PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CONVERGENCIA DE LA RESOLVENTE SALIENTE PARA POTENCIALES DE SOPORTE NO COMPACTO

Tesis
para optar al grado de
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas

por

Esptiben Rojas Bernilla

Director de Tesis: Dr. Víctor Hugo Cortés Momberg.

Julio 2004

Introducción

En general, el hamiltoniano de un sistema cuántico es matemáticamente un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert adecuado, que en la mayoría de los casos de relevancia Física corresponde a un operador de la forma $H = -\Delta + V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. En este trabajo estudiaremos el correspondiente modelo unidimensional, $H = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)$, con H actuando en $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ con dominio un subespacio de él.

El fenómeno de resonancia ocurre cuando este operador hamiltoniano H posee "casi" vectores propios. La existencia de un vector propio se traduce, en la dinámica que genera H, en un estado estacionario y por lo tanto con un tiempo de vida infinito.

Por otro lado, la presencia de estados resonantes se traduce en la existencia de estados que viven una cantidad de tiempo muy grande no siendo ellos valores propios de H.

La existencia de resonancias y su relación con el decaimiento exponencial para el caso de hamiltonianos de la forma $H = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)$; en la semirrecta y con la condición de Dirichlet $\varphi(0) = 0$, ha sido estudiada por varios autores. La condición de Dirichlet $\varphi(0) = 0$ corresponde a colocar una barrera de potencial de altura infinita en $x = 0$ y por ende el movimiento se restringe a la semirecta $[0, \infty)$.

Por ejemplo, Lavine en [10] demuestra que ciertas soluciones resonantes presentan un decaimiento casi exponencial en el tiempo. Explícitamente, si $V(x)$ es una función acotada, positiva y con soporte compacto, entonces una solución truncada y normalizada en $L^2([0, R])$ de la ecuación diferencial $H\varphi = z\varphi$, donde $z = \alpha - i\beta$ corresponde a un polo de la continuación analítica de la resolvente.

Varios trabajos han estudiado hamiltonianos que involucran barreras de potencial de altura fija y ancho creciendo al infinito, es decir,

$$V_n = a\,\chi_{[a,a+n]},\; V_\infty = a\,\chi_{[0,\infty]}\,,\; a > 0$$

donde χ_I denota la función característica del conjunto I.

En [1], [4] se estudia este problema para

$$H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x) \text{ y } \; H_\infty = -\frac{d^2}{dx^2} + V_\infty(x)$$

actuando $L^2(\mathbb{R}^+)$ con condición de Dirichlet $\varphi(0) = 0$. En [4] se demuestra que H_n converge a H_∞ en el sentido fuerte de la resolvente.

Notemos que cada operador H_n es absolutamente continuo, mientras H_∞ tiene valores propios. Esto prueba la existencia de estados para los cuales hay un decaimiento exponencial aproximado en el tiempo.

En nuestro trabajo, probaremos el mismo tipo de convergencia para una sucesión $\{V_n\}_n$ de potenciales que no tiene soporte compacto y que satisfacen las siguientes propiedades:

P1) $|V_n(x)| \leq e^{-(2\beta+\frac{1}{n})x}$, $\beta > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

P2) $\operatorname{sop}[V_n(x)] = [0, \infty)$, no compacto.

En nuestra formulación los correspondientes operadores autoadjuntos H_n y H_∞ están dados por:

$$H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x); \quad H_\infty = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{-2\beta x}$$

Específicamente se demuestra que la resolvente saliente de H_n converge. Es decir,

$$(H_n - z^2)^{-1} \to (H_\infty - z^2)^{-1} \text{ en } L^2([0, R])$$

con lo cual se generaliza, para esta clase de operadores H_n que satisfacen $P1) - P2)$, los resultados obtenidos para soporte compacto en [4].

A continuación, describimos brevemente el contenido de cada capítulo.

El Capítulo 1 está dedicado a presentar la ecuación estacionaria de Schrödinger en $\mathbb{R}$ y enunciar las definiciones y resultados necesarios con el fin de formular nuestro problema en el lenguaje matemático moderno.

El Capítulo 2 tiene como objetivo fundamental demostrar la existencia de frecuencias dispersivas para potenciales de soporte no compacto. Los resultados más importantes son Teorema 2.01 y Teorema 2.03.

Finalmente, en Capítulo 3, para una sucesión de potenciales $\{V_n\}_n$ que satisfacen las condiciones P1), P2), se prueba que el vector propio del operador H_∞ actua "casi como vector propio" para los operadores H_n.

La demostración necesita resultados previos que están explicitados en Lema 3.1.7 y Lema 3.1.8 y lo esencial en ella consiste en verificar previamente que la resolvente saliente (continuación meromorfa de la resolvente del operador H_n) converge fuertemente a la resolvente usual del operador H_∞ en $L^2([0,\infty])$. Esto significa que hay una cierta estabilidad entre los valores propios del operador H_∞ y las frecuencias dispersivas de los operadores H_n, en el sentido de que éstas se encuentran cerca de los valores propios del operador H_∞.

Agradecimientos

Quiero manifestar mis agradecimientos a todos los que de una u otra forma contribuyeron a la realización de este trabajo.

Dr. Víctor Cortés, quien no solo planteó el problema de esta tesis, sino que además contribuyó de manera fundamental a la solución del mismo.

Dr. Claudio Fernández, por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Agradezco también a la Dra. Herminia Oschenius, por su apoyo en los momentos difíciles, y a la Sra. Virginia Farías, secretaria del Departamento de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, por la escritura en Latex de la primera versión de la tesis.

Finalmente agradezco a mi esposa Magaly, a mis hijos Joaquín y Karina, por estar siempre junto a mí, de quienes siempre he recibido su apoyo y amor.

Capítulo 1

La ecuación estacionaria de Schrödinger en $\mathbb{R}$

La ecuación estacionaria de Schrödinger en $\mathbb{R}$ es la ecuación

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar}(E - V(x))\psi = 0, \tag{1.1}$$

donde la variable $x \in \mathbb{R}$, $\hbar$ es la constante de Plank y m es la masa de la partícula.

El parámetro E es llamado la energía de la partícula y la función $V(x)$ es llamada la energía potencial de ella. En el caso que $V(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, la partícula se dice que es *libre*.

Una solución ψ de (1.1) para la cual

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

representa desde el punto de vista de la física un estado *ligado*, en el cual las mediciones físicas son estacionarias.

Por otra parte, cuando la solución ψ de (1.1) no está en $L^2(\mathbb{R})$, la energía E está relacionada con los estados *dispersivos* de la ecuación de evolución asociada.

Para V un potencial que es constante en un intervalo, $V(x) = V_0$, $a < x < b$, se puede calcular las soluciones de la ecuación (1.1). Uno de los fenómenos característicos de la mecánica cuántica se ven reflejados en este ejemplo. Si la energía es pequeña comparada con V_0 es decir, $\lambda < V_0$ entonces después de atravezar la región $a < x < b$, la partícula libre e^{ikx} se descompone es dos pedazos , uno que continúa su trayectoria y otra parte que se refleja, es decir,

$$A(k)e^{ikx} + B(k)e^{-ikx}$$

Por otro lado si la energía es grande, es decir $\lambda > V_0$, la parte que se refleja es pequeña. Para más detalles se puede consultar [13].

A continuación analizaremos con cierto detalle los casos que nos interesa estudiar, a saber, los casos de energía pequeña y de energía grande.

1.1. Energía pequeña: $E < V$

Consideremos un potencial definido por:

$$\begin{cases} V_0 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases} \tag{1.2}$$

donde V_0 es una constante positiva.

Para simplificar las constantes llamemos por $\alpha_0 = \frac{2m}{\hbar}$, $\lambda^2 = \alpha_0 E$ y $k_0^2 = \alpha_0 V_0$. Con esta notación la ecuación (1.1) se descompone en las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda^2\psi = 0, \quad |x| > a \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda^2 - k_0^2)\psi = 0, \quad |x| \leq a \tag{1.4}$$

Denotemos por H_0, H_1 los operadores diferenciales de segundo orden siguientes

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{d^2}{dx^2} \\ H_1 &= -\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 \end{aligned}$$

Solucionar las ecuaciones (1.3), (1.4) corresponde formalmente a solucionar los problema de valores propios correspondientes, es decir, encontrar estados o vectores $\psi_0, \psi_1 \in L^2(\mathbb{R})$ de tal manera que $H_0\psi_0 = \lambda^2\psi_0$, para $|x| > a$ y $H_1\psi_1 = \lambda^2\psi_1$ para $|x| \leq a$.

