_\alpha, \alpha_0)$ difieren poco entre sí, si $|r_\alpha - r_0| < \epsilon$ y si ϵ es pequeño, dado que $u(r, \alpha_0)$ es continuamente diferenciable en $[0, R(\alpha_0))$ se sigue de la continuidad de $u'(r, \alpha_0)$ que $t'(s, \alpha_0) = 1/u'(r_0, \alpha_0)$ y $t'(s, \alpha)$ son cercanos también. Esto completa la demostración. ■

Teorema 8 *Dada una solución $t_1(s)$ de (2.17) definida en un intervalo cerrado $[s_1, s_0]$, estrictamente positiva y de derivada estrictamente negativa, existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que $|t_0 - t_1(s_0)| < \delta_1$ y $|\mu_0 - t_1'(s_0)| < \delta_2$ son condiciones suficientes* *para asegurar la existencia de una solución del problema de valores iniciales*

$$\begin{aligned}(p-1)t''(s) &= \frac{n-1}{t(s)}|t'(s)|^2 - K(t(s))f(s)|t'(s)|^{p+1} \\ t(s_0) &= t_0 \\ t'(s_0) &= \mu_0\end{aligned} \tag{2.21}$$

correspondiente al par (t_0, μ_0)*, definida sobre el mismo intervalo* $[s_1, s_0]$ *sobre el que está definida* t_1*, que define una trayectoria uniformemente apegada a la de* t_1*.*

Demostración. Puesto que el teorema 3 (el teorema de existencia) puede escribirse en términos del respectivo problema de valores iniciales para las funciones inversas, dado que el teorema 6 asegura la unicidad local de la solución a dicho problema de valores iniciales y adaptando la demostración del teorema de continuación (teorema 5) en términos de las funciones inversas podemos concluir, dados $t_0 > 0$ y $\mu_0 < 0$ arbitrarios, la existencia de una única solución $t(s)$ definida sobre un subintervalo maximal $[s_2, s_0]$ de $[s_1, s_0]$, estrictamente positiva y de derivada estrictamente negativa, tal que $s_2 = s_1$ o bien $t'(s_2) = -\infty$.

Sea $\lambda = \sup_{[s_1,s_0]} |t_1'(s)|$, el cual es ciertamente finito (puesto que $t_1 \in C^1[s_1, s_0]$ y $[s_1, s_0]$ es cerrado y acotado). Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. El teorema 6 asegura la existencia[17] de una constante $M > 0$, que depende de ϵ, tal que

$$\begin{aligned}|t(s) - t_1(s)| &\le |\mu_0 - t_1'(s_0)|\frac{e^{M(s_0-s)} - 1}{M} + |t_0 - t_1(s_0)|e^{M(s_0-s)} \\ |t'(s) - t_1'(s)| &\le (|\mu_0 - t_1'(s_0)| + M|t_0 - t_1(s_0)|)e^{M(s_0-s)}\end{aligned} \tag{2.22}$$

si s es tal que

$$\begin{aligned}\sup_{[s,s_0]} |t'(\xi)| &\le \lambda + \epsilon, \\ t(s_0) = \inf_{[s,s_0]} t(\xi) &\ge t_1(s_0) - \epsilon \\ \text{y} \quad t(s) = \sup_{[s,s_0]} t(\xi) &\le t_1(s_1) + \epsilon.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Si $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ son tales que

$$\begin{aligned}\delta_1 &< \epsilon, \\ (\delta_2 + M\delta_1)e^{M(s_0-s_1)} &< \epsilon, \\ \text{y} \quad \delta_2\frac{e^{M(s_0-s_1)} - 1}{M} + \delta_1 e^{M(s_0-s_1)} &< \epsilon\end{aligned}$$

y si $|t_1(s_0) - t_0| < \delta_1$ y $|t_1'(s_0) - \mu_0| < \delta_2$, las fórmulas (2.22) son válidas para todo $s \in [s_1, s_0]$. En efecto, llamemos s_3 al ínfimo sobre todos los $s \ge s_2$ para los cuales

[17] ver la nota después de la demostración del teorema.

se satisfacen las tres condiciones (2.23), de manera que la validez de las fórmulas pueda garantizarse hasta $[s_3, s_0]$; en virtud de ellas se tiene que $|t'(s_3)| < \lambda + \epsilon$ y que $t(s_3) < t_1(s_1) + \epsilon$, y esto es posible, dado que $t \in C^1[s_2, s_0]$ y las desigualdades son estrictas, sólo si $s_3 = s_2$. Al mismo tiempo esto descarta la posibilidad de que $t'(s_2) = -\infty$, y esto a su vez implica que $s_2 = s_1$.

Se concluye que cuando $(t_0, \mu_0) \to (t_1(s_0), t_1'(s_0))$, $\sup_{[s_1,s_0]} |t_1(s) - t(s)| \to 0$ y $\sup_{[s_1,s_0]} |t_1'(s) - t'(s)| \to 0$, lo cual finaliza la demostración del teorema. ∎

Si unimos los dos teoremas lo que habremos demostrado es lo siguiente:

Teorema 9 (Teorema de dependencia continua) *Dados α_0 y s tales que*

$$s \geq u(R(\alpha_0), \alpha_0), \quad t(s, \alpha_0) < \infty \quad y \quad |t'(s, \alpha_0)| < \infty,$$

para todo α en una vecindad de α_0 se tiene que $u(R(\alpha), \alpha) \leq s$, que $t(s, \alpha)$ y $t'(s, \alpha)$ son finitas y que son continuas como funciones de α en $\alpha = \alpha_0$.

No sobra explicitar que la condición $|t'| = \infty$ corresponde a esta otra: $u' = 0$. En particular, al elegir $s = 0$ se observa de inmediato que un corolario de este teorema es la siguiente

Proposición 10 *$\mathcal{N}$ es un conjunto abierto y $R(\alpha)$ y $u'(R(\alpha), \alpha)$ son continuas en $\alpha = \alpha_0$ para todo $\alpha_0 \in \mathcal{N}$.*

Que $\mathcal{N}$ sea abierto se sigue también de la consideración conjunta del hecho de que $\alpha \in \mathcal{N}$ si y solo si $E(R(\alpha), \alpha) > 0$, y de la siguiente observación:

Proposición 11 *Vista como función de α,*

$$E(R(\alpha), \alpha) = \frac{|u'(R(\alpha), \alpha)|^p}{p' K(R(\alpha))} + F(u(R(\alpha), \alpha))$$

es continua sobre $\mathcal{N}$.

Con respecto a las soluciones con valores iniciales en $\mathcal{P}$ tenemos la siguiente proposición:

Proposición 12 *$\mathcal{P}$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Vimos en la sección anterior que $\alpha \in \mathcal{P}$ si y solo si $E(R(\alpha), \alpha) < 0$. Vimos también que $E(r, \alpha)$ es continua y decreciente como función de r para cada α fijo. Sea $\alpha_0 \in \mathcal{P}$, sea s un poco mayor que $u(R(\alpha_0), \alpha_0)$ de modo que $E(t(s, \alpha_0), \alpha_0)$

no deje de ser negativo. Aplicando el teorema de dependencia continua observamos que

$$E(t(s,\alpha),\alpha) = \frac{|u'(t(s,\alpha),\alpha)|^p}{p'K(t(s,\alpha))} + F(s)$$

está bien definida y es negativa en una vecindad de α_0; como $E(r,\alpha)$ decrece con r esto implica que $E(R(\alpha),\alpha) < E(t(s,\alpha),\alpha) < 0$, i.e. que $\alpha \in \mathcal{P}$ en una vecindad de α_0. ∎

Podemos ofrecer un argumento alternativo para demostrar que un valor de α pertenece al interior de $\mathcal{P}$, un argumento directo que no está formulado en términos del funcional $E(r,\alpha)$. Lamentablemente no es aplicable al caso en que $u(R(\alpha),\alpha) = u_0$, lo cual da cuenta de que esa condición refleja una situación excepcional, que merece quizás una atención particular en algún nuevo estudio de las propiedades de las soluciones de la ecuación. Sin embargo, el argumento a continuación nos proporciona una valiosa intuición del comportamiento de las soluciones sobre las cuales puede ser aplicado, entre las que se encuentran, además de una gran parte de las que tienen valores iniciales en $\mathcal{P}$, las de tipo ground state, de modo que podemos comprender algo de la sensibilidad respecto al valor inicial alrededor de una de ellas[18].

Intuitivamente, el argumento es el siguiente: conocido el hecho de que debajo de u_0 la magnitud de u' decrece, y lo hace por lo menos a una cierta velocidad, si en algún momento $|u'|$ es muy pequeño y u no lo es tanto la solución no tendrá ninguna posibilidad de llegar a anularse porque no alcanza a decrecer lo suficiente; si $u'(R(\alpha),\alpha) = 0$ y r está cerca de $R(\alpha)$, $u'(r,\alpha)$ es arbitrariamente cercano a cero y el teorema de dependencia continua nos asegura entonces que $u'(r)$ es muy pequeño para toda solución cuyo valor inicial sea cercano a α; uniendo las dos consideraciones concluimos que alrededor de ciertos valores iniciales hay sólo valores iniciales en $\mathcal{P}$.

Teorema 13 *Sea $u(r)$ definida sobre un intervalo $[r_1, r_2]$ una solución de*

$$(r^{n-1}|u'(r)|^{p-1})' = r^{n-1}K(r)f(u(r))$$

que permanece por debajo de u_0, entonces

$$|u(r_2) - u(r_1)| \leq \frac{n-p}{p-1}\left\{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{n-p}{p-1}}\right\} r_1|u'(r_1)|.$$

Demostración. Para cada $r \in (r_1, r_2)$ tenemos que

$$r^{n-1}|u'(r)|^{p-1} = r_1^{n-1}|u'(r_1)|^{p-1} + \int_{r_1}^{r} t^{n-1}K(t)f(u(t))dt \leq r_1^{n-1}|u'(r_1)|^{p-1},$$

[18] Uno de los resultados principales de este trabajo es que existe a lo más un ground state, lo cual, unido a la presente observación, nos muestra de un $\alpha_0 \in \mathcal{G}$ su condición de valor inicial crítico.

esto es,

$$|u'(r)| \le \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\frac{n-1}{p-1}} |u'(r_1)|;$$

escribiendo $u(r_2) - u(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} u'(r)dr$ se tiene entonces el resultado pedido. ∎

Sea $\alpha_0 \in \mathcal{G} \cup \mathcal{N}$ tal que $s_0 := u(R(\alpha_0), \alpha_0) < u_0$. Sea $\epsilon > 0$ un número cualquiera que sea pequeño en relación a $u_0 - s_0$. Como $ru'(r, \alpha_0) \to 0$ cuando $r \to R(\alpha_0)^-$ podemos escoger $r_1(\alpha_0)$ tal que

$$\begin{aligned} s_1 = u(r_1(\alpha_0), \alpha_0) < s_0 + \epsilon, \\ \frac{n-p}{p-1} r_1(\alpha_0)|u'(r_1(\alpha_0), \alpha_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

y tal que $r_1(\alpha_0) > R(\alpha_0) - \epsilon$ (o, si $R(\alpha_0) = \infty$, mayor que cierto $\bar{r}$ elegido arbitrariamente pero con anterioridad). Si llamamos $r_1(\alpha)$ a $t(s_1, \alpha)$, en virtud del teorema anterior y del teorema de dependencia continua aplicado a $s = s_1$ se concluye que $R(\alpha) > R(\alpha_0) - \epsilon$ (o bien $R(\alpha) > \bar{r}$ en el caso correspondiente a $R(\alpha_0) = \infty$), que

$$\frac{n-p}{p-1} r_1 |u'(r_1)| < \epsilon$$

y que

$$u(R(\alpha), \alpha) > s_1 - \frac{n-p}{p-1} r_1 |u'(r_1, \alpha)| > s_0 - \epsilon$$

en una vecindad de α_0.

