



PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DERIVADA PROYECTIVA Y BILLARES HIPERBÓLICOS EXTERIORES

por

FERNANDA ALEJANDRA TORRES MORAGA

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la
Pontificia Universidad Católica de Chile, para optar al
grado académico de Magíster en Matemática.

Profesor guía:

Mario Andrés Ponce Acevedo

Comisión informante:

Godofredo Iommi (Pontificia Universidad Católica de Chile)

Carlos Vásquez (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso)

Agosto, 2015.

Santiago, Chile.

*Dedicado a mis amados padres
Juan y Marta.*

AGRADECIMIENTOS

Toda mi gratitud al que fue mi profesor durante años y guía en este trabajo, a mis excepcionales padres, hermano y abuelita, a mi familia incondicional, a mi angelito Negra, a mis princesitas de cuatro patas y Mario, a mis amigas del colegio, a mis *colegas* de la mítica M25, a todas las personas que componen la Facultad, y a mis amigos matemáticos y estadísticos de ayer y hoy. Gracias por su apoyo, ayuda, compañía y comprensión durante mis años de estudio de licenciatura y magíster. Gracias por estar en mi vida. Gracias a la vida! Los mejores recuerdos.

Tarda en llegar y al final hay recompensa.

Índice

1. Resumen	1
2. Transformaciones de Möbius	2
2.1. La recta proyectiva	2
2.2. Transformaciones de Möbius	4
2.3. Automorfismos de \mathbb{D}	9
2.4. Mapeo de Cayley	12
2.5. Automorfismos de \mathbb{H}	14
3. Geometría hiperbólica	15
3.1. Definiciones y propiedades básicas	15
3.2. Modelo del semiplano de Poincaré	16
3.2.1. Isometrías de \mathbb{H}	19
3.3. Modelo del disco unitario de Poincaré	21
4. Derivada proyectiva para mapeos en \mathbb{R}	27
4.1. Algunos resultados de rigidez	28
4.2. Condiciones de integrabilidad	29
5. Derivada proyectiva para mapeos del círculo	31
5.1. Condiciones de integrabilidad local	33
5.2. Algunos resultados de rigidez	35
5.3. Condiciones de integrabilidad global	36
5.4. Un loop en $PSL(2, \mathbb{R})$	37
5.5. Derivada proyectiva de $\theta \mapsto k\theta$: un ejemplo	38
6. Derivada proyectiva como cociclo	40
6.1. La derivada proyectiva como un cociclo dinámico	41
7. Derivada proyectiva para difeomorfismos de la recta proyectiva	42

8. Difeomorfismos del círculo y curvatura hiperbólica	44
8.1. Traza hiperbólica	44
8.2. Curvas convexas hiperbólicas y transformaciones inducidas al infinito	45
8.3. El teorema de los cuatro vértices	51
9. Una interpretación geométrica de la derivada proyectiva en el contexto de billares hiperbólicos exteriores	52

1. Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo estudiar propiedades de la llamada derivada proyectiva de funciones unidimensionales.

Como una aplicación particular revisamos ciertas propiedades geométricas de billares hiperbólicos exteriores, utilizando tópicos de geometría hiperbólica en conjunto con sistemas dinámicos.

La tesis se organiza de la siguiente manera: los capítulos 2 y 3, de carácter preliminar, son una revisión de conceptos, propiedades y resultados relacionados con transformaciones de Möbius y geometría hiperbólica, estudiando principalmente dos modelos del plano hiperbólico: el semiplano superior y el disco unitario de Poincaré. Los capítulos 4 al 7 tratan sobre el estudio de la derivada proyectiva, presentando resultados en mapeos de la recta real, del círculo, de la recta proyectiva, y propiedades como cociclo. El capítulo 8 relaciona la derivada proyectiva con las propiedades geométricas de los billares hiperbólicos exteriores, gracias a la revisión de una demostración que realiza David A. Singer [8] del teorema de los cuatro vértices en el plano hiperbólico. Al final de este trabajo, en el capítulo 9, hacemos una interpretación geométrica de la derivada proyectiva en el contexto de billares hiperbólicos exteriores, junto a un resumen de los resultados estudiados.

Esta investigación y los resultados aquí presentados están basados en el trabajo en preparación de los profesores Andrés Navas y Mario Ponce [1].

2. Transformaciones de Möbius

2.1. La recta proyectiva

Consideremos el plano \mathbb{R}^2 y el conjunto de rectas que pasan por el origen, al que denotaremos por $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Si buscamos una parametrización para los elementos de este conjunto, es posible encontrar más de una alternativa. Por ejemplo, dada una recta $\ell \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ podríamos parametrizarla según su ángulo de inclinación, lo que resultaría un poco ambiguo dependiendo del ángulo que escojamos. Otra posible parametrización sería la siguiente:

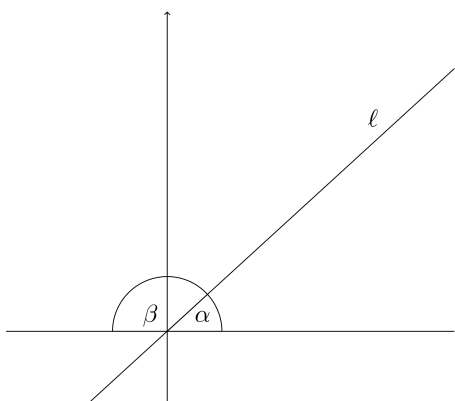


Figura 1: Parametrización 1

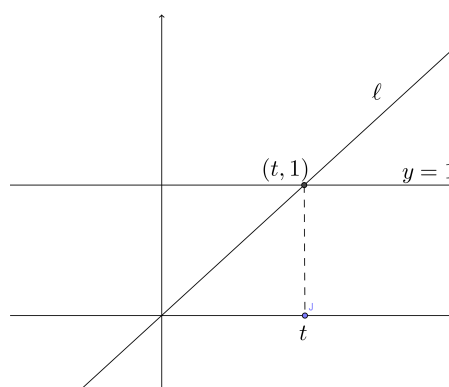


Figura 2: Parametrización 2

Consideremos la recta $y = 1$. Casi todas las rectas $\ell \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, salvo el eje real, la intersectan en un solo punto de la forma $(t, 1)$, con $t \in \mathbb{R}$. Entonces diremos que $\ell \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ la vamos a identificar con $t \in \mathbb{R}$, que corresponde a la abscisa del punto de intersección de ℓ con la recta $y = 1$. Bajo esta asignación, queda una recta sin identificar, la recta $y = 0$. A ésta le asignamos $\{-\infty, +\infty\}$, y si agregamos estos dos extremos identificados, entonces podemos pensar $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ como un círculo. Así, cualquier recta $\ell \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ la identificamos con $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Escribimos $\ell \sim t$.

Es claro que si $A \in GL(2, \mathbb{R})$, el conjunto de matrices invertibles de 2×2 , y si $\ell \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ entonces $A\ell \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$. Pero, ¿cómo actúa $GL(2, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$?

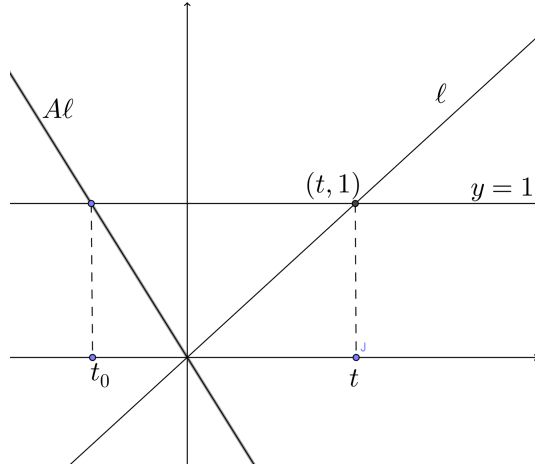


Figura 3: Acción de $GL(2, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R})$ y $\ell \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, $\ell \sim t$. Queremos calcular quién es $A\ell$, o “ $A \cdot t$ ” (recordar que A es una matriz y t un real; por eso las comillas en esta expresión). En vez de hacer actuar la matriz sobre $\ell \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$, la hacemos actuar sobre $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$; queremos saber qué elemento de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ corresponde con $A\ell$. Así

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix}.$$

Este punto pertenece a la recta $A\ell$, y para conocer su representante $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, debemos llevarlo a la recta $y = 1$. Luego,

$$\frac{1}{ct + d} \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{at + b}{ct + d} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

el cual es un punto de la forma $(t_0, 1)$ que pertenece a la recta $A\ell$. Sigue que la imagen de una recta que pasa por el origen, bajo la acción de una matriz invertible de 2×2 con

coeficientes en \mathbb{R} , la podemos identificar con $t_0 = \frac{at + b}{ct + d}$, esto es $Al \sim t_0$. Entonces, bajo la acción de A , tenemos que

$$t \mapsto \frac{at + b}{ct + d}.$$

Como $A \in GL(2, \mathbb{R})$, se debe tener que $\det(A) \neq 0$, o dicho de otro modo, $ad - bc \neq 0$.