Por otro lado sabemos que la ecuación (1.3) tiene soluciones de la forma

$$\psi(x) = A\cos kx + B\,\text{sen}\,kx$$

mientras que la ecuación (1.4) tiene soluciones con decaimiento exponencial en $L^2(\mathbb{R})$ dadas por

$$\begin{aligned} \psi(x) &= Ce^{-kx}, \quad x > a, \\ \psi(x) &= De^{kx}, \quad x < -a \end{aligned}$$

donde $k = \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$, ya que $E < V_0$.

Estamos interesados en encontrar soluciones $\psi(x) \in H^2(\mathbb{R})$, es decir, tanto la función como su derivada distribucional son funciones en $L^2(\mathbb{R})$, lo cual implica que tanto ψ como ψ' deben ser funciones continuas. Por lo tanto las soluciones de ambos problemas (1.3), (1.4) deben pegarse adecuadamente. Esto es, para $x = a$ debe cumplirse que

$$\begin{aligned} A\cos ka + B\,\text{sen}\,ka &= Ce^{-ka} \\ -Ak\,\text{sen}\,ka + Bk\cos ka &= -kCe^{-ka} \end{aligned}$$

y para $x = -a$ se debe tener que

$$\begin{aligned} A\cos ka - B\,\text{sen}\,ka &= De^{-ka} \\ Ak\,\text{sen}\,ka + Bk\cos ka &= kDe^{-ka} \end{aligned}$$

Las constantes se pueden elegir con la condición $AB = 0$, obteniéndose dos tipo de soluciones

$$\begin{aligned} B = 0,\ D = C, &\quad \text{resultando que } \psi(x) \text{ es par, o} \\ A = 0,\ D = -C, &\quad \text{resultando que } \psi(x) \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Esto muestra que para el caso de energía pequeña con un potencial tipo barrera dado por (1.2) se pueden encontrar soluciones en $H^2(\mathbb{R})$.

1.2. Ecuación de Schrödinger. Energía grande: $E > V_0$

Consideremos las constantes α_0, λ, k_0 definidas antereiormente y consideremos un potencial $V(x)$ con soporte compacto sop $V(x) = [0, a]$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda^2\psi(x) = 0, \quad x \notin \operatorname{sop} V(x) \tag{1.5}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0, \qquad x \in [0, a] \tag{1.6}$$

En ambos casos se tendrá soluciones linealmente independientes del tipo ,

$$\psi_+(x) = Ae^{i\theta x}, \quad \psi_-(x) = Be^{-i\theta x} \tag{1.7}$$

respectivamente. Estas soluciones describen el movimiento a la derecha y a la izquierda de la partícula respectivamente.

Para x a la izquierda de sop $V(x)$, la ecuación (1.4) coincide con la ecuación de la partícula libre.

$\psi_+(x) = Ae^{ikx}$ es llamada *partícula entrante por la izquierda.*

$\psi_-(x) = Be^{ikx}$ es llamada *partícula saliente por la izquierda.*

Análogamente, para x a la derecha del sop $V(x)$ la ecuación (1.6) coincide con la ecuación de la partícula libre.

$\psi_+(x) = Ae^{ikx}$ es llamada *partícula saliente por la derecha.*

$\psi_-(x) = Be^{ikx}$ es llamada *partícula entrante por la derecha.*

Físicamente se dice que: Be^{ikx} es la *onda reflejada* en la región $x < 0$ y Ae^{ikx} es la *onda transmitida* en la región $x > a$.

La siguiente sección tiene como objetivo enunciar las definiciones y resultados necesarios con el fin de formular nuestro problema en el lenguaje de operadores.

1.3. Preliminares y notaciones

Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal de X en Y. Denotaremos por $D(T)$ el dominio del operador T , donde $D(T)$ es un subespacio lineal de X.

Recordemos que un operador lineal $T : D(A) \to Y$ es densamente definido si $D(A)$ es denso en X.

Para el caso de un operador T con dominio $D(T) = X$ se dice que es acotado si y sólo si existe $C > 0$ tal que para cualquier $f \in X$

$$||Tf||_Y \leq C||f||_X$$

Para un operador acotado se define la norma del operador como

$$||T|| = \inf\{C : ||Tf|| \leq C||f||\}$$

Asociamos a un operador T con dominio $D(T)$ su gráfico que consiste en el subconjunto de $X \times Y$

$$\Gamma(T) = \{(f, Tf) : f \in D(T)\}$$

Un operador $T : X \to Y$ con dominio $D(T)$ se dice cerrado si su gráfico es un subconjunto cerrado de $X \times Y$ en la topología inducida por las norma $||(u, v)|| = (||u||_X^2 + ||v||_Y^2)^{1/2}$.

El Teorema del Gráfico Cerrado afirma que si un operador cerrado tiene como dominio todo el espacio X entonces el operador debe ser acotado.

En particular un operador lineal densamente definido $T : X \to Y$ es cerrado si para cada sucesión convergente $\{x_n\} \subset D(T)$ con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$ y $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y$ entonces $x \in D(T)$ y $Tx = y$.

Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ la familia de todos los operadores lineales y acotados de X en Y y por $\mathcal{L}(X)$ cuando $X = Y$. El conjunto $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio vectorial normado con la norma $||T||$, el cual es además completo si el espacio Y es un espacio de Banach.

A todo operador $T : X \to Y$ lineal con dominio $D(T)$ se le asocia en forma natural tres subespacios lineales:

i) $D(T) \subset X$, dominio de T.

ii) $\mathrm{Ran}(T) \subset Y$, rango de T, $\mathrm{Ran}(T) = \{y \in Y \ : \ y = Tx, \text{ algún } x \in D(T)\}$.

iii) $\mathrm{Ker}T \subset X$, Kernel de T, $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in D(T) \ : \ Tx = 0\}$.

Definición 1.3.1 *Un operador lineal $T : D(T) \subset X \to X$ es invertible si T tiene una inversa acotada definida en todo X. Al operador inverso lo denotaremos por T^{-1}.*

Observar que el inverso de un operador no acotado T es un operador acotado, es decir, T^{-1} esta definido en todo el espacio X y $||T^{-1}x|| \leq C$ para todo $x \in X$.

Definición 1.3.2 *Sea $T : X \to X$ un operador lineal con dominio $D(T) \subset X$.*

1. *El espectro de T, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (T - \lambda I)$ es no invertible$\}$.*
2. *El conjunto resolvente de T, $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (T - \lambda I)$ es invertible$\}$.*
3. *Si $\lambda \in \rho(T)$ entonces la inversa de $(T - \lambda I)$ es llamada la resolvente de T en λ y escribimos $R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$.*

Obsérvese que: $\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C}$ y $\sigma(T) \cap \rho(T) = \phi$.

Una función $h : \Omega \to \mathcal{L}(X)$, Ω un abierto de $\mathbb{C}$, se dice que es analítica en $\lambda_0 \in \Omega$ si $h(\lambda)$ tiene una expansión en serie de potencia en $(\lambda - \lambda_0)$, con coeficientes en $\mathcal{L}(X)$, la cual converge en la norma de $\mathcal{L}(X)$ con radio de convergencia diferente de cero.

Como $\rho(T)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ podemos aplicar la definición de analiticidad a la resolvente $R_T(\lambda)$, resultando que ella depende analiticamente del parámetro λ. Esto es, existen operadores acotados T_n tal que

$$T(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n T_n$$

La no invertibilidad de $(T - \lambda I)$ se produce en los siguientes tres casos, generando cada uno de ellos diferentes clase de espectro:

1. $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) \neq \{0\}$, es decir, $(T - \lambda I)$ no es inyectiva.
2. $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$, $\mathrm{Ran}(T\lambda I)$ es denso pero $(T - \lambda I)$ tiene una inversa que no es acotada.
3. $\mathrm{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$ pero $\mathrm{Ran}(T - \lambda)$ no es denso, en este caso $(T - \lambda)^{-1}$ existe y puede ser acotado sobre $\mathrm{Ran}(T - \lambda)$, pero no es densamente definido y no tiene extensión única como operador acotado sobre X.

Definición 1.3.3 *Sea $T : X \to X$ un operador lineal con dominio $D(T) \subset X$.*

1. *Si $\lambda \in \sigma(T)$ es tal que $Ker(T - \lambda) \neq \{0\}$, entonces λ es un* valor propio *de T y cualquier $u \in Ker(T - \lambda)$, $u \neq 0$, es un* vector propio *de T para λ y satisface $Tu = \lambda u$.*

   Además, $\dim($ *$Ker(T - \lambda)$*$)$ *es llamada la multiplicidad geométrica de λ y $Ker(T - \lambda)$ es el subespacio propio de T asociado al valor propio λ.*
2. *El espectro discreto de T, $\sigma_d(T)$ es el conjunto de todos los autovalores de T con multiplicidad (algebraica) finita, los cuales son puntos aislados de $\sigma(T)$.*
3. *El espectro esencial de T es definido como*

$$\sigma_{esc}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_d(T)$$

Observaciones.