La primera de las relaciones obtenidas nos lleva a concluir que

$$\liminf_{\alpha \to \alpha_0} R(\alpha) \ge R(\alpha_0) - \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$ (o que es mayor igual que $\bar{r}$ para todo $\bar{r}$), lo cual implica la semicontinuidad inferior de $R(\alpha)$ en $\alpha = \alpha_0$. Examinando el argumento con cuidado vemos que esta conclusión es válida aunque $s_0 = u_0$. Una importante consecuencia de esto es que si $u(R(\alpha_0), \alpha_0) = u_0$ entonces $t(u_0, \alpha)$, que más adelante será conocido como $r_0(\alpha)$ y jugará un rol distinguido en la parte principal del presente trabajo, es tal que $\lim_{\alpha \to \alpha_0} r_0(\alpha) = \infty$. Otra situación importante en la que se presenta esto mismo es cuando $u(R(\alpha_0), \alpha_0) = 0$ y $R(\alpha_0) = \infty$, esto es, cuando α_0 es el valor inicial de un ground state que no es de soporte compacto, pues más adelante concluiremos que alrededor de α_0 hay un intervalo de valores iniciales en $\mathcal{N}$, y la condición $\lim_{\alpha \to \alpha_0} R(\alpha) = \infty$ significará que el punto en el que cortan el eje $u = 0$ las soluciones con valores iniciales alrededor de α_0 tiende a desplazarse hacia el infinito, lo cual vislumbra el tipo de dependencia continua con respecto al valor inicial que cabe esperar de las soluciones de nuestra ecuación diferencial[19].

[19]En general, siempre que $R(\alpha_0) = \infty$ se tendrá que $R(\alpha) \to \infty$ cuando $\alpha \to \alpha_0$.

La tercera y última de las relaciones implica que $|u(R(\alpha),\alpha)-u(R(\alpha_0),\alpha_0)|<\epsilon$ en una vecindad de α_0 y, siendo ϵ arbitrario, esto se traduce en la continuidad de $u(R(\alpha),\alpha)$ como función de α en $\alpha=\alpha_0$.

Finalmente, de la segunda de las relaciones, considerando que $r|u'(r,\alpha)|$ es decreciente con respecto a r para cada α fijo[20], se concluye que $R(\alpha)|u'(R(\alpha),\alpha)|<\epsilon$ en una vecindad de α_0 y esto no es otra cosa que la continuidad de $R(\alpha)|u'(R(\alpha),\alpha)|$ en $\alpha=\alpha_0$. De esta manera hace su segunda aparición en escena la expresión $ru'(r,\alpha)$, y empieza a mostrarse ya como una expresión importante que, más temprano que tarde, terminará por convertirse en el elemento clave de todo el análisis que estamos haciendo sobre la ecuación diferencial. Del estudio del comportamiento de ru', esencialmente, serán extraídos todos los resultados principales de la tesis.

2.4.1. Diferenciabilidad con respecto a α

Cerramos la presente sección y el presente capítulo demostrando la diferenciabilidad de las soluciones con respecto al valor inicial, lo cual presenta mayores inconvenientes cerca de $r=0$, nuevamente por las características del operador con el que tratamos. Esto nos llevará a hacer uso, por última vez, de la transformación de la ecuación diferencial introducida al comienzo de esta exposición de aspectos preliminares. Tal como al comienzo, $t(r)$ denotará el cambio de variable $t(r)=\int_0^r K^{\frac{1}{p}}(s)ds$ y s será nuevamente una variable de integración cuyo recorrido no debe ser pensado como el de los valores posibles que puede alcanzar la función u, como en la sección anterior donde s se usaba como variable independiente de la función inversa $t(s,\alpha)$. Por el momento no necesitaremos de la función inversa $t(s,\alpha)$ luego no habrá riesgo de ambigüedad, sin embargo nos excusamos con el lector por la confusión que pueda generar esta forzosa elección de notación, para la cual hemos sido incapaces de encontrar un sustituto mejor. Dicho esto volvamos a poner en escena a las funciones $q(t(r))=r^{n-1}K^{\frac{1}{p'}}(r)$ y

$$Q(t(r))=\int_0^{t(r)} q(s)ds=\int_0^r \rho^{n-1}K(\rho)d\rho,$$

la segunda de ellas bien definida por cuanto la integrabilidad de $r^{n-1}K(r)$ se sigue de la monotonía de q.

[20] lo cual se puede verse mediante un cálculo directo: por ejemplo, escribiendo

$$\frac{r^p|u'(r)|^p}{p'}=r^{-\frac{n-1}{p-1}p}\Phi_*(r^{n-1}\phi_p(|u'|))$$

tal como en un cálculo anterior, al derivar con respecto a r obtenemos

$$-|u'|\{(n-p)r^{p-1}|u'|^{p-1}+r^pK(r)|f(u(r))|\}.$$

Es importante señalar que el resultado anterior es válido si $u(r)<u_0$.

Sea $\alpha > u_0$ dado, sea $\{h_k\}$ una sucesión cualquiera de números reales que converja a 0; sean c_1 y c_2 tales que $u_0 < c_1 < \alpha < c_2$ y sea r^* tal que toda solución con valor inicial en alguna vecindad de α se mantenga en $[c_1, c_2]$ mientras que $r \in [0, r^*]$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\alpha + h_k$ está en esa vecindad para cada n.

Definamos

$$\begin{aligned}\Theta_k(r,\alpha) &= \frac{r^{n-1}\phi_p(u'(r,\alpha+h_k)) - r^{n-1}\phi_p(u'(r,\alpha))}{h_k},\\ \psi_k(r,\alpha) &= \frac{u'(r,\alpha+h_k) - u'(r,\alpha)}{h_k},\\ \varphi_k(r,\alpha) &= \frac{u(r,\alpha+h_k) - u(r,\alpha)}{h_k}.\end{aligned}$$

Procediendo en forma análoga a la demostración del teorema 4 podemos demostrar que si $r_1 < r_2 \leq r^*$ entonces

$$|\Theta_k(r_1,\alpha) - \Theta_k(r_2,\alpha)| \leq L \int_{r_1}^{r_2} \rho^{n-1} K(\rho) \left\{1 + \int_0^{\rho} |\psi_k(s,\alpha)| ds\right\} d\rho,$$

donde L es una constante de Lipschitz de f para el intervalo $[c_1, c_2]$; por otro lado, en virtud del mencionado teorema sabemos que

$$|\psi_k(r,\alpha)| \leq \frac{d}{dr} \exp\left(C \int_0^r \left(\frac{Q(t(\rho))}{q(t(\rho))}\right)^{p'-1} t'(\rho) d\rho \right), \qquad r > 0$$

donde $C = (p'-1)L \max\{f(c_1)^{p'-2}, f(c_2)^{p'-2}\}$. Puesto que aparece recurrentemente, nos convendrá dar un nombre al factor exponencial que está siendo derivado en la expresión anterior: sea éste $\Sigma(r)$. Aplicando esto a la expresión anterior vemos que

$$|\Theta_k(r_1,\alpha) - \Theta_k(r_2,\alpha)| \leq L \left(\int_{r_1}^{r_2} \rho^{n-1} K(\rho) d\rho \right) \Sigma(r_2) = L|Q(t(r_2)) - Q(t(r_1))|\Sigma(r_2).$$

Así, $\{\Theta_k(r,\alpha)\}$ es una familia equicontinua de funciones definidas sobre el intervalo[21] cerrado y acotado $[0, r^*]$, y, en particular, dado que $\Theta_k(0,\alpha) = 0$, es también una familia equiacotada. Podemos aplicar entonces el teorema de Arzela - Ascoli y establecer que alguna subsucesión converge uniformemente a alguna función continua $\Theta(r,\alpha)$. Restringimos nuestra atención a la subsucesión convergente; por simplicidad de notación, diremos que es $\{\Theta_k(r,\alpha)\}$ la que converge uniformemente a $\Theta(r,\alpha)$.

[21] Recordemos que α está fijo.

Sea $\psi(r,\alpha) = (p'-1)r^{-(n-1)}|u'(r,\alpha)|^{2-p}\Theta(r,\alpha)$, definida en $(0, r^*]$; como

$$\psi_k(r,\alpha) = r^{-\frac{n-1}{p-1}} \frac{\phi_{p'}(r^{n-1}\phi_p(u'(r,\alpha+h_k))) - \phi_{p'}(r^{n-1}\phi_p(u'(r,\alpha)))}{h_k},$$

aplicando el teorema del valor medio a $\phi_{p'}$ (tal como en el teorema de unicidad local) y considerando que $r^{n-1}\phi_p(u'(r,\alpha+h_k)) \to r^{n-1}\phi_p(u'(r,\alpha))$ gracias a la dependencia continua demostrada para u y u' con respecto al valor inicial α, se tiene que $\psi_k(r,\alpha)$ converge puntualmente a $\psi(r,\alpha)$ en $(0, r^*]$.

Ahora bien,

$$\varphi_k(r,\alpha) = 1 + \int_0^r \frac{u'(\rho,\alpha+h_k) - u'(\rho,\alpha)}{h_k} d\rho = 1 + \int_0^r \psi_k(\rho,\alpha) d\rho,$$

y como para cada n se tiene que $\psi_k(r,\alpha) \leq \Sigma'(r)$, función integrable en $[0, r^*]$, al aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos que $\varphi_k(r,\alpha)$ converge puntualmente a

$$\varphi(r,\alpha) = 1 + \int_0^r \psi(\rho,\alpha) d\rho,$$

que está bien definida (y es continuamente diferenciable) en $[0, r^*]$ aunque $\psi(\rho,\alpha)$ no estuviera definida en $\rho = 0$, como puede suceder si es que $2 - p < 0$.

