



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

AUSENCIA DE VALORES PROPIOS DENTRO DEL ESPECTRO DE DOS  
FAMILIAS DE OPERADORES

por

FELIPE ENRIQUE POBLETE GRANDÓN

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la  
Pontificia Universidad Católica de Chile como  
requisito para optar al grado de  
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas

Profesor Guía: Olivier Bourget - Pontificia Universidad Católica de Chile

Comisión Informante: María Angélica Astaburuaga Eguiguren y Rolando Aquiles  
Rebolledo Berroeta, Pontificia Universidad Católica de Chile

Mayo, 2010  
Santiago, Chile

## AGRADECIMIENTOS

El camino que he recorrido para terminar este trabajo, ha sido extenso y no hubiera sido posible sin la ayuda, de todas aquellas personas que me apoyaron tanto académica como personalmente. En lo académico siempre tuve al apoyo incondicional de mi profesor tutor Olivier Bourget, quién dedico tiempo y trabajo para que esta tesis llegara a buen puerto, atendiendo a todas mis preguntas y guiándome en el objetivo central para el término de esta tesis. También debo agradecer a los profesores María Angélica Astaburuaga Eguiguren y Rolando Aquiles Rebolledo Berroeta por aceptar leer mi tesis dado el tiempo que significa esto.

A María Magdalena Grandón Grandón, mi madre, quien desde pequeño me ha inculcado lo importante que es la educación para ser una mejor persona, me ha dado mucho amor y ánimo para seguir adelante en todo mi transcurso académico, creo sinceramente si no fuera por ella jamás hubiese llegado a este punto de mi vida. Gracias por ser como eres.

A Isidro Enrique Poblete Flores, mi padre, quien me enseñó la perseverancia, me dio su apoyo incondicional siempre que lo necesité, aún lo hace, te agradezco haberme educado como una persona integra y preocupada de las personas que me rodean.

A Macarena Loreto Carter Aliante quién me ha acompañado incondicionalmente hasta hoy dándome todo su amor, apoyo, ánimo y preocupándose por mi bienestar, ha sido testigo de mis fracasos y éxitos alegrías y tristezas. Agradezco que me hayas acompañado hasta este punto, por mi parte espero acompañarte toda la vida

A mis amigos por entender lo que significa estudiar matemáticas, en especial a Vania Ramirez y Danilo Navarrete por las largas charlas que compartimos, no solo de matemáticas, sino de la vida misma.

---

# Índice general

<b>1. Introducción a los modelos</b>	<b>4</b>
1.1. Modelo tipo Anderson 1-D . . . . .	5
1.1.1. Algunas propiedades . . . . .	6
1.1.2. Resultado central . . . . .	7
1.1.3. Estrategia de trabajo . . . . .	7
1.2. Modelo de Blatter-Browne . . . . .	10
1.2.1. Resultados principales . . . . .	11
1.2.2. Estrategia de trabajo . . . . .	12
<b>2. El modelo autoadjunto</b>	<b>14</b>
2.1. Matrices de transferencia . . . . .	14
2.2. Cotas superiores de $\ \widetilde{M}_n\ $ . . . . .	17
2.2.1. Lemas preparatorios . . . . .	19
2.2.2. Demostración Teorema 2.2.1 . . . . .	24
2.2.3. Demostración Corolario 2.2.2 . . . . .	27
2.3. Demostración de los Teoremas 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 . . . . .	28
2.3.1. Demostración del Teorema 1.1.1 . . . . .	28
2.3.2. Demostración del Teorema 1.1.2 . . . . .	29
2.3.3. Demostración del Teorema 1.1.3 . . . . .	29
<b>3. Familia Unitaria de operadores</b>	<b>30</b>
3.1. Matriz de transferencia para el operador Unitario $U$ . . . . .	30
3.2. Cotas superiores de $\ \widetilde{H}_k\ $ . . . . .	33
3.2.1. Demostración Teorema 1.2.1 . . . . .	35
3.2.2. Demostración Teorema 1.2.2 . . . . .	35
<b>A.</b>	<b>39</b>
A.1. Demostración desigualdad 2.2.8 . . . . .	39
A.2. Lema A.2 . . . . .	40

---

## CAPÍTULO 1

---

# Introducción a los modelos

La investigación sobre la naturaleza del espectro de un operador auto-adjunto o unitario, proporciona información sobre la estabilidad del sistema cuántico que describe (ver [4] y [11] ).

Este trabajo trata sobre algunas propiedades espectrales, de dos familias de operadores que actúan sobre  $l^2(\mathbb{Z})$ . La primera que se introducirá será la de operadores auto-adjuntos aleatorios, denotados por  $H$  [1]. La segunda familia será de operadores unitarios, introducida en las primeras páginas de [2], modelos similares han sido profundizados en [5], [6] [7].

En esta tesis evidenciaremos algunos criterios, sobre los parámetros descriptivos de esos modelos, para excluir la posibilidad de existencia de valores propios, en el espectro o parte de éste, de los operadores involucrados. Para esto introducimos la noción de vector propio generalizado correspondiente al valor propio o energía  $E$ , es decir, una sucesión de números complejos  $\psi = (\psi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , que satisface formalmente que  $H\psi = E\psi$ ,  $U\psi = e^{iE}\psi$ .

La representación matricial sobre la base estándar de ambos operadores es una representación en diagonales (matrices de banda), esto nos permitirá cuando tenemos un vector propio generalizado, encontrar relaciones entre las coordenadas, dada por unas matrices de  $2 \times 2$ , que llamaremos matrices de transferencia. Estas matrices nos darán cotas sobre  $|\psi(n)|^2 + |\psi(n+1)|^2$ , con la cual podremos descartar el hecho de que el vector generalizado  $\psi$  está en  $l^2(\mathbb{Z})$

## 1.1. Modelo tipo Anderson 1-D

Para definir nuestro modelo inicial, primero construiremos el espacio de probabilidad  $(\mu, \sigma, \Omega)$  sobre el cual trabajaremos. Considere  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$  variables aleatorias definidas sobre el espacio de probabilidad  $(\mu_0, \sigma_0, \Omega_0)$ , idénticamente independientes y distribuidas, con densidad de probabilidad  $r(V)$  y esperanza cero. Con estas variables aleatorias construimos el espacio de probabilidad  $(\mu, \sigma, \Omega)$ , donde  $\Omega = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \Omega_0$ , y  $\mu$  la medida producto sobre el sigma algebra generada por los conjuntos de la forma  $\prod \Omega_i$ , donde  $\Omega_i$  son  $(\sigma_0)$ -medibles y  $\Omega_i = \Omega_0$  salvo finitos índices.

Así dado  $\omega \in \Omega$  asociamos el operador  $K$ , definido inicialmente, sobre el conjunto de sucesiones en  $\ell^2(\mathbb{Z})$  con soporte finito, por:

$$(K(\omega)\psi)(n) = \lambda a_n V_n(\omega)\psi(n) \quad (1.1.1)$$

donde  $V_n(\omega) = V_n(\omega_n)$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Por otra parte definimos el operador  $-\Delta$ , sobre  $\ell^2(\mathbb{Z})$  como  $(-\Delta\psi)(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1)$ .

De esta forma, teniendo definido los operadores  $K$  y  $-\Delta$  construimos nuestra familia de operadores auto-adjuntos  $H$  que actúan sobre  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (H(\omega)\psi)(n) &= (-\Delta\psi)(n) + (K(\omega)\psi)(n) \\ (H(\omega)\psi)(n) &= \psi(n+1) + \psi(n-1) + \lambda a_n V_n(\omega)\psi(n) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Así dado  $\omega \in \Omega$  asociamos el operador  $H(\omega)$  descrito en 1.1.2.

La sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  cumple que, existen  $N \in \mathbb{N}$  y  $C_1, C_2 > 0$  tal que si  $|n| \geq N$  entonces,

$$C_1|n|^{-\alpha} \leq |a_n| \leq C_2|n|^{-\alpha}, \quad n \neq 0. \quad (1.1.3)$$

En lo que sigue supondremos las siguientes condiciones:

$$\|r\|_\infty < \infty \quad (1.1.4)$$

$$q := \sup\{z > 0 : \mathbb{E}(|V|^z) < \infty\} > 0 \quad (1.1.5)$$

**1.1.1. Algunas propiedades**

El operador de multiplicación  $K$ , no necesariamente es acotado, pues a pesar de que  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  tiene un decaimiento a cero, cuando  $|n|$  tiende a infinito, la sucesión  $(V(\omega_n))_{n \in \mathbb{Z}}$  puede no ser acotada.

Si  $A = \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{Z} V_n(\omega) < \infty\}$  entonces  $A$  es un conjunto con probabilidad uno y el operador  $H(\omega)$  para todo  $\omega$  en  $A$ , induce un operador auto-adjunto. Para verificar lo anterior,  $K$  por ser un operador diagonal de coeficientes reales es un operador esencialmente autoadjunto sobre  $D(K)$ . [8] pag. 257. Para esto vemos que si

$$D(K) = \{a \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \exists N \in \mathbb{N} a_n = 0 \text{ si } |n| \geq N\}$$

entonces  $Ran(K \pm i)$  es denso en  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Esto sucede pues dado  $(c(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , consideramos  $b = (b(n))_{n \in \mathbb{N}}$ , con

$$b(n) = \chi_{[-n, n]}(\lambda a_n V_n(\omega) \pm i)^{-1} c(n),$$

donde  $\chi$  es la función característica sobre el intervalo  $[-n, n]$ ,  $b$  es bien definido, debido a que  $\lambda a_n V_n$  es un número real, luego

$$(K(b) \pm i)(n) = \chi_{[-n, n]} c(n).$$

Esto prueba que  $\overline{Ran(K \pm i)} = \ell^2(\mathbb{Z})$ . Así probamos que con probabilidad uno  $K$  es auto-adjunto, luego  $H$  también.

La representación matricial sobre la base estándar de  $H(\omega)$  es una matriz tridiagonal.

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & 0 & & & & \\ \ddots & * & * & 0 & & & \\ 0 & * & * & * & 0 & & \\ & 0 & * & * & * & 0 & \\ & & 0 & * & * & \ddots & \\ & & & 0 & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

Esta estructura matricial nos permitirá relacionar las coordenadas de un vector propio generalizado, a través de matrices de  $2 \times 2$  que llamaremos matrices de transferencia.

El principal tema a estudiar son algunas propiedades del espectro de la familia  $H$  en dos casos, uno cuando  $\alpha = 1/2$  y el otro cuando  $\alpha > 1/2$ .

### 1.1.2. Resultado central

El teorema central para la familia  $H$  es sobre la localización del espectro continuo o parte de él, para el caso  $\alpha = 1/2$ . Las herramientas usadas para este caso, serán aplicadas al modelo unitario para obtener información sobre el espectro de la familia de operadores  $U$ .

**Teorema 1.1.1.** *Si  $\alpha = 1/2$ ,  $q > 2$  para cada compacto  $\kappa$  contenido en  $(-2, 2)$  existe  $\lambda(\kappa)$  tal que para todo  $\lambda < \lambda(\kappa)$ , entonces el espectro de  $H$  es puramente continuo en  $\kappa$ .*

Para esto probaremos dos cosas con probabilidad uno, la primera es que  $\sigma(H) \supseteq (-2, 2)$  y la segunda, es que bajo las condiciones del teorema anterior, no existen vectores propios, asociados a las energías  $E \in \kappa$ . Otros resultados que también obtendremos serán:

**Teorema 1.1.2.** *Si  $\alpha > 1/2$  y  $q > 2$ , el espectro de  $H$  contenido en  $[-2, 2]$  es puramente continuo.*

**Teorema 1.1.3.** *Si  $\alpha q > 1$ , el espectro esencial de  $H$  es  $[-2, 2]$*

Aquí veremos que bajo la hipótesis de que  $\alpha q > 1$  con probabilidad uno, la sucesión  $\lambda a_n V_n(\omega)$  tiende a cero cuando  $|n|$  tiende al infinito. Así asegurar que  $K$  es un operador compacto. Luego poder concluir, por el teorema de “Weyl” [9], pag. 142, que  $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [-2, 2]$ .