- Para el caso en que $\dim X < \infty$ se sabe que si $(T - \lambda)$ es inyectiva ella es automáticamente epiyectiva y por lo tanto invertible con rango todo el espacio. Por lo tanto, $\sigma(T) = \sigma_d(T)$.
- $\sigma(T) = \sigma_{es}(T) \cup \sigma_d(T)$. Notemos que $\sigma_{es}(T)$ puede contener valores propios de T. Por ejemplo, un valor propio de multiplicidad infinita o uno que sea el límite de una sucesión de valores propios es un elemento de $\sigma_{es}(T)$.

- El conjunto de todos $\lambda \in \sigma(T)$ tal que λ no es un autovalor pero $\mathrm{Ran}(T-\lambda)$ no es denso es llamado *espectro residual de* T.

$$\sigma_{es}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Ker}(T-\lambda) = \{0\} \ \text{ y } \ \mathrm{Ran}(T-\lambda) \text{ no es denso}\}$$

Muchos de los más importantes operadores que se estudian en Física Matemática son no acotados. En particular trabajaremos con el operador $-\dfrac{d^2}{dx^2}$.

Ejemplo. El operador $-\dfrac{d^2}{dx^2}$

El espacio de Hilbert base para este operador es $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Como no toda función de $L^2(\mathbb{R})$ es dos veces derivable debemos restringir el operador a un dominio adecuado de $L^2(\mathbb{R})$ de tal manera que él esté bien definido en ese dominio. Necesitaremos que el dominio sea denso en $L^2(\mathbb{R})$.

Llamaremos Δ_0 al operador lineal $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ con dominio $D(\Delta_0) = C_0^\infty(\mathbb{R})$, las funciones continuas de soporte compacto en $\mathbb{R}$. Este dominio es un subespacio lineal denso en $L^2(\mathbb{R})$.

Otro dominio para $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ es por ejemplo $H^2(\mathbb{R})$ que corresponde al espacio definido por:

$$H^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{ las derivadas distribucionales } \ f, f' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Notar que $H^2(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert.

1.3.1. Operadores autoadjuntos

En lo que sigue, $\mathcal{H}$ denotará un espacio de Hilbert complejo y separable con producto interno $<\,,\,>$. Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador densamente definido en $\mathcal{H}$ con dominio $D(T)$.

Definición 1.3.4 *Sean T_1 y T_2 operadores lineales densamente definidos sobre $\mathcal{H}$. Diremos que T_1 es una extensión de T_2 y se escribe $T_2 \subset T_1$, si y sólo si $\Gamma(T_2) \subset \Gamma(T_1)$.*

Equivalentemente,

$$T_2 \subset T_1 \Leftrightarrow [D(T_2) \subset D(T_1) \ \text{ y } \ T_1\varphi = T_2\varphi \ \forall\, \varphi \in D(T_2)]$$

Definición 1.3.5 *Sea T un operador densamente definido sobre $\mathcal{H}$. Sea*

$$D(T^*) = \{\varphi \in \mathcal{H} \ : \ \exists \eta \in \mathcal{H} : \langle T\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, \eta\rangle \ \ \forall\, \psi \in D(T)$$

Defininos el operador adjunto T^* *de* T , $T^* : D(T^*) \to \mathcal{H}$ *como sigue:*

$$\varphi \to T^*\varphi = \eta$$

Definición 1.3.6 *Un operador densamente definido T sobre $\mathcal{H}$ es llamado* simétrico *si $T \subset T^*$. Es decir,*

$$D(T) \subset D(T^*) \ y \ \ T\varphi = T^*\varphi, \quad \forall\, \varphi \in D(T)$$

Es decir, T es simétrico si y sólo si $\langle T\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, T\psi\rangle$, para todo $\varphi, \psi \in D(T)$

Definición 1.3.7 *T es llamado* autoadjunto *si $T = T^*$. Es decir,*

$$T \text{ es autoadjunto } \Leftrightarrow [T \text{ es simétrico } y \ D(T) = D(T^*)]$$

A partir de estas definiciones vemos un operador T autoadjunto satisface:

Teorema 1.3.1 *Sea $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ autoadjunto. Entonces $\sigma(T) \subset R$, $\sigma_{res}(A) = \phi$. Además los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.*

Ejemplo: $\Delta_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$ es un operador simétrico con dominio $D(\Delta_0) = C_0^\infty(\mathbb{R})$. Sin embargo esto no basta para que sea autoadjunto.

El problema a enfrentar consiste en determinar dominios para los cuales un operador simétrico sea autoadjunto. En general esta pregunta es difícil de contestar. Sin embargo podemos restringir la búsqueda a los operadores cerrados. Para ello mencionamos el siguiente resultado,

Proposición 1.3.1 *Sea A un operador densamente definido. La clausura $\tilde{A}$ de A es un operador simétrico.*

El siguiente teorema da un criterio de cuando la propiedad de ser autoadjunto se preserva bajo perturbaciones simétricas. La demostración puede encontrarse en [12]. En este trabajo utilizaremos el corolario del siguiente teorema.

Teorema 1.3.2 (Kato-Rellich) *Sea A un operador autoadjunto con dominio $D(A)$ y sea S un operador simétrico con dominio $D(S)$ con $D(A) \subset D(S)$. Supongamos que existen constantes no negativas a, b en $\mathbb{R}$ de tal manera que*

$$||Sv|| \leq a||Av|| + b||v||, \text{ para todo } v \in D(A)$$

Entonces $A + S$ es un operador autoadjunto.

Su demostración se puede encontrar en [8], [12]. En particular nos interesa la siguiente consecuencia,

Corolario 1.3.1 *Sean A un operador autoadjunto y S un operador acotado. Entonces $A + S$ es autoadjunto.*

La demostración es directa puesto que por ser S acotado su dominio es todo el espacio, luego $D(A) \subset D(S)$. Por otro lado tomando $a = 0$ y $b = ||S||$, la norma del operador S, se obtiene la desigualdad que se necesita.

1.3.2. El operador de Schrödinger

En esta sección plantearemos la ecuación de Schrödinger (1.1) desde el punto de vista funcional. Para ello representaremos la ecuación como un problema de valores propios de un operador. Para lograr este objetivo es necesario definir los espacios donde el problema está bien puesto y los dominios donde el operador es autoadjunto.

Una referencia actualizada acerca de los operadores de Schrödinger es [6] donde se puede consultar la mayoría de los resultados que aquí se presentan.

Por simplicidad en (1.1) adoptamos la notación $1 = \dfrac{2m}{\hbar^2}$ donde $\hbar$ es la constante de Panck. Luego, la ecuación de valores propios

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi + (z^2 - V(x)\psi = 0$$

se transforma en términos de operadores en:

$$H_V\psi = z^2\psi$$

donde $H_v = -\dfrac{d^2}{dx} + V(x)$, con $D(H) \subset L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{H}$.

Luego, si elegimos un dominio donde el operador H_V sea autoadjunto podremos asegurar que los valores z para los cuales el problema de valores propios tiene solución están en el eje real.

Es conocido el resultado , $H_0 = -\dfrac{d^2}{dx}$ con dominio $D(H_0) = H^2(\mathbb{R})$ es un operador autoadjunto, ver [8], [12]. Además como aplicación tenemos el siguiente criterio para garantizar que la perturbación del laplaciano, por un operador de tipo potencial, siga siendo autoadjunto con dominio $H^2(\mathbb{R})$.

Proposición 1.3.2 *Sea V una función real en $L^\infty(\mathbb{R})$. Llamemos H_V al operador que actúa como:*

$$H_V f = H_0 f + V f$$

para todo $f \in H^2(\mathbb{R})$. Entonces H_V está bien definido sobre su dominio $D(H_V) = H^2(\mathbb{R})$ y es un operador autoadjunto.

Este resultado es una consecuencia directa del Teorema 1.3.2 (Kato–Rellich). Resumiendo, perturbaciones por potenciales $V \in L^\infty(\mathbb{R})$ de $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$ con dominio $H^2(\mathbb{R})$ producen operadores autoadjuntos en el mismo dominio.

En este trabajo los potenciales que consideraremos son funciones en $L^\infty(\mathbb{R})$, de tal forma que el problema de autovalores para H_V está bien definido y además el especto de H_V es un subconjunto del eje real.