Nótese que $\Theta(r,\alpha)$ implica la existencia de las funciones $\psi(r,\alpha)$ y $\varphi(r,\alpha)$ y las determina completamente. Demostremos que no puede haber más que una función $\Theta(r,\alpha)$ que sea límite de alguna subsucesión de la sucesión $\Theta_k(r,\alpha)$ original: si demostramos esto, y como el argumento puede aplicarse a cualquier subsucesión de la sucesión original, habremos demostrado que la sucesión original converge uniformemente a la única posible función $\Theta(r,\alpha)$; siendo $\{h_k\}$ una sucesión arbitraria esto implicará que $\frac{\partial}{\partial\alpha} r^{n-1}\phi_p(u'(r,\alpha)) = \Theta(r,\alpha)$, y finalmente implicará también la existencia de las dereivadas de u y u' con respecto a α. Supongamos entonces que hay dos soluciones $\psi_1, \varphi_1, \Theta_1$ y $\psi_2, \varphi_2, \Theta_2$ del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\psi(r,\alpha) &= (p'-1)r^{-(n-1)}|u'(r,\alpha)|^{2-p}\Theta(r,\alpha) \\
\varphi(r,\alpha) &= 1 + \int_0^r \psi(\rho,\alpha) d\rho \\
\Theta(r,\alpha) &= -\int_0^r \rho^{n-1} K(\rho) f'(u(\rho,\alpha))\varphi(\rho,\alpha) d\rho.
\end{aligned}$$

(Que la tercera de las ecuaciones debe satisfacerse se sigue de aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue a

$$\Theta_k(r,\alpha) = -\int_0^r \rho^{n-1} K(\rho) \frac{f(u(\rho,\alpha+h_k)) - f(u(r,\alpha))}{h_k},$$

y considerando que según el teorema 4 el integrando está acotado, uniformemente con respecto a n, por

$$L\rho^{n-1}K(\rho)|\varphi_k(r,\alpha)| \le L\rho^{n-1}K(\rho)\Sigma(\rho) \le L\frac{d}{dr}Q(t(r))\sup_{[0,r^*]}\Sigma(r),$$

función integrable en $[0,r^*]$.) Al restar obtenemos

$$\begin{aligned}
\Theta_1(r,\alpha)-\Theta_2(r,\alpha)) &= -\int_0^r \rho^{n-1}K(\rho)f'(u(\rho,\alpha))(\varphi_1(\rho,\alpha))-\varphi_2(\rho,\alpha))d\rho \\
\varphi_1(r,\alpha)-\varphi_2(r,\alpha) &= (p'-1)\int_0^r \rho^{-(n-1)}|u'(\rho,\alpha)|^{2-p}(\Theta_1(\rho,\alpha)-\Theta_2(\rho,\alpha))d\rho;
\end{aligned}$$

recordemos que

$$\begin{aligned}
(p'-1)\rho^{-(n-1)}|u'(\rho,\alpha)|^{2-p} &= (p'-1)\rho^{-\frac{n-1}{p-1}}(\rho^{n-1}\phi_p(u'(\rho,\alpha)))^{p'-2} \\
&\le \frac{C}{LQ(t(\rho))}\rho^{-\frac{n-1}{p-1}}Q^{p'-1}(t(\rho)) \\
&= \frac{C}{LQ(t(\rho))}\left(\frac{Q(t(\rho))}{q(t(\rho))}\right)^{p'-1}t'(\rho),
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(r,\alpha)-\varphi_2(r,\alpha)| &\le \int_0^r t^{p'-1}(\rho)t'(\rho)\frac{|\Theta_1(\rho,\alpha)-\Theta_2(\rho,\alpha)|}{LQ(t(\rho))}d\rho, \\
\frac{|\Theta_1(r,\alpha)-\Theta_2(r,\alpha)|}{LQ(t(r))} &\le \sup_{\rho\in[0,r]}|\varphi_1(\rho,\alpha)-\varphi_2(\rho,\alpha)|.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\varphi_1(0,\alpha)=\varphi_2(0,\alpha)=1$; sea

$$r_1=\sup\{r\in[0,r^*]:\ \varphi_1(s,\alpha)=\varphi_2(s,\alpha) \text{ para todo } s\in[0,r]\}.$$

Claramente $\varphi_1\equiv\varphi_2$ y $\Theta_1\equiv\Theta_2$ en $[0,r_1]$, y al introducir la variable r_1 se deduce del sistema anterior la relación

$$|\varphi_1(r,\alpha)-\varphi_2(r,\alpha)| \le \sup_{\rho\in[r_1,r]}|\varphi_1(\rho,\alpha)-\varphi_2(\rho,\alpha)||t^{p'}(r)-t^{p'}(r_1)|, \qquad r_1\le r\le r^*;$$

de la definición de r_1 y la continuidad de $t^{p'}(r)$ se concluye que r_1 sólo puede ser r^* y que $\varphi_1\equiv\varphi_2$, $\Theta_1\equiv\Theta_2$ en $[0,r^*]$.

Hemos demostrado así la existencia y regularidad de $\Theta(r,\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}r^{n-1}\phi_p(u'(r,\alpha))$ y de $\varphi(r,\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}u(r,\alpha)$ para $r\in[0,r^*]$, y la existencia de $\psi(r,\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}u'(r,\alpha)$ para $r\in(0,r^*]$. Hemos demostrado también algunas relaciones existentes entre ellas, en particular que

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}u'(r,\alpha)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}u(r,\alpha)\right),$$

y que $\varphi(r,\alpha)$ satisface la ecuación integral

$$(p-1)r^{n-1}|u'(r,\alpha)|^{p-2}\varphi'(r,\alpha) = \int_0^r \rho^{n-1}K(\rho)f'(u(\rho,\alpha))\varphi(\rho,\alpha)d\rho, \qquad (2.24)$$

$r \in [0,r^*]$, que corresponde a derivar la ecuación original (2.1) una vez que se sabe que se puede intercambiar el orden de la derivación y que las derivadas con respecto a α existen incluso en $r=0$.

Aunque $\psi(0,\alpha) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{u'(0,\alpha+h)-u'(0,\alpha)}{h} = 0$ está bien definido, hacemos notar que a partir de la expresión

$$\psi(r,\alpha) = (p'-1)r^{-(n-1)}|u'(r,\alpha)|^{2-p}\Theta(r,\alpha)$$

podemos garantizar que $\lim\limits_{r\to 0^+} \psi(r,\alpha) = 0 = \psi(0,\alpha)$ sólo cuando $1 < p \leq 2$; cuando $p > 2$, el que $\Theta(r,\alpha)$ tienda a cero nos da esperanza de poder demostrar la continuidad de $\psi(r,\alpha)$ en todo $[0,r^*]$. Esta convicción se ve disminuida al considerar que la cota

$$\frac{d}{dr}\exp\left(C\int_0^r \left(\frac{Q(t(\rho))}{q(t(\rho))}\right)^{p'-1} t'(\rho)d\rho\right)$$

encontrada para $|\psi(r,\alpha)| = |\frac{\partial}{\partial\alpha}u'(r,\alpha)|$ en el teorema 4, parece no ser necesariamente acotada (aunque es integrable, lo cual fue suficiente para aplicar el teorema de convergencia dominada y concluir lo que necesitábamos). Sin embargo, a partir de la expresión

$$\psi(r,\alpha) = -(p'-1)\frac{u'(r,\alpha)\int_0^r \rho^{n-1}K(\rho)f'(u(\rho,\alpha))\varphi(\rho,\alpha)d\rho}{r^{n-1}\phi_p(u'(r,\alpha))}$$

podemos finalmente establecer que $\psi(r,\alpha)$ sí es continua en $r=0$, del siguiente modo: usando la regla de L'Hôpital y la continuidad de φ vemos que

$$\lim_{r\to 0}\frac{\int_0^r \rho^{n-1}K(\rho)\varphi(\rho,\alpha)d\rho}{r^{n-1}\phi_p(u'(r,\alpha))} = \frac{1}{f(\alpha)},$$

luego el que $\lim\limits_{r\to 0}\psi(r,\alpha) = 0$ se sigue del hecho de que $u'(0,\alpha) = 0$ y de acotar f' por L.

Necesitamos completar el resultado de diferenciabilidad obtenido, por lo menos hasta que las soluciones alcancen el valor u_0, según el tratamiento que haremos del problema principal en el capítulo próximo. Precisaremos de un argumento nuevo para lograr este propósito, pues lo hecho hasta ahora depende fuertemente de la condición de Lipschitz impuesta sobre f. En particular, las constantes L y C, y el factor $\Sigma(r)$ que nos han permitido salir bien librados hasta este momento, son válidos mientras las soluciones permanezcan en $[c_1,c_2]$. Sin embargo, veremos que la condición de Lipschitz de f es necesaria sólo para la salvar la dificultad que plantea la posible singularidad asociada a $r^{-(n-1)}|u'(r,\alpha)|^{2-p}$ cerca de $r=0$; lejos de $r=0$ podemos controlar que $u'(r,\alpha)$ esté lejos de anularse y extender φ, ψ y Θ como deseamos.

Denotemos por $r_0(\alpha)$ al valor de r tal que $u(r,\alpha)=u_0$. Ciertamente r_0 es finito para $\alpha\in\mathcal{G}\cup\mathcal{N}$ (puede ser infinito para algunos valores de $\alpha\in\mathcal{P}$. En lo que sigue asumiremos que $r_0(\alpha)<\infty$, y como hemos demostrado ya que en tal caso $r_0(\alpha)$ es función continua de α, tenemos entonces también que r_0 es finito en una vecindad de α. Llamemos $\varphi^*(\alpha)=\varphi(r^*,\alpha)$, $\Theta^*(\alpha)=\Theta(r^*,\alpha)$ y procedamos de este modo:

$$\begin{aligned}
\varphi(r,\alpha) &= \varphi^*(\alpha)+\int_{r^*}^{r}\psi(\rho,\alpha)d\rho\\
\Theta(r,\alpha) &= (p-1)r^{n-1}|u'(r,\alpha)|^{p-2}\psi(r,\alpha)\\
\Theta(r,\alpha) &= \Theta^*(\alpha)+\int_{r^*}^{r}\rho^{n-1}K(\rho)f'(u(\rho,\alpha))\varphi(\rho,\alpha)d\rho
\end{aligned}$$

Sea $\varsigma(r,\alpha)=|\Theta(r,\alpha)|+|\varphi(r,\alpha)|$,

$$\begin{aligned}
\varsigma(r,\alpha) &\leq |\varphi^*(\alpha)|+\int_{r^*}^{r}(p'-1)\rho^{-(n-1)}|u'(\rho,\alpha)|^{2-p}|\varphi(\rho,\alpha)|d\rho+\\
&\quad +|\Theta^*(\alpha)|+\int_{r^*}^{r}\rho^{n-1}K(\rho)f'(u(\rho,\alpha))|\varphi(\rho,\alpha)|d\rho\\
&\leq |\varphi^*(\alpha)|+|\Theta^*(\alpha)|+\int_{r^*}^{r}\{(p'-1)\rho^{-(n-1)}|u'(\rho,\alpha)|^{2-p}+\\
&\quad +\rho^{n-1}K(\rho)f'(u(\rho,\alpha))\}\varsigma(\rho,\alpha)d\rho
\end{aligned}$$

Podemos aplicar la desigualdad de Gronwall a $\varsigma(r,\alpha)$ y obtener que

$$\begin{aligned}
\varsigma(r,\alpha) &= \{|\varphi^*(\alpha)|+|\Theta^*(\alpha)|\}e^{\int_{r^*}^{r}\{(p'-1)\rho^{-(n-1)}|u'(\rho,\alpha)|^{2-p}+\rho^{n-1}K(\rho)f'(u(\rho,\alpha))\}d\rho}\\
&\leq \{1+LQ(t(r^*))\}\Sigma(r^*)e^{(p'-1)\int_{r^*}^{r}\rho^{-(n-1)}|u'(\rho,\alpha)|^{2-p}d\rho}e^{L'f(u(r,\alpha))},
\end{aligned}$$

donde L' es cualquier cota de $r^{n-1}K(r)$ sobre un intervalo cerrado $[r^*,r_1]$ que incluya a $r_0(\alpha)$ en su interior.