Las aplicaciones de esta forma son entonces las transformaciones naturales que transforman rectas del plano en rectas del plano, bajo transformaciones lineales. Este tipo de mapeo recibe el nombre de **transformación de Möbius**.

2.2. Transformaciones de Möbius

Continuaremos con una revisión rápida de algunos resultados sobre mapeos lineales fraccionarios.

Definiciones y propiedades básicas

Definición 2.1 Una transformación de Möbius o mapeo lineal fraccionario es una función racional $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

La transformación de Möbius $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ es un mapeo holomorfo inyectivo de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$, cuya inversa está dada por

$$T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Es fácil ver que

$$T(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

$$T^{-1}(\infty) = \begin{cases} \frac{-d}{c}, & c \neq 0 \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

por lo que T define un biholomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$.

Además, la función T es una función holomorfa cuya derivada no se anula, pues

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}. \quad (1)$$

Una función holomorfa compleja cuya derivada no se anula, preserva la medida de los ángulos, o sea, es *conforme*. Así, se observa rápidamente de (1) que las transformaciones de Möbius son aplicaciones conformes.

El siguiente resultado es fácil de verificar:

Proposición 2.1 *La composición de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius. La inversa de una transformación de Möbius es una transformación de Möbius.*

Así, la colección de todas las transformaciones de Möbius forman un grupo con la composición, llamado el grupo de Möbius, el cual denotaremos por Möb .

Notemos que la ecuación de una recta en \mathbb{C} se puede escribir en la forma $ax + by + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, pero si escribimos en coordenadas $z = x + iy$, esta ecuación se transforma en:

$$\bar{p}z + p\bar{z} + c = 0 \quad (2)$$

con $p = \frac{a + ib}{2} \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, un círculo de radio $r \in \mathbb{R}$ y centro $p \in \mathbb{C}$ en estas mismas coordenadas, tiene ecuación $|z - p| = r$ lo que se expande a

$$|z|^2 - (\bar{p}z + p\bar{z}) + |p|^2 - r^2 = 0 \quad (3)$$

Así, todo círculo σ en $\hat{\mathbb{C}}$ tiene ecuación

$$t|z|^2 - (\bar{q}z + q\bar{z}) + s = 0 \quad (4)$$

con $t, s \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$. Si $t = 0$, entonces la ecuación corresponde a una recta como en (2). El valor s indica si σ pasa por el origen ($s = 0$) o no ($s \neq 0$).

Revisemos ahora algunos ejemplos especiales de transformaciones de Möbius:

- Inversión

Esta transformación es de la forma

$$I(z) = \frac{1}{z}$$

y mapea la circunferencia unitaria en ella misma, y el interior de ésta en su exterior (en $\hat{\mathbb{C}}$) biyectivamente. Notemos que bajo la aplicación de una inversión, la ecuación (4) se convierte en

$$s|z|^2 - (\bar{q}z + qz) + t = 0$$

la cual también resulta ser del tipo (4). Aún más, si σ es una recta que no pasa por el origen ($t = 0$, $s \neq 0$) entonces se convierte en una circunferencia que pasa por el origen, y viceversa, mientras que si σ es una recta que pasa por el origen ($t = 0$, $s = 0$), entonces se convierte en una recta que pasa por el origen.

- Traslación

Esta transformación es de la forma

$$T(z) = z + d$$

con $d \in \mathbb{C}$, y traslada todos los puntos del plano en la dirección del punto d . Es claro que transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias, trasladando el centro y conservando el radio. Más aún, bajo la aplicación de una traslación, la ecuación (4) se convierte en

$$t|z|^2 - ((\bar{q} - t\bar{d})z + (q - td)z) + t|c|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{q}c) + s = 0$$

la cual también resulta ser del tipo (4).

- Rotación

Esta transformación es de la forma

$$R(z) = qz$$

donde $q = e^{i\theta}$ produce un giro en un ángulo θ , específicamente, si $z = re^{i\alpha}$ es un punto en el plano, entonces $qz = e^{i\theta}re^{i\alpha} = re^{i(\theta+\alpha)}$. Es claro que transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias, rotando el centro y conservando el radio. Más aún, bajo la aplicación de una rotación, la ecuación (4) se convierte en

$$t|z|^2 - (\bar{q}e^{i\theta}z + qe^{-i\theta}\bar{z}) + s = 0$$

la cual también resulta ser del tipo (4).

- Homotecia

Esta transformación es de la forma

$$H(z) = kz$$

con $k > 0$. Aumenta o disminuye el módulo de cada número complejo según $k > 1$ o $k < 1$ respectivamente. Notemos que bajo la aplicación de una homotecia, la ecuación (4) se convierte en

$$tk^2|z|^2 - (\bar{q}kz + qk\bar{z}) + s = 0$$

la cual también resulta ser del tipo (4).

Concluimos de los ejemplos anteriores que la inversión transforma rectas y circunferencias en rectas o circunferencias. La traslación, rotación y homotecia transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias. También notamos que la homotecia y la rotación fijan el origen, mientras que la traslación fija el infinito.

Estos cuatro ejemplos bastan para describir cualquier mapeo lineal fraccionario. Es más, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.2 *Toda transformación de Möbius es una composición de traslaciones, inversiones, rotaciones y homotecias.*

Luego, con la proposición anterior y los resultados de los ejemplos, se tiene que:

Corolario 2.1 *Las transformaciones de Möbius transforman rectas y circunferencias euclidianas en rectas o circunferencias. Es decir, preservan los círculos en $\hat{\mathbb{C}}$.*

Es posible identificar algebraicamente Möb con un grupo de matrices. Una manera de asociar una matriz invertible de 2×2 con coeficientes en \mathbb{C} ($[T] \in GL(2, \mathbb{C})$) a una transformación de Möbius ($T \in \text{Möb}$) es:

$$\text{Si } T = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ entonces } [T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Con esta asociación, la multiplicación de matrices corresponde a la composición de mapeos lineales fraccionarios, es decir, $[T_1][T_2] = T_1 \circ T_2$.

Pero, para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la matriz $\lambda[T]$ también representa a la transformación T , por lo que la transformación T determina muchas posibles matrices representantes. Así, esta forma de asociar elementos de $GL(2, \mathbb{C})$ a elementos de Möb no es uno a uno.

Definamos el determinante de T como el valor $\det(T) = ad - bc$. Si multiplicamos T por una constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$, ésta no tiene efectos en la acción que hace T en $\hat{\mathbb{C}}$ pues

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}.$$

Aún así, los determinantes no son iguales, pues el determinante del lado izquierdo es $ad - bc$ mientras que el del lado derecho es $\lambda^2(ad - bc)$.

Siempre podemos escoger λ tal que el determinante de T sea 1. Esto aún sigue siendo un poco ambiguo porque podemos multiplicar todos los coeficientes de T por -1 y el determinante de T no cambiará.

Consideremos los siguientes grupos:

$$GL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc \neq 0 \right\}$$

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}$$

Ya vimos que una transformación de Möbius determina muchas matrices, por lo que asignación obvia de un elemento de Möb a un elemento de $GL(2, \mathbb{C})$ no está bien definida.

Al revés, consideramos la elección obvia de un elemento de $GL(2, \mathbb{C})$ a un elemento de Möb.

Definamos $\psi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Möb}$ por

$$\psi([T]) = T(z)$$

donde $[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

Se puede mostrar fácilmente que ψ es un homomorfismo con kernel $Ker(\psi) = \{\lambda Id : \lambda \in \mathbb{C}^*\}$. Sigue que Möb se identifica con $PGL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C})/Ker(\psi)$. Como $PGL(2, \mathbb{C}) = PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\{\pm Id\}$, por lo general uno escoge un representante $[T] \in SL(2, \mathbb{C})$.

2.3. Automorfismos de \mathbb{D}

Para determinar el grupo de automorfismos del disco unitario $\text{Aut}(\mathbb{D})$, definamos una transformación de Möbius útil y recordemos el Lema de Schwarz.

Definición 2.2 Si $a \in \mathbb{C}$ con $|a| \neq 1$, definimos la transformación de Möbius φ_a como

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Fácilmente se verifica que:

- $\varphi_a(0) = -a$ y $\varphi_a(a) = 0$.

- $\varphi'_a(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2}$ y por lo tanto $\varphi'_a(0) = 1 - |a|^2$ y $\varphi'_a(a) = \frac{1}{1 - |a|^2}$.
- $\varphi_a^{-1}(z) = \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$, es decir $\varphi_a^{-1} = \varphi_{-a}$.
- Si $a \in \mathbb{D}$ entonces $\varphi_a \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, el grupo de biholomorfismos del disco.

Notar que si $|z| = 1$ entonces $|\varphi_a(z)| = 1$ por lo que φ_a manda el círculo unitario en el círculo unitario. Como φ_a es un homeomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$ debe mandar biyectivamente a \mathbb{D} en el interior o el exterior del círculo unitario, es decir, en \mathbb{D} o en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{\mathbb{D}}$. Pero como $\varphi_a(0) = -a$, y $-a \in \mathbb{D}$ si $a \in \mathbb{D}$, entonces φ_a manda \mathbb{D} en \mathbb{D} . Es fácil ver que $\lambda\varphi_a$ también es un automorfismo de \mathbb{D} , con $|\lambda| = 1$.