### 1.1.3. Estrategia de trabajo

El teorema 1.1.1 lo demostraremos en 3 pasos resumidos a continuación:

1. Considerar un vector propio generalizado  $\psi \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ , asociado al valor propio generalizado  $E \in [-2, 2]$  esto es :

$$\psi(n+1) + \psi(n-1) + \lambda a_n V_n(\omega) \psi(n) = E \psi(n)$$

esta ecuación permite definir las matrices de transferencia como sigue:

$$\begin{pmatrix} E - \lambda a_n V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y tienen la propiedad de que

$$\begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - \lambda a_n V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(n) \\ \psi(n-1) \end{pmatrix}.$$

Así dada una condición inicial  $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}$  podemos construir un vector propio generalizado y viceversa.

Con esto asociamos al vector generalizado  $\psi$ ,  $g_n = |\psi(n)|^2 + |\psi(n+1)|^2$  que es lo que nos interesa estudiar (encontrar cotas adecuadas). Aquí no trabajaremos directamente con las matrices de transferencia, sino con otras matrices que se definirán más adelante (2.1.8) y que nos permitirán controlar  $g_n$ , de esta manera obtener información sobre la norma de  $\psi$  en  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

Ahora para todo  $n \in \mathbb{Z}$  dado el vector  $\begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{pmatrix}$  en  $\mathbb{C}^2$ , construiremos vectores  $\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$  en  $\mathbb{C}^2$  y matrices  $M_n$ , de manera que  $g_n$  sea equivalente (asintóticamente) a  $\left\| \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} \right\|^2$  y

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}, \quad (1.1.6)$$

donde  $M_n$  es una matriz de  $2 \times 2$ , con la propiedad que  $\det M_n = 1$ , dependiendo de  $E$ ,  $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  y  $\lambda$ .

Observamos que de lo anterior:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} &= M_n M_{n-1} \cdots M_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \widetilde{M}_n \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_{-n+1} \\ B_{-n+1} \end{pmatrix} &= M_{-n}^{-1} M_{-n-1}^{-1} \cdots M_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \widetilde{M}_{-n} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

y que dado que el  $\det \widetilde{M}_n = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \|\widetilde{M}_n\| \|U_1\| &\geq \|U_{n+1}\| \geq \|\widetilde{M}_n\|^{-1} \|U_1\| \\ \|\widetilde{M}_{-n}\| \|U_0\| &\geq \|U_{-n}\| \geq \|\widetilde{M}_{-n}\|^{-1} \|U_0\| \end{aligned} \quad (1.1.7)$$



Donde  $U_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$ . Esto nos permitirá controlar la norma de  $U_n$  a través de la norma de  $\widetilde{M}_n$  y así controlar  $g_n$

2. Un paso fundamental es acotar superiormente, la variable aleatoria  $\|\widetilde{M}_n\|$  de la siguiente manera, para todo  $\epsilon$

$$\|\widetilde{M}_n\| \leq \sigma_\epsilon(\omega) f(E, n, \lambda, \epsilon, q)$$

donde  $\sigma_\epsilon$  es una variable aleatoria casi-seguramente finita. Esto con el fin de obtener una cota superior e inferior de  $g_n$ , para ser más específico cuando  $\alpha = 1/2$

$$f(E, n, \lambda, \epsilon) = C_1 n^{C_2(\mathbb{E}(\mathbb{V}^2) + \mathbb{E}(\mathbb{V}^q)) \lambda^2 (4 - E^2)^{-1}} n^{\epsilon C_q + (1 + q/2)^{-1}} \quad (1.1.8)$$

Donde  $C_1, C_2, C_q$  son constantes positivas y  $q$  es mayor que 2

3. Concluir teorema 1.1.1. Para esto a grandes rasgos lo que haremos será. Primero, dada una condición inicial  $U_0 \in \mathbb{C}^2$  y una energía  $E$  dada en  $(-2, 2)$  podremos construir, con probabilidad uno, un vector propio generalizado asociado a la energía  $E$  y viceversa, polinomialmente acotado, luego por el Teorema de “Sh’ nol” [3], concluir que  $\sigma(H) \supseteq (-2, 2)$ .

Segundo, dado un compacto  $\kappa \subseteq (-2, 2)$  y un vector propio generalizado asociado al valor  $E$  en  $\kappa$ , podremos elegir  $\lambda$  y  $\epsilon$  de manera que:

$$f^2(E, n, \lambda, \epsilon, q) \leq n$$

así demostrar que

$$g_n \geq D_2 \sigma_\epsilon^{-2}(\omega) n^{-1} \|U_0\|^{-2}$$

luego casi-seguramente

$$\sum_{n=0}^N g_n \geq D_2 \sigma_\epsilon^{-2}(\omega) \|U_0\|^{-2} \sum_{n=0}^N n^{-1}$$

que diverge cuando  $N$  tiende al infinito, esto muestra que no pueden existir vectores propios asociados a valores propios en  $\kappa$ .

## 1.2. Modelo de Blatter-Browne

Para este apartado tomaremos un modelo trabajado en [2] con algunas modificaciones, que comparte algunos rasgos con el modelo autoadjunto, como la representación canónica en matrices en banda y la relación entre los coeficientes de un vector generalizado, a través de unas matrices de transferencia.

Nuestros operadores unitarios actúan sobre  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Para definir nuestros operadores unitarios, consideramos la base canónica  $\phi_k \in \ell^2(\mathbb{Z})$  y tendremos en cuenta las siguientes matrices de 2x2, que dependen de  $r_k, t_k, \theta_k$ :

$$S_k = e^{-i\theta_k} \begin{pmatrix} r_k & it_k \\ it_k & r_k \end{pmatrix}$$

aquí  $\theta_k \in [0, 2\pi]$  y  $r_k^2 + t_k^2 = 1$ .

Ahora considere  $P_j$  el proyector ortogonal sobre el espacio generado por  $\phi_j, \phi_{j+1} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ . Introducimos  $U_e, U_o$  dos operadores unitarios diagonales por bloques de 2x2 sobre  $\ell^2(\mathbb{Z})$  definidos por:

$$U_e = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_{2k} S_{2k} P_{2k} \quad (1.2.1)$$

$$U_o = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_{2k+1} S_{2k+1} P_{2k+1} \quad (1.2.2)$$

Para construir  $U$  tendremos en cuenta las siguientes hipótesis sobre  $t_k, r_k$ .

$$t_k = 1 - \lambda a_k \quad (1.2.3)$$

Con  $\lambda, a_k \in [0, 1]$ ,  $r_k$  se define como la solución positiva de la relación  $r_k^2 + t_k^2 = 1$ , aquí  $a_k$  tiene un comportamiento asintótico del orden  $|k|^{-\alpha}$  con esto definimos  $U$  como

$$U = U_o U_e \quad (1.2.4)$$

luego para cada  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 U\phi_{2k} &= ir_{2k}t_{2k-1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k-1})}\phi_{2k-1} \\
 &\quad + r_{2k}t_{2k-1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k-1})}\phi_{2k} \\
 &\quad + ir_{2k+1}t_{2k}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})}\phi_{2k+1} \\
 &\quad - t_{2k}t_{2k+1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k+1})}\phi_{2k+2} \\
 U\phi_{2k+1} &= -t_{2k}t_{2k-1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k-1})}\phi_{2k-1} \\
 &\quad + ir_{2k-1}t_{2k}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k-1})}\phi_{2k} \\
 &\quad + r_{2k}r_{2k+1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k-1})}\phi_{2k+1} \\
 &\quad + ir_{2k}t_{2k+1}e^{-i(\theta_{2k}+\theta_{2k-1})}\phi_{2k+2}
 \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Con respecto a la forma de la matriz resultante, obtenemos una matriz con la siguiente estructura:

$$\left( \begin{array}{cccccccc}
 \ddots & & & & & & & \\
 * & * & * & * & & & & \\
 * & * & * & * & & & & \\
 & & * & * & * & * & & \\
 & & * & * & * & * & & \\
 & & & & * & * & * & * \\
 & & & & * & * & * & * \\
 & & & & & & * & * & * & * \\
 & & & & & & * & * & * & * \\
 & & & & & & & & \ddots & 
 \end{array} \right) \tag{1.2.6}$$

Ya definida la familia de operadores  $U$ , enunciaremos el resultado central para esta familia de operadores:

### 1.2.1. Resultados principales

**Teorema 1.2.1.** *si  $\alpha \geq 1$   $\sigma(U) = S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$*

**Teorema 1.2.2.** *Si  $\alpha > 1$  para todo  $\lambda \in (0, 1]$ , el operador  $U_\lambda$  no tiene vectores propios.*

*Si  $\alpha = 1$ , existe  $\lambda_0$  tal que para todo  $\lambda \leq \lambda_0$  el operador  $U_\lambda$ , no tiene vectores propios.*

Para la demostración de este teorema usaremos un esquema muy similar al de la familia auto-adjunta. La estrategia a seguir para este resultado es la siguiente:

### 1.2.2. Estrategia de trabajo

El teorema 1.2.2 lo demostraremos en 3 pasos resumidos a continuación.

1. Considerar un vector propio generalizado  $\psi \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  ( $U\psi = e^{iE}\psi$ ), asociado al valor propio generalizado  $e^{iE}$ ,  $E \in [0, 2\pi]$  y tener en cuenta las matrices de transferencia  $B_n$  [2], que relacionan las coordenadas de  $\psi$  por:

$$\begin{pmatrix} \psi_{2n} \\ \psi_{2n+1} \end{pmatrix} = B_{n,E} \begin{pmatrix} \psi_{2n-2} \\ \psi_{2n-1} \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$\begin{pmatrix} \psi_{2n} \\ \psi_{2n+1} \end{pmatrix} = B_{n,E} B_{n-1,E} \cdots B_{1,E} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{-2n-2} \\ \psi_{-2n-1} \end{pmatrix} = B_{-n+1,E}^{-1} B_{-n,E}^{-1} \cdots B_{0,E}^{-1} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}.$$

Con esto definimos  $g_n = |\psi(2n)|^2 + |\psi(2n+1)|^2$ . Para controlar esta expresión utilizaremos matrices  $\tilde{H}_n$  de 2x2, tal que  $\det \tilde{H}_n = 1$ , y que cumplan las siguientes desigualdades

$$C_1 \|\tilde{H}_n\| \|U_0\| \geq \|U_n\| \geq C_2 \|\tilde{H}_n\|^{-1} \|U_0\| \quad (1.2.7)$$

donde  $U_n = \begin{pmatrix} \psi_{2n} \\ \psi_{2n+1} \end{pmatrix}$

2. Acotar superiormente  $\forall n, \in \mathbb{Z} \|\tilde{H}_n\|$  de la siguiente manera

$$\|\tilde{H}_n\|^2 \leq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\lambda}{|2k|^\alpha} K\right)$$

3. Concluir de la misma manera como en el modelo auto-adjunto.

**Observación 1.2.3.** Si miramos el caso auto-adjunto para  $\alpha > 1/2$  obtenemos espectro puramente continuo, pero para el caso unitario sólo se asegura espectro puramente continuo para el caso  $\alpha > 1$ . Si bien, es una condición más fuerte que el caso a.a, para la demostración de ésta no es necesario considerar ningún parámetro aleatorio, como se considera en el modelo original [2].

## El modelo autoadjunto

Ahora daremos los detalles de cómo demostrar el teorema 1.1.1 siguiendo lo expuesto en 1.1.3.

### 2.1. Vectores propios generalizados y matrices de transferencia

En este apartado nos centraremos en ver con detalle lo expuesto en el paso uno de 1.1.3.