Notemos que

$$\begin{aligned}
r^{n-1}|u'(r,\alpha)|^{p-1} &= \int_0^r\rho^{n-1}K(\rho)f(u(\rho,\alpha))d\rho\\
&\geq \int_0^{r^*}\rho^{n-1}K(\rho)f(u(\rho,\alpha))d\rho\\
&\geq f(c_1)Q(t(r^*))
\end{aligned}$$

y, si acotamos f en $[u_0,c_2]$, podemos también acotar inferiormente la expresión $r^{n-1}|u'(r,\alpha)|^{p-1}$, uniformemente con respecto a α, para todo r en $[r^*,r_1]$.

Esto nos permite controlar la magnitud de $\rho^{-(n-1)}|u'(\rho,\alpha)|^{p-2}$ en $[r^*, r_1]$ y concluir, primero, que $\varphi(r,\alpha)$ y $\Theta(r,\alpha)$ son uniformemente acotadas hasta $r_0(\alpha)$ y, después, que φ, ψ y Θ pueden extenderse continuamente al intervalo cerrado $[0, r_0(\alpha)]$. Procediendo cuidadosamente a la manera del teorema de la función implícita, uno puede convencerse de que esto es suficiente para garantizar además la diferenciabilidad de $r_0(\alpha)$ con respecto a α y para obtener de $u(r_0(\alpha),\alpha) \equiv u_0$ la expresión

$$\frac{d\, r_0(\alpha)}{d\alpha} u'(r_0(\alpha),\alpha) + \varphi(r_0(\alpha),\alpha) \equiv 0$$

que necesitamos en el capítulo que sigue.

De cualquier manera u y u' son diferenciables con respecto a α no sólo mientras permanezcan en $[u_0, \infty)$ sino que mientras $u' < 0$. Para ver esto el proceder es análogo al del caso ya estudiado en que las soluciones permanecen en $[c_1, c_2]$, pero ahora en un intervalo $[s_1, c_1]$, con $s_1 \geq u(R(\alpha),\alpha)$, y escribiendo el problema en términos de las funciones inversas, de modo que f aparezca evaluada en la variable independiente y el que no satisfaga la condición de Lipschitz no sea algo tan importante. Finalmente, uno y otro resultado pueden conectarse haciendo uso del teorema de la función implícita.

Capítulo 3

Resultados principales

Para demostrar nuestros resultados dividimos el análisis en dos partes. Primero mostraremos que si $\alpha_1 \in \mathcal{G} \cup \mathcal{N}$ y $\alpha_2 > u_0$ son tales que las soluciones u_1 y u_2 correspondientes a los valores iniciales α_1 y α_2 satisfacen las siguientes relaciones:

- $t_2(u_0) \leq t_1(u_0)$
- $t_2(u_0)|u_2'(t_2(u_0))| > t_1(u_0)|u_1'(t_1(u_0))|$,

donde t_1 y t_2 denotan las respectivan inversas de u_1 y u_2, entonces $R(\alpha_2) < R(\alpha_1)$ y $R(\alpha_2)u_2'(R(\alpha_2)) < R(\alpha_1)u_1'(R(\alpha_1))$, donde la última expresión debe entenderse como un límite cuando $R(\alpha_1) = \infty$. Esto implica, en particular, que $\alpha_2 \in \mathcal{N}$, y que $u_2'(R(\alpha_2)) < u_1'(R(\alpha_1))$.

Análogamente, si $\alpha_1 \in \mathcal{G}$ y

- $t_2(u_0) \geq t_1(u_0)$
- $t_2(u_0)|u_2'(t_2(u_0))| < t_1(u_0)|u_1'(t_1(u_0))|$,

entonces $u(R(\alpha_2)) > 0$ y así $\alpha_2 \in \mathcal{P}$.

Esto dirige nuestra atención hacia la función $r_0(\alpha) = t(u_0, \alpha)$, y a la función ru' cuando u alcanza u_0. La segunda parte de este trabajo consiste entonces en demostrar que $r_0(\alpha)$ es decreciente y que $r_0(\alpha)|u'(r_0(\alpha), \alpha)|$ es creciente con respecto a α cerca de $\bar{\alpha}$, siendo $\bar{\alpha}$ el valor inicial de una solución de tipo ground state o bien de una solución que cruza el eje $u = 0$. Se verá que

$$\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\varphi(r_0(\alpha), \alpha)}{|u'(r_0(\alpha), \alpha)|}$$

y

$$r_0(\alpha)^{\frac{n-p}{p-1}-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} r_0(\alpha) u'(r_0(\alpha), \alpha) = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^{\frac{n-p}{p-1}} \varphi(r, \alpha) \right\}_{r=r_0(\alpha)}.$$

Por lo tanto, es natural analizar cuidadosamente los ceros de la función $\varphi(r, \alpha)$ para α cerca de $\bar{\alpha}$.

Estos dos resultados unidos nos llevan a un resultado de separación que finalmente darán lugar a los teoremas de unicidad deseados.

Como se mencionó en [2], la función $\varphi(r,\alpha)$ y la idea de estudiar sus ceros apareció primero en el trabajo de COFFMAN [4]. Como estamos interesados en la función ru', la función $r|u'(r,\alpha)|/u(r,\alpha)$, que según demostró KWONG [9] resulta ser creciente como función de r para $r \in (0, r_0(\alpha))$, jugará un importante rol.

Mencionamos finalmente que dado que todas las ecuaciones diferenciales que nos han sido dadas son de la forma

$$(r^{n-1}|u'|^{p-2}v')' = \xi(r)$$

para alguna función apropiada $\xi(r)$, y v cualquiera entre u, u' y φ, la identidad

$$(r^{n-1}|u'|^{p-2}(v'w - vw'))' = (r^{n-1}|u'|^{p-2}v')'w - (r^{n-1}|u'|^{p-2}w')'v,$$

que puede ser considerada análoga a la identidad de Green, demostrará ser de importancia crucial por cuanto hará irrelevante la no linealidad del operador diferencial con el que trabajamos, al permitirnos obtener información acerca de $v'w - vw'$, que será especialmente significativa cuando alguna de las funciones v, v', w o w' se anulen.

3.1. Comportamiento de $u(r,\alpha)$ debajo de u_0

Proposición 14 *Sea $\alpha_1 \in \mathcal{G} \cup \mathcal{N}$, y sea $\alpha_2 > u_0$. Sean t_1 y t_2 las inversas de $u_1(r) = u(r,\alpha_1)$ y $u_2(r) = u(r,\alpha_2)$ respectivamente. Si*

$$t_2(u_0) \le t_1(u_0) < \infty \quad y \quad t_2(u_0)|u_2'(t_2(u_0))| > t_1(u_0)|u_1'(t_1(u_0))|$$

entonces $u_2(R(\alpha_2)) = 0$, y

$$t_2(s) < t_1(s) \quad y \quad t_2(s)|u_2'(t_2(s))| > t_1(s)|u_1'(t_1(s))| \quad para\ s \in [0, u_0).$$

A la inversa, si

$$t_1(u_0) \le t_2(u_0) < \infty \quad y \quad t_2(u_0)|u_2'(t_2(u_0))| < t_1(u_0)|u_1'(t_1(u_0))|$$

entonces

$$t_2(s) > t_1(s) \quad y \quad t_2(s)|u_2'(t_2(s))| < t_1(s)|u_1'(t_1(s))| \quad para\ s \in [u_2(R(\alpha_2)), u_0).$$

Nota. Cuando $s = 0$ y $\alpha_1 \in \mathcal{G}$ en el primero de los enunciados de la proposición, la conclusión debe enterse como que $R(\alpha_2) < \infty$ y $R(\alpha_2)|u_2'(R(\alpha_2))| > 0$.
Demostración. Definamos

$$\bar{F}(s) = \int_0^s f(\xi) t_1^p(\xi) K(t_1(\xi)) d\xi$$

y

$$I(s,\alpha) = t^p(s,\alpha)\frac{|u'(t(s,\alpha),\alpha)|^p}{p'} + \bar{F}(s).$$

$\bar{F}(s)$ está bien definida: en efecto, por una parte tenemos que

$$\left(r^p\frac{|u'(r,\alpha)|^p}{p'}\right)' = u'(r,\alpha)\left\{(n-p)r^{p-1}|u'(r,\alpha)|^{p-1} - r^pK(r)f(u(r,\alpha))\right\} \quad (3.1)$$

(esto se obtiene, por ejemplo, escribiendo

$$r^p\frac{|u'|^p}{p'} = r^{-(n-p)p'}\Phi_*(r^{n-1}|u'|^{p-1})$$

y derivando la expresión anterior con respecto a r) de manera que

$$\begin{aligned}\int_0^s f(\xi)t_1^pK(t_1(\xi))d\xi &= \int_{t_1(s)}^{R(\alpha_1)} r^pK(r)f(u_1(r))|u_1'(r)|dr \\ &= r^p\frac{|u'|^p}{p'}\Big|_{t_1(s)}^{R(\alpha_1)} + (n-p)\int_{t_1(s)}^{R(\alpha_1)} r^{p-1}|u_1'(r)|^{p-1}|u'(r)|dr;\end{aligned}$$

por otro lado $\lim\limits_{r\to R(\alpha_1)} ru_1'(r) = 0$, luego $r^{p-1}|u_1'(r)|^{p-1}$ es acotado y

$$r^{p-1}|u_1'(r)|^{p-1}|u'(r)| \in L^1(0,R(\alpha_1)),$$

lo cual demuestra finalmente la integrabilidad de $f(\xi)t_1^p(\xi)K(t_1(\xi))$ que requeríamos.

Usando nuevamente (3.1) obtenemos ahora

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}I(s,\alpha) &= t'(s,\alpha)\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^p\frac{|u'(r,\alpha)|^p}{p'}\right\}_{r=t(s,\alpha)} + f(s)t_1^p(s)K(t_1(s)) \\ &= (n-p)t^{p-1}(s,\alpha)|u'|^{p-1} + f(s)\{t_1^p(s)K(t_1(s)) - t^p(s,\alpha)K(t(s,\alpha))\}\end{aligned}$$

Al evaluar en $\alpha=\alpha_1$ nos queda

$$\frac{\partial}{\partial s}I(s,\alpha_1) = (n-p)t_1^{p-1}(s)|u_1'(t_1(s))|^{p-1} > 0.$$

Además,

$$I(0,\alpha_1) = R(\alpha_1)^p\frac{|u_1'(R(\alpha_1))|^p}{p'} + 0 \geq 0$$

(si $R(\alpha_1)=\infty$ esto sigue siendo cierto), y por lo tanto

$$I(s,\alpha_1) > 0 \quad \forall\, s\in(0,\alpha_1). \quad (3.2)$$

Una de las características del funcional $I(s,\alpha)$ es que dado un valor fijo de s nos permite comparar la cantidad $r|u'|$ asociada a dos soluciones distintas cuando alcanzan el valor $u = s$. Esta idea juega un papel muy importante en la demostración pues esta consiste esencialmente en mostrar que $I(s,\alpha_1) - I(s,\alpha_2)$ no puede cambiar de signo, lo cual sucedería si las soluciones se cruzaran por debajo de u_0, o si $t_1(s)|u_1'(t_1(s))| - t_2(s)|u_2'(t_2(s))|$ cambiara de signo al desplazarse s desde $s = u_0$ hacia $s = 0$. Esto, por supuesto, lo veremos con detalle.