1.4. Frecuencias dispersivas

Para un operador autoadjunto H se sabe que la resolvente $R_H(z^2) = (H - z^2)^{-1}$ es un operador analítico de $\rho(H) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H} : T \text{ lineal y acotado}\}$.

De esta manera podemos definir $R_H(z^2) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ por

$$f \to R_H(z^2)f = \varphi\,.$$

Como H es autoadjunto su espectro $\sigma(H)$ es un subconjunto del eje real. Además $z \in \sigma(H)$ si z es una singularidad de $R_H(\cdot)$. En otras palabras, tenemos que $R_H(\cdot)$ es una función analítica en el semiplano superior que puede ser extendida a una función meromorfa en la región $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > -\alpha\}$, con $\alpha > 0$. De esta manera las frecuencias dispersivas corresponden a los polos de la extensión meromorfa de $R_H(\cdot)$.

A fin de extender $R_H(\cdot)$ debajo del eje real debemos encontrar $z \in \mathbb{C}$ con $\text{Im} z < 0$ que haga posible resolver la ecuación $H\psi = z^2\psi$, para ello la estrategia usual es buscar un subespacio en $L^2(\mathbb{R})$ (por ejemplo, $C_c(\mathbb{R})$ como dominio de $R_H(\cdot)$ y un espacio (por ejemplo, $H^2(\mathbb{R})$) donde es posible resolver $R_H(z^2)f = \varphi$.

Aquellos $z \in \mathbb{C}$ con $Im\ z < 0$ que cumplen lo anterior se les llama *Frecuencias Dispersivas para H* y la resolvente asociada se le llama *Resolvente Saliente de H.*

Para la sucesión de potenciales $V_n(x) = n\chi_{[\pi,\pi+0]}(x)$ y $H_n = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V_n(x)$, actuando en $L^2([0,\infty)]$, con condición de Dirichlet $\varphi(0) = 0$, Emch y Sinha en [5] demuestran que H_n converge en el sentido fuerte de la resolvente al operador $H_\infty = H_I \oplus H_E$ donde H_I es el laplaciano $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ en el interior de la barrera $[0,\pi]$, con condición de frontera $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$ y H_E es también $-\dfrac{d^2}{dx^2}$, pero actuando en el exterior $[\pi + a, \infty)$ con condición de Dirichlet $\varphi(\pi + a) = 0$.

Por otro lado, P. Covian [3] estudia el caso en que la altura de la barrera se mantiene fija mientras su ancho crece al infinito. Más precisamente

$$H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n, \quad V_n(x) = a\,\chi_{[a,a+n)},\ a > 0.$$

y la barrera infinita $H_\infty = -\dfrac{d^2}{dx^2} + V_\infty(x)$, $V_\infty(x) = a\,\chi_{[0,\infty)}$.

Además, Covian en [4] demuestra que cuando n tiende a infinito H_n converge a H_∞ en el sentido fuerte de la resolvente. Más propiedades de esta convergencia se estudian en [1].

Estamos entonces en la situación donde se espera que se manifieste el fenómeno de resonancia, en el sentido de establecer la existencia de estados para los cuales haya un decaimiento exponencial aproximado.

Nuestro propósito es demostrar la convergencia de la resolvente saliente para potenciales del tipo

$$V(x) > 0, V(x) \leq e^{-sx}, s > 0; \ \ \operatorname{sop} V(x) = [0, \infty)$$

con V potencial no necesariamente de soporte compacto.

De esta manera podemos establecer que en cierto sentido existe estabilidad entre las frecuencias dispersivas de los operadores H_n y los valores propios de H_∞ y también entre los estados resonantes de H_n y los vectores propios de H_∞.

Este resultado es importante puesto que en Mecánica Cuántica los potenciales de interés son en general de soporte no compacto.

Capítulo 2

Existencia de frecuencias dispersivas para potenciales de soporte no compacto

En este capítulo daremos tres definiciones equivalentes de *frecuencias dispersivas* y luego probaremos la existencia de éstas, para potenciales de soporte no compacto.

En este capítulo consideramos el laplaciano $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$ con dominio $H^2(\mathbb{R})$ y condiciones de Dirichlet en $x = 0$, de tal forma que H_0 es autoadjunto.

Definición 2.0.1 *Sea $H_V = H_0 + V(x)$ en $L^2[0, \infty)$ un operador autoadjunto. Una* frecuencia dispersiva *para el operador hamiltoniano H_V es un número complejo $z = \lambda - i\epsilon$, $\epsilon > 0$ el cual es un polo de la continuación meromorfa del operador resolvente desde el semiplano superior al semiplano inferior como se planteó en sección 1.4.*

Es decir,$z = \lambda - i\epsilon$, $\epsilon > 0$ es una frecuencia dispersiva si el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} H_V\psi = (\lambda - i\epsilon)^2\psi, & x > 0 \\ \psi(0) = 0 \end{cases}$$

tiene una solución saliente no trivial ($\psi(x) \to \alpha\, e^{izx}$ cuando $x \to \infty$). Dicha función es llamada *estado resonante* o *solución resonante.*

Se observa que la condición de solución saliente es equivalente a $|\psi(x) - e^{izx}| < \epsilon$ cuando $x \to \infty$ que es lo que obtendremos para potenciales de soporte no compacto.

En esta sección probaremos la existencia de estos polos (frecuencias dispersivas) cuando el operador hamiltoniano H posee un potencial del tipo

$$\textbf{(H)} \quad V(x) > 0,\ V(x) \leq e^{-sx},\ s > 0\,,\ \operatorname{sop} V(x) = [0, \infty)$$

Recordemos que si $G(x, y)$ es una función de Green de un operador diferencial L, es decir, si $Lu = \delta(x - y)$ entonces $u(x) = \int G(x, y)h(y)dy$ es una solución de $Lu = h$, para cualquier función h con decaimiento suficiente en infinito, en particular válido para h una función de soporte compacto.

Veamos que la función de Green del problema correspondiente entrega una solución saliente.

Dado $x, y \geq 0$, $z \in \mathbb{C}$, afirmamos que la función

$$K(x, y, z) = -\left\{e^{iz|x-y|} - e^{iz|x+y|}\right\}$$

es la función de Green para el operador $-\frac{d^2}{dx^2} - z^2$. Para ello debemos verificar que

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - z^2\right) K(x, y, z) = \delta(x - y)$$

En efecto, suponiendo $x > y \geq 0$ se tiene que $|x - y| = x - y$, $|x + y| = x + y$, y se verifica directamente que

$$\begin{aligned}
-\frac{d^2}{dx^2}[K(x,y,z) - z^2 K(x,y,z)] &= -z^2 e^{iz}(x-y) + z^2 e^{iz(x+y)} \\
&\quad + z^2 e^{iz(x-y)} - z^2 e^{iz(x+y)} = 0 \\
&= \delta(x - y)\,, \quad \text{para } x \neq y.
\end{aligned}$$

Más aún, es posible demostrar que $\int Lu\varphi(y)dy = \varphi(x)$, para toda función φ definida y continua en $\mathbb{R}^+$ de soporte compacto. Así resulta que $K(x, y, z)$ es una función de Green para $-\frac{d^2}{dx^2} - z^2$.

En otras palabras dada $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, con decaimiento suficiente en infinito, la función u,

$$u(x) = \int_0^\infty K(x,y,z)f(y)dy$$

es solución del problema:

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}u - z^2u &= f, \quad x \geq 0 \\ u(0) &= 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_0^\infty e^{iz|x-y|}f(y)\,dy + \int_0^\infty e^{iz|x+y|}f(y)\,dy \\ &= -e^{izx}\int_0^x e^{-izy}f(y)\,dy - e^{-izx}\int_x^\infty e^{izy}f(y)\,dy + e^{izx}\int_0^\infty e^{izy}f(y)\,dy \end{aligned}$$

Entonces cuando $|x|$ es grande y f de soporte compacto, $-e^{-izx}\int_x^\infty e^{izy}f(y)\,dy$ se anula y se obtiene que $u(x) = \alpha e^{izx}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Esto significa que la función de Green entrega soluciones salientes de (2.1).