**Definición 2.1.1.** Dada una sucesión  $\psi \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  y un número  $E \in \mathbb{R}$ , diremos que  $\psi$  es un vector generalizado de  $H := H(\lambda, \omega, (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (V_n)_{n \in \mathbb{Z}})$ , asociado al valor propio generalizado o energía  $E$ , si

$$H\psi = E\psi. \quad (2.1.1)$$

Asociaremos al vector  $\psi$  la sucesión  $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ :

$$g_n = \left\| \begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{pmatrix} \right\|^2 = |\psi(n)|^2 + |\psi(n+1)|^2. \quad (2.1.2)$$

Recordemos que nuestro objetivo será encontrar una cota superior e inferior de  $g_n$ , para esto veremos como construir el vector  $U_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$  descrito en 1.1.3.

Sean  $\phi_+(n) = \cos(kn)$  y  $\phi_-(n) = \sin(kn)$ . Estas sucesiones  $\phi_{\pm}$  son soluciones de  $\phi(n+1) + \phi(n-1) = E\phi(n)$ , con  $E = 2\cos(k)$ ,  $k \in [0, 2\pi]$ .

Ahora teniendo en cuenta lo anterior para cada  $n$  en  $\mathbb{Z}$  se define  $U_n$ , por la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} \psi(n) \\ \psi(n-1) \end{pmatrix} = K_n U_n \quad (2.1.3)$$

donde la matriz  $K_n$  esta dada por:

$$K_n = \begin{pmatrix} \phi_+(n) & \phi_-(n) \\ \phi_+(n-1) & \phi_-(n-1) \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

y tiene las propiedades siguientes,  $\text{tr}(K_n^t K_n) \leq 4$  y  $\det(K_n^t K_n) = \sin^2(k)$ . Con estas propiedades podemos concluir que el menor autovalor de esta matriz  $K_n$  es al menos  $\frac{\sin^2(k)}{4}$ .

**Lema 2.1.2.** *Los autovalores de la matriz de  $2 \times 2$   $K_n^t K_n$ , son mayores que  $\frac{\sin^2(k)}{4}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $\lambda_1, \lambda_2$  los valores propios de  $K_n^t K_n$ . Primero sabemos que la matriz es definida positiva pues

$$\langle K_n^t K_n U, U \rangle = \|K_n U\|^2 \geq 0$$

luego sus valores propios son positivos. Ahora teniendo en cuenta las siguientes relaciones,  $\lambda_1 \lambda_2 = \det(K_n^t K_n)$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(K_n^t K_n)$  obtenemos

$$\lambda_1 = \frac{\det(K_n^t K_n)}{\lambda_2} = \frac{\det(K_n^t K_n)}{\text{tr}(K_n^t K_n) - \lambda_1} \geq \frac{\det(K_n^t K_n)}{\text{tr}(K_n^t K_n)} \geq \frac{\sin^2(k)}{4}$$

de igual manera para  $\lambda_2$ .

□

Del lema anterior y 2.1.3 obtenemos que

$$16(A_n^2 + B_n^2) \geq g_n \geq \frac{\sin^2(k)}{4}(A_n^2 + B_n^2), \quad (2.1.5)$$

así estudiaremos el comportamiento asintótico de  $g_n$  a través del comportamiento asintótico de la norma de  $U_n$ .

Ahora considere las siguientes matrices

$$M_n = I + \frac{\lambda a_n V_n}{\sin(k)} \begin{pmatrix} \phi_+(n)\phi_-(n) & \phi_-^2(n) \\ -\phi_+^2(n) & -\phi_+(n)\phi_-(n) \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

estas matrices verifican que:

$$U_{n+1} = M_n U_n \quad (2.1.7)$$

$$M_n = I + a_n \mathcal{V}_n T_n. \quad (2.1.8)$$

donde

$$T_n = \begin{pmatrix} \phi_+(n)\phi_-(n) & \phi_-^2(n) \\ -\phi_+^2(n) & -\phi_+(n)\phi_-(n) \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

$$\mathcal{V}_n = \frac{\lambda V_n}{\sin(k)}. \quad (2.1.10)$$

Un hecho importante a tener en cuenta, que usaremos más adelante en 2.2, es que las matrices  $T_n$  son uniformemente acotadas en norma sobre el parámetro  $n$ , debido a que las coordenadas de la matriz  $T_n$  están en función de  $\phi_{\pm}$  que son acotados por uno. Por otra parte

$$\text{tr}(T_n) = \det(T_n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.1.11)$$

luego se concluye que  $\det(M_n) = 1$ .

Ahora si definimos

$$\widetilde{M}_n = M_n M_{n-1} \cdots M_1, \quad n \in \mathbb{N}$$

y

$$\widetilde{M}_{-n} = M_{-n} M_{-(n-1)} \cdots M_{-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

también obtenemos que  $\det(\widetilde{M}_n) = 1$ . Además iterando la relación dada en 2.1.7 obtenemos la relación expuesta en 1.1.3

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = M_n M_{n-1} \cdots M_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \widetilde{M}_n \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{-n} \\ B_{-n} \end{pmatrix} = M_{-n}^{-1} M_{-(n-1)}^{-1} \cdots M_{-1}^{-1} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \widetilde{M}_{-n}^{-1} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}.$$

Para obtener información sobre el comportamiento asintótico de  $\|U_n\|^2$ , será suficiente acotar superiormente en norma la matriz  $\widetilde{M}_n$ , de hecho tenemos



que para todo  $n$  en  $\mathbb{Z}$ ,  $\widetilde{M}_n$  es una matriz de  $2 \times 2$  con determinante uno, así  $\|\widetilde{M}_n^{-1}\| = \|\widetilde{M}_n\|$ . Ahora para  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|U_{n+1}\| &\geq \|\widetilde{M}_n^{-1}\|^{-1} \|U_1\| \\ &= \|\widetilde{M}_n\|^{-1} \|U_1\| \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

por otra parte

$$\|U_{n+1}\| \leq \|\widetilde{M}_n\| \|U_1\|$$

así

$$\|\widetilde{M}_n\| \|U_1\| \geq \|U_{n+1}\| \geq \|\widetilde{M}_n\|^{-1} \|U_1\| \quad (2.1.13)$$

de manera similar

$$\|\widetilde{M}_{-n}\| \|U_0\| \geq \|U_{-n}\| \geq \|\widetilde{M}_{-n}\|^{-1} \|U_0\| \quad (2.1.14)$$

esta última ecuación nos permite controlar  $\|U_{n+1}\|$  y  $\|U_{-n}\|$  a través de  $\|\widetilde{M}_n\|$  y  $\|\widetilde{M}_{-n}\|$  respectivamente, luego nuestro objetivo de aquí en adelante es acotar superiormente, con probabilidad uno, la variable aleatoria  $\|\widetilde{M}_n\|$  para  $n$  en  $\mathbb{Z}$ .

## 2.2. Cotas superiores de $\|\widetilde{M}_n\|$

En esta sección acotaremos la variable aleatoria  $\|\widetilde{M}_n\|$  para  $n \in \mathbb{Z}$ . Primero supondremos que  $n \in \mathbb{N}$  y definiremos una variable aleatoria de la siguiente manera, dado un vector  $U_1 \in \mathbb{R}^2$  de norma uno,

$$X_n = \|U_{n+1}\| = \|\widetilde{M}_n U_1\| \quad (2.2.1)$$

$X_n$  es una variable aleatoria que depende de las variables aleatorias  $\{\mathcal{V}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  definidas en 2.1.10. Y en lo que sigue denotaremos  $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})$  la esperanza condicional de  $X_n$  dado  $\{\mathcal{V}_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$ , donde  $\mathcal{F}_n$  es el  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{\mathcal{V}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ .  $X_n$  es  $\mathcal{F}_n$  medible y  $\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})$  es la esperanza condicional de  $X_n$  con respecto a  $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$ .

Antes de continuar enunciaremos el teorema que proporciona una cota superior a  $\|\widetilde{M}_n\|$ .

**Teorema 2.2.1.** Si  $E(|V|^q) < \infty$  para algún  $q > 2$ , y si  $\forall n \in \mathbb{N}$   
 $\forall E, E' \in [a, b]$

$$\|T_n(E)\| \leq T \quad (2.2.2)$$

$$\|T_n(E) - T_n(E')\| \leq T' n^\beta |E - E'| \quad (2.2.3)$$

entonces para todo  $\epsilon > 0$ , existe una variable aleatoria  $\tau_\epsilon(\omega)$ , casi-seguramente finita, tal que:  $\forall E \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$

$$\|\widetilde{M}_n(E)\| \leq \tau_\epsilon(\omega) \max(c_n^{\frac{1}{2}}, d_n^{\frac{1}{2}}) n^{\beta(1+\epsilon q/2)(1+q/2)^{-1}}$$

donde  $\widetilde{c}_n$  y  $\widetilde{d}_n$  son números positivos y

$$\widetilde{c}_n = \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{D_{1,q}}{i^{2\alpha}} (\mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q)) \right) \quad (2.2.4)$$

$$\widetilde{d}_n = \prod_{i=1}^n \left( 1 + \frac{D_{2,q}}{i^{2\alpha}} (\mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q)) \right). \quad (2.2.5)$$

**Corolario 2.2.2.** Dada las hipótesis del teorema anterior, para todo  $\epsilon > 0$   
 Si  $\alpha = 1/2$  entonces

$$\|\widetilde{M}_n(E)\| \leq \tau_\epsilon(\omega) K n^{C_q(\mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q)) + \beta(1+\epsilon q/2)(1+\frac{q}{2})^{-1}}$$

si  $\alpha > 1/2$  entonces

$$\|\widetilde{M}_n(E)\| \leq \tau_\epsilon(\omega) K_\epsilon n^{\epsilon + \beta(1+\epsilon q/2)(1+\frac{q}{2})^{-1}}$$

**Observación 2.2.3.** Recordemos que

$$T_n = \begin{pmatrix} \phi_+(n)\phi_-(n) & \phi_-^2(n) \\ -\phi_+^2(n) & -\phi_+(n)\phi_-(n) \end{pmatrix}$$

donde  $\phi_+(n) = \cos(kn)$  y  $\phi_-(n) = \sin(kn)$  y  $E = 2\cos(k)$ . Con esto la hipótesis 2.2.2 del teorema se cumple para todo  $n \in \mathbb{N}$  y la hipótesis 2.2.3 se cumple para  $\beta = 1$ .

Si bien el teorema es válido sobre  $n \in \mathbb{N}$ , podemos extenderla para encontrar una cota igual para  $\|\widetilde{M}_{-n}\|$  para esto, considere  $\widetilde{M}_{-n} = M_{-n}M_{-(n-1)} \cdots M_{-1}$  con  $n \in \mathbb{N}$ , estas matrices cumplen las hipótesis del teorema anterior así

$$\|\widetilde{M}_{-n}(E)\| \leq \tau_\epsilon(\omega) \max(\widetilde{c}_{|n|}^{\frac{1}{q}}, \widetilde{d}_{|n|}^{\frac{1}{2}}) |n|^{\beta(\epsilon+1/q)(1+\frac{q}{2})^{-1}}.$$

Usaremos cuatro lemas previos que nos permitirán, a través del uso de herramientas de probabilidad, demostrar el teorema 2.2.1.

### 2.2.1. Lemas preparatorios

En los próximos lemas, supondremos primero que  $a_i = |i|^{-\alpha}$  para después extenderlo al caso general. El siguiente lema nos ayudará a construir una super-martingala (positiva) para obtener información sobre la cota de  $X_n(E)$  pero para un número finito de valores de  $E$ .

**Lema 2.2.4.** *Si  $\mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q) < \infty$  para algún  $q \geq 2$ , entonces existe una constante  $D_q$ , dependiente solo de  $q$ , tal que*

$$\mathbb{E}(X_n^q | \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}^q [1 + D_q(n^{-2}\alpha T^2 \mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + n^{-q\alpha} T^q \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q))] \quad (2.2.6)$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^q | \mathcal{F}_{n-1}) &\leq \mathbb{E}(\|M_n\|^q X_{n-1}^q | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}^q \mathbb{E}(\|M_n\|^q | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= X_{n-1}^q \mathbb{E}(\|M_n\|^q) \end{aligned}$$

la última igualdad se obtiene por la independencia de  $\|M_n\|^q$  sobre  $\mathcal{F}_{n-1}$ . Así de lo anterior se deduce

$$\mathbb{E}(X_n^q | \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}^q \mathbb{E}(\sup_{\|U\|=1} \|M_n U\|^q). \quad (2.2.7)$$

Recordemos que  $M_n = I + n^{-\alpha} \mathcal{V}_n T_n$ , ahora si  $a = 2n^{-\alpha} \mathcal{V}_n < U, T_n U >$  y  $b = n^{-2\alpha} \mathcal{V}_n^2 \|T_n U\|^2$ , entonces  $\|M_n U\|^2 = 1 + a + b$ .