Teorema 2.1 (Lema de Schwarz) *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa y tal que $f(0) = 0$. Entonces*

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{D} \quad (5)$$

y

$$|f'(0)| \leq 1 \quad (6)$$

Si la igualdad se alcanza en (5) o en (6) para algún $z \neq 0$, entonces f es una rotación rígida de la forma $f(z) = \lambda z$ con $|\lambda| = 1$.

Luego, si $f \in \text{Aut}\mathbb{D}$ con $a = f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$, entonces tanto $g = f \circ \varphi_a^{-1}$ como g^{-1} cumplen con las hipótesis del Lema de Schwarz. Esto permite concluir que $|g'(0)| = 1$, de donde $g(z) = \lambda z$ con λ una constante tal que $|\lambda| = 1$, y por lo tanto $f = \lambda\varphi_a$.

Sigue entonces que el grupo de automorfismos del disco unitario $\text{Aut}(\mathbb{D})$ es el subgrupo de Möb dado por

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto e^{i\kappa} \frac{z - \sigma}{1 - \bar{\sigma}z} : \sigma \in \mathbb{D} \text{ y } \kappa \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}.$$

A una transformación perteneciente a este grupo la denotaremos por $\mathcal{A}_{\kappa, \sigma}$.

Propiedades

De las propiedades de φ_σ es fácil ver que se cumplen las siguientes propiedades para $\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}(z)$:

1. $\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}(\sigma) = 0$.
2. $\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}(0) = -e^{i\kappa}\sigma$ de donde $\sigma = -e^{-i\kappa}\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}(0)$ y entonces $|\sigma| = |\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}(0)|$.
3. $(\mathcal{A}_{\kappa,\sigma})^{-1} = \mathcal{A}_{-\kappa,-e^{i\kappa}\sigma}$.
4. $\mathcal{A}'_{\kappa,\sigma}(z) = e^{i\kappa} \frac{1 - |\sigma|^2}{(1 - \bar{\sigma}z)^2}$ de donde $\mathcal{A}'_{\kappa,\sigma}(0) = e^{i\kappa}(1 - |\sigma|^2)$ y entonces $e^{i\kappa} = \frac{\mathcal{A}'_{\kappa,\sigma}(0)}{1 - |\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}(0)|^2}$.

Junto con la propiedad 2,

$$\sigma = -\frac{\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}(0)}{\mathcal{A}'_{\kappa,\sigma}(0)}(1 - |\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}(0)|^2)$$

5. Consideremos $\kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2$ y los respectivos automorfismos del disco asociados. Definamos $\mathcal{A}_{\kappa_3,\sigma_3} = \mathcal{A}_{\kappa_2,\sigma_2} \circ \mathcal{A}_{\kappa_1,\sigma_1}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\kappa_3,\sigma_3}(z) &= e^{i\kappa_2} \frac{(e^{i\kappa_1} \frac{z-\sigma_1}{1-\bar{\sigma}_1 z}) - \sigma_2}{1 - \bar{\sigma}_2 (e^{i\kappa_1} \frac{z-\sigma_1}{1-\bar{\sigma}_1 z})} \\ &= e^{i\kappa_2} \frac{e^{i\kappa_1} z - e^{i\kappa_1} \sigma_1 - \sigma_2 + \bar{\sigma}_1 \sigma_2 z}{1 - \bar{\sigma}_1 z - e^{i\kappa_1} \bar{\sigma}_2 z + e^{i\kappa_1} \sigma_1 \bar{\sigma}_2} \\ &= e^{i\kappa_2} \frac{e^{i\kappa_1} + \bar{\sigma}_1 \sigma_2}{1 + e^{i\kappa_1} \sigma_1 \bar{\sigma}_2} \frac{z - \frac{\sigma_1 + e^{-i\kappa_1} \sigma_2}{1 + e^{-i\kappa_1} \bar{\sigma}_1 \sigma_2}}{1 - \frac{\sigma_1 + e^{-i\kappa_1} \sigma_2}{1 + e^{-i\kappa_1} \bar{\sigma}_1 \sigma_2}} z \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} e^{i\kappa_3} &= \mathcal{A}_{\kappa_2,-\bar{\sigma}_1 \sigma_2}(e^{i\kappa_1}) \\ \sigma_3 &= \mathcal{A}_{0,-\sigma_1}(e^{-i\kappa_1} \sigma_2) \end{aligned}$$

6. Como $\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}$ es un mapeo lineal fraccionario, una representación en $SL(2, \mathbb{C})$ está dada por:

$$[\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}] = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} e^{i\kappa} & -\sigma e^{i\kappa} \\ -\bar{\sigma} & 1 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda^2 = e^{i\kappa}(1 - |\sigma|^2).$$

Luego, hay dos representaciones posibles:

$$\lambda = e^{i\kappa/2} \sqrt{1 - |\sigma|^2} \text{ y } \lambda = e^{i(\pi+\kappa/2)} \sqrt{1 - |\sigma|^2}. \quad (7)$$

Es fácil ver de las propiedades de φ_a que el mapeo $\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}$ es un biholomorfismo del disco unitario \mathbb{D} que preserva el círculo $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}$. Aún más, $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\kappa,\sigma}$ define un difeomorfismo analítico positivo del círculo

$$\begin{aligned} A : \mathbb{T}^1 &\rightarrow \mathbb{T}^1 \\ \theta &\mapsto A(\theta) \end{aligned}$$

mediante la regla

$$e^{iA(\theta)} = \mathcal{A}_{\kappa,\sigma}(\theta).$$

A tal difeomorfismo A se le llama *mapeo de Möbius del círculo inducido por \mathcal{A}* .

2.4. Mapeo de Cayley

Sea $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ el semiplano superior y consideremos la transformación de Möbius $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$ dada por

$$\phi(z) = \frac{iz + 1}{z + i} \quad (8)$$

tal que $\phi(0) = -i$, $\phi(1) = 1$ y $\phi(\infty) = i$.

La función ϕ manda el eje real (único círculo pasando por $0, 1, \infty$) al círculo unitario centrado en el origen \mathbb{T} (único círculo pasando por $-i, 1, i$). Además, como ϕ es un homeomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$, \mathbb{H} debe ser enviado sobre una de las componentes de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{T}$. Como $i \in \mathbb{H}$ es enviado a $\phi(i) = 0 \in \mathbb{D}$, ϕ envía \mathbb{H} a la componente \mathbb{D} .

De manera análoga, la inversa $\phi^{-1}(z) = \frac{-iz + 1}{z - i}$ envía \mathbb{D} en \mathbb{H} . Así, restringido a \mathbb{H} , ϕ es un biholomorfismo entre \mathbb{H} y \mathbb{D} .

Notar que la función ϕ que mapea \mathbb{H} en \mathbb{D} acepta muchas representaciones. La que damos es solo una de las varias posibilidades.

Una representación matricial para ϕ , como la definimos en (8), es

$$[\phi] = \frac{1}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Así, un automorfismo del disco $\mathcal{A}_{\kappa, \sigma}$ corresponde a un automorfismo de \mathbb{H} , $S_{\kappa, \sigma}$, definido como

$$S_{\kappa, \sigma} = \phi^{-1} \circ \mathcal{A}_{\kappa, \sigma} \circ \phi.$$

La representación en $SL(2, \mathbb{R})$ de $S_{\kappa, \sigma}$ está dada por

$$[S_{\kappa, \sigma}] = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\kappa} & -\sigma e^{i\kappa} \\ -\bar{\sigma} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

con λ como en (7).

¿Cómo transforma las rectas?

Notemos que las rectas verticales en \mathbb{H} son enviadas bajo ϕ a arcos de circunferencia en \mathbb{D} que son ortogonales a \mathbb{T} en i (pues ϕ es conforme), mientras que las rectas horizontales en \mathbb{H} son enviadas bajo ϕ a círculos en \mathbb{D} que son tangentes a \mathbb{T} en i . Las rectas de la forma $y = mx$ en \mathbb{H} , $m \neq 0$, son enviadas bajo ϕ a arcos de circunferencia en \mathbb{D} que intersectan a \mathbb{T} en $-i$ e i , no ortogonalmente.