Por otro lado si u es una solución resonante significa que el problema siguiente:

$$\begin{cases} -u'' + V(x)u &= z^2u + f(x), \quad x \geq 0 \\ u(0) &= 0 \\ u(x) \to \alpha e^{izx}, & x \to \infty,\ \alpha \in \mathbb{C} \end{cases} \tag{2.2}$$

tiene una única solución que coincide con la resolvente, $\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - z^2\right)^{-1} f$, con Im $z < 0$. Observemos que la ecuación (2.2) se puede reescribir como sigue:

$$-u'' - z^2u = f - V\,u$$

Entonces la solución u debe satisfacer la ecuación integral

$$u(x) = \int_0^\infty K(x,y,z)[f(y) - V(y)u(y)]dy$$

Examinemos algunas propiedades de $L_V u(x) = -\int_0^\infty K(x,y)V(y)u(y)\,dy$, con $K(x,y) = -e^{iz|x-y|} + e^{iz|x+y|}$

a) Si Im $z > 0$ entonces $K(x, y, z)$ decrece exponencialmente cuando $|x| \to \infty$.

b) Si Im $z = 0$ entonces $K(x, y, z) \in \mathrm{L}^\infty$, y además $\|K\|_\infty \leq 2$.

c) Si Im $z < 0$ entonces $K(x, y, z)$ crece exponencialmente cuando $|x| \to \infty$.

A partir de estas propiedades para el kernel $K(x, y, z)$ se ve claramente que si V tiene soporte compacto L_V tiene sentido para cualquier u, por ejemplo: para $u \in \mathrm{L}^1$, o u continua o $u \in H^2(\mathbb{R})$.

Para el caso en que V no tenga soporte compacto el problema es más complicado. Para tal efecto impondremos una condición del tipo $|V(x)| \leq Ce^{-sx}$. Con esta condición obtenemos que si $z = a + ib$,

$$|e^{izy}e^{-sx}| \leq e^{-by}e^{-sx}$$

con lo cual obtenemos que $K(x, y, z)V$ decae exponencialmente para z en la región $\{\text{Im } z > -s/2\}$. Esto nos permite aceptar funciones u que crezcan exponencialmente.

De esta manera obtenemos otro criterio para la existencia de frecuencias dispersivas, es decir, z es frecuencia dispersiva si en (2.2), $f(x) = 0$, y además la ecuación integral

$$u(x) = \int_0^\infty K(x, y, z)V(y)u(y)dy = \int_0^\infty \bar{K}(x, y, z)V(y)u(y)dy$$

tiene solución no trivial, donde $\bar{K} = -K$. En resumen hemos probado lo siguiente:

Proposición 2.0.1 *Sea $z = \lambda - i\epsilon$, $\epsilon > 0$ z es frecuencia dispersiva si y sólo si la ecuación integral*

$$u(x) = \int_0^\infty \bar{K}(x, y, z)V(y)u(y)dy \tag{2.3}$$

tiene alguna solución no trivial. Esta solución u está en $H^2(\mathbb{R})$ y decae exponencialmente.

Es así como el problema de encontrar frecuencias dispersivas para el potencial V se reduce a encontrar soluciones de la ecuación integral (2.3) con V potencial satisfaciendo las condiciones (**H**). Ahora nos abocaremos a definir los espacios donde esta ecuación tendrá solución.

Consideremos el espacio

$$X = \{\psi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+) \ : \ \int_0^\infty |\psi(x)|^2 \mu(x)\, dx < \infty\}$$

donde $\mu(x)$ es la función peso dada por $\mu(x) = e^{-\beta x}$ con $\beta > 0$.

Se definen el operador integral $L_V(z) : X \to X$

$$L_V(z)\psi(x) = \int_0^\infty \bar{K}(x,y,z)V(y)\psi(y)dy$$

Notemos que si $z = \lambda - i\epsilon$, z es una frecuencia dispersiva si y sólo si ψ es vector propio de $L_V(z)$ con valor propio 1, es decir, $L_V(z)\psi = \psi$.

A continuación probaremos la existencia de soluciones de $L_V(z)\psi = \psi$.

Teorema 2.0.1 *Sea $z = \alpha - i\beta$, $\beta > 0$ y V un potencial que satisface*

$$V(x) > 0,\ V(x) \leq e^{-sx},\ s > 0,\ sop\, V(x) = [0, \infty)\ , s - 2\beta > 0.$$

Entonces $L_V(z)$ es un operador compacto en X.

Demostración. Usaremos el siguiente resultado.

Si $\mathcal{G} \in L^2(X^2, dx \otimes dx)$ y L_V está definido por $L_V(z)\psi(x) = \int_0^\infty \mathcal{G}(x,y,z)\psi(y)\mu(y)dy$ entonces $L_V(z)$ es un operador compacto en X.

En nuestro caso,

$$L_V(z)\psi(x) = \int_0^\infty \bar{K}(x,y,z)V(y)\psi(y)dy = \int_0^\infty \bar{K}(x,y,z)e^{sy}V(y)\psi(y)e^{-sy}dy.$$

Luego bastará con demostrar que $\mathcal{G}(x,y) = \bar{K}(x,y,z)\, e^{sy}V(y) \in L^2(X^2, dx \otimes dx)$.

En nuestro caso $\bar{K}(x,y,z) = e^{iz|x-y|} - e^{iz|x+y|}$ y por ende debemos estimar:

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty |\bar{K}(x,y,z)|^2 |V(y)|^2 e^{2sy} e^{-sy} dy \right) e^{-sx} dx \tag{2.4}$$

donde para $x > y$,

$$|\bar{K}(x,y,z)|^2 = |e^{iz|x-y|} - e^{iz|x+y|}|^2 = |e^{izx}(e^{-izy} - e^{izy})|^2$$

Como $z = \alpha - i\beta$, $izx = i\alpha x + \beta x$, luego

$$|\bar{K}(x,y,z)|^2 = e^{2\beta x}|(e^{-izy} - e^{izy})|^2$$

Reemplazando en (2.4) se logra que

$$I = \int_0^\infty e^{2\beta x}\left(\int_0^\infty |e^{-izy} - e^{izy}|^2\ |V(y)|^2 e^{sy}dy\right)e^{-sx}dx \tag{2.5}$$

Por otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned} |e^{-izy} - e^{izy}| &\leq \int_{-y}^{y} |\frac{d}{d\theta}(e^{-iz\theta})|d\theta \\ &\leq |z|\int_{-y}^{y} e^{-\beta\theta}d\theta = \frac{|z|}{\beta}\left[-e^{-\beta y} + e^{\beta y}\right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|e^{-izy} - e^{izy}|^2 \leq \frac{|z|^2}{\beta^2}e^{-2\beta y}(e^{2\beta y} - 1)^2$$

Reemplazando en (2.5) se obtiene que:

$$\int_0^\infty e^{2\beta x}\left(\int_0^\infty \frac{|z|^2}{\beta^2}e^{-2\beta y}(e^{2\beta y} - 1)^2|V(y)|^2 e^{sy}dy\right)e^{-sx}dx$$

pero como $|e^{2\beta y} - 1| \leq 2\beta e^{2\beta y}|y|$ y $V(y) \leq e^{-sy}$ se puede estimar la integral (2.5)

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{|z|^2}{\beta^2}\int_0^\infty e^{2\beta x}\left(\int_0^\infty e^{-2\beta y}4\beta^2 e^{4\beta y}|y|^2|V(y)|^2 e^{sy}dy\right)e^{-sx}dx \\ I &\leq 4|z|^2\left(\int_0^\infty e^{-(s-2\beta)y}|y|^2 dy\right)\left(\int_0^\infty e^{-(s-2\beta)x}dx\right) \end{aligned}$$

como $s - 2\beta > 0$ la integral converge. $\square$

El siguiente resultado es una generalización de la alternativa de Fredhlom para operadores compactos.

Teorema 2.0.2 (Steinberg) *Sea $\{L(z)\}$ una familia de operadores compactos que depende analíticamente de z con $z \in \Omega$, Ω un abierto conexo del plano complejo. Entonces existe $z_1, z_2, \ldots$ en el semiplano complejo inferior, tal que se cumple una y sólo una de las siguientes alternativas:*

i) Si $z \in \{z_i\}_{i\in \overline{1,n}}$ entonces $L_V(z)\psi = \psi$ tiene solución no trivial.

ii) Si $z \notin \{z_i\}_{i\in \overline{1,n}}$ entonces dado f de soporte compacto, existe una única solución ψ de $L_V(z)\psi - \psi = f$.

Además la solución ψ en ii) es meromorfa con polos $\{z_i\}$.

Para la versión general y la demostración de este teorema consultar [11].

Este teorema se aplica para demostrar el siguiente resultado que necesitaremos más adelante.

Teorema 2.0.3 *Sea $z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : Im\ z > -s/2\}$ y consideremos el operador $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$. Entonces existe a lo más un conjunto numerable $z_1, z_2, \ldots$ con $Im z_k < 0$ tal que se cumple una y sólo una de las siguientes posibilidades:*

i) Para cada $z \in \{z_i\}_{i\in \overline{1,n}}$ existe una solución no trivial de $H\psi = z^2\psi$.

ii) Dado f de soporte compacto, existe una única solución para $H\psi - z^2\psi = f$ para cada $z \notin \{z_i\}_{i\in \overline{1,n}}$.