Comencemos demostrando la primera de las dos partes de la proposición. Supongamos, esperando encontrar una contradicción, que existe $s_1 \in [0, u_0)$ tal que $t_2(s) < t_1(s)$ para todo $s \in (s_1, u_0)$ y $t_2(s_1) = t_1(s_1) < \infty$ (si se diera el caso de que $t_2(u_0) = t_1(u_0)$, como

$$t_2(u_0)|u_2'(t_2(u_0))| > t_1(u_0)|u_1'(t_1(u_0))|$$

entonces $t_2(s)$ sería estrictamente menor que $t_1(s)$ en una vecindad debajo de u_0). Para valores de s mayores que s_1 pero arbitrariamente cercanos tendremos que

$$\frac{t_2(s) - t_2(s_1)}{s - s_1} < \frac{t_1(s) - t_1(s_1)}{s - s_1}$$

luego $t_2'(s_1) \leq t_1'(s_1)$ y

$$t_2(s_1)|u_2'(t_2(s_1))| = -\frac{t_2(s_1)}{t_2'(s_1)} \leq -\frac{t_1(s_1)}{t_1'(s_1)} = t_1(s_1)|u_1'(t_1(s_1))|$$

(también está siendo considerada la posibilidad de que $t_1'(s_1) = -\infty$). Se sigue de este modo la existencia de $\bar{s} \in [0, u_0)$ tal que

$$\begin{array}{rl} I(s,\alpha_2) > I(s,\alpha_1) > 0 & \text{para } s \in (\bar{s}, u_0] \\ I(\bar{s},\alpha_2) = I(\bar{s},\alpha_1) \geq 0 & \\ t_2(s) \leq t_1(s) & \text{para } s \in [\bar{s}, u_0]. \end{array} \tag{3.3}$$

Si, a diferencia del caso anterior, tuviéramos que $t_2(s) < t_1(s)$ para todo $s \in (0, u_0)$, u_1 y u_2 estuvieran definidas en $(0,\infty)$, y tanto $u_1(r)$ como $u_2(r)$ tendieran a cero cuando $r \to \infty$, entonces

$$\lim_{s \to 0^+} I(s,\alpha) = \lim_{r \to \infty} r|u'(r,\alpha)| = 0$$

tanto para $\alpha = \alpha_1$ como para $\alpha = \alpha_2$, luego podemos escoger $\bar{s}$ como el valor de s a partir del cual la relación

$$I(\xi,\alpha_2) > I(\xi,\alpha_1) \quad \text{para todo } \xi \in [s, u_0]$$

deja de satisfacerse. Esto también puede lograrse si α_2 no estuviera en $\mathcal{G}$ ni en $\mathcal{N}$ y $t_2(s) < t_1(s)$ para $s \in (u_2(R(\alpha_2)), u_0)$, pues en tal caso tendríamos que

$$t_2(u_2(R(\alpha_2)))|u_2'(R(\alpha_2))| = 0 < t_1(u_2(R(\alpha_2)))|u_1'(R(\alpha_2))|.$$

Finalmente, observamos que si $\alpha_2 \in \mathcal{G} \cup \mathcal{N}$, $t_2(s) < t_1(s)$ para todo $s \in (0, u_0)$ y la condición

$$t_2(s)|u_2'(t_2(s))| > t_1(s)|u_1'(t_1(s))| \quad \text{para } s \in [0, u_0)$$

no se satisficiese, nuevamente podría encontrarse $\bar{s}$ para el cual se cumplirían las relaciones descritas en (3.3). En conclusión, todas las situaciones imaginables que falsarían lo que se afirma en el enunciado de la proposición nos llevarían a la existencia de $\bar{s}$ y a las relaciones (3.3).

En (3.3) se ha explicitado que una de las cosas que podemos asegurar para cada s en $(\bar{s}, u_0]$ es que $I(s, \alpha_1)$ y $I(s, \alpha_2)$ son positivos, esto muestra que podemos podemos bien definir, para cualquier $s \in [\bar{s}, u_0]$, $W(s, \alpha) = I(s, \alpha)^{\frac{1}{p}}$ para $\alpha = \alpha_1$ y $\alpha = \alpha_2$; de (3.3) se deduce también que $W(s, \alpha_2) - W(s, \alpha_1)$ es positiva en $s = u_0$ y se anula cuando $s = \bar{s}$. Esto, sin embargo, es imposible, porque $W(s, \alpha_2) - W(s, \alpha_1)$ tendría que ser decreciente en $[\bar{s}, u_0]$, de acuerdo a las relaciones (3.3). En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial s}\{W(s, \alpha_2) - W(s, \alpha_1)\} = \frac{1}{p}\left\{I(s, \alpha_2)^{-\frac{1}{p'}} \frac{\partial}{\partial s} I(s, \alpha_2) - I(s, \alpha_1)^{-\frac{1}{p'}} \frac{\partial}{\partial s} I(s, \alpha_1)\right\}$$

$$= \frac{n-p}{p}\left\{\frac{t_2^{p-1}|u_2'(t_2(s))|^{p-1}}{\left(t_2^p(s)\frac{|u_2'(t_2(s))|^p}{p'} + \bar{F}(s)\right)^{\frac{1}{p'}}} - \frac{t_1^{p-1}|u_1'(t_1(s))|^{p-1}}{\left(t_1^p(s)\frac{|u_1'(t_1(s))|^p}{p'} + \bar{F}(s)\right)^{\frac{1}{p'}}}\right\}$$

$$+\frac{1}{p}\frac{f(s)}{I(s, \alpha_2)^{\frac{1}{p'}}}(t_1^p(s)K(t_1(s)) - t_2^p(s)K(t_2(s))).$$

Con respecto al primer término, usando la identidad $p - 1 = \frac{p}{p'}$ tenemos que

$$\frac{(t_2|u_2'|)^{p-1}}{\left(\frac{1}{p}(t_2|u_2'|)^p + \bar{F}\right)^{\frac{1}{p'}}} - \frac{(t_1|u_1'|)^{p-1}}{\left(\frac{1}{p'}(t_1|u_1'|)^p + \bar{F}\right)^{\frac{1}{p'}}}$$

$$= \left(\frac{1}{p'} + \frac{\bar{F}}{t_2^p|u_2'|^p}\right)^{-\frac{1}{p'}} - \left(\frac{1}{p'} + \frac{\bar{F}}{t_1^p|u_1'|^p}\right)^{-\frac{1}{p'}} \leq 0$$

pues $t_2|u_2'| > t_1|u_1'|$ y $\bar{F}(s) \leq 0$ para $s < u_0$.

Con respecto al segundo término, como $r^pK(r)$ es creciente y como $t_2(s) \leq t_1(s)$ tendremos que $f(s)\left(r^pK(r)|_{r=t_2(s)}^{t_1(s)}\right) \leq 0$ porque $f(s) \leq 0$ porque $f(s) \leq 0$ para $s \leq u_0$. Esto completa la demostración de la primera parte de la demostración.

Para demostrar la segunda parte supongamos, con la intención de llegar a una contradicción, que existe $\bar{s} \in [u_2(R(\alpha_2)), u_0)$ tal que

$$\begin{array}{rl} I(s, \alpha_2) < I(s, \alpha_1) > 0 & \text{para } s \in (\bar{s}, u_0] \\ I(\bar{s}, \alpha_2) = I(\bar{s}, \alpha_1) \geq 0 & \\ t_2(s) \geq t_1(s) & \text{para } s \in [\bar{s}, u_0]. \end{array} \tag{3.4}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial s}I(s,\alpha_2) = (n-p)t_2^{p-1}(s)|u_2'(s)|^{p-1} + f(s)\{t_1^p(s)K(t_1(s)) - t_2^p(s)K(t_2(s))\} > 0$$

para $s \in (\bar{s}, u_0)$, y $I(\bar{s},\alpha_2) = I(\bar{s},\alpha_1) \geq 0$ entonces $W(s,\alpha_2)$ está bien definido para s en ese intervalo. De (3.4) obtendríamos que $W(s,\alpha_2) - W(s,\alpha_1)$ sería negativo en $s = u_0$ y se anularía en $s = \bar{s}$, lo cual no es posible pues $W(s,\alpha_2) - W(s,\alpha_1)$ tendría que ser creciente de cumplirse las relaciones descritas en (3.4). En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial s}\{W(s,\alpha_2) - W(s,\alpha_1)\} = \frac{1}{p}\left\{I(s,\alpha_2)^{-\frac{1}{p'}}\frac{\partial}{\partial s}I(s,\alpha_2) - I(s,\alpha_1)^{-\frac{1}{p'}}\frac{\partial}{\partial s}I(s,\alpha_1)\right\}$$

$$= \frac{n-p}{p}\left\{\frac{t_2^{p-1}|u_2'(t_2(s))|^{p-1}}{\left(t_2^p(s)\frac{|u_2'(t_2(s))|^p}{p'} + \bar{F}(s)\right)^{\frac{1}{p'}}} - \frac{t_1^{p-1}|u_1'(t_1(s))|^{p-1}}{\left(t_1^p(s)\frac{|u_1'(t_1(s))|^p}{p'} + \bar{F}(s)\right)^{\frac{1}{p'}}}\right\}$$
$$+\frac{1}{p}\frac{f(s)}{I(s,\alpha_2)^{\frac{1}{p'}}}(t_1^p(s)K(t_1(s)) - t_2^p(s)K(t_2(s))).$$

El primer término será positivo pues $\bar{F}(s) < 0$ y $t_2|u_2'| < t_1|u_1'|$, y el segundo término será positivo pues $t_2(s) \geq t_1(s)$ y $f(s) \leq 0$. Se concluye de este modo la demostración de la proposición. ■

Nota. Esta demostración no funciona cuando intenta replicarse para estudiar el comportamiento de las soluciones sobre u_0. Al cambiar los signos de f y $\bar{F}$ no se llega a contradicción al suponer que no se cumple la proposición, sino que los mismos argumentos hacen plausible que no se cumpla. Desde otro punto de vista, esta proposición no tiene ninguna opción de ser verdadera sobre u_0: en ella se afirma básicamente que una vez que las soluciones llegan separadas a u_0 se siguen separando hasta que dejan de estar definidas; lo que haremos en lo que resta del presente trabajo es mostrar que dadas dos soluciones de la ecuación es la del valor inicial más alto la que alcanza el valor $u = u_0$ siendo r más pequeño; al unir los dos resultados se concluirá que mientras más alto el valor inicial más rápido tiende a anularse la solución (o bien u'). En particular, soluciones de valores iniciales distintos deben cruzarse sobre u_0, luego es imposible que la proposición que es válida bajo u_0, que dice que las soluciones se mantienen separadas, sea válida sobre u_0.