Para el caso en que  $q > 2$ , el resultado se obtiene de que para  $a$  y  $b$  dados anteriormente

$$(1 + a + b)^{\frac{q}{2}} \leq 1 + \frac{q}{2}a + C_q(b + b^{\frac{q}{2}} + a^2 + |a|^q) \quad (2.2.8)$$

esta desigualdad se encuentra demostrada en el apéndice A.1.

Ahora teniendo en cuenta que, para todo  $n$  en  $\mathbb{N}$ ,  $\|T_n\| \leq T$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\sup_{\|U\|=1} \|M_n U\|^q) &\leq 1 + \mathbb{E} \left( \sup_{\|U\|=1} \left( \frac{q}{2} 2n^{-\alpha} \mathcal{V}_n < U, T_n U > \right) \right) \\ &\quad + D_q [n^{-2\alpha} T^2 \mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + n^{-q\alpha} T^q \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q)] \\ &\leq 1 + \mathbb{E}(\mathcal{V}_n) \sup_{\|U\|=1} \left( \frac{q}{2} 2n^{-\alpha} < U, T_n U > \right) \\ &\quad + D_q [n^{-2\alpha} T^2 \mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + n^{-q\alpha} T^q \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q)] \end{aligned}$$

y como  $\mathbb{E}(\mathcal{V}_n) = 0$  obtenemos lo que buscamos. El caso  $q = 2$  se obtiene directamente de

$$E(\sup_{\|U\|=1} \|M_n U\|^2) = 1 + \sup_{\|U\|=1} (2n^{-\alpha} \langle U, T_n U \rangle) \mathbb{E}(\mathcal{V}) + n^{-2\alpha} T^2 \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^2) \quad (2.2.9)$$

usando nuevamente  $\mathbb{E}(\mathcal{V}) = 0$  y teniendo en cuenta 2.2.7

$$\mathbb{E}(X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}^2 [1 + (n^{-2\alpha} T^2 \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^2))]. \quad (2.2.10)$$

□

Antes de pasar al siguiente lema, tendremos en cuenta las siguientes notaciones: para todo  $n$  en  $\mathbb{N}$

$$c_n = \prod_{i=1}^n [1 + D_q(i^{-2\alpha} T^2 \mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + i^{-q\alpha} T^q \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q))] \quad (2.2.11)$$

$$S_n(r) = \left\{ \frac{k}{2^i}; 0 \leq k \leq 2^i, k \in \mathbb{N} \right\} \text{ donde } i \text{ es el entero, tal que } 2^{r_i} \leq n < 2^{r(i+1)} \quad (2.2.12)$$

Este conjunto será importante para nuestro objetivo, pues primero obtendremos cotas para  $X_n$  para valores de  $E$  en este conjunto, para después poder hacerlo para un intervalo  $[a, b]$ . El siguiente lema formaliza lo anterior mencionado.

**Lema 2.2.5.** *Si  $\mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q) < \infty$  para algún  $q > 2$ , entonces, para todo  $\epsilon$  existe una variable aleatoria  $C_\epsilon(\omega)$  dependiendo de  $\omega = \{\omega_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  casi-seguramente finita, tal que:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall E \in S_n(r), X_n^q(E) \leq C_\epsilon(\omega) n^{\frac{1+\epsilon}{r}} c_n \quad (2.2.13)$$

DEMOSTRACIÓN: Del lema 2.2.4 y de la definición de  $c_n$

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_n^q}{c_n} | \mathcal{F}_{n-1}\right) \leq \frac{X_{n-1}^q}{c_{n-1}}$$

con lo cual tenemos una super-martingala (positiva). Con un clásico teorema sobre martingalas [10] prop. 5.13 pag. 88 obtenemos:

$$P\left(\sup_{1 \leq n \leq N} \frac{X_n^q}{c_n} > C\right) \leq \frac{1}{C} \sup_{1 \leq n \leq N} \mathbb{E}\left(\frac{X_n^q}{c_n}\right)$$

con lo cual

$$P(\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{X_n^q}{c_n} > C) \leq \frac{1}{C}.$$

Ahora, por la definición de  $S_n(r)$  si  $n_1, n_2$  son tales que  $2^{r_i} \leq n_i < 2^{r(i+1)}$ , donde  $i = \{1, 2\}$ , entonces  $S_{n_1}(r) = S_{n_2}(r)$ , así si elegimos  $n_0$  tal que  $2^{r_i} \leq n_0 < 2^{r(i+1)}$ , obtenemos

$$\{\omega : \sup_{2^{r_i} \leq n < 2^{r(i+1)}} \sup_{E \in S_n(r)} \frac{X_n^q}{c_n} > C\} \subseteq \bigcup_{E \in S_{n_0}(r)} \{\omega : \sup_{2^{r_i} \leq n < 2^{r(i+1)}} \frac{X_n^q}{c_n} > C\}$$

donde  $S_{n_0}(r) = S_n(r)$ , para todo  $n$  tal que  $2^{r_i} \leq n < 2^{r(i+1)}$  así

$$P(\sup_{2^{r_i} \leq n < 2^{r(i+1)}} \sup_{E \in S_n(r)} \frac{X_n^q}{c_n} > C) \leq |S_{n_0}(r)| P(\sup_{2^{r_i} \leq n < 2^{r(i+1)}} \frac{X_n^q}{c_n} > C)$$

con esto si reemplazamos  $C$  por  $C2^{i(1+\epsilon)}$  y tomando en cuenta que si,  $n$  es tal que  $2^{r_i} \leq n < 2^{r(i+1)}$  por tanto  $C2^{i(1+\epsilon)} \leq Cn^{\frac{(1+\epsilon)}{r}}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} P(\sup_{2^{r_i} \leq n < 2^{r(i+1)}} \sup_{E \in S_n(r)} \frac{X_n^q}{c_n} > Cn^{\frac{(1+\epsilon)}{r}}) &\leq |S_{n_0}(r)| P(\sup_{2^{r_i} \leq n < 2^{r(i+1)}} \frac{X_n^q}{c_n} > C2^{i(1+\epsilon)}) \\ &\leq 2^i (C2^{i(1+\epsilon)})^{-1} = (C2^{i\epsilon})^{-1} \end{aligned}$$

esta última es sumable con respecto a  $i$ . Luego por el teorema de Borel-Cantelli, obtenemos nuestro resultado. □

Los dos lemas siguientes hacen uso de la continuidad en norma de  $T_n$ , que hay con respecto a  $E$ , y así obtener una cota de  $|X_n(E_{k,l}) - X_n(E_{k+1,l})|^2$  donde  $l > i = i(n)$ ,  $0 \leq k < 2^l$   $E_{k,l} = \frac{k}{2^l}$ .

**Lema 2.2.6.** *Si  $p > 2$ , y si las matrices de  $2 \times 2$   $T_n$  satisfacen*

$$\|T_n(E) - T_n(E')\| \leq T' n^\beta |E - E'| \tag{2.2.14}$$

entonces

$$Z_n = \frac{1}{d_n} \left( \frac{\|U_{n+1}(E) - U_{n+1}(E')\|}{n^{2\beta}} + |E - E'|^2 \|U_{n+1}\|^2 \right) \tag{2.2.15}$$

es una  $\mathcal{F}_n$  super-martingala (positiva), con

$$\mathbb{E}(Z_0) = (E - E')^2 \quad y \quad d_n = \prod_{i=1}^n (1 + 2i^{-2\alpha}(T^2 + T'^2)\mathbb{E}(\mathcal{V}^2)) \quad (2.2.16)$$

DEMOSTRACIÓN: Considere las siguientes variables aleatorias

$$Y_n = \|U_{n+1}(E) - U_{n+1}(E')\|^2$$

Para simplificar notación y diferenciar la dependencia de  $E$  y  $E'$ , solo usaremos la prima, por ejemplo  $M_n = M_n(E)$  y  $M'_n = M_n(E')$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(\|M_n U_n - M'_n U'_n\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(\|M'_n(U_n - U'_n) + (M_n - M'_n)U_n\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}(\|M'_n(U_n - U'_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(\|(M_n - M'_n)U_n\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &\quad + 2\mathbb{E}(\langle U_n, (M_n^t - M_n'^t)M'_n(U_n - U'_n) \rangle | \mathcal{F}_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Ahora acotaremos los tres términos de la ecuación 2.2.17.

Teniendo en cuenta 2.2.9 acotamos el primer termino:

$$\mathbb{E}(\|M'_n(U_n - U'_n)\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \leq Y_{n-1}^2 \mathbb{E}(\|M'_n\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \leq Y_{n-1}^2 (1 + (n^{-2\alpha} T^2 \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^2))).$$

Para acotar el segundo término tenemos en cuenta 2.2.14 (las hipótesis del Lema 2.2.6) y la definición de  $M$  y  $M'$  2.1.8, así

$$\mathbb{E}(\|(M_n - M'_n)U_n\|^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}^2 T'^2 (E - E')^2 n^{2(\beta-\alpha)} E(V^2)$$

Ahora vemos que el tercer término esta acotado por:

$$\begin{aligned} &2X_{n-1}Y_{n-1}\mathbb{E}(\|(M_n^t - M_n'^t)M'_n\|) \\ &\leq 2X_{n-1}Y_{n-1}\mathbb{E}\left(\sup_{\|U\|=\|U'\|=1} \frac{\mathcal{V}_n}{n^\alpha} \left\langle U, (T_n^t - T_n'^t) \left(1 + \frac{\mathcal{V}_n}{n^\alpha} T_n\right) U' \right\rangle\right) \\ &= 2X_{n-1}Y_{n-1}\mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{V}^2}{n^{2\alpha}}\right) \sup_{\|U\|=\|U'\|=1} \left\langle U, (T_n^t - T_n'^t)T_n' U' \right\rangle \\ &\leq 2X_{n-1}Y_{n-1}\mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{V}^2}{n^{2\alpha}}\right) n^{2\beta} |E - E'| T' T \\ &\leq Y_{n-1}^2 \mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{V}^2}{n^{2\alpha}}\right) T^2 + X_{n-1}^2 (E - E')^2 T'^2 n^{2\beta} \mathbb{E}\left(\frac{\mathcal{V}^2}{n^{2\alpha}}\right) \end{aligned}$$

donde se usa que  $\mathbb{E}(\mathcal{V}_n) = 0$  y 2.2.14. De esta manera teniendo ya acotado estos tres términos de la ecuación 2.2.17 obtenemos que:

$$\mathbb{E}(Y_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) \leq Y_{n-1}^2 \left( 1 + 2T^2 \frac{\mathbb{E}(\mathcal{V}^2)}{n^{2\alpha}} \right) + 2X_{n-1}^2 (E - E')^2 T'^2 \frac{n^{2\beta}}{n^{2\alpha}} \mathbb{E}(\mathcal{V}^2)$$

con esto último y teniendo en cuenta 2.2.10 obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \frac{Y_n^2}{n^{2\beta}} + (E - E')^2 X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1} \right) &\leq \frac{Y_{n-1}^2}{n^{2\beta}} (1 + 2T^2 \mathbb{E}(\mathcal{V}^2) n^{-2\alpha}) \\ &\quad + 2X_{n-1}^2 (E - E')^2 T'^2 n^{-2\alpha} \mathbb{E}(\mathcal{V}^2) \\ &\quad + (E - E')^2 X_{n-1}^2 (1 + n^{-2\alpha} T^2 \mathbb{E}(\mathcal{V}^2)) \\ &\leq \left( \frac{Y_{n-1}^2}{n^{2\beta}} + (E - E') X_{n-1}^2 \right) \left( 1 + 2 \frac{T^2 + T'^2}{n^{2\alpha}} \mathbb{E}(\mathcal{V}^2) \right) \end{aligned}$$

luego de la definición de  $d_n$  (2.2.15)

$$\mathbb{E}(Z_n | \mathcal{F}_{n-1}) \leq Z_{n-1}$$

con lo que  $Z_n$  es una super-martingala (positiva) con  $\mathbb{E}(Z_0) = (E - E')^2$ .