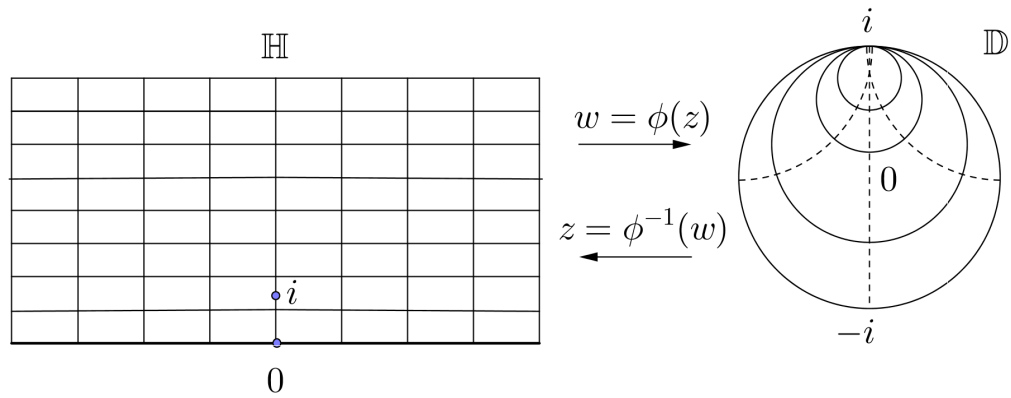


Figura 4: Transformación de rectas bajo ϕ

2.5. Automorfismos de \mathbb{H}

Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc > 0$, entonces

$$\operatorname{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{(ad - bc)\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

Todas las transformaciones de Möbius que preservan el plano superior \mathbb{H} son de este tipo, es decir,

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{ z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc > 0 \right\}.$$

3. Geometría hiperbólica

3.1. Definiciones y propiedades básicas

El geómetra griego Euclides recopiló conceptos y conocimientos matemáticos de su época, en una obra escrita alrededor del año 300 A.C. y denominada *Los Elementos*.

Los cinco postulados que Euclides enuncia en su obra *Los Elementos* son:

- Entre dos puntos cualesquiera se puede trazar un segmento de recta.
- Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
- Dado un centro y un radio cualquiera se puede trazar un circunferencia.
- Los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela a dicha recta.

En el siglo XIX matemáticos como Lobachevsky, Gauss y Bolyai trabajaron para demostrar que existían sistemas geométricos en los cuales se cumplían los primeros cuatro postulados, pero no el quinto, lo que suponía que éste último era independiente de los otros. Esto dio paso a las geometrías no euclidianas.

La negación del quinto postulado de Euclides entonces da lugar a dos posibles alternativas:

1. Dada una recta y un punto exterior a ella, por ese punto no pasa ninguna paralela a la recta dada.
2. Dada una recta y un punto exterior a ella, por ese punto pasan al menos dos paralelas a la recta dada.

Los primeros cuatro postulados junto con la alternativa 1 dan lugar a la **geometría elíptica**, mientras que los primeros cuatro postulados junto con la alternativa 2 dan lugar a la **geometría hiperbólica**, en la cual nos centraremos.

Describiremos dos modelos para el plano hiperbólico. Por modelo entendemos una elección de un espacio subyacente, junto con una representación de objetos geométricos básicos como puntos y rectas, además de una noción de distancia entre puntos, longitud de curvas, entre otros.

Algunos de los modelos para representar el plano hiperbólico son:

- El modelo de Klein.
- El modelo de Lorentz o hiperboloide.
- El modelo del semiplano de Poincaré.
- El modelo del disco de Poincaré.

Acá nos centraremos en dos modelos, en los cuales el espacio subyacente está contenido en \mathbb{C} .

3.2. Modelo del semiplano de Poincaré

El espacio subyacente de este modelo es el semiplano superior \mathbb{H} del plano complejo \mathbb{C} , definido por

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

Usamos la noción usual de punto que \mathbb{H} hereda de \mathbb{C} , esto es, un punto en \mathbb{H} es un número complejo $z \in \mathbb{H}$.

Definición 3.1 *Una recta hiperbólica en \mathbb{H} es la intersección con el plano \mathbb{H} de una recta euclidiana en \mathbb{C} perpendicular al eje real \mathbb{R} o una circunferencia euclidiana con centro en el eje real \mathbb{R} .*

Definición 3.2 *Los puntos ideales de la recta son los puntos obtenidos por la intersección de ésta con \mathbb{R} . Tales puntos no pertenecen a la recta. También se conocen como puntos al infinito.*

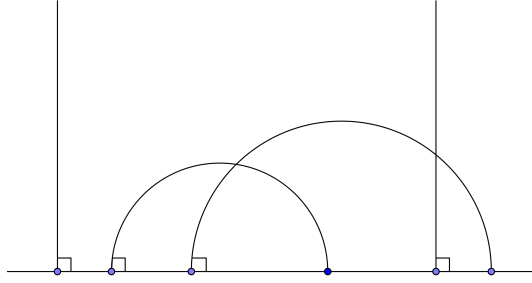


Figura 5: Rectas hiperbólicas en \mathbb{H}

Proposición 3.1 *Para cada par de puntos distintos p y q en \mathbb{H} , existe una única recta en \mathbb{H} a la cual ellos pertenecen.*

Distinguiremos 2 posiciones relativas a las rectas: paralelas y secantes.

Definición 3.3 *Dos rectas hiperbólicas distintas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas si no se intersectan. En caso contrario decimos que son secantes.*

Teorema 3.1 *Sea ℓ una recta en \mathbb{H} y sea p un punto en \mathbb{H} que no pertenece a ℓ . Entonces existen infinitas rectas a través de p que son paralelas a ℓ .*

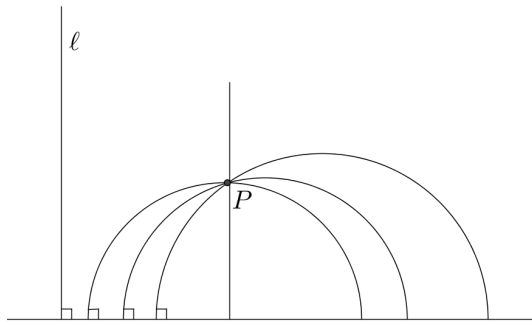


Figura 6: Representación del Teorema 3.1

Pasaremos a describir la construcción de una métrica en \mathbb{H} .

Definición 3.4 La longitud hiperbólica de una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ en \mathbb{H} se define como

$$l(\gamma) := \int_a^b \operatorname{Im}(\gamma(t))^{-1} |\gamma'(t)| dt.$$

Definición 3.5 La distancia hiperbólica entre dos puntos p y q en \mathbb{H} se define como

$$\rho(p, q) := \inf\{l(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q, \gamma \text{ de clase } C^1\}.$$

Ejemplo 3.1 Sean $p = ia$, $q = ib$, con $a, b > 0$ dos puntos en el eje imaginario positivo.

Supongamos $a < b$. Sea $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{H}$ una curva que une p con q . Entonces

$$\begin{aligned} l(\gamma(t)) &= \int_c^d \operatorname{Im}(\gamma(t))^{-1} |\gamma'(t)| dt = \int_c^d \frac{\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2}}{\gamma_2(t)} dt \\ &\geq \int_c^d \frac{|\gamma_2'(t)|}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_c^d \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} dt = \log(\gamma_2(d)) - \log(\gamma_2(c)) \\ &= \log\left(\frac{\gamma_2(d)}{\gamma_2(c)}\right) = \log(ib/ia) = \log(b/a) \end{aligned}$$

Sigue que

$$\rho(p, q) = \rho(ia, ib) = \log(b/a).$$

La distancia ρ define una métrica en \mathbb{H} . Al semiplano superior provisto con la métrica así definida se le llama el **plano hiperbólico** y a la métrica, métrica hiperbólica.

Definición 3.6 La métrica hiperbólica en \mathbb{H} , en coordenadas $z = x + iy$, está dada por

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Otro elemento importante a considerar en este modelo son las geodésicas.

Definición 3.7 Una geodésica es una curva $\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{H}$ que minimiza distancia.

Ejemplo 3.2 La curva $\alpha(t) = it$ del ejemplo anterior es una geodésica.

3.2.1. Isometrías de \mathbb{H}

Definición 3.8 Las isometrías, o movimientos rígidos, de \mathbb{H} son aquellas transformaciones biyectivas T del semiplano en sí mismo que preservan la distancia hiperbólica entre puntos, esto es

$$\rho(T(p), T(q)) = \rho(p, q).$$

Observemos que si σ es una geodésica y T es una isometría, entonces $T \circ \sigma$ es también una geodésica (pues T preserva la distancia). Por lo tanto $T \circ \alpha$, con α como en el ejemplo, determina una geodésica para cada isometría T . Así, si logramos determinar todas las isometrías de \mathbb{H} , podremos describir muchas de las geodésicas en \mathbb{H} . Más aún, probaremos que toda geodésica es de la forma $T \circ \alpha$, para alguna isometría T .

Llamaremos G al subconjunto de transformaciones de Möbius dado por

$$G = \left\{ T(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Notemos que todo elemento de G preserva el semiplano superior, el semiplano inferior y la recta real extendida $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Revisaremos dos resultados que ayudarán a determinar una fórmula explícita para la distancia hiperbólica entre dos puntos:

Lema 3.1 Si $\gamma : (a, b) \mapsto \mathbb{H}$ es una curva y $T \in G$, entonces $l(\gamma) = l(T(\gamma))$.