3.2. Estudio de $u(r,\alpha)$ para $r \in [0, r_0(\alpha)]$

Notemos primero que si u es tal que

$$(r^{n-1}\phi_p(u'(r)))' = -r^{n-1}K(r)f(u(r))$$

y definimos

$$v(r) := ru'(r) + cu(r),$$

donde c es una constante arbitraria, mediante un cálculo directo obtenemos que

$$v'(r) = \left(c - \frac{n-p}{p-1}\right) u'(r) - (p'-1)rK(r)\frac{f(u)}{|u'(r)|^{p-2}} \tag{3.5}$$

(escribiendo $ru'(r) = r^{-\frac{n-p}{p-1}}\phi_{p'}(r^{n-1}\phi_p(u'(r)))$, por ejemplo); también necesitaremos saber que

$$\begin{aligned} &(p-1)(r^{n-1}|u'|^{p-2}v')' \\ &\quad = \; -(c(p-1)-(n-p))r^{n-1}K(r)f(u) - (r^n K(r)f(u))' \\ &\quad = \; -r^{n-1}K(r)f(u)\left\{c(p-1) + \left(p + r\frac{K'(r)}{K(r)}\right) + ru'(r)\frac{f'(u)}{f(u)}\right\}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

y esto se obtiene a partir de la expresión anterior y la ecuación diferencial.

En adelante escribiremos $r_0(\alpha)$ para denotar la expresión $t(u_0, \alpha)$.

Lema 15 *Si $\bar{\alpha} \in \mathcal{G} \cup \mathcal{N}$, $ru'(r)/u(r)$ es estrictamente decreciente en $(0, \bar{r}_0)$, donde $u(r) := u(r, \bar{\alpha})$ y $\bar{r}_0 := r_0(\bar{\alpha})$.*

Demostración. Tal como en [2] y en [3], llamemos $w(r)$ a $ru'(r)$. De la ecuación

$$u^2 \left(\frac{ru'}{u}\right)'(r) = uw'(r) - wu'(r)$$

vemos que basta demostrar que $wu' - uw'$ es positiva en $(0, \bar{r}_0)$. Sea $r \in (0, \bar{r}_0)$. Se ve con facilidad que

$$\begin{aligned} &(p-1)r^{n-1}|u'|^{p-2}(wu'(r) - uw'(r)) \\ &\quad = \int_0^r \{(p-1)(t^{n-1}|u'|^{p-2}u')'w - (p-1)(t^{n-1}|u'|^{p-2}w')'u\}dt \end{aligned}$$

y como $w(r)$ es un caso particular de la función $v(r)$ definida arriba (el caso que resulta de elegir $c = 0$),

$$(p-1)(r^{n-1}|u'|^{p-2}w')' = -r^{n-1}K(r)f(u)\left\{\left(p + r\frac{K'(r)}{K(r)}\right) + w(r)\frac{f'(u)}{f(u)}\right\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (p-1)r^{n-1}|u'|^{p-2}(wu'(r) - uw'(r)) &= \int_0^r t^{n-1}K(t)w(t)(u(t)f'(u) - (p-1)f(u))dt \\ &\quad + \int_0^r t^{n-1}K(t)f(u)u(t)\left(p + \frac{tK'(t)}{K(t)}\right)dt \\ = \int_0^r t^n K(t)((uf(u))' - pf(u)u')dt &+ \int_0^r t^{n-1}K(t)f(u)u(t)\left(p + \frac{tK'(t)}{K(t)}\right)dt. \end{aligned}$$

Definamos
$$F_0(s) = \int_{u_0}^{s} f(\xi)d\xi,$$
tenemos entonces que
$$\begin{aligned}
&\int_0^r t^n K(t)((uf(u))' - pf(u)u')dt \\
&= \quad r^n K(r)(uf(u) - pF_0(u)) - \int_0^r t^{n-1}K(t)uf(u)\left(1 - p\frac{F_0(u)}{uf(u)}\right)\left(n + \frac{tK'(t)}{K(t)}\right)dt
\end{aligned}$$
y luego
$$\begin{aligned}
(p-1)r^{n-1}|u'|^{p-2}(wu'(r) - uw'(r)) &= r^n K(r)(uf(u) - pF_0(u)) \\
+\int_0^r t^{n-1}K(t)uf(u)&\left\{p\frac{F_0(u)}{uf(u)}\left(n + t\frac{K'(t)}{K(t)}\right) - (n-p)\right\}dt. \quad (3.7)
\end{aligned}$$
Claramente, la hipótesis $f'(u)(u-u_0) \geq (p-1)f(u)$ para $u > u_0$ implica que
$$pF_0(u) \leq f(u)(u-u_0) \text{ si } u \geq u_0, \quad (3.8)$$
luego resta sólo mostrar que
$$\int_0^r t^{n-1}K(t)uf(u)\left\{p\frac{F_0(u)}{uf(u)}\left(n + t\frac{K'(t)}{K(t)}\right) - (n-p)\right\}dt > 0 \quad \text{para } r \in (0, \bar{r}_0). \quad (3.9)$$
Sea
$$G(s,\alpha) = p\left(n + t(s,\alpha)\frac{K'(t(s,\alpha))}{K(t(s,\alpha))}\right)\frac{F_0(s)}{sf(s)} - (n-p).$$
Primero vemos que al evaluar en $r = \bar{r}_0$ la ecuación (3.7) se convierte en
$$(p-1)\bar{r}_0^{n-1}|u'(\bar{r}_0)|^{p-2}(wu'(\bar{r}_0) - uw'(\bar{r}_0)) = \int_0^{\bar{r}_0} t^{n-1}K(t)u(t)f(u(t))G(u(t))dt. \quad (3.10)$$
Por otra parte, al usar (3.5) obtenemos que $w'(\bar{r}_0) = -\frac{n-p}{p-1}u'(\bar{r}_0)$, esto es,
$$wu'(\bar{r}_0) - uw'(\bar{r}_0) = -|u'(\bar{r}_0)|\left(\frac{n-p}{p-1}u_0 + ru'(\bar{r}_0)\right).$$
Usando (3.5) otra vez obtenemos que
$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{n-p}{p-1}u(r) + ru'(r)\right\} = -\frac{rK(r)}{p-1}\frac{f(u)}{|u'|^{p-2}} \geq 0$$
para $r \in (\bar{r}_0, R(\bar{\alpha}))$, y como $\bar{\alpha} \in \mathcal{G} \cup \mathcal{N}$ debemos tener que
$$\lim_{r \to R(\bar{\alpha})} \frac{n-p}{p-1}u(r) + ru'(r) \leq 0,$$

lo cual implica que

$$\left(\frac{n-p}{p-1}u_0 + ru'(\bar{r}_0)\right) < 0;$$

así, $wu'(\bar{r}_0) - uw'(\bar{r}_0) > 0$ y de (3.10) vemos que G no puede ser negativa en todo $(u_0, \bar{\alpha})$. La relación (3.8) nos muestra que

$$0 \le \lim_{s\to u_0^+} \frac{pF_0(s)}{f(s)} \le \lim_{s\to u_0^+} (s-u_0) = 0$$

y como $n > p$ y $n + t(s,\alpha)\frac{K'(t(s,\alpha))}{K(t(s,\alpha))}$ es estrictamente positiva sabemos que $G(u_0) = -(n-p) < 0$. Finalmente observemos que

$$\left(\frac{F_0(s)}{sf(s)}\right)' = (s^2 f(s))^{-1}\left\{sf(s) - F_0(s)\left(1 + \frac{sf'(s)}{f(s)}\right)\right\}.$$

Por hipótesis, $\frac{sf'(s)}{f(s)}$ decrece cuando s crece, luego $sf(s) - F_0(s)\left(1 + \frac{sf'(s)}{f(s)}\right)$ es creciente con respecto a s y vale cero cuando $s = u_0$. Esto implica que $\frac{F_0(s)}{sf(s)}$ es creciente. $n + t(s,\alpha)\frac{K'(t(s,\alpha))}{K(t(s,\alpha))}$ es creciente también, pues $n > p$, luego $G(s)$ es creciente. Se concluye que existe $s_1 \in (u_0, \bar{\alpha})$ tal que $G(s_1) = 0$, $G(s) < 0$ para $s \in (u_0, s_1)$ y $G(s) > 0$ para $s \in (s_1, \bar{\alpha})$.

Si $u(r) \ge s_1$ se satisface entonces (3.9). Si $u(r) < s_1$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^r t^{n-1}K(t)uf(u)\left\{p\frac{F_0(u)}{uf(u)}\left(n + t\frac{K'(t)}{K(t)}\right) - (n-p)\right\}dt \\
&\quad > \int_0^{\bar{r}_0} t^{n-1}K(t)uf(u)\left\{p\frac{F_0(u)}{uf(u)}\left(n + t\frac{K'(t)}{K(t)}\right) - (n-p)\right\}dt \\
&\quad = (p-1)\bar{r}_0^{n-1}|u'(\bar{r}_0)|^{p-2}(wu'(\bar{r}_0) - uw'(\bar{r}_0)) > 0;
\end{aligned}$$

se sigue de esto que el lema es verdadero. ∎

Proseguiremos con un resultado de separación.

Teorema 16 *Si $\bar{\alpha} \in \mathcal{G} \cup \mathcal{N}$ entonces $r_0(\alpha)$ es decreciente y $r_0(\alpha)u'(r_0(\alpha),\alpha)$ es estrictamente decreciente en una vecindad de $\bar{\alpha}$.*

Demostración. De la relación $u(r_0(\alpha),\alpha) = u_0$, como vimos al final del capítulo anterior, obtenemos que

$$\frac{\partial r_0}{\partial \alpha} = -\frac{\varphi(r_0(\alpha),\alpha)}{u'(r_0(\alpha),\alpha)}. \tag{3.11}$$

Por otro lado, usando (3.5) tal como en la demostración del lema anterior somos capaces de derivar $ru'(r,\alpha)$ con respecto a r, y a partir de esto y haciendo uso de la regla de la cadena vemos que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\{r_0(\alpha)u'(r_0(\alpha),\alpha)\} = \frac{n-p}{p-1}\varphi(r_0(\alpha),\alpha) + r_0(\alpha)\varphi'(r_0(\alpha),\alpha). \tag{3.12}$$

Para $r \in (0, r_0(\alpha))$ tenemos que

$$\begin{aligned}(p-1)(r^{n-1}|u'|^{p-2}\varphi')'(u-u_0) &= \{(p-1)r^{n-1}|u'|^{p-2}\varphi'(u-u_0)\}' \\ &\quad -(p-1)\varphi' r^{n-1}\phi_p(u') \\ = \ & (p-1)\{r^{n-1}|u'|^{p-2}\varphi'(u-u_0) - \varphi r^{n-1}\phi_p(u')\}' + (p-1)\varphi(r^{n-1}\phi_p(u'))' \\ = \ & (p-1)\{r^{n-1}|u'|^{p-2}[\varphi'(u-u_0) - \varphi u']\}' - (p-1)r^{n-1}Kf\varphi\end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos de la ecuación (2.24) que

$$(p-1)\{r^{n-1}|u'|^{p-2}[\varphi'(u-u_0)-\varphi u']\}' + r^{n-1}Kf\varphi[f'(u)(u-u_0)-(p-1)f(u)] = 0. \tag{3.13}$$