Demostración. Por la proposición 2.1, $L_V(z)$ es un operador compacto en

$$X = \{\psi \in L_{loc}(\mathbb{R}^+) \ : \ \int_0^\infty |\psi(x)|^2 \mu(x) dx < \infty\}$$

donde $\mu(x) = e^{-sx}$, $x > 0$.

i) Por el Teorema 2.0.2 existen frecuencias dispersivas z con $\mathrm{Im} z < 0$ y existe $\psi \in X$ que cumple:

$$L_V(z)\psi(x) = \psi(x) = \int_0^\infty \bar{K}(x, y, z) V(y) \psi(y) dy$$

Por lo tanto, ψ es solución de:

$$\begin{aligned} -\psi'' + V(x)\psi &= z^2\psi \\ \psi(0) &= 0 \\ \psi(x) &\to \alpha e^{izx}\ ,\ x \to \infty,\ \alpha \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Esto es, $H\psi = z^2\psi$.

ii) Supongamos que $z \notin \{z_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ (no son frecuencias dispersivas) y f de soporte compacto:

$$F(x) = \int_0^\infty \bar{K}(x,y,z)f(y)dy \in X$$

Por Teorema 2.0.2 existe una única solución ψ de $L_V(z)\psi - \psi = F$. Luego,

$$\psi(x) = \int_0^\infty \bar{K}(x,y,z)[V(y)\psi(y) - f(y)]dy$$

como $\bar{K} = -K$ se tiene que

$$\psi(x) = \int_0^\infty K(x,y,z)[f(y) - V(y)\psi(y)]dy$$

Luego ψ es solución del problema

$$\begin{aligned} -\psi'' - z^2\psi &= f - V\psi \\ \psi(0) &= 0 \\ \psi(x) \to \alpha e^{izx}, & \qquad x \to \infty,\ \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Esto es $H\psi - z^2\psi = f$.

Además, por Steinberg la solución $\psi = (H - z^2)^{-1}f$ es meromorfa con polos $\{z_i\}_{i\in\overline{1,n}}$.

□

A la resolvente construida anteriormente la llamaremos *Resolvente Saliente* y la denotaremos por $(H - z^2)^{-1}_{sal}$.

Capítulo 3

Convergencia de la resolvente saliente para potenciales de soporte no compacto

En este capítulo denotaremos por $\{V_n\}_n$ una sucesión de potenciales que satisfacen las propiedades siguientes:

A1) $|V_n(x)| \leq e^{-(2s+\frac{1}{n})x}$, con $s > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

A2) $\operatorname{sop} V_n(x) = [0, \infty)$

Estos potenciales V_n resultan ser funciones a valores reales, no negativos con $V_n \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty$, para cada n. Notemos que estos potenciales no son necesariamente de soporte compacto.

Definimos los correspondientes operadores autoadjuntos H_n y H_∞ por

$$\begin{aligned} H_n &= -\frac{d^2}{dx^n} + V_n(x), \\ H_\infty &= -\frac{d^2}{dx^2} + e^{-2sx}. \end{aligned}$$

El objetivo es probar que la resolvente saliente de H_n converge. Es decir,

$$(H_n - z^2)^{-1} \to (H_\infty - z^2)^{-1} \text{ en } L^2([0,R]).$$

El problema de autovalores para H_n, $H_n u = z^2 u$ con $z = \alpha - i\beta$ tiene sentido si aseguramos la existencia de frecuencias dispersivas. Es decir, pediremos que V_n satisfagan las condiciones del Teorema 2.0.1. En otras palabras los potenciales V_n cumplen que

P1) $|V_n(x)| \leq e^{-(2\beta+\frac{1}{n})x}$, con $s > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

P2) $\operatorname{sop} V_n(x) = [0, \infty)$

Para empezar necesitaremos unos resultados previos.

3.1. Resultados previos

Lema 3.1.1 (Poincaré $n = 1$) *Si $\psi \in \mathcal{H}'([0,R])$ tal que $\psi(0) = 0$ entonces*

$$\int_0^R |\psi(x)|^2 dx \leq 4R^2 \int_0^R |\psi'(x)|^2 dx$$

El siguiente resultado nos da una desigualdad a priori que satisface una solución de la ecuación de valores propios para H_V.

Lema 3.1.2 *Supongamos $V(x)$ es acotado con $\operatorname{sop} V(x) = [0,\infty)$ y $\psi(x)$ solución de*

$$\left.\begin{array}{rcll} -\psi'' + V(x)\psi & = & z^2\psi, & x > 0 \\ \psi(0) & = & 0 & \end{array}\right\} \quad (*)_1$$

Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $R > 0$ se tiene la desigualdad siguiente:

$$\int_0^R |\psi'(x)|^2 dx \leq \frac{|\psi'(0)|^2}{4R\,\|V - z^2\|_\infty} \left(e^{4R^2(\|V-z^2\|_\infty)} - 1\right)$$

Demostración. Sea ψ solución de $(*)_1$, luego satisface

$$\psi'' = V\psi - z^2\psi = (V - z^2)\psi.$$

Multiplicando por $\bar{\psi}'$ e integrando en $[0, x]$ con $x > 0$, se tiene que

$$\int_0^x \psi''\bar{\psi}' = \int_0^x (V - z^2)\psi\bar{\psi}'\,dy \ldots (*)_2$$

tomando parte real de la igualdad anterior y recordando que

$$\frac{d}{dx}|\psi'|^2 = 2\Re\psi''\bar{\psi}'$$

se obtiene que

$$|\psi'(x)|^2 - |\psi'(0)|^2 \leq \int_0^x |2Re(\psi''(y)\bar{\psi}'(y))|dy$$

De esta manera obtenemos que

$$|\psi'(x)|^2 - |\psi'(0)|^2 \leq 2\|V - z^2\|_\infty \int_0^x |\psi(y)|\,|\bar{\psi}'(y)|dy.$$

Sea $\alpha = \|V - z^2\|_\infty$. Aplicando Hölder inequality y la desigualdad de Poincaré,

$$|\psi'(x)|^2 \leq |\psi'(0)|^2 + 4\alpha R \int_0^x |\psi'(y)|^2 dy$$

De esta última desigualdad se concluye, aplicando la desigualdad de Gronwall que:

$$|\psi'(x)|^2 \leq |\psi'(0)|^2 e^{\int_0^x 4\alpha R dt} = |\psi'(0)|^2 e^{4\alpha R x} \quad , \forall\, x > 0.$$

Integrando en $[0, R]$ resulta que

$$\int_0^R |\psi'(x)|^2 dx \leq \frac{|\psi'(0)|^2}{4R\|V - z^2\|_\infty}\left(e^{4R^2\|V - z^2\|_\infty} - 1\right), \quad \forall\, R > 0.$$

finalizando la demostración. $\square$

Lema 3.1.3 *Supongamos $V(x)$ es acotado y sop $V(x) = [0, \infty)$. Entonces el siguiente problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} -\psi'' + V(x)\psi &= z^2\psi, \quad 0 < x \leq R \\ \psi(0) &= 0 \\ \psi'(0) &= 1 \end{aligned}$$

tiene una solución $\psi \in L^2([0, R])$.

Demostración. Usando el Lema 3.1.1 y Lema 3.1.2 tenemos que

$$\int_0^R |\psi(x)|^2 dx \leq 4R^2 \int_0^R |\psi'(x)|^2 dx \leq \frac{R}{\alpha}(e^{4\alpha R^2} - 1)$$

lo cual prueba que $\psi \in L^2([0, R])$. $\square$

Observemos que ambos lemas son aplicables a potenciales que satisfacen las condiciones $P1), P2)$. Más aún se tiene el siguiente resultado

Corolario 3.1.1 *Sea $\{V_n\}$ una sucesión de potenciales con la propiedad $P1), P2)$. Sea ψ_n la solución de*

$$\begin{aligned} -\psi'' + V_n\psi &= z^2\psi, \quad 0 < x \leq R \\ \psi(0) &= 0 \\ \psi'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Entonces $\psi_n \in L^2([0, R])$ y la sucesión $\{\psi_n\}_n$ es acotada en $L^2([0, R])$.

Demostración. Sea $\alpha_n = ||V_n - z^2||_\infty$. A partir del lema se obtiene que

$$||\psi_n||_2^2 \leq \frac{R}{\alpha_n}(e^{4\alpha_n R^2} - 1)$$

Es decir $\psi_n \in L^2([0, R))$. Además como $|V_n(x)| \leq e^{-2\beta x}$, se puede elegir una constante, independiente de n, que mayora a la parte derecha de la última desigualdad, con lo cual se obtiene que la sucesión $\{\psi_n\}_n$ es acotada en $L^2([0, R])$. $\square$

Además en [4] se demuestra el siguiente lema, también válido para potenciales V_n que satisfacen $P1)$ y $P2)$.