Demostración: Si $T \in G$ entonces

$$T'(z) = \frac{1}{|cz + d|^2} \quad \text{y} \quad \text{Im}(T(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

Sigue que

$$\lambda(T(\gamma(t)))|T'(\gamma(t))| = \frac{|T'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|}{\text{Im}(T(\gamma(t)))} = \frac{\gamma'(t)}{\text{Im}(\gamma(t))} = \lambda(\gamma(t))|\gamma'(t)|.$$

Por lo tanto, $l(T(\gamma)) = l(\gamma)$. ■

Lema 3.2 Si $p, q \in \mathbb{H}$ entonces existe $T \in G$ tal que $T(p) = ia$ y $T(q) = ib$ con $a, b > 0$.

Los dos resultados anteriores permiten demostrar lo siguiente:

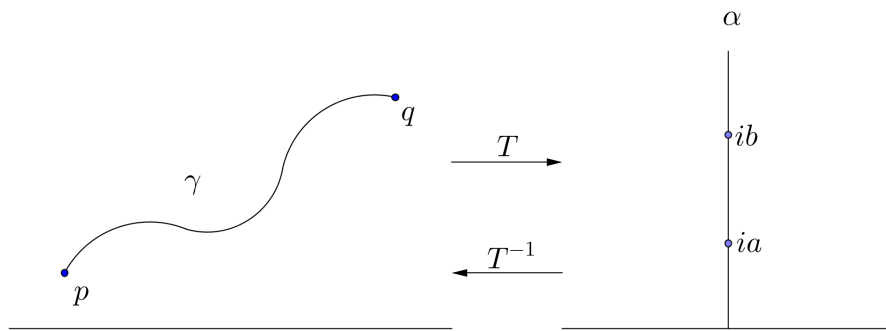
Teorema 3.2 *Si $p, q \in \mathbb{H}$ entonces*

$$\rho(p, q) = \log \frac{|p - \bar{q}| + |p - q|}{|p - \bar{q}| - |p - q|} \quad (6)$$

$$\cosh \rho(p, q) = 1 + \frac{|p - q|^2}{2\text{Im}(p)\text{Im}(q)}. \quad (7)$$

Así, todo elemento del grupo G preserva las distancias entre puntos de \mathbb{H} , por lo que son isometrías, pero no son todas las isometrías del plano \mathbb{H} , como veremos más adelante.

Hasta aquí, hemos probado que la geodésica entre dos puntos del eje imaginario es la curva $\alpha(t) = it$. Si $p, q \in \mathbb{H}$ y $T \in G$ es tal que $T(p) = ia$ y $T(q) = ib$ entonces $l(T^{-1} \circ \alpha) = l(\alpha) = \rho(ia, ib) = \rho(T(p), T(q)) = \rho(p, q)$, por lo que $T^{-1} \circ \alpha$ sería geodésica entre p y q . Por otro lado, si γ es una geodésica entre p y q , entonces $T \circ \gamma$ es geodésica entre ia e ib . Sigue que $T \circ \gamma = \alpha$ de donde $\gamma = T^{-1} \circ \alpha$. Luego todas las geodésicas son de la forma $L \circ \alpha$ para alguna isometría $L \in G$.



Finalmente, si $T \in G$, entonces la imagen bajo T del eje imaginario positivo es la intersección de \mathbb{H} con una recta o circunferencia euclidiana perpendicular al eje real. Por lo tanto, si γ es una geodésica, su imagen está contenida en una recta perpendicular al eje real o en un arco de circunferencia con centro en el eje real. Así, es posible demostrar que las geodésicas en \mathbb{H} son precisamente las rectas hiperbólicas descritas en un comienzo.

Definición 3.9 Llamamos *reflexión* o *simetría axial* a las funciones del tipo $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ tal que $S(z) = -\bar{z}$.

Esta función S (observar que no es una transformación de Möbius) es biyectiva y preserva la distancia entre puntos (esto último sale directo de la ecuación (6)). Tiene la propiedad de fijar todos los puntos de la recta $\{it : t > 0\}$ y mapear cada uno de los semiplanos determinados por esta recta en el opuesto. A la recta $\{it : t > 0\}$ se le denomina eje de la simetría axial.

Teorema 3.3 *Toda isometría de \mathbb{H} es un elemento de G o es la composición de un elemento de G con una reflexión. Es decir, si ϕ es una isometría de \mathbb{H} , entonces es de una de las siguientes formas:*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \text{ o } z \mapsto \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$.

3.3. Modelo del disco unitario de Poincaré

El espacio subyacente de este modelo es el disco unitario \mathbb{D} como subconjunto del plano complejo \mathbb{C} , definido por

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Usamos la noción usual de punto que \mathbb{D} hereda de \mathbb{C} , esto es, un *punto* en \mathbb{D} es un número complejo $z \in \mathbb{D}$.

Muchas de los conceptos y propiedades descritas en el modelo del semiplano superior, se heredan a este modelo mediante la aplicación del mapeo de Cayley.

Definición 3.10 *Una recta en \mathbb{D} es la intersección del disco \mathbb{D} con un círculo $\sigma \in \hat{\mathbb{C}}$ ortogonal a \mathbb{S}^1 .*

Definición 3.11 *Los puntos ideales de la recta son los puntos unitarios obtenidos por la intersección del círculo $\sigma \in \hat{\mathbb{C}}$ con \mathbb{S}^1 . Tales puntos no pertenecen a la recta. También se conocen como puntos al infinito.*

Al igual que en el modelo del semiplano superior, es posible construir una distancia ρ que defina una métrica. En este caso la longitud hiperbólica de una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ en \mathbb{D} se define como $l(\gamma) := \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt$.

El disco unitario provisto con la métrica definida por el largo de curva anterior se le llama el plano hiperbólico.

Las geodésicas en este modelo, al igual que en el anterior, resultan ser las rectas hiperbólicas.

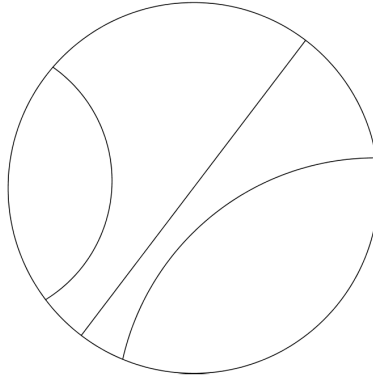


Figura 7: Geodésicas en \mathbb{D}

Definición 3.12 *La métrica hiperbólica en \mathbb{D} , en coordenadas $z = x + iy$, está dada por*

$$ds^2 = \left(\frac{2}{1-x^2-y^2} \right)^2 (dx^2 + dy^2). \quad (8)$$

Sea M una variedad. Denotemos por $\chi(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^∞ en M y por $\mathcal{D}(M)$ el anillo de todas las funciones real-valuadas de clase C^∞ definidas en M .

Definición 3.13 Una conexión afín en una variedad diferenciable M es un mapeo $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ denotado por $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ y tal que satisface las siguientes propiedades:

$$(i) \quad \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$$

$$(ii) \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$$

$$(iii) \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

en donde $X, Y, Z \in \chi(M)$ y $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposición 3.2 Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇ . Entonces existe una única correspondencia la cual asocia a un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $\mathbf{c} : I \rightarrow M$, otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de \mathbf{c} , llamada la derivada covariante de V a lo largo de \mathbf{c} tal que:

$$(i) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$$

$$(ii) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{Df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}, \text{ donde } V \text{ es un campo vectorial a lo largo de } \mathbf{c} \text{ y } f \text{ es una función diferenciable en } I.$$

$$(iii) \quad \text{Si } V \text{ es inducido por un campo vectorial } Y \in \chi(M), \text{ i.e., } V(t) = Y(\mathbf{c}(t)), \text{ entonces } \frac{DV}{dt} = \nabla_{d\mathbf{c}/dt} Y.$$

Un concepto importante que necesitaremos más adelante, es el de curvatura geodésica.

Definición 3.14 Sea γ una curva en una variedad \overline{M} , arcoparametrizada, con vector tangente unitario $T = \frac{d\gamma}{ds}$. Su curvatura geodésica es la norma de la derivada covariante de T , es decir, $K = \left\| \frac{DT}{ds} \right\|$.

Ejemplo 3.3 Consideremos \mathbb{H} con la métrica dada por $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$, $g_{12} = g_{21} = 0$, cuyos símbolos de Christoffel de la conexión Riemanniana están dados por $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$, $\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$.

Consideremos la curva $y = y_0$, arcoparametrizada por $x(s) = y_0s$, $y(s) = y_0$, cuyo vector tangente está dado por $T(s) = (y_0, 0)$.

Entonces,

$$\frac{DT}{ds} = \nabla_T T = \nabla_{y_0 X} (y_0 X) = y_0^2 \nabla_X X = y_0^2 \frac{1}{y_0} Y = y_0 Y.$$

Luego,

$$\langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle = \langle y_0 Y, y_0 Y \rangle = y_0^2 \langle Y, Y \rangle = y_0^2 \frac{1}{y_0^2} = 1.$$

Por lo tanto,

$$K = 1.$$

Ejemplo 3.4 Consideremos \mathbb{H} con la misma métrica del ejemplo anterior. Consideremos la curva $y = mx$ arcoparametrizada por $x(s) = \exp\left(\frac{ms}{\sqrt{m^2+1}}\right)$, $y(s) = m \exp\left(\frac{ms}{\sqrt{m^2+1}}\right)$.