En particular

$$(p-1)r_0^{n-1}|u'(r_0)|^{p-1}\varphi(r_0,\alpha) + \int_0^{r_0} r^{n-1}K\varphi[f'(u)(u-u_0)-(p-1)f(u)]dr = 0, \tag{3.14}$$

y esto es válido para todo α (y no sólo $\bar{\alpha}$). Por simplicidad escribiremos $r_0 = r_0(\alpha)$, $\bar{r}_0 = r_0(\bar{\alpha})$ y $\varphi(r) = \varphi(r,\bar{\alpha})$. Sabemos, gracias a (2.24), que $\varphi(0) = 1$. Como $f'(u)(u-u_0)-(p-1)f(u) \geq 0$ para $u \in D$ según la hipótesis (f_3), (3.14) nos lleva a concluir que no puede ser que $\varphi(r) > 0$ en todo $(0,\bar{r}_0)$, a menos que $\varphi(\bar{r}_0) = 0$ (lo cual implica inmediatamente que $\varphi'(\bar{r}_0) < 0$) y $f'(s)(s-u_0)-(p-1)f(s) \equiv 0$ para $s \in (u_0, \bar{\alpha})$. Si ese fuera el caso, de (3.14) y de la continuidad de φ deduciríamos que $\varphi(r_0,\alpha) \leq 0$ para todo α en una vecindad de $\bar{\alpha}$: si $\alpha < \bar{\alpha}$ entonces $u(r,\alpha) \in (u_0,\bar{\alpha})$ para todo $r \in (0, r_0)$; en el caso en que $\alpha > \bar{\alpha}$, si bien no podemos asegurar que $f'(s)(s-u_0)-(p-1)f(s) = 0$ para $s \in (\bar{\alpha},\alpha)$, sí debemos tener que $\varphi(r,\alpha) > 0$ para $r \in (0, t(\bar{\alpha},\alpha))$, si $t(\bar{\alpha},\alpha)$ es pequeño.

Suponemos entonces que $\varphi(r)$ tiene un primer cero r_1 en $(0,\bar{r}_0)$. La idea es mostrar que r_1 es el único cero de $\varphi(r)$ en $(0,\bar{r}_0]$ (lo cual implica que $\varphi(\bar{r}_0) < 0$ y que $\frac{\partial r_0(\alpha)}{\partial\alpha} < 0$), y también que $\frac{n-p}{p-1}\varphi(\bar{r}_0,\bar{\alpha}) + \bar{r}_0\varphi'(\bar{r}_0,\bar{\alpha}) < 0$, para concluir otra vez que $\frac{\partial}{\partial\alpha}\{r_0(\alpha)u'(r_0(\alpha),\alpha)\} < 0$. Usaremos aquí nuestro lema 15.

Tal como antes, sea $v(r) = ru'(r) + cu(r)$, donde $u(r)$ denota a $u(r,\bar{\alpha})$. De la ecuación (3.6) vemos que v satisface

$$(p-1)(r^{n-1}|u'|^{p-2}v')' + r^{n-1}K(r)f'(u)v = r^{n-1}\Omega(r) \tag{3.15}$$

donde

$$\Omega(r) = -K(r)f(u)\left\{c(p-1) + \left(p + r\frac{K'(r)}{K(r)}\right) - c\frac{uf'(u)}{f(u)}\right\}.$$

$\Omega(r)$ puede también escribirse como

$$\Omega(r) = -K(r)f(u)\left\{\left(p + r\frac{K'(r)}{K(r)}\right) - c\frac{f'(u)(u-u_0)-(p-1)f(u)}{f(u)} - cu_0\frac{f'(u)}{f(u)}\right\}.$$

$\Omega(r_1)$ sería negativa si $c = 0$; por hipótesis,

$$c\frac{f'(u(r_1))(u(r_1) - u_0) - (p-1)f(u(r_1))}{f(u(r_1))} \geq 0$$

si $c > 0$ porque $r_1 \in (0, \bar{r}_0)$; y como $u_0 \frac{f'(u(r_1))}{f(u(r_1))}$ es positivo, la expresión

$$p + r_1 \frac{K'(r_1)}{K(r_1)} - cu_0 \frac{f'(u(r_1))}{f(u(r_1))}$$

puede hacerse negativa si se escoge c lo suficientemente grande. Por lo tanto existe $c > 0$ tal que $\Omega(r_1) = 0$. Como, por la hipótesis impuesta sobre K y sobre f

$$c(p-1) + \left(p + r\frac{K'(r)}{K(r)}\right) - c\frac{u(r)f'(u(r))}{f(u(r))}$$

es decreciente con respecto a r, tenemos que $\Omega(r)$ es negativa en $(0, r_1)$ y positiva en $(r_1, \bar{r}_0)$.

Usando las relaciones (3.15) y (2.24) vemos que

$$\begin{aligned}
&(p-1)r^{n-1}|u'|^{p-2}(\varphi v'(r) - v\varphi'(r)) \\
&= (p-1)\int_0^r \{(t^{n-1}|u'|^{p-2}v')'\varphi - (t^{n-1}|u'|^{p-2}\varphi')'v\}dt \\
&= \int_0^r \{-t^{n-1}K(t)f'(u)v(t) + t^{n-1}\Omega(t)\}\varphi(t)dt + \int_0^r t^{n-1}K(t)f'(u)\varphi(t)v(t)dt \\
&= \int_0^r t^{n-1}\Omega(t)\varphi(t)dt
\end{aligned}$$

Concluimos por lo tanto que

$$\varphi(r)v'(r) - v(r)\varphi'(r) \leq 0 \tag{3.16}$$

para todo $r \in (0, r_1]$, y también para $r \in (r_1, \bar{r}_0]$ mientras φ se mantenga negativa en (r_1, r). En particular (3.16) se satisface para $r = r_1$, luego tenemos que $v(r_1)$ necesariamente no puede ser positiva. Ahora podemos mostrar que $\varphi(r)$ no tiene ceros en $(r_1, \bar{r}_0]$, porque de otro modo habría un primer cero r_2 después de r_1, para el cual deberíamos tener, de acuerdo a (3.16), que $v(r_2) \geq 0$. Pero como $ru'(r)/u(r)$ es estrictamente decreciente en $(0, \bar{r}_0)$,

$$v(r) = u(r)\left(\frac{ru'(r)}{u(r)} + c\right) < u(r)\left(\frac{r_1u'(r_1)}{u(r_1)} + c\right) = \frac{u(r)}{u(r_1)}v(r_1) < 0 \text{ para } r > r_1.$$

Podemos probar finalmente nuestro teorema. Tenemos que $\varphi(\bar{r}_0) < 0$ luego ya hemos probado su primera parte. Si también tuviéramos que $\varphi'(\bar{r}_0) < 0$ la demostración estaría lista, entonces pongámonos en el caso de que $\varphi'(\bar{r}_0) > 0$.

Este caso puede ocurrir sólo si $c < \frac{n-p}{p-1}$. En efecto, si $c \geq \frac{n-p}{p-1}$, entonces, como puede verse en la ecuación (3.5), tendríamos que

$$v'(r) = \left(c - \frac{n-p}{p-1}\right) u'(r) - (p'-1) r K(r) \frac{f(u)}{|u'(r)|^{p-2}} \leq -(p'-1) r K(r) \frac{f(u)}{|u'(r)|^{p-2}} \leq 0$$

para todo $r \in (0, \bar{r}_0)$. Como $v(\bar{r}_0) < 0$, si $\varphi'(\bar{r}_0) > 0$ se contradiría la relación (3.16).

Asumiremos entonces que $c < \frac{n-p}{p-1}$ y que $\varphi'(\bar{r}_0) > 0$. Como (3.16) se satisface para todo $r \in (0, \bar{r}_0)$, usando (3.5) tenemos que

$$\left\{\varphi(r)|u'(r)| \left(\frac{n-p}{p-1} - c\right) - \varphi'(r) v(r)\right\} - \frac{rK(r)}{p-1} \frac{f(u)\varphi(r)}{|u'|^{p-2}} \leq 0$$

luego haciendo $r \to \bar{r}_0$ obtenemos que

$$\varphi(\bar{r}_0)|u'(\bar{r}_0)| \left(\frac{n-p}{p-1} - c\right) - \varphi'(\bar{r}_0) v(\bar{r}_0) \leq 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{n-p}{p-1} v(\bar{r}_0) &= c(\bar{r}_0 u'(\bar{r}_0) + \frac{n-p}{p-1} u(\bar{r}_0)) - \left(c - \frac{n-p}{p-1}\right) \bar{r}_0 u'(\bar{r}_0) \\ &< -\left(c - \frac{n-p}{p-1}\right) \bar{r}_0 u'(\bar{r}_0) \end{aligned}$$

porque $\bar{r}_0 u'(\bar{r}_0) + \frac{n-p}{p-1} u(\bar{r}_0)$ es negativa cuando $\alpha \in \mathcal{G} \cup \mathcal{N}$, como se demostró para el lema 15. Tenemos por lo tanto que

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{r}_0)|u'(\bar{r}_0)| \left(\frac{n-p}{p-1} - c\right) &\leq \varphi'(\bar{r}_0) v(\bar{r}_0) \\ &< -\frac{p-1}{n-p} \varphi'(\bar{r}_0) \left(c - \frac{n-p}{p-1}\right) \bar{r}_0 u'(\bar{r}_0) \end{aligned}$$

y esto implica, al dividir por $\left(\frac{n-p}{p-1} - c\right) |u'(\bar{r}_0)|$, que

$$\frac{n-p}{p-1} \varphi(\bar{r}_0) + \bar{r}_0 \varphi'(\bar{r}_0) < 0,$$

como requeríamos. ∎

El resultado anterior basta para demostrar el teorema 1, pero gracias a la proposición 14, puede extenderse a un resultado de separación más fuerte.

Teorema 17 *Si $\bar{\alpha} \in \mathcal{G} \cup \mathcal{N}$ existe $\delta > 0$ tal que para $\alpha \in (\bar{\alpha}, \bar{\alpha}+\delta)$, $u(R(\alpha), \alpha) = 0$,*

$$t(s,\alpha) < t(s,\bar{\alpha}) \quad y \quad t(s,\alpha)|u'(t(s,\alpha),\alpha)| < t(s,\alpha)|u'(t(s,\alpha),\alpha)|$$

para cada $s \in [0, u_0)$ fijo. Si, en cambio, $\alpha \in (\bar{\alpha} - \delta, \bar{\alpha})$, entonces

$$t(s,\alpha) > t(s,\bar{\alpha}) \quad y \quad t(s,\alpha)|u'(t(s,\alpha),\alpha)| < t(s,\bar{\alpha})|u'(t(s,\bar{\alpha}),\bar{\alpha})|$$

para cada $s \in [u(R(\alpha),\alpha), u_0)$ fijo.