Lema 3.1.4 *Sea V_n satisfaciendo $P1), P2)$ y sea $V_\infty = e^{-2\beta x}$. Consideremos f_n, f funciones en $L^1([0, R])$ tal que $f_n \to f$ en casi todas partes. Supongamos que para cada n, ψ_n es una solución fuerte de:*

$$\begin{aligned} -\psi_n'' + V_n\psi_n - z^2\psi_n &= f_n, \quad 0 < x \leq R \\ \psi_n(0) &= 0 \end{aligned}$$

Supongamos además que ψ_n converge a una función ψ_∞ en casi todas partes de $[0,R]$. Entonces ψ_∞ es solución del problema

$$\begin{aligned} -\psi''_\infty + V_\infty\psi_\infty - z^2\psi_\infty &= f\,, \quad 0 < x \leq R \\ \psi_\infty(0) &= 0 \end{aligned}$$

La demostración es similar a la dada en [4]. También necesitamos el siguiente resultado.

Lema 3.1.5 *Supongamos para cada n, $\psi_{1,n}, \psi_{2,n}$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $-\psi''_n + V_n\psi_n - z^2\psi_n = 0$, $0 < x \leq R$ tal que $\psi_{1,n}(0) = 0$, $\psi'_{1,n}(0) = 1$, $\psi_{2,n}(0) = 1$.*

Sea f una función de soporte compacto contenido en $[0,M]$ y sea $\{c_n\}_n$ una sucesión de números reales tal que $c_n \to 0$. Consideremos la sucesión $\{\psi_n\}$ definida por:

$$\psi_n(x) = \frac{c_n}{W}\{\psi_{1,n}(x)\int_x^\infty \psi_{2,n}(s)f(s)ds + \psi_{2,n}(x)\int_0^x \psi_{1,n}(s)f(s)ds\} \qquad (3.1)$$

donde W es el Wronskiano de $\psi_{1,n}$ y $\psi_{2,n}$. Supongamos que la sucesión $\{\psi_n\}_n$ es acotada en $L^2([0,R])$.

Entonces la sucesión $\{\psi_n\}_n$ converge a la función nula.

Demostración. Por el método de variación de parámetros sabemos que cada ψ_n es solución de la ecuación

$$\begin{aligned} -\psi''_n + V_n\psi_n - z^2\psi_n &= c_n f \\ \psi_n(0) &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que $c_n f \to 0$; por Lema 3.1.4 la función ψ_∞ es solución del problema homogéneo

$$\begin{aligned} -\psi''_\infty + e^{-2\beta x}\psi_\infty - z^2\psi_\infty &= 0 \\ \psi_\infty(0) &= 0 \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\psi_n'(x) &= \frac{c_n}{W}\left\{\psi_{1,n}(x)\frac{\partial}{\partial x}\int_x^\infty \psi_{2,n}(s)f(s)ds + \psi_{1,n}'(x)\int_x^\infty \psi_{2,n}(s)f(s)ds + \right.\\ &\left. +\psi_{2,n}(x)\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \psi_{1,n}(s)f(s)ds + \psi_{2,n}'(x)\int_0^x \psi_{1,n}(s)f(s)ds\right\}\end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ y reemplazando las condiciones iniciales obtenemos

$$\psi_n'(0) = \frac{c_n}{W}\int_0^M \psi_{2,n}(s)f(s)ds, \tag{3.2}$$

Por hipótesis $\{\psi_n\}_n$ es una sucesión acotada en $L^2([0,R])$ y por Lema 3.1.3 $\{\psi_{1,n}\}_n$ es también acotada en $L^2([0,R])$. Luego resulta que $\{\psi_{2,n}\}_n$ es una sucesión acotada en $L^2([0,R])$.

Además f es de soporte compacto y $c_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por desigualdad de Hölder aplicada a (3.2) se obtiene que $\psi_\infty'(0) = 0$. Por unicidad de la solución , ψ_∞ debe ser la función nula. □

En lo que sigue asumiremos que z^2 no es una frecuencia dispersiva para $H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n$, donde $V_n(x) \leq e^{-(2\beta+\frac{1}{n})x}$, $s > 0$ y $\operatorname{sop} V_n(x) = [0,\infty)$.

Entonces es posible escoger $\psi_{1,n}$ como arriba, pero $\psi_{2,n}$ saliente, es decir:

$$\psi_{2,n}(x) = k_n e^{izx} \text{ para } x \to \infty$$

Para $f \in L^\infty$ con soporte compacto, notemos que si ψ_n es solución única de

$$\begin{aligned}-\psi_n'' + V_n\psi_n - z^2\psi_n &= f\\ \psi_n(0) &= 0\\ \psi_n & \quad \text{saliente}\end{aligned}$$

entonces $\psi_n(x)$ puede ser representado como en (3.1).

Lema 3.1.6 *Sea V_n los potenciales que satisfacen las condiciones $P1), P2)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por ψ_n la solución del siguiente problema:*

$$\begin{aligned}-\psi'' + V_n\psi - z^2\psi &= f\\ \psi(0) &= 0\\ \psi & \quad \textit{saliente}\end{aligned}$$

Entonces la sucesión $\{\psi_n\}_n$ es acotada en $L^2([0,R])$, para cada $R>0$.

Demostración. Supongamos que $\{\psi_n\}$ es no acotada, entonces existe una subsucesión que también llamaremos $\{\psi_n\}$ tal que $\|\psi_n\|_2 \geq n$. Sea $c_n = \frac{1}{1+\|\psi_n\|_2}$ y $\theta_n = c_n\psi_n$.

Observamos que

$$\|\theta_n\|_2 = \frac{1}{1+\|\psi_n\|_2}\,\|\psi_n\|_2 \leq 1,$$

Por lo tanto, θ_n es acotada en $L^2([0,R])$. Además, $\{\theta_n\}$ está en $H^2([0,R])$; en efecto,

$$\begin{aligned} -\psi_n'' + V_n\psi_n - z^2\psi_n &= f \\ -c_n\psi_n'' + V_n c_n\psi_n - z^2 c_n\psi_n &= c_n f \\ -\theta_n'' + V_n\theta_n - z^2\theta_n &= c_n f \end{aligned}$$

Despejando se obtiene que : $\theta_n'' = V_n\theta_n - z^2\theta_n - c_n f$. Puesto que V_n, θ_n y f son acotadas, θ_n'' es acotada en $L^2([0,R])$. Luego,

$$|\theta_n'| \leq \int_0^R |\theta_n''| \leq \|\theta_n''\|_{L^2}\sqrt{R} < K$$

donde K es una constante independiente de n. Es decir, θ_n' es acotada en $L^2([0,R])$. Así, $\{\theta_n\}$ está acotada en $H^2([0,R])$.

Como la inclusión $H^2([0,R]) \hookrightarrow H^1([0,R])$ es compacto, existe una subsucesión convergente que también denotaremos por $\{\theta_n\}$.

Por Lema 3.1.5, si $\theta_n \to \theta_\infty$ con $\theta_n \in H^1([0,R])$ entonces $\theta_\infty = 0$. Pero esto es imposible puesto que

$$\|\theta_\infty\| = \lim_{n\to\infty}\|c_n\psi_n\| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\|\psi_n\|}\,\|\psi_n\| = 1,$$

por lo que concluimos que $\{\psi_n\}$ es una sucesión acotada. □

Lema 3.1.7 *Sea $z=\alpha-i\beta$ con $\beta>0$. Entonces, para β suficientemente pequeño, existe una solución $u\in L^2(\mathbb{R}^+)$ del problema*

$$\begin{aligned} -u'' + e^{-2\beta x}u - z^2 u &= 0 \\ u(0) &= 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Demostración. Primero probaremos que si el problema tiene solución $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$ ella es única.

Sean $u_1, u_2 \in L^2(\mathbb{R}^+)$ soluciones de (3.3). Como el problema es lineal se tiene que $v = u_1 - u_2$ es una solución en $L^2(\mathbb{R}^+)$ que satisface $v(0) = 0$. Por otro lado, el operador $H_\infty u = -u'' + e^{-2\beta x}u$ es autoadjunto por lo visto en Capítulo 1 sección 3. Por lo tanto el problema de valores propios es consistente si y sólo si z es real. Como $\operatorname{Im} z \neq 0$ se obtiene que v debe ser identicamente nula.