Entonces,

$$\frac{DT}{ds} = \nabla_T T = -\frac{m^2 x}{m^2+1} X + \frac{mx}{m^2+1} Y.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_T T, \nabla_T T \rangle &= \left\langle -\frac{m^2 x}{m^2+1} X + \frac{mx}{m^2+1} Y, -\frac{m^2 x}{m^2+1} X + \frac{mx}{m^2+1} Y \right\rangle \\ &= \frac{m^4 x^2}{(m^2+1)^2} \langle X, X \rangle - 2 \frac{m^3 x^2}{(m^2+1)^2} \langle X, Y \rangle + \frac{m^2 x^2}{(m^2+1)^2} \langle Y, Y \rangle \\ &= \frac{m^4 x^2}{(m^2+1)^2} \frac{1}{(mx)^2} + \frac{m^2 x^2}{(m^2+1)^2} \frac{1}{(mx)^2} = \frac{m^2}{(m^2+1)^2} + \frac{1}{(m^2+1)^2} = \frac{1}{m^2+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$K = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}.$$

A continuación describiremos algunas curvas en \mathbb{D} (y en \mathbb{H}) que serán de nuestro interés más adelante.

- Un **círculo hiperbólico** con centro hiperbólico $c \in \mathbb{D}$ de radio hiperbólico r es el conjunto

$$\sigma = \{z \in \mathbb{D} : \rho(c, z) \leq r\}$$

Es una curva de curvatura geodésica constante K con $K > 1$. En \mathbb{D} está representada por un círculo que no intersecta al círculo unitario. En \mathbb{H} está representada por un círculo que no intersecta a la recta real.

- Un **horociclo** es la curva límite de círculos pasando por un punto dado u cuando el radio tiende a infinito, es decir, cuando el centro se aleja del punto u . Es una curva de curvatura geodésica constante igual a 1. En \mathbb{D} está representada por un círculo tangente al círculo unitario. En \mathbb{H} está representada por círculos tangentes a la recta real y por rectas paralelas a la recta real.

Hay que observar que un horociclo no es un círculo hiperbólico. Es un círculo euclidiano σ contenido en \mathbb{D} o en \mathbb{H} , perforado en un punto ideal.

En el plano euclidiano se confunden, ya que las geodésicas son rectas y los horociclos también lo son. Es decir, de manera euclidiana las geodésicas y horociclos se ven iguales, aunque en la geometría hiperbólica son distintos.

- Una **curva equidistante** o hiperciclo es una curva a distancia constante de una geodésica. Es decir, dada una geodésica y una distancia $d > 0$, busco todos los puntos a distancia d de la geodésica, y ellos determinan dos curvas equidistantes. A la geodésica se le llama eje de la curva equidistante. Es una curva de curvatura constante K , con $0 < K < 1$. En \mathbb{D} está representada por semicírculos con extremos tangentes a \mathbb{S}^1 . En \mathbb{H} está representada por arcos de círculo o rectas diagonales (intersectando a su eje en la recta real).

Notar que todas las geodésicas son curvas equidistantes, pues ellas yacen a distancia constante de ellas mismas. Sin embargo, las curvas equidistantes no son geodésicas.

Estos 3 tipos de curvas tienen curvatura geodésica constante porque cada una de ellas es invariante bajo familias de isometrías. Basta con probar que si elegimos dos puntos distintos en la curva y calculamos la curvatura en cada uno de ellos, el resultado es el mismo. Pero sabemos que dado un punto existe una transformación de Möbius que manda ese punto en el otro punto, y la curva en la curva. Entonces la curvatura en el primer punto pasa, por una transformación de Möbius, a la curvatura en el otro punto. Pero las transformaciones de Möbius preservan curvatura, así es que la curvatura en ambos puntos debe ser igual. En el círculo hiperbólico la isometría es la rotación, en el horociclo es la traslación, mientras que en curvas equidistantes es la homotecia.

En resumen, la intersección no vacía $\sigma \cap \mathbb{D}$, σ círculo en $\hat{\mathbb{C}}$, determina una de las siguientes curvas en \mathbb{D} : una recta hiperbólica (σ ortogonal a \mathbb{S}^1), un círculo hiperbólico (σ contenido en \mathbb{D}), un horociclo (σ tangente a \mathbb{S}^1) o una curva equidistante (σ no es ortogonal ni tangente a \mathbb{S}^1).

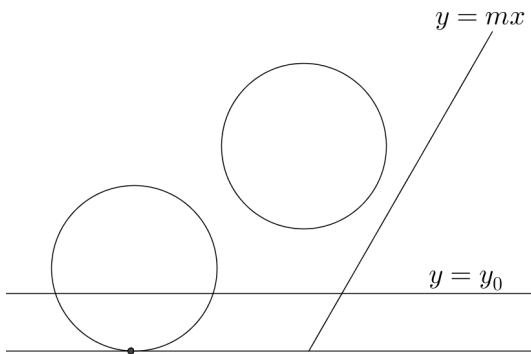


Figura 8: Curvas en \mathbb{H}

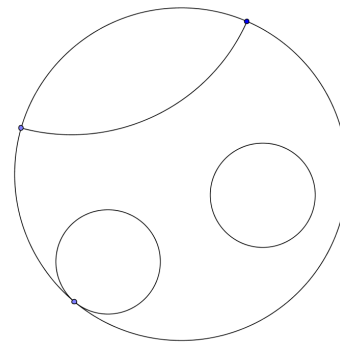


Figura 9: Curvas en \mathbb{D}

4. Derivada proyectiva para mapeos en \mathbb{R}

En este capítulo revisaremos la definición y propiedades de la transformación de Möbius que aproxima a mapeos de \mathbb{R} .

Sea $f : (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 definida en un intervalo abierto (α, β) . Para cada punto $x_0 \in (\alpha, \beta)$ queremos definir un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ tal que el mapeo proyectivo asociado sea una buena aproximación de f en el punto x_0 .

Proposición 4.1 *Para cada $x_0 \in (\alpha, \beta)$ tal que $f'(x_0) \neq 0$, existe un mapeo proyectivo $\mathcal{T}_{f,x_0} \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que*

$$f(x) = \mathcal{T}_{f,x_0}(x) + O(x - x_0)^3. \quad (9)$$

Tal mapeo proyectivo es único cuando es considerado como elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$. Como consideramos f definida en un intervalo, siempre podemos escoger $\mathcal{T}_{f,x_0} \in SL(2, \mathbb{R})$ continuamente en x_0 .

Demostración: Un mapeo $\mathcal{T} \in SL(2, \mathbb{R})$ verificando (9) debe satisfacer:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(x_0) &= f(x_0) \\ \mathcal{T}'(x_0) &= f'(x_0) \\ \mathcal{T}''(x_0) &= f''(x_0) \\ ad - bc &= 1 \end{aligned}$$

con $\mathcal{T}(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$.

Esto da las siguientes ecuaciones:

$$\frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} = f(x_0) \quad (10)$$

$$\frac{1}{(cx_0 + d)^2} = f'(x_0) \quad (11)$$

$$\frac{-2c}{(cx_0 + d)^3} = f''(x_0) \quad (12)$$

$$ad - bc = 1 \quad (13)$$

De las cuales obtenemos que el mapeo \mathcal{T} está determinado por:

$$a = \left(1 - \frac{f(x_0)f''(x_0)}{2f'(x_0)^2}\right) f'(x_0)^{1/2} \quad (14)$$

$$b = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)^{1/2}} - \left(1 - \frac{f(x_0)f''(x_0)}{2f'(x_0)^2}\right) f'(x_0)^{1/2}x_0 \quad (15)$$

$$c = -\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)^{3/2}} \quad (16)$$

$$d = \frac{1}{f'(x_0)^{1/2}} + \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)^{3/2}}x_0 \quad (17)$$

■

El mapeo \mathcal{T}_{f,x_0} es llamado la **derivada proyectiva de f en x_0** . Esta es una idea estudiada por William Thurston, también conocida como "best Möbius approximation" [5].

4.1. Algunos resultados de rigidez

Proposición 4.2 Si $\mathcal{T}_{f,x}$ es igual al mapeo proyectivo constante $\mathcal{A} \in SL(2, \mathbb{R})$ para todo x , entonces $f(x) = \mathcal{A} \cdot x$ para todo x .

Proposición 4.3 Si $a(x) = d(x)$ para todo x , entonces f es igual a un mapeo proyectivo constante en $SL(2, \mathbb{R})$

Demostración: Recordemos que existe \mathcal{T}_{f,x_0} tal que $f(x) = \mathcal{T}_{f,x_0}(x) + O(x - x_0)^3$ con $\mathcal{T}_{f,x_0} = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}$ donde a, b, c, d dependen de x_0 .