□

**Lema 2.2.7.** *Bajo las hipótesis del lema 2.2.6, para todo  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < 1$ ,  $r > 0$ , existe una variable aleatoria  $D_\epsilon(\omega)$ , ( $\omega = \{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ), casi-seguramente finita, tal que*

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall l \geq i := i(n), \forall k, 0 \leq k < 2^l \\ \left| X_n \left( \frac{k}{2^l} \right) - X_n \left( \frac{k+1}{2^l} \right) \right|^2 \leq D_\epsilon(\omega) d_n n^{2\beta} 2^{-l(1-\epsilon)} \end{aligned}$$

donde  $i(n)$  es el entero tal que  $2^{r_i} \leq n < 2^{r(i+1)}$  y  $d_n$  es la constante definida en 2.2.15.

DEMOSTRACIÓN: Como  $Z_n$  es una super-martingala (positiva), obtenemos [10] que para todo  $l$  y  $k$

$$\begin{aligned} P \left( \sup_{1 \leq n < N} Z_n \left( \frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l} \right) > C \right) &\leq \frac{1}{C} \sup_{1 \leq n < N} \mathbb{E} \left( Z_n \left( \frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l} \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{C} \mathbb{E}(Z_0) = \frac{\left( \frac{k}{2^l} - \frac{k+1}{2^l} \right)^2}{C} \\ &= \frac{2^{-2l}}{C} \end{aligned}$$

luego

$$P(\sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n(\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}) > C) \leq \frac{2^{-2l}}{C}$$

con esto

$$P(\sup_{0 \leq k \leq 2^l} \sup_{n \in \mathbb{N}} Z_n(\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}) > C) \leq \frac{2^{-l}}{C}.$$

Ahora si  $C$  lo reemplazamos por  $C'2^{-l(1-\epsilon)}$  obtenemos que

$$\begin{aligned} P(\sup_{2^{ri} \leq n \leq 2^{r(i+1)}} \sup_{l > i} \sup_{0 \leq k \leq 2^l} Z_n(\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}) > C'2^{-l(1-\epsilon)}) &\leq \sum_{l > i} (C'2^{-l(1-\epsilon)}2^l)^{-1} \\ &= \sum_{l > i} (C'2^{l\epsilon})^{-1} \\ &= (C'2^{i\epsilon})(2^\epsilon - 1)^{-1} \end{aligned}$$

como el lado derecho es sumable con respecto a  $i$ , nuevamente por el teorema de Borel-Cantelli obtenemos: para todo  $n \in N$ , para todo  $l > i(n)$ , para todo  $0 \leq k \leq 2^l$ ,  $Z_n(\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}) < D_\epsilon(\omega)2^{-l(1-\epsilon)}$  donde  $D_\epsilon(\omega)$  es una variable aleatoria casi-seguramente finita. Para concluir el lema, utilizamos que

$$Z_n(\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}) \geq Y_n^2(\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}) \geq \left| X_n\left(\frac{k}{2^l}\right) - X_n\left(\frac{k+1}{2^l}\right) \right|^2.$$

□

**Observación 2.2.8.** Hasta aquí hemos supuesto que  $a_i = i^{-\alpha}$  y para el caso más general 1.1.3, tenemos en cuenta que los 4 lemas anteriores se basan en tener una cota uniforme, sobre la norma de la matriz  $T_n$  en el parámetro  $n$ , de esta manera si escribimos  $M_n = I + n^{-\alpha} \mathcal{V}_n n^\alpha a_n T_n = I + n^{-\alpha} \mathcal{V}_n T'_n$  y usando 1.1.3 obtenemos que la norma de  $T'_n$  es uniformemente acotada en  $n$ . Así extendemos nuestros lemas a una caso más general.

Ahora estamos preparados para demostrar el teorema enunciado al principio de esta sección, el cual nos proporcionará una cota para la norma de  $\widetilde{M}_n$

### 2.2.2. Demostración Teorema 2.2.1

Para acotar la variable aleatoria  $\|\widetilde{M}_n(E)\|$  para  $n \in \mathbb{N}$ , primero consideramos, dado  $U_1$  de norma uno,  $\|\widetilde{M}_n(E)U_1\| = X_n(E)$ . Sea  $n$  dado y supongamos primero que  $[a, b] \subseteq [0, 1]$ . Cualquier energía  $E$  en  $[0, 1]$  puede escribirse



como

$$E = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\epsilon_l}{2^l}$$

donde  $\epsilon_l \in \{0, 1\}$  ( es la descomposición diádica de  $E$  ).

Sea  $E_L = \sum_{l=0}^{N(L)} \frac{\epsilon_l}{2^l}$  donde  $N(L)$  corresponde al subíndice del  $L$ -ésimo  $\epsilon_l \neq 0$  con los  $\epsilon_l$  ordenados por el subíndice de menor a mayor. De la definición de  $E_L$  tenemos lo siguiente:

1.  $E = \lim_{L \rightarrow \infty} E_L$
2. si  $k(L)$  es el entero tal que  $E_L = \frac{k(L)}{2^{N(L+1)}}$  entonces  $E_{(L+1)} = \frac{k(L)+1}{2^{N(L+1)}}$
3. Sea  $i(n)$  de la definición de  $S_n(r)$  2.2.12, entonces  $E$  puede escribirse como  $E = E_{i(n)} + \sum_{l=i(n)+1}^{\infty} \frac{\epsilon_l}{2^l}$  donde  $E_{i(n)} \in S_n(r)$ .

El primer item se deduce de la descomposición diádica de  $E$ .

El segundo item viene de  $E_{(L)} = \frac{k'(L)}{2^{N(L)}} = \frac{k(L)}{2^{N(L+1)}}$  donde  $k(L)$  es un entero luego  $\frac{k(L)+1}{2^{N(L+1)}} = E_L + 1/2^{N(L+1)}$  como  $\epsilon_{N(L+1)} \neq 0$  por tanto igual a uno entonces  $E_L + 1/2^{N(L+1)} = E_L + \frac{\epsilon_{N(L+1)}}{2^{N(L+1)}} = E_{L+1}$ .

Y por último el tercer item se debe a que  $E = \sum_{l=0}^{i(n)} \frac{\epsilon_l}{2^l} + \sum_{l=i(n)+1}^{\infty} \frac{\epsilon_l}{2^l}$ .

Teniendo en cuenta lo anterior y como  $X_n(E)$  es una función continua con respecto a  $E$

$$\begin{aligned} X_n(E) &= \lim_{L \rightarrow \infty} (X_n(E_L)) = \lim_{L \rightarrow \infty} (X_n(E_i) + (X_n(E_L)) - X_n(E_i)) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left( X_n(E_i) + \sum_{l=i+1}^L (X_n(E_l) - X_n(E_{l-1})) \right). \end{aligned}$$

Como  $E_i \in S_n(r)$  y  $E_{l-1} = \frac{k(l-1)}{2^{N(l)}}$  por tanto  $E_l = \frac{k(l-1)+1}{2^{N(l)}}$  donde  $k_{l-1}$  es un entero menor que  $2^{N(l)}$  y  $N(l)$  es mayor que  $i(n)$ , podemos aplicar los lemas 2.2.5, 2.2.7 en la desigualdad anterior, luego para todo  $0 < \epsilon < 1$  y para todo  $r \in \mathbb{R}$  tenemos

$$X_n(E) \leq C_\epsilon(\omega)^{1/q} c_n^{1/q} n^{\frac{1+\epsilon}{rq}} + D_\epsilon^{1/2}(\omega) d_n^{1/2} n^\beta \sum_{l=i(n)+1}^{\infty} 2^{-(l(1-\epsilon))/2}$$

donde  $C_\epsilon(\omega)$ ,  $D_\epsilon(\omega)$  dependen de  $U_1$ . Como  $n < 2^{r(i(n)+1)}$  concluimos

$$2^{-l(1-\epsilon)} = 2^{-(l-i(n)-1)(1-\epsilon)} 2^{-(i(n)+1)(1-\epsilon)} \leq 2^{-(l-i(n)-1)(1-\epsilon)} n^{-(1-\epsilon)/r}.$$

Con esto

$$\begin{aligned} \sum_{l=i(n)+1}^{\infty} 2^{(-l(1-\epsilon))/2} &\leq \sum_{l=i(n)+1}^{\infty} 2^{-(l-i(n)-1)(1-\epsilon)/2} n^{-(1-\epsilon)/2r} \\ &= n^{-(1-\epsilon)/2r} \left( \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m(1-\epsilon)/2} \right) \end{aligned}$$

$$X_n(E) \leq C_\epsilon(\omega)^{1/q} c_n^{1/q} n^{\frac{1+\epsilon}{rq}} + D_\epsilon^{1/2}(\omega) \left( \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m(1-\epsilon)/2} \right) d_n^{1/2} n^{\beta-(1-\epsilon)/2r}$$

ahora si elegimos  $r = \beta^{-1}(q^{-1} + \frac{1}{2})$  sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1+\epsilon}{rq} &= \beta(1+\epsilon)(1+q/2)^{-1} \\ \beta - (1-\epsilon)/2r &= \beta(1+\epsilon q/2)(1+q/2)^{-1}. \end{aligned}$$

Con lo anterior y teniendo en cuenta que  $q > 2$  obtenemos

$$X_n(E) \leq \tau_{1,\epsilon}(\omega) \max(c_n^{1/q}, d_n^{1/2}) n^{\beta(1+\epsilon q/2)(1+q/2)^{-1}} \quad (2.2.18)$$

donde  $\tau_\epsilon(\omega) = \max\{C_\epsilon(\omega), D_\epsilon^{1/2}(\omega) \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m(1-\epsilon)/2}\}$ .

Como  $X_n(E) = \|\widetilde{M}_n U_1\|$  luego para  $U_1 \perp U_2$  tenemos que, para  $j \in \{1, 2\}$

$$\|\widetilde{M}_n U_j\| \leq \tau_{j,\epsilon}(\omega) \max(c_n^{1/q}, d_n^{1/2}) n^{\beta(1+\epsilon q/2)(1+q/2)^{-1}}$$

para todo  $\omega \in A_i$  con  $A_i^c$  de medida cero.

Con esto para cada  $U$  de norma uno  $U = aU_1 + bU_2$  con  $|a|, |b| < 1$  y para todo  $\omega \in A_1 \cap A_2$

$$\begin{aligned} \|\widetilde{M}(E)_n U\| &\leq a\tau_{1,\epsilon}(\omega) \max(c_n^{1/q}, d_n^{1/2}) n^{\beta(1+\epsilon q/2)(1+q/2)^{-1}} \\ &\quad + b\tau_{2,\epsilon}(\omega) \max(c_n^{1/q}, d_n^{1/2}) n^{\beta(1+\epsilon q/2)(1+q/2)^{-1}} \\ &\leq (\tau_{1,\epsilon}(\omega) + \tau_{2,\epsilon}(\omega)) \max(c_n^{1/q}, d_n^{1/2}) n^{\beta(1+\epsilon q/2)(1+q/2)^{-1}} \\ &= \tau_\epsilon(\omega) \max(c_n^{\frac{1}{q}}, d_n^{\frac{1}{2}}) n^{\beta(1+\epsilon q/2)(1+q/2)^{-1}} \end{aligned}$$

como  $A_1 \cap A_2$  es de complemento con medida cero  $\tau_\epsilon(\omega)$ , es casi-seguramente finita y

$$\|\widetilde{M}_n(E)\| \leq \tau_\epsilon(\omega) \max(c_n^{\frac{1}{q}}, d_n^{\frac{1}{2}}) n^{\beta(1+cq/2)(1+q/2)^{-1}}.$$

Ahora de la definición de  $c_n$  y  $d_n$  se verifica que  $c_n \leq \widetilde{c}_n$  y  $d_n \leq \widetilde{d}_n$  y así obtenemos el resultado.