Es claro que la solución debe satisfacer la ecuación integral siguiente:

$$u(x) = 1 + \int_0^x (x-y)(e^{-2\beta y} - z^2)u(y)\,dy \tag{3.4}$$

Puesto que $\int ye^{-2\beta y}\,dy < \infty$, para todo $x > 0$, la ecuación integral (3.4) tiene una única solución $u \in L^2(\mathbb{R}^+)$ por el Teorema de Dollard Friedman, [12]. $\square$

Lema 3.1.8 *Sea g una función de soporte compacto. Definamos $\psi(x)$ por*

$$\psi(x) = \frac{1}{W}\left[\psi_1(x)\int_x^\infty \psi_2(s)g(s)ds + \psi_2(x)\int_0^x \psi_1(s)g(s)ds\right] \tag{3.5}$$

donde W es el wronskiano de ψ_1, ψ_2 , soluciones de la ecuación homogénea $-\psi'' + e^{-2\beta x}\psi - z^2\psi = 0$, con $\psi_1(0) = 0$ y ψ_2 como en el Lema 3.1.7.

Entonces para $\beta > 0$, la función ψ es una solución en $L^2(\mathbb{R}^+)$ del problema

$$\begin{cases} -\psi'' + e^{-2\beta x}\psi - z^2\psi &= g \\ \psi(0) &= 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Demostración. Por el método de variación de parámetros $\psi(x)$ es solución del problema de valor inicial (3.6).

Por Lema 3.1.7, ψ_2 está en $L^2(\mathbb{R}^+)$. Como g tiene soporte compacto se tiene que para $x > R$, $\psi(x) = \frac{\psi_2(x)}{W}\int_0^R \psi_1(s)g(s)ds$. Es decir, para $x > R$, $|\psi(x)| = C|\psi_2(x)|$ y en consecuencia $\psi \in L^2(\mathbb{R}^+)$. $\square$

Ahora estamos en condiciones de explicitar el resultado más importante de nuestro trabajo.

Teorema 3.1.1 *Sea g una función con soporte compacto y $z \in \mathbb{C}$ no es una frecuencia dispersiva de $H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x)$ donde $V_n(x) \geq 0$, $V_n(x) \leq e^{-(2\beta+\frac{1}{n})x}$, $n \in \mathbb{N}$, y sea $\beta > 0$ con β suficientemente pequeño. Consideremos $H_\infty = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{-2\beta x}\chi_{[0,R]}$. Entonces*

$$(H_n - z^2)^{-1}_{sal} g \to (H_\infty - z^2)^{-1} g \quad en \quad L^2([0,R])$$

para cualquier $R > 0$.

Demostración. Sea $\psi_n = (H_n - z^2)^{-1}_{sal} g$ entonces ψ_n satisface

$$\begin{aligned} -\psi_n'' + V_n\psi_n - z^2\psi_n &= g \\ \psi_n(0) &= 0 \\ \psi_n(x) &\to \alpha e^{izx}, \quad x \to \infty\,, \alpha \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Sea $R > 0$ y $\{\psi_{nk}\}$ una subsucesión de $\{\psi_n\}$. Por Lema 3.1.6, ella está acotada en $L^2[0,R]$ y por lo tanto en $H^2([0,R])$.

Como la inclusión $H^2([0,R]) \hookrightarrow H^1([0,R])$ es compacta, existe una subsucesión $\{\phi_{nk_j}\}$ convergente. Es decir, existe $\psi_\infty \in H^1[0,R]$.

Probaremos que ψ_∞ es único. En efecto, por Lema 3.1.4 tenemos:

$$\begin{aligned} -\psi_\infty'' + e^{-2\beta x}\psi_\infty - z^2\psi_\infty &= 0 \\ \psi_\infty &= 0 \end{aligned}$$

donde por Lema 3.1.8, $\psi_\infty \in L^2(\mathbb{R}^+)$.

Sea $\{\psi_{nk_i}\}$ otra subsucesión de $\phi_{nk_i} \to h$. Aplicando un argumento similar obtenemos que h es solución de

$$\begin{aligned} -h'' + e^{-2\beta x}h - z^2 h &= 0 \\ h(0) &= 0 \end{aligned}$$

y $h \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Luego, restando

$$\begin{aligned} -(\psi_\infty - h)'' + e^{-2\beta x}(\psi_\infty - h) - z^2(\psi_\infty - h) &= 0 \\ (\psi_\infty - h)(0) &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $z^2 \in \sigma(H_\infty)$; pero el espectro de H_∞ es real, luego es una contradicción, la única manera que esto sea cierto es que, $\psi_\infty - h$ sea idénticamente cero y por lo tanto se tiene que $\psi_\infty = h$.

Es decir, toda subsucesión de $\{\varphi_n\}$ converge a φ_∞ de forma única y por ende, $\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi_\infty$ en $L^2([0, R])$, es decir,

$$(H_n - z^2)^{-1}_{sal} g \to (H_\infty - z^2)^{-1} g \text{ en } L^2([0, R]).$$

□

Este resultado generaliza, en cierto sentido, el resultado de convergencia de la resolvente saliente para barreras de potencial demostrado por P. Covian en [4] y por Covian et all [1].

El Teorema anterior implica que la resolvente saliente es estable respecto del espectro. La demostración es similar a la demostración dada en [4]. Es decir, se obtiene directamente que

Corolario 3.1.2 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ tal que*

$$H_\infty f = \lambda_0^2 f, \quad f(0) = 0$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $Imz_0 < 0$ tal que $H_n \psi = z_0^2 \psi$ tiene una solución saliente que satisface $\psi(0) = 0$, para n grande y $|\lambda_0^2 - z_0^2| < \epsilon$.

Por último, en [4] se demuestra que los estados resonantes de H_n también convergen a los vectores propios de H_∞. Sin modificación se puede aplicar el mismo resultado en nuestro contexto. Más precisamente,

Teorema 3.1.2 *Supongamos que $H_\infty f = \lambda_0^2 f$ tiene una solución no trivial $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ que satisface la condición de Dirichlet $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe una solución saliente no trivial ψ_n del problema*

$$\begin{aligned} H_n \psi_n &= z_n^2 \psi_n \\ \psi_n(0) &= 0 \end{aligned}$$

tal que $||\psi_n - f||_{L^2([0,R])} < \epsilon$.

Siguiendo las ideas de este trabajo es posible continuar con el problema siguiente:

Sea V_n una sucesión de potenciales satisfaciendo las hipótesis (**H**) de tal manera que el problema

$$\begin{aligned} -\psi'' + V_n(x)\psi &= z_n^2\psi, \quad 0 < x \leq R \\ \psi(0) &= 0 \\ \psi \text{ saliente} & \end{aligned}$$

tiene una solución no trivial, con $z_n = \lambda_n - i\epsilon_n$ con $\lambda_n \to \lambda_0$, $\epsilon_n \to 0$. El problema consiste en estimar el orden de decaimiento de $\epsilon_n \to 0$. Además para ϕ truncada y normalizada se espera probar que

$$\langle \phi, e^{-iH_n t}\phi \rangle \approx e^{-iz_n t}$$

cuando $t \to \infty$.

Bibliografía

[1] Astaburuaga M.A., Covian P., Fernández C., Behavior of the survival probability in some one dimensional problem, *J. Math. Phy.* **43**, (2002), No. 10, 4571-4581.

[2] Berezin F.A., Shubin M.A., The Schrödinger Equations. Kluwer Academic Publishers. Editorial Board 1991.

[3] Brezis H., Análisis Funcional, Editorial Alianza, 1983.

[4] Covian P., Acerca del Fenómeno de Resonancia en Problemas con Barrera de Potencial. Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, 1999.

[5] Sinha E., Quantizations in a non perturbative model. *J. Math. Phys.*, **20**:7, July 1999.

[6] Hislop P., Sigal J.M., Introduction to Spectral Theory with Applications to Schrödinger Operators. *Applied Math. Sciences*, **113**, Springer 1996.

[7] Kent, Quantum Mechanics. Springer, 2000.

[8] Kato I., Perturbations Theory for Linear Operators. Springer, Berlin 1966.

[9] Landau L.D., Lifshitz E.M. Quantum Mechanics. Pergamon Press, Oxford 1977.

[10] Lavine R., *Exponential Decay*, Differential Eqs. Math. Phys. Proceeding International Conferences, University of Alabama at Birmingham, March 13-17, 1994.

[11] Reed M., Simon B.. Methods of Modern Mathematical Physics I Functional Analysis. Academic Press, 1980.

[12] Reed M., Simon B.. Methods of Modern Mathematical Physics III Scattering Theory. Academic Press, 1979.

[13] Deift, P., Trubowitz, E., Inverse Scattering on the Line, *Comm. Pure Appl. Math.* **32**(1979), no.2, 121-251.