Utilizando (14) y (17), de la condición $a(x) = d(x)$ obtenemos que

$$2f'(x)^2 - f(x)f''(x) = 2f'(x) + xf''(x).$$

La ecuación anterior dice que f resuelve la ecuación diferencial ordinaria

$$2g'^2 - 2g' - (x + g)g'' = 0$$

con condiciones iniciales $g(x_0) = f(x_0)$ y $g'(x_0) = f'(x_0)$. Pero el mapeo \mathcal{T}_{f,x_0} también verifica esta ecuación diferencial ordinaria con las mismas condiciones iniciales. Por lo tanto, f debe coincidir con \mathcal{T}_{f,x_0} . ■

Corolario 4.1 Si $\mathcal{T}_{f,x}$ pertenece al subgrupo de rotaciones $SO(2, \mathbb{R})$ para todo x , entonces f es igual a la rotación constante en $SO(2, \mathbb{R})$

Demostración: Recordemos que $\mathcal{A} \in SL(2, \mathbb{R})$ pertenece a $SO(2, \mathbb{R})$ si y sólo si $a(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A})$ y $b(\mathcal{A}) = -c(\mathcal{A})$. ■

Los mismos argumentos para la demostración de la Proposición 4.3 nos permite probar el siguiente resultado de rigidez más general:

Teorema 4.1 Sea $P : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio no constante. Supongamos que

$$P(a_g, b_g, c_g, d_g) = 0$$

induce una ecuación diferencial ordinaria en g . Sea $f \in C^2$. Si

$$P(a_f(x), b_f(x), c_f(x), d_f(x)) = 0$$

para todo x , entonces f es igual a un mapeo proyectivo constante en $SL(2, \mathbb{R})$

Observación: Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ un mapeo holomorfo definido en un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Para $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$, podemos buscar la mejor transformación de Möbius \mathcal{T}_{f,z_0} en z_0 entendida como la transformación de Möbius que coincide con f en cero, primer y segundo orden en el punto z_0 . Las mismas construcciones anteriores pueden ser realizadas, reemplazando $SL(2, \mathbb{R})$ por $SL(2, \mathbb{C})$.

4.2. Condiciones de integrabilidad

Dada una familia $\mathcal{A} : (\alpha, \beta) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ dependiendo suavemente de un parámetro real $x \in (\alpha, \beta)$, estamos interesados en saber sobre la existencia de una función de clase C^2 $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A}(x) = \mathcal{T}_{f,x}$ para todo x . Notar que en particular debemos tener

$$\mathcal{A}(x) \cdot x = f(x) \text{ para todo } x$$

y por lo tanto tal función debe ser única. Así, el único candidato para f es la función $x \mapsto \mathcal{A}(x) \cdot x$. Analicemos esta posibilidad:

Escribamos

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \quad (18)$$

En este caso, la condición (11) es:

$$\frac{1}{(cx + d)^2} = \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)' \quad (19)$$

$$= \frac{(a'x + a + b')(cx + d) - (c'x + c + d')(ax + b)}{(cx + d)^2} \quad (20)$$

Agrupando términos, vemos que \mathcal{A} debe satisfacer

$$x^2(a'c - ac') + x(a'd - ad' + b'c - bc') + b'd - bd' = 0 \quad (21)$$

para todo x . Asumiendo que (21) se verifica, la condición (12) resulta:

$$\frac{-2c}{(cx + d)^3} = \frac{-2(c'x + c + d')}{(cx + d)^3}$$

lo que nos lleva a la segunda condición de integrabilidad

$$c'x + d' = 0$$

para todo x . Usando que $(ad - bc)' = 0$ podemos escribir las condiciones como

$$c^2x^2 \left(\frac{a}{c} \right)' + 2x(b'c - ad') + d^2 \left(\frac{b}{d} \right)' = 0 \quad (22)$$

$$c'x + d' = 0 \quad (23)$$

Proposición 4.4 *Sea $\mathcal{A} : (\alpha, \beta) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ un mapeo de clase C^1 . Entonces existe una función $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\mathcal{T}_{f,x} = \mathcal{A}(x)$ para todo x si y sólo si las condiciones (22) y (23) se cumplen. Aún más, esta función es única y verifica que $f(x) = \mathcal{A}(x) \cdot x$ para todo x . En particular, f es un difeomorfismo positivo sobre su imagen.*

5. Derivada proyectiva para mapeos del círculo

Dado f un difeomorfismo positivo de clase C^2 (preserva orientación) del círculo, la derivada proyectiva de f en θ es la única transformación de Möbius del círculo $T_{f,\theta}$ que coincide hasta orden 2 con f en θ . Escribiendo T en vez de $T_{f,\theta}$, por simplicidad, tenemos

$$e^{iT(\xi)} = e^{i\kappa} \frac{e^{i\xi} - \sigma}{1 - \bar{\sigma}e^{i\xi}}$$

donde $\kappa = \kappa(f, \theta)$ y $\sigma = \sigma(f, \theta) \in \mathbb{D}$. De aquí obtenemos

$$T(\xi) = \frac{1}{i} \log \left[e^{i\kappa} \frac{e^{i\xi} - \sigma}{1 - \bar{\sigma}e^{i\xi}} \right]$$

de donde

$$\begin{aligned} T'(\xi) &= \frac{1}{i} \left[\frac{ie^{i\xi}}{e^{i\xi} - \sigma} + \frac{ie^{i\xi}\bar{\sigma}}{1 - \bar{\sigma}e^{i\xi}} \right] \\ &= \frac{1}{i} \left[\frac{ie^{i\xi}(1 - \bar{\sigma}e^{i\xi} + \bar{\sigma}e^{i\xi} - \sigma\bar{\sigma})}{(e^{i\xi} - \sigma)(1 - \bar{\sigma}e^{i\xi})} \right] \\ &= \frac{1 - |\sigma|^2}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\xi}|^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T''(\xi) &= (1 - |\sigma|^2) \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{(1 - \sigma e^{-i\xi})(1 - \bar{\sigma}e^{i\xi})} \right] \\ &= (1 - |\sigma|^2)(-1) \left[\frac{i\sigma e^{i\xi}(1 - \sigma e^{-i\xi}) - i\bar{\sigma}e^{i\xi}(1 - \sigma e^{-i\xi})}{(1 - \sigma e^{-i\xi})^2(1 - e^{i\xi}\bar{\sigma})^2} \right] \\ &= \frac{(1 - |\sigma|^2)(-1)i(\sigma e^{-i\xi} - \bar{\sigma}e^{-i\xi})}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\xi}|^4} \\ &= \frac{(1 - |\sigma|^2)2\text{Im}(\sigma e^{-i\xi})}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\xi}|^4}. \end{aligned}$$

En resumen,

$$T(\xi) = \frac{1}{i} \log \left[e^{i\kappa} \frac{e^{i\xi} - \sigma}{1 - \bar{\sigma}e^{i\xi}} \right] \quad (24)$$

$$T'(\xi) = \frac{1 - |\sigma|^2}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\xi}|^2} \quad (25)$$

$$T''(\xi) = \frac{(1 - |\sigma|^2)2\text{Im}(\sigma e^{-i\xi})}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\xi}|^4} \quad (26)$$

Denotemos $a := f'(\theta)$ y $b := f''(\theta)$. Para simplificar notación, también digamos $\bar{\sigma}e^{i\theta} = re^{i\rho}$ con $0 \leq r < 1$.

Entonces, la relación de primer orden entre f y T en $\xi = \theta$, según (25) se convierte en:

$$\frac{dT}{d\xi}(\theta) = a = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\rho) + r^2}$$

por lo tanto

$$\cos(\rho) = \frac{a(1 + r^2) - (1 - r^2)}{2ar}. \quad (27)$$

La relación de segundo orden entre f y T en $\xi = \theta$, según (26), se convierte en:

$$\frac{d^2T}{d\xi^2}(\theta) = b = -\frac{(1 - r^2)2r \sin(\rho)}{|1 - 2r \cos(\rho) + r^2|^2}$$

por lo tanto, utilizando (27), obtenemos que

$$\sin(\rho) = -\frac{b}{a^2} \left(\frac{1 - r^2}{2r} \right).$$

Ahora sólo resta obtener r . Como $\cos^2(\rho) + \sin^2(\rho) = 1$, necesariamente tenemos

$$[a(1 + r^2) - (1 - r^2)]^2 + \left(\frac{b(1 - r^2)}{a} \right)^2 = 4a^2r^2$$

lo cual es equivalente a la siguiente ecuación

$$r^4(a^2(a + 1)^2 + b^2) - 2r^2(a^2(a^2 + 1) + b^2) + a^2(a - 1)^2 + b^2 = 0.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

$$r^2 = 1 \quad (28)$$

y

$$r^2 = \frac{a^2(a - 1)^2 + b^2}{a^2(a + 1)^2 + b^2}.$$

Como σ vive dentro del disco unitario \mathbb{D} y $|\sigma| = r$ la solución en (28) se descarta, y entonces necesariamente tenemos

$$r = \sqrt{\frac{a^2(a-1)^2 + b^2}{a^2(a+1)^2 + b^2}}. \quad (29)$$

Sigue que

$$\sin(\rho) = -\frac{2ab}{\sqrt{(a^2(a-1)^2 + b^2)(a^2(a+1)^2 + b^2)}} \quad (30)$$

$$\cos(\rho) = \frac{a^2(a^2 - 1) + b^2}{\sqrt{(a^2(a-1)^2 + b^2)(a^2(a+1)^2 + b^2)}} \quad (31)$$

Así, podemos recuperar el valor de $\sigma = re^{i\tau}$, donde $\tau = \sigma - \rho$ (pues ya conocemos r de la ecuación (29) y conocemos ρ ya que conocemos su seno en (30) y su coseno en (31), y θ es dado).