### 2.2.3. Demostración Corolario 2.2.2

Para demostrar este corolario, solo falta conocer el comportamiento asintótico de  $c_n$  y  $d_n$ . Recordemos que  $c_n$  y  $d_n$  están definidos por

$$\begin{aligned} c_n &= \prod_{i=1}^n [1 + D_q(i^{-2\alpha} T^2 \mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + i^{-q\alpha} T^q \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q))] \\ d_n &= \prod_{i=1}^n (1 + 2i^{-2\alpha} (T^2 + T'^2) \mathbb{E}(\mathcal{V}^2)) \end{aligned}$$

Luego si  $q > 2$

$$c_n, d_n \leq \prod_{i=1}^n [1 + i^{-2\alpha} D_{q,T,T'} (\mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q))].$$

Con esto y teniendo en cuenta el lema A.2 expuesto en el apéndice. Si  $\alpha > 1/2$ , para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N = N(\epsilon)$  tal que para todo  $i > N$

$$(1 + i^{-2\alpha} D_{q,T,T'} (\mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q))) \leq (1 + i^{-1}\epsilon)$$

luego concluimos que

$$c_n, d_n \leq K_N n^\epsilon.$$

De manera análoga, para el caso en que  $\alpha = 1/2$  obtenemos que

$$c_n, d_n \leq K n^{C(\mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q))}$$

## 2.3. Demostración de los Teoremas 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3

Las consecuencias del teorema 2.2.1 fueron resumidas en los teoremas enunciados al inicio del trabajo (1.1.1, 1.1.2, 1.1.3) y ahora los demostraremos teniendo una cota para  $c_n$  y  $d_n$ .

### 2.3.1. Demostración del Teorema 1.1.1

DEMOSTRACIÓN: Considere un vector generalizado  $\psi \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  asociado al valor propio generalizado  $E$ , luego para  $n \in \mathbb{Z}$  tenemos que:

$$\begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - \lambda a_n V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(n) \\ \psi(-n) \end{pmatrix}$$

de manera inversa dado  $\begin{pmatrix} \psi(1) \\ \psi(0) \end{pmatrix}$  podemos a través de las matrices

$$\begin{pmatrix} E - \lambda a_n V_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

construir un vector generalizado asociado al valor  $E$ . Teniendo en cuenta lo expuesto en 1.1.3, y la cota de  $\|\widetilde{M}_n\|$  dada por el teorema 2.2.1 concluimos  $g_n$  es polinomialmente acotada en la variable  $n$ , luego  $E \in (-2, 2)$  pertenece al espectro de  $H$ , [3] “Sh’noI”.

Suponga que existe un vector propio con valor propio  $E \in \kappa$  entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (|g(n)|^2 + |g(n+1)|^2) &\geq \sum_{i=1}^N C \|\widetilde{M}_n\|^{-2} \|U_1\|^2 \\ &\geq \tau_\epsilon^{-2}(\omega) \sum_{i=1}^N C' K n^{-2C(\mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q)) - 2\beta(1 + \epsilon q/2)(1 + q/2)^{-1}} \|U_1\|^2 \end{aligned}$$

como  $\beta = 1$ ,  $q > 2$ ,  $\mathbb{E}(\mathcal{V}^2) = \lambda^2 \mathbb{E}(V)^2 (4 - E^2)^{-2}$  y  $\mathbb{E}(\mathcal{V}^q) = \lambda^q \mathbb{E}(V)^q (4 - E^2)^{-q}$  podemos elegir  $\epsilon$  y  $\lambda(\kappa)$  de manera que para todo  $\lambda < \lambda(\kappa)$

$$2C(\mathbb{E}(\mathcal{V}^2) + \mathbb{E}(|\mathcal{V}|^q)) + 2\beta(1 + \epsilon q/2)(1 + q/2)^{-1} < 1$$

esto muestra que con probabilidad uno  $\psi$  no puede ser un vector propio, pues  $\sum_{i=1}^N (|g(n)|^2 + |g(n+1)|^2)$  diverge cuando  $N$  tiende a infinito.

□

### 2.3.2. Demostración del Teorema 1.1.2

Esto proviene de que, dado un vector propio generalizado  $\psi$  para todo  $\epsilon > 0$  existe  $K_\epsilon$  tal que  $c_n, d_n \leq K_\epsilon n^\epsilon$ , con esto

$$\|\widetilde{M}_n\| \leq \tau_\epsilon(\omega) K_\epsilon n^\epsilon n^{(1+\epsilon q/2)(1+q/2)^{-1}}$$

así usando el mismo método descrito en la demostración anterior, elegimos  $\epsilon$  adecuadamente de manera que  $\sum_{i=1}^N (|g(n)|^2 + |g(n+1)|^2)$  sea divergente cuando  $N$  tiende a infinito.

### 2.3.3. Demostración del Teorema 1.1.3

Considere

$$\sum_n \mathbb{E}(|a_n V_n|^q) = \sum_n |a_n|^q \mathbb{E}(|V_n|^q)$$

que es finito, pues  $\alpha q > 1$  y  $\mathbb{E}(|V_n|^q) = \mathbb{E}(|V|^q) < \infty$ . Por otra parte por Fubini

$$\sum_n \mathbb{E}(|a_n V_n|^q) = \mathbb{E}\left(\sum_n |a_n V_n|^q\right)$$

luego como este número es finito, tenemos que casi-seguramente  $\sum_n |a_n V_n|^q$  también debe ser finito, luego casi-seguramente  $a_n V_n$  converge a cero.

Así el operador definido por  $(K\psi)(n) = \lambda a_n V_n(\omega)\psi(n)$  es un operador compacto con probabilidad uno, y como  $H = -\Delta + K$  tenemos que, por el teorema de “Weyl” [9], pag. 142,  $\sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(-\Delta) = [-2, 2]$ .

## Familia Unitaria de operadores

### 3.1. Matriz de transferencia para el operador Unitario $U$

En este apartado veremos como demostrar el teorema 1.2.2. Para esto dado un vector generalizado  $\psi$  ( $U\psi = e^{iE}\psi$ ) tenemos que sus coordenadas se relacionan a través de las matrices  $B_{n,E}$  [2] :

$$\begin{pmatrix} \psi_{2n} \\ \psi_{2n+1} \end{pmatrix} = B_{n,E} \begin{pmatrix} \psi_{2n-2} \\ \psi_{2n-1} \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

donde:

$$\begin{aligned} (B_{n,E})_{11} &= -\frac{t_{2n-2}}{t_{2n-1}} e^{-i(E+\theta_{2n-1}+\theta_{2n-2})} \\ (B_{n,E})_{22} &= -\frac{1}{t_{2n-1}t_{2n}} e^{i(E+\theta_{2n-1}+\theta_{2n})} - \frac{r_{2n}r_{2n-2}}{t_{2n-1}t_{2n}} e^{-i(E+\theta_{2n-1}+\theta_{2n-2})} \\ &\quad + \frac{r_{2n-1}r_{2n-2}}{t_{2n-1}t_{2n}} e^{i(\theta_{2n}-\theta_{2n-2})} + \frac{r_{2n-1}r_{2n}}{t_{2n-1}t_{2n}} \\ (B_{n,E})_{12} &= i\frac{r_{2n-2}}{t_{2n-1}} e^{-i(E+\theta_{2n-1}+\theta_{2n-2})} - i\frac{r_{2n-1}}{t_{2n-1}} \\ (B_{n,E})_{21} &= i\frac{r_{2n-1}t_{2n-2}}{t_{2n-1}t_{2n}} e^{-i(\theta_{2n-2}-\theta_{2n})} - i\frac{r_{2n}t_{2n-2}}{t_{2n-1}t_{2n}} e^{-i(E+\theta_{2n-2}+\theta_{2n-1})} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Aquí la relación entre  $t_n$  y  $r_n$  es:

$$t_n^2 + r_n^2 = 1, \quad t_n = 1 - \lambda a_n$$

donde  $a_n$  cumple que  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} a_n |n|^\alpha = 1$ . De 3.1.1 deducimos,

$$\begin{pmatrix} \psi_{2n} \\ \psi_{2n+1} \end{pmatrix} = B_{n,E} B_{n-1,E} \cdots B_{1,E} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{-2n} \\ \psi_{-2n+1} \end{pmatrix} = B_{-n+1,E}^{-1} B_{-n,E}^{-1} \cdots B_{0,E}^{-1} \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \quad (3.1.4)$$

Nuestro objetivo de aquí en adelante, es obtener cotas superiores de  $|\psi_n|^2 + |\psi_{n+1}|^2$  para deducir dos resultados, el primero es decidir cuando el valor  $e^{iE}$  asociado a  $\psi$  pertenece al espectro del operador  $U$  y le segundo es saber si  $\psi$  es un vector propio asociado valor propio  $e^{iE}$ . En lo que sigue omitiremos el parámetro  $E$  en la notación de  $B_{n,E}$ .

Primero haremos el caso para  $n$  positivo, el caso para  $n$  negativo es similar.

$$\text{Sea } U_n = \begin{pmatrix} \psi_{2n} \\ \psi_{2n+1} \end{pmatrix} \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

$$U_n = B_n B_{n-1} \cdots B_1 U_0 = \left( \prod_{i=1}^n \det(B_i) \right) \left( \prod_{i=1}^n \frac{1}{\det(B_i)} \right) B_n B_{n-1} \cdots B_1 U_0.$$

Si  $H_n = \frac{1}{\det(B_n)} B_n$  y  $\tilde{H}_n = H_n H_{n-1} \cdots H_1$ , entonces

$$U_n = \left( \prod_{i=1}^n \det(B_i) \right) \tilde{H}_n U_0 \quad (3.1.5)$$

note que  $\det(\tilde{H}_n) = 1$  así

$$\tilde{H}_n^{-1} U_n = \left( \prod_{i=1}^n \det(B_i) \right) U_0$$

luego

$$\left| \left( \prod_{i=1}^n \det(B_i) \right) \right| \|U_0\| = \|\tilde{H}_n^{-1} U_n\| \leq \|\tilde{H}_n^{-1}\| \|U_n\|$$

por otra parte como  $\det(B_n) = e^{-i(\theta_{2n-2} - \theta_{2n}) \frac{t_{2n-2}}{t_{2n}}}$

$$\left| \left( \prod_{i=1}^n \det(B_i) \right) \right| = \frac{t_0 t_2}{t_2 t_4} \cdot \frac{t_{2n-6} t_{2n-4} t_{2n-2}}{t_{2n-4} t_{2n-2} t_{2n}} = \frac{t_0}{t_{2n}}$$

así

$$\|U_0\| \leq \frac{t_{2n}}{t_0} \|U_n\| \|\tilde{H}_n^{-1}\|.$$

El hecho de que  $\det(\tilde{H}_n) = 1$ , permite que  $\|\tilde{H}_n^{-1}\| = \|\tilde{H}_n\|$ , pues  $\tilde{H}_n^* \tilde{H}_n$ ,  $(\tilde{H}_n^* \tilde{H}_n)^{-1}$  tienen traza y determinante iguales, luego el mismo polinomio característico, así la misma norma. Con esto obtenemos

$$\frac{t_0}{t_{2n}} \|U_0\| \|\tilde{H}_n\|^{-1} \leq \|U_n\| \quad (3.1.6)$$

teniendo presente lo anterior y 3.1.5 obtenemos que, para todo  $n$  en  $\mathbb{N}$

$$\frac{t_0}{t_{2n}} \|U_0\| \|\tilde{H}_n\|^{-1} \leq \|U_n\| \leq \frac{t_0}{t_{2n}} \|U_0\| \|\tilde{H}_n\|. \quad (3.1.7)$$