Demostración. Sabemos del teorema (16) que existe $\delta > 0$ tal que $r_0(\alpha)$ decrece y $r_0(\alpha)|u'(r_0(\alpha),\alpha)|$ crece estrictamente en $(\bar{\alpha}-\delta, \bar{\alpha}+\delta)$. Tenemos por lo tanto para $\alpha \in (\bar{\alpha}, \bar{\alpha}+\delta)$ que

$$t(u_0,\alpha) \leq t(u_0,\bar{\alpha}) < \infty \quad \text{y} \quad t(u_0,\alpha)|u'(t(u_0,\alpha),\alpha)| > t(u_0,\bar{\alpha})|u'(t(u_0,\bar{\alpha}),\bar{\alpha})|,$$

y si $\alpha \in (\bar{\alpha} - \delta, \bar{\alpha})$ entonces

$$t(u_0,\alpha) \geq t(u_0,\bar{\alpha}) \quad \text{y} \quad t(u_0,\alpha)|u'(t(u_0,\alpha),\alpha)| < t(u_0,\bar{\alpha})|u'(t(u_0,\bar{\alpha}),\bar{\alpha})|.$$

El resultado se sigue entonces de la proposición 14. ∎

Deduciremos ahora el siguiente teorema de separación que nos permitirá demostrar la unicidad de las soluciones radiales de tipo ground state al problema (1.2).

Teorema 18 *Si $\bar{\alpha} \in \mathcal{G}$ entonces existe $\delta > 0$ tal que*

$$(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}+\delta) \subset \mathcal{N} \quad y \quad (\bar{\alpha}-\delta, \bar{\alpha}) \subset \mathcal{P}.$$

Demostración. Tenemos del teorema anterior que $u(R(\alpha),\alpha) = 0$,

$$R(\alpha) = t(0,\alpha) < t(0,\bar{\alpha}) \leq \infty$$

y

$$R(\alpha)|u'(R(\alpha),\alpha)| > \lim_{r \to R(\bar{\alpha})} r|u'(r,\bar{\alpha})| = 0,$$

para cada $\alpha \in (\bar{\alpha}, \bar{\alpha}+\delta)$; tales condiciones describen el pertenecer a $\mathcal{N}$.

Demostremos que $(\bar{\alpha}-\delta, \bar{\alpha}) \subset \mathcal{P}$ por contradicción: sea $\alpha \in (\bar{\alpha}-\delta, \bar{\alpha})$ y supongamos que $u(R(\alpha),\alpha) = 0$. Del teorema anterior obtenemos entones que

$$R(\alpha)|u'(R(\alpha),\alpha)| < \lim_{r \to R(\bar{\alpha})} r|u'(r,\bar{\alpha})| = 0,$$

lo cual claramente no puede ser cierto. ∎

Demostración del teorema 1. Supongamos por contradicción que hay dos soluciones de tipo ground state diferentes, y sean $\alpha_1 < \alpha_2$ sus valores iniciales. Sea

$$\bar{\alpha} = \sup\{\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2) : \ (\alpha_1, \alpha) \subset \mathcal{N}\};$$

$\bar{\alpha}$ está bien definido según nos muestra el último teorema aplicado a α_1. $\bar{\alpha}$ no puede estar ni en $\mathcal{N}$ ni en
P porque ambos conjuntos son abiertos, pero tampoco podría estar en $\mathcal{G}$ si no queremos contradecir que alrededor de cada $\bar{\alpha} \in \mathcal{G}$ existe una vecindad inferior contenida enteramente en $\mathcal{P}$. Esto completa la demostración. ■

Para demostrar el teorema 2, establecemos a continuación el siguiente resultado de monotonía.

Teorema 19 *Si $\bar{\alpha} \in \mathcal{G} \cup \mathcal{N}$ entonces $\alpha \in \mathcal{N}$ para $\alpha > \bar{\alpha}$ y $R(\alpha) = t(0, \alpha)$ es estrictamente decreciente en $[\bar{\alpha}, \infty)$.*

Demostración. Según el teorema 17 existe $\delta > 0$ tal que $R(\alpha)$ decrece estrictamente y $R(\alpha)|u'(R(\alpha), \alpha)|$ crece estrictamente para $\alpha \in [\bar{\alpha}, \bar{\alpha} + \delta)$. Esto implica, como en la demostración del teorema 18, que $(\bar{\alpha}, \bar{\alpha} + \delta) \subset \mathcal{N}$. Definamos

$$\alpha_1 = \sup\{\alpha > \bar{\alpha} : \ (\bar{\alpha}, \alpha) \subset \mathcal{N}\}.$$

Si α_1 fuese finito, α_1 no podría estar ni en $\mathcal{N}$ ni en $\mathcal{P}$ por la condición de abiertos de tales conjuntos, y no podría estar en $\mathcal{G}$ por el teorema 18; concluímos que α_1 debe ser infinito. La monotonía de $R(\alpha)$ para $\alpha \in [\bar{\alpha}, \infty)$ se sigue fácilmente de lo anterior y de la proposición 14, finalizando de este modo la demostración. ■

La demostración del teorema 2 se sigue directamente del teorema 19.

3.3. Algunos ejemplos

Un ejemplo de una ecuación de la forma (1.5) es la ecuación de Matukuma [10], a saber

$$\Delta u + \frac{f(u)}{1 + r^{\sigma}} = 0, \quad n > 2, \quad \sigma > 0. \tag{3.17}$$

Otro ejemplo es la ecuación

$$\Delta u + \frac{r^{\sigma}}{(1 + r^2)^{\sigma/2}} \frac{f(u)}{r^2} = 0, \quad n > 2, \quad \sigma > 0. \tag{3.18}$$

La ecuación (3.18) fue introducida por primera vez en [1], como un modelo de estructura estelar. La siguiente ecuación incluye a las dos anteriores como casos particulares:

$$\operatorname{div}(|x|^k|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+|x|^\ell\left(\frac{|x|^s}{1+|x|^s}\right)^{\frac{\sigma}{s}}f(u)=0,\quad x\in\mathbf{R}^N,\quad N>1,$$
$$k\in\mathbf{R},\quad \ell\in\mathbf{R},\quad s>0,\quad \sigma>0. \tag{3.19}$$

Aquí

$$a(r)=r^{N+k-1},\qquad b(r)=r^{N+\ell-1}\left(\frac{r^s}{1+r^s}\right)^{\frac{\sigma}{s}}.$$

Las condiciones $(w1)$ y $(w2)$ se satisfacen si

$$N+k>p\quad \text{y}\quad \ell\geq k-p. \tag{3.20}$$

En efecto, bajo la primera de las condiciones en (3.20) tenemos que

$$a^{1-p'}(s)=s^{\frac{N+k-1}{1-p}}$$

es integrable en ∞ y no en 0, luego $(w1)$ se satisface. En este caso

$$h(r)=\int_r^\infty s^{\frac{N+k-1}{1-p}}ds=\frac{p-1}{N+k-p}r^{N+k-p}1-p.$$

Además, de la segunda de las condiciones obtenemos que $N-1+\frac{k}{p}+\frac{\ell}{p'}\geq N+k-p$, y así al usar la primera de las condiciones en (3.20) obtenemos que

$$\left(\frac{1}{p}\frac{a'}{a}+\frac{1}{p'}\frac{b'}{b}\right)\frac{h}{|h'|}=\left(N-1+\frac{k}{p}+\frac{\ell}{p'}+\frac{\sigma}{p'}\frac{1}{1+r^s}\right)\frac{p-1}{N+k-p}$$

es decreciente pues $\sigma>0$ y $s>0$, y tiende a

$$\left(N-1+\frac{k}{p}+\frac{\ell}{p'}\right)\frac{p-1}{N+k-p}$$

cuando $r\to\infty$. Como esta cantidad es mayor o igual que $p-1$, vemos que (w_2) se satisface.

Finalmente mencionamos que nuestras hipótesis cubren también pesos de la forma

$$K(r)=r^\theta\exp\left(-\frac{|\log r|^2}{2}\right)\ \text{cerca de } r=0,\quad K(r)=r^\theta\log^\alpha(1+r),$$

con $\theta\geq -p$ y $\alpha>0$. En efecto, (K_1) claramente se verifica pues

$$\begin{aligned} p+r\frac{K'(r)}{K(r)} &= p+\theta+|\log r|\quad \text{cerca de } r=0,\\ p+r\frac{K'(r)}{K(r)} &= p+\theta+\alpha\frac{r}{(1+r)\log(1+r)}, \end{aligned}$$

respectivamente, son decrecientes. Debe señalarse que en el primer caso

$$\lim_{r\to 0^+} r\frac{K'(r)}{K(r)} = \infty;$$

en el segundo ejemplo, en cambio,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{rK'(r)}{K(r)} = \theta,$$

de manera que (K_1) se satisface para $\theta \geq -p$ y $\alpha > 0$.

En lo que se refiere a las funciones f que cubre el presente trabajo, mencionamos el ejemplo canónico

$$f(u) = u^{q_1} - u^{q_2},$$

con $0 < q_2 < p - 1 \leq q_1$.

Bibliografía

[1] J. Batt, W. Faltenbacher and E. Horst, Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics, *Arch. Rational Mech. Analysis*, **93** (1986), 159-183.

[2] Cortázar, C., Felmer, P., Elgueta, M.: Uniqueness of positive solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbf{R}^N$, $N \geq 3$, *Archive Rat. Mech. Anal.* **142** (1998), 127-141.

[3] Cortázar, C., García-Huidobro, M.: On the uniqueness of ground state solutions of a semilinear equation containing a weighted Laplacian, *Comm. on Pure and Applied Anal.*, **5** (2006), 71-84.

[4] Coffman, C. V.: Uniqueness of the ground state solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbf{R}^N$, $N \geq 3$, *Comm. in Partial Differential Equations*, **16** (1991), 1549-1572.

[5] Erbe, L., Tang, M.: Uniqueness theorems for positive solutions of quasilinear elliptic equations in a ball, *J. Diff. Equat.*, **138** (1997), 351 - 379.

[6] Franchi, B., Lanconelli, E., Serrin, J.: Existence and uniqueness of non-negative solutions of quasilinear equations in $\mathbf{R}^n$, *Advances in Math.*, **118** (1996), 177-243.

[7] García-Huidobro, M.:, Henao, D.: On the uniqueness of positive solutions of a quasilinear equation containing a weighted p-Laplacian, the superlinear case, submitted.

[8] García-Huidobro, M., Manásevich, R., Yarur, C.: On the structure of positive radial solutions to an equation containing a p-Laplacian with weight, *J. Diff. Equat.*, **23** (2006), 51-95.

[9] Kwong, M. K.: Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$, *Archive Rat. Mech. Anal.* **105** (1989), 243-266.

[10] Matukuma, T.: The cosmos, *Iwanami Shoten*, Tokyo, 1938.

[11] Pucci, P., García-Huidobro, M., Manásevich, R., Serrin, J.: Qualitative properties of ground states for singular elliptic equations with weights, *Annali Mat. Pura Appl.*, **185** (2006), S205 - S243.

[12] Peletier, L., Serrin, J.: Uniqueness of positive solutions of quasilinear equations, *Archive Rat. Mech. Anal.* **81** (1983), 181-197.

[13] Peletier, L., Serrin, J.: Uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations, *J. Diff. Equat.* **61** (1986), 380-397.

[14] Serrin, J., Tang, M.: Uniqueness of Ground States for Quasilinear Elliptic Equations, *Indiana University Mathematics Journal*, **49** (2000), 897 - 923.