También podemos recuperar el valor de κ de la relación de orden cero entre f y T en $\xi = \theta$, según (24):

$$f(\theta) = \kappa + \frac{1}{i} \log \left[\frac{e^{i\theta} - \sigma}{1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}} \right]. \quad (32)$$

En lo que sigue, escribiremos $\mathcal{T}_{f,\theta} := \mathcal{A}_{k(\theta),\sigma(\theta)}$ como el automorfismo del disco asociado. En el contexto apropiado, también llamaremos a $\mathcal{T}_{f,\theta}$ la derivada proyectiva.

5.1. Condiciones de integrabilidad local

Sea $\sigma : (\theta_1, \theta_2) \subsetneq \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$, $\kappa : (\theta_1, \theta_2) \subsetneq \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 . Nos preguntamos si existe un mapeo del círculo $f : (\theta_1, \theta_2) \rightarrow \mathbb{T}^1$ tal que

$$e^{iT_{f,\theta}(\xi)} = e^{i\kappa(\theta)} \frac{e^{i\xi} - \sigma(\theta)}{1 - \overline{\sigma(\theta)}e^{i\xi}}$$

para todo $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$. La condición de orden cero en $T_{f,\theta}$ dice que necesariamente tenemos

$$e^{if(\theta)} := e^{i\kappa(\theta)} \frac{e^{i\theta} - \sigma(\theta)}{1 - \overline{\sigma(\theta)}e^{i\theta}}$$

Con el fin de comprobar las condiciones de primer orden, necesitamos computar:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{d\theta} &= \kappa' + \frac{1}{i} \frac{d}{d\theta} \{ \log(e^{i\theta} - \sigma) - \log(1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}) \} \\
&= \kappa' + \frac{1}{i} \left\{ \frac{ie^{i\theta} - \sigma'}{e^{i\theta} - \sigma} + \frac{\bar{\sigma}'e^{i\theta} + i\bar{\sigma}e^{i\theta}}{1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}} \right\} \\
&\vdots \\
&= \kappa' + \frac{1 - |\sigma|^2 + 2\text{Im}(\bar{\sigma}'e^{i\theta}) + 2\text{Im}(\sigma'\bar{\sigma})}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^2}
\end{aligned}$$

Luego, las condiciones de primer orden se leen como:

$$\begin{aligned}
\frac{1 - |\sigma|^2}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^2} &= \kappa' + \frac{1 - |\sigma|^2 + 2\text{Im}(\bar{\sigma}'e^{i\theta}) + 2\text{Im}(\sigma'\bar{\sigma})}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^2} \\
0 &= \kappa' + \frac{2\text{Im}(\bar{\sigma}'e^{i\theta}) + 2\text{Im}(\sigma'\bar{\sigma})}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^2}
\end{aligned} \tag{33}$$

Asumiendo que (33) se cumple, podemos computar la segunda derivada de f por:

$$\begin{aligned}
\frac{df'}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta} \frac{1 - |\sigma|^2}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^2} \\
&\vdots \\
\frac{df'}{d\theta} &= \frac{-2\text{Re}(\sigma'\bar{\sigma})|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^2 + (1 - |\sigma|^2)\{2\text{Im}(\sigma e^{i\theta}) + 2\text{Re}(\sigma' e^{-i\theta}) - 2\text{Re}(\sigma'\bar{\sigma})\}}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^4}
\end{aligned}$$

Entonces, las condiciones de segundo orden se leen como:

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - |\sigma|^2)2\text{Im}(e^{-i\theta}\sigma)}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^4} &= \frac{-2\text{Re}(\sigma'\bar{\sigma})|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^2 + (1 - |\sigma|^2)\{2\text{Im}(\sigma e^{i\theta}) + 2\text{Re}(\sigma' e^{-i\theta}) - 2\text{Re}(\sigma'\bar{\sigma})\}}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^4} \\
0 &= -2\text{Re}(\sigma'\bar{\sigma})|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^2 + (1 - |\sigma|^2)\{2\text{Re}(\sigma' e^{-i\theta}) - 2\text{Re}(\sigma'\bar{\sigma})\}
\end{aligned} \tag{34}$$

A modo de conclusión, enunciamos lo siguiente:

Proposición 5.1 Sean $\sigma : (\theta_1, \theta_2) \subsetneq \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$, $\kappa : (\theta_1, \theta_2) \subsetneq \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 verificando las relaciones diferenciales (33) y (34). Entonces existe $f : (\theta_1, \theta_2) \rightarrow \mathbb{T}^1$ función de clase C^2 tal que $T_{f,\theta}$ es igual a la transformación de Möbius del círculo inducida por $\mathcal{A}_{\kappa(\theta),\sigma(\theta)}$ para cada $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$. Aún más, f es un difeomorfismo positivo en su imagen. Tal f está únicamente definido por la relación $e^{if(\theta)} = \mathcal{A}_{\kappa(\theta),\sigma(\theta)}(e^{i\theta})$

5.2. Algunos resultados de rigidez

A fin de entender la relación entre la derivada proyectiva y el mapeo actual del círculo, revisemos algunos resultados de rigidez.

- Si $\sigma \equiv 0$ para todo $\theta \in \mathbb{T}^1$, entonces κ es constante y $f(\theta) = \theta + \kappa$ para todo θ .

Demostración: Ecuación (33) implica $\kappa' = 0$. ■

- Si σ es constante entonces κ es constante y

$$e^{if(\theta)} = e^{i\kappa} \frac{e^{i\theta} - \sigma}{1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}}.$$

- Si $|\sigma|$ es constante, como $|\sigma|^2 = \sigma\bar{\sigma}$, entonces tenemos que $2\operatorname{Re}(\sigma'\bar{\sigma}) = 0$. Y usando (34):

$$\operatorname{Re}(\sigma'e^{-i\theta}) = 0$$

Podemos escribir $\sigma = \lambda e^{iu(\theta)}$ para algún $\lambda \in [0, 1)$ y $u : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. La ecuación anterior se lee entonces:

$$\sin(\theta - u)\lambda u' = 0$$

Por lo tanto tenemos dos posibilidades:

1. $u' = 0$ y σ constante, por lo tanto f es un mapeo de Möbius del círculo.
2. $u = \theta$ y $\sigma(\theta) = \lambda e^{i\theta}$. En este caso, la ecuación (33) se lee como:

$$\kappa' - \frac{2\lambda}{1-\lambda} = 0.$$

Entonces existe $\kappa_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} e^{if(\theta)} &= e^{i(\kappa_0 + \theta \frac{2\lambda}{1-\lambda})} \frac{e^{i\theta - \lambda e^{i\theta}}}{1 - \lambda e^{-i\theta} e^{i\theta}} \\ &= e^{i\kappa_0} e^{i\theta \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)} \end{aligned} \quad (35)$$

Esta relación da posibilidad a un difeomorfismo del círculo sólo cuando $\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = 1$, lo cual implica $\lambda = 0$ y f es una rotación.

5.3. Condiciones de integrabilidad global

Abordaremos el problema de la sección 5.1 al de la integrabilidad de una familia de transformaciones, pero ahora desde el punto de vista global donde σ está definida en \mathbb{T}^1 .

Proposición 5.2 Sean $\sigma : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$, $\kappa : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 verificando las relaciones diferenciales (33) y (34). También supongamos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - |\sigma|^2}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^2} d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\text{Im}(e^{-i\theta}\sigma)}{|1 - \bar{\sigma}e^{i\theta}|^2} d\theta = 0. \quad (36)$$

Entonces existe un difeomorfismo positivo del círculo $f : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ de clase C^2 tal que $T_{f,\theta}$ es igual a la transformación de Möbius del círculo inducida por $\mathcal{A}_{\kappa(\theta),\sigma(\theta)}$ para cada $\theta \in \mathbb{T}^1$.

Demostración: notar que las condiciones en (36) corresponden a:

$$\int_0^{2\pi} f' d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \frac{f''}{f'} d\theta = 0.$$

■

Sea $\sigma : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$ una función C^1 verificando (34) y (36). Entonces podemos encontrar una función $\kappa : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ usando la relación (33). Esta función κ está únicamente definida salvo por suma de una constante. La Proposición 5.2 implica que existe un difeomorfismo