Ahora veamos, una ecuación similar a la anterior, para  $-n$  con  $n$  positivo. Para esto, tenemos en cuenta, que si  $n \in \mathbb{N}$ , y  $\tilde{H}_{-n} = H_0 \cdots H_{-n} H_{-n+1}$ , por 3.1.3 tenemos que:

$$U_0 = \left( \prod_{i=0}^{-n+1} \det B_i \right) \tilde{H}_{-n} U_{-n} = \frac{t_{-2} t_{-4}}{t_0 t_{-2}} \cdot \frac{t_{-2n-2} t_{-2n}}{t_{-2n+4} t_{-2n+2}} \tilde{H}_{-n} U_{-n} \quad (3.1.8)$$

al igual que el caso anterior usando que  $\det(\tilde{H}_{-n}) = 1$  obtenemos:

$$\frac{t_0}{t_{-2n}} \|U_0\| \|\tilde{H}_{-n}\|^{-1} \leq \|U_{-n}\| \leq \frac{t_0}{t_{-2n}} \|U_0\| \|\tilde{H}_{-n}\| \quad (3.1.9)$$

juntando las ecuaciones 3.1.7, 3.1.9 y teniendo en cuenta, la hipótesis de que  $t_n$  converge a uno, cuando  $|n|$  tiende al infinito obtenemos que para todo  $n$  en  $\mathbb{Z}$ .

$$C_1 \|U_0\| \|\tilde{H}_n\|^{-1} \leq \|U_n\| \leq C_2 \|U_0\| \|\tilde{H}_n\| \quad (3.1.10)$$

Aquí se aprecia la similitud con el modelo auto-adjunto 2.1. En resumen, para obtener cotas superiores e inferiores de  $\|U_n\|^2 = |\psi_{2n}|^2 + |\psi_{2n+1}|^2$  con  $n \in \mathbb{Z}$  es suficiente acotar superiormente  $\|\tilde{H}_n\|^2$ . El objetivo siguiente será encontrar cotas superiores del tipo polinomial de  $\|\tilde{H}_n\|^2$ .



### 3.2. Cotas superiores de $\|\tilde{H}_k\|$

Para acotar superiormente

$$\|\tilde{H}_n\| = \left\| \prod_{k=1}^n H_k \right\|$$

consideramos  $M_k = \frac{t_{2k}}{t_{2k-2}} B_k$ , así  $\|M_k\| = \|H_k\|$ . Primero observamos que:

$$\begin{aligned} (M_k)_{12}, (M_k)_{21} &\xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0 \\ e^{i(\theta_{2k-1} + \theta_{2k-2})} (M_k)_{11} &\xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} -e^{-iE} \\ e^{-i(\theta_{2k-1} + \theta_{2k})} (M_k)_{22} &\xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} -e^{iE} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

esto nos da una idea de como descomponer  $M_k$  de manera similar a la de 2.1.8, para ser más preciso  $M_k$  la descompondremos de la siguiente manera:

$$M_k = D_k \left( I + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} T_k \right)$$

donde  $D_k$  será la matriz unitaria:

$$D_k = \begin{pmatrix} -e^{-i(E + \theta_{2k-1} + \theta_{2k-2})} & 0 \\ 0 & -e^{i(E + \theta_{2k-1} + \theta_{2k})} \end{pmatrix}.$$

Para esto si

$$\begin{aligned} \frac{t_{2k}}{t_{2k-1}} &= 1 + \frac{t_{2k} - t_{2k-1}}{t_{2k-1}} \\ \frac{1}{t_{2k-1} t_{2k-2}} &= 1 + \frac{1 - t_{2k-1} t_{2k-2}}{t_{2k-1} t_{2k-2}} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

y  $T_k = D_k^* \frac{|2k|^\alpha}{\lambda} \tilde{T}_k$ , donde  $\tilde{T}_k = \frac{t_{2k}}{t_{2k-2}} B_k - D_k$  obtenemos nuestra descomposición y al calcular los coeficientes de  $T_k$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 (T_k)_{11} &= \frac{|2k|^\alpha t_{2k} - t_{2k-1}}{\lambda t_{2k-1}} & (3.2.3) \\
 (T_k)_{22} &= \frac{|2k|^\alpha \left( \frac{1 - t_{2k-1}t_{2k-2}}{t_{2k-1}t_{2k-2}} + \frac{r_{2k}r_{2k-2}}{t_{2k-1}t_{2k}} e^{-i(2E+2\theta_{2k-1}+\theta_{2k-2}+\theta_{2k})} \right)}{\lambda} \\
 &\quad - \frac{|2k|^\alpha \left( \frac{r_{2k-1}r_{2k-2}}{t_{2k-1}t_{2k-2}} e^{-i(E+\theta_{2k-1}+\theta_{2k-2})} + \frac{r_{2k-1}r_{2k}}{t_{2k-1}t_{2k-2}} e^{-i(E+\theta_{2k-1}+\theta_{2k})} \right)}{\lambda} \\
 (T_k)_{12} &= -i \frac{|2k|^\alpha \left( \frac{r_{2k-2}t_{2k}}{t_{2k-1}t_{2k-1}} - \frac{r_{2k}t_{2k}}{t_{2k-1}t_{2k-2}} e^{i(E+\theta_{2k-1}+\theta_{2k-2})} \right)}{\lambda} \\
 (T_k)_{21} &= -ie^{-i(E+\theta_{2k}+\theta_{2k-2})} \frac{|2k|^\alpha \left( \frac{r_{2k-1}}{t_{2k-1}} - \frac{r_{2k}}{t_{2k-1}} e^{-i(E+\theta_{2k-1}+\theta_{2k-2})} \right)}{\lambda}.
 \end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta el comportamiento asintótico de  $a_k$  1.2.3 podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{|2k|^\alpha}{\lambda} r_{2k+j} &= 1 & \text{para } j = -2, -1, 0 \\
 \lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{|2k|^\alpha}{\lambda} (t_{2k} - t_{2k-1}) &= 0 \\
 \lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{|2k|^\alpha}{\lambda} (1 - t_{2k-1}t_{2k-2}) &= 2
 \end{aligned}$$

así probar que  $|(T_{k,E})_{ij}| \leq M_{ij}$  con  $i, j = 1, 2$  y  $M_{ij}$  no dependientes de  $\lambda$ ,  $k$  y  $E$ , así deducimos que  $\|T_k\|$  es uniformemente acotada sobre  $k$  y  $E$ . De esta manera, hemos concluido que  $M_k = D_k(I + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} T_k)$ , donde  $D_k$  es una matriz unitaria y  $T_k$  es una matriz uniformemente acotada en norma sobre  $\lambda, k, E$ . Recordemos que queremos acotar  $\|\tilde{H}_n\|^2$ .

Primero consideramos solo el caso cuando  $k \in \mathbb{N}$ , el caso para  $n$  negativo se hace de manera similar.

$$\begin{aligned}
 \|M_k\|^2 &\leq \|I + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} T_k\|^2 & (3.2.4) \\
 &\leq (1 + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} \|T_k\|)^2 \\
 &\leq 1 + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} \left( 2\|T_k\| + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} \|T_k\|^2 \right)
 \end{aligned}$$

de lo discutido después de 3.2.4, concluimos que  $(2\|T_k\| + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} \|T_k\|^2)$  es una expresión acotada por una constante  $K$  (que no depende de  $k, \lambda$  y  $E$ ) luego

$$\|I + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} T_k\|^2 \leq 1 + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} K \quad (3.2.5)$$

así

$$\|\tilde{H}_n\|^2 \leq \prod_{k=1}^n \|M_k\|^2 \leq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} K\right) \quad (3.2.6)$$

como habíamos anticipado en 1.2.2.

Para obtener una cota para  $\tilde{H}_{-n}$  con  $n \in \mathbb{N}$  usamos el mismo proceso y obtendremos una cota similar ( $\|\tilde{H}_{-n}\| \leq \prod_{k=1}^n (1 + \frac{\lambda}{[2n]^\alpha} K')$ ).

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos demostrar los teoremas 1.2.1 y 1.2.2:

### 3.2.1. Demostración Teorema 1.2.1

Considere dado  $E \in [0, 2\pi)$  y el vector  $U_0 = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix}$ , con esto a través de las matrices de transferencia 3.1.1 podemos construir un vector propio generalizado asociado al valor  $e^{iE}$ . Ahora teniendo en cuenta el lema A.2

$$\begin{aligned} \psi_{2n}^2 + \psi_{2n+1}^2 &= \|U_n\|^2 \\ &\leq \|U_0\|^2 \|\tilde{H}_n\|^2 \\ &\leq C' |n|^{K'} \end{aligned}$$

Con esto por el corolario 5.2 [2], como  $\psi$  es un vector propio generalizado polinomialmente acotado, entonces  $\sigma(U) = S^1$ .

### 3.2.2. Demostración Teorema 1.2.2

Supongamos que existe un vector propio  $\psi \in l^2(\mathbb{Z})$  por 3.1.7

$$\psi_{2n}^2 + \psi_{2n+1}^2 = \|U_{n+1}\|^2 \geq \left(\frac{t_0}{t_{2n}} \|U_0\| \|\tilde{H}_n\|^{-1}\right)^2. \quad (3.2.7)$$

En virtud de 3.2.6  $\|\tilde{H}_n\|^2 \leq \prod_{k=1}^n (1 + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} K)$ , así en el caso en que  $\alpha > 1$ , tenemos que  $\alpha = 1 + \delta$  donde  $\delta > 0$  con esto

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} K\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \left(\frac{\lambda}{2(2k)^\delta} K\right)\right).$$

Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2(2k)^\delta} K = 0$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $N = N_\epsilon$ , tal que para todo  $k > N$   $\frac{\lambda}{2(2k)^\delta} K < \epsilon$ , luego si  $n > N$ :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{\lambda}{(2k)^\alpha} K \right) &= \prod_{k=1}^N \left( 1 + \frac{1}{k} \left( \frac{\lambda}{2(2k)^\delta} K \right) \right) \prod_{k=N+1}^n \left( 1 + \frac{1}{k} \left( \frac{\lambda}{2(2k)^\delta} K \right) \right) \\ &\leq \prod_{k=1}^N \left( 1 + \frac{1}{k} \left( \frac{\lambda}{2(2k)^\delta} K \right) \right) \left( 1 + \frac{\epsilon}{k} \right)^{-1} \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{\epsilon}{k} \right) \\ &\leq C_\epsilon n^\epsilon \end{aligned}$$

así

$$\sum_{n=N}^{\infty} \psi_{2n}^2 + \psi_{2n+1}^2 \geq \sum_{n=N}^{\infty} C'_\epsilon n^{-2\epsilon} \quad (3.2.8)$$

luego si  $\epsilon < 1/2$ ,  $\psi$  no pertenece a  $l^2(\mathbb{Z})$ . El caso para  $\alpha = 1$  se obtiene de que

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}_n\|^2 &\leq \prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{\lambda}{2k} K \right) \\ &\leq C n^{\lambda K} \end{aligned}$$

concluyendo que si  $\lambda < 1/(2K)$ ,  $\psi$  no pertenece a  $l^2(\mathbb{Z})$ . □

**Observación 3.2.1.** En [2] (3.17) se prueba que cuando  $1 - t_k \sim 1/j^\alpha$  con  $\alpha > 1$   $\sigma_{a.c} = S^1$ . Sin embargo para el caso  $\alpha > 1$ , con la herramienta utilizada, en esta tesis, se ganó la ausencia de valores propios y más información para el caso en que  $\alpha = 1$ .

**Observación 3.2.2.** Para el caso en que  $\alpha = 1$ , la afirmación de ausencia de valores propios sobre  $S^1$ , es cierta para valores menores que  $2/K$ , y una cota no muy optimal para  $K$  es  $K < 7$ . Pero para lo anterior no hemos impuesto condiciones sobre  $\theta_k$ .

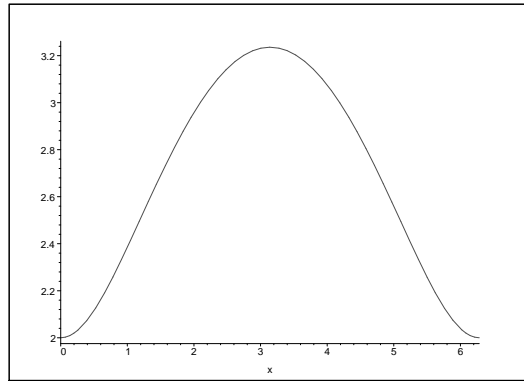
Ahora supongamos por un momento que  $\theta_{2k} + \theta_{2k-1} = 0$  para todo  $k$  en  $\mathbb{Z}$  con esto,  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} T_k = T$  donde:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & i(e^{iE} - 1) \\ -ie^{-iE}(1 - e^{-iE}) & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.2.9)$$

Si calculamos los valores propios de  $TT^*$  obtenemos que:

$$\lambda_{\pm} = 4 - e^{iE} - e^{-iE} \pm 2e^{-iE} \sqrt{e^{iE}(-e^{2iE} + 3e^{iE} - 1)}$$

ahora, si estimamos un gráfico de la norma de  $\|T_E\| = \sqrt{\max(\lambda_+, \lambda_-)}$  en función de  $E$  obtenemos:



algunos cálculos que se pueden verificar son

$$\|T_0\| = 2, \quad \|T_{\pi/2}\| = 1 + \sqrt{3}, \quad \|T_{\pi}\| = \sqrt{5} + 1 \sim 3,236067977$$

Con esto, de la continuidad de la norma y la convergencia de  $T_k$  tenemos que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{N}$  tal que para todo  $E \in (0, \delta) \cup (2\pi - \delta, 2\pi)$  y  $k > \mathbb{N}$

$$\|M_k\|^2 \leq 1 + \frac{\lambda}{(2k)} \left( 2\|T_k\| + \frac{\lambda}{(2k)} \|T_k\|^2 \right) \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} &\leq 1 + \frac{\lambda}{(2k)} (4 + \epsilon) \\ &= 1 + \frac{\lambda}{k} (2 + \epsilon). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Luego usando los argumentos anteriores, para descartar la existencia de valores propios, concluimos que si  $\lambda < 1/(2 + \epsilon)$ , entonces no aparecen valores propios en una vecindad de 1 sobre  $S^1$ .

Por otra parte, una aproximación del máximo de  $\|T_E\|$  hecha computacionalmente es de  $\sqrt{5}+1 \sim 3,236067977$ , luego si  $\lambda < 1/(\text{máx } \|T_E\|)$  podemos asegurar que nuevamente no aparecen valores propios en  $S^1$ . De esta manera, podemos ver que hay una relación de ausencia de valores propios (una transición) en la medida que  $\lambda$  se acerca a los puntos extremos  $1/2$  y  $1/(\text{máx } \|T_E\|)$ , como lo muestran las ilustraciones.

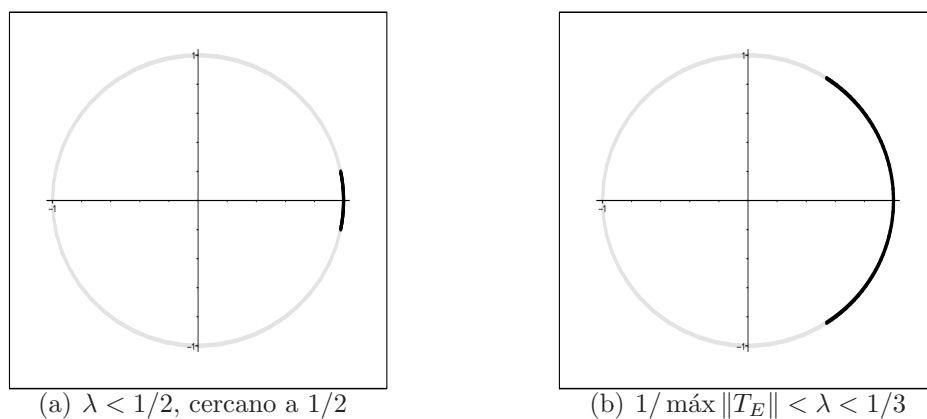


Figura 3.1: El arco más oscuro representa la ausencia de valores propios en  $S^1$

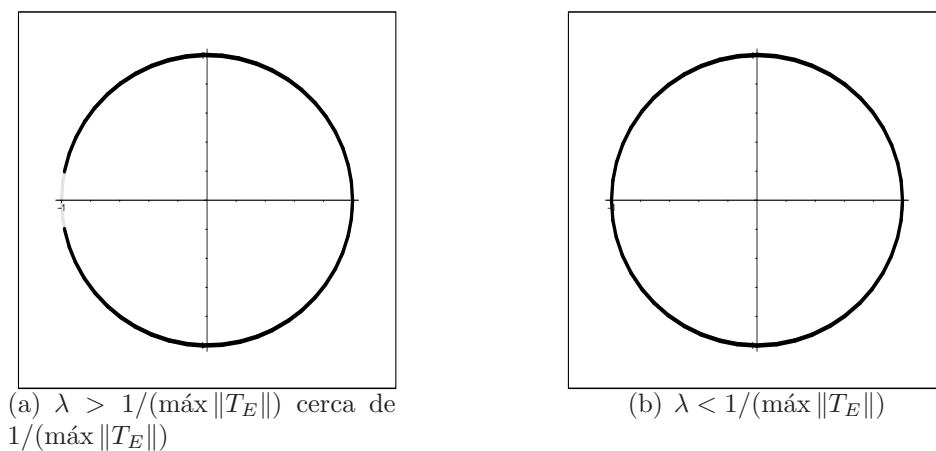


Figura 3.2: El arco más oscuro representa la ausencia de valores propios en  $S^1$

## A.1. Demostración desigualdad 2.2.8

Primero tomaremos el caso en que  $q \geq 4$ .

Si  $1 + x > 0$

$$(1 + x)^{\frac{q}{2}} \leq 1 + \frac{q}{2}x + C_1(x^2 + |x|^{\frac{q}{2}}) \quad (\text{A.1.1})$$

Esta desigualdad sigue, pues  $(1 + x)^{\frac{q}{2}} - 1 + \frac{q}{2}x$  es  $0(x^2)$  cuando  $x$  tiende a cero y  $0(x^{\frac{q}{2}})$  cuando  $x$  tiende a infinito (aquí se usa que  $q \geq 4$ ). Y tomando en cuenta que  $b > 0$  obtenemos estas desigualdades

$$\begin{aligned} \forall r > 1 \quad (a + b)^r &\leq 2^r \max(|a|, |b|)^r \leq 2^r (|a|^r + b^r) \\ b^2 &\leq b + b^{\frac{q}{2}} \\ |a|^{\frac{q}{2}} &\leq a^2 + |a|^q \end{aligned}$$

Así usando las desigualdades anteriores y A.1.1

$$\begin{aligned} (1 + a + b)^{\frac{q}{2}} &\leq 1 + \frac{q}{2}(a + b) + C_1((a + b)^2 + |(a + b)|^{\frac{q}{2}}) \\ &\leq 1 + \frac{q}{2}(a + b) + C_1(2^2(a^2 + b^2) + 2^{\frac{q}{2}}(|a|^{\frac{q}{2}} + b^{\frac{q}{2}})) \\ &\leq 1 + \frac{q}{2}(a + b) + C_1(2^2(a^2 + b + b^{\frac{q}{2}}) + 2^{\frac{q}{2}}(a^2 + |a|^q + b^{\frac{q}{2}})) \\ &\leq 1 + \frac{q}{2}a + C_q(b + b^{\frac{q}{2}} + a^2 + |a|^q) \end{aligned}$$

Para el caso en que  $q < 4$  usamos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{\frac{q}{2}} - 1 + \frac{q}{2}x}{x^{\frac{q}{2}}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)^{\frac{q}{2}} - 1 + \frac{q}{2}x}{x^2} = 0$$

Así deducimos que  $(1+x)^{\frac{q}{2}} \leq 1 + \frac{q}{2}x + C_q(x^2 + |x|^{\frac{q}{2}})$  y de manera similar a la anterior (caso  $q \geq 4$ ) se termina la demostración.

## A.2. Lema A.2

Sea

$$k_n = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{C}{i^{2\alpha}}\right)$$

donde  $C$  y  $\alpha$  son constantes positivas.

Entonces si  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,

$$C_1 n^{K_C} \leq k_n \leq C_2 (n^C)$$

con  $C_1, C_2, K_C$  constantes positivas.

Si  $\alpha \neq \frac{1}{2}$

$$C_1 e^{(n^{(1-2\alpha)}-1)K_C} \leq k_n \leq C_2 e^{(n^{(1-2\alpha)}-1)C}$$

DEMOSTRACIÓN: Para esto considere

$$\ln\left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{C}{i^{2\alpha}}\right)\right) = \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{C}{i^{2\alpha}}\right)$$

Ahora

$$\int_1^n \ln\left(1 + \frac{C}{x^{2\alpha}}\right) dx \leq \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{C}{i^{2\alpha}}\right) \leq \int_1^n \ln\left(1 + \frac{C}{x^{2\alpha}}\right) dx + \ln(1+C)$$

estimemos  $\int_1^n \ln\left(1 + \frac{C}{x^{2\alpha}}\right) dx$ , para esto usamos que existe  $K_C$  tal que para todo  $x \in [1, \infty]$ ,  $\frac{K_C}{x^{2\alpha}} \leq \ln\left(1 + \frac{C}{x^{2\alpha}}\right) \leq \frac{C}{x^{2\alpha}}$  con esto

$$\int_1^n \frac{K_C}{x^{2\alpha}} dx \leq \int_1^n \ln\left(1 + \frac{C}{x^{2\alpha}}\right) dx \leq \int_1^n \frac{C}{x^{2\alpha}} dx$$

si  $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\ln(n^{K_C}) \leq \int_1^n \ln\left(1 + \frac{C}{x}\right) dx \leq \ln(n^C)$$



luego

$$n^{K_C} \leq k_n \leq (1 + C)(n^C)$$

de manera análoga si  $\alpha \neq \frac{1}{2}$

$$e^{(n^{(1-2\alpha)}-1)K_C} \leq k_n \leq e^{(n^{(1-2\alpha)}-1)C} e^{(1+C)}$$

□

---

## Bibliografía

- [1] F. Delyon, B. Simon, B. Souillard, From power pure point to continuous spectrum in disordered systems, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys.* (1985), no. 3, 283–309.
- [2] O. Bourget, J. Howland, A. Joye, Spectral Analysis of Unitary Band Matrices. *Commun. Math. Phys.* (2003) no. 234, 191–227
- [3] B. Simon, Schrödinger semigroups. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 7 (1982), no. 3, 447–526.
- [4] H.L.Cycon, R.G Froese, W.Kirsch, B.Simon, *Schrödinger Operator*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [5] E. Hamza, A. Joye, G. Stolz, Localization for random unitary operators. *Lett. Math. Phys.* 75 (2006), no. 3, 255–272.
- [6] A Joye, Fractional moment estimates for random unitary operators. *Lett. Math. Phys.* 72 (2005), no. 1, 51–64.
- [7] A. Joye, Density of states and Thouless formula for random unitary band matrices. *Ann. Henri Poincaré* 5 (2004), no. 2, 347–379.
- [8] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*. Second edition. Academic Press, New York, 1980.
- [9] P. Hislop, D. Sigal, I. M. *Introduction to spectral theory with applications to Schrödinger operators*. Springer-Verlag, New York, 1996. Pag. 142
- [10] L. Breiman, *Probability*, Addison-Wesley, 1968.

- [11] V. Enss, K. Veselic, Bound states propagating states for time-dependent Hamiltonians, *Ann. Inst. H. Poincaré.* (1986), no. 39, 159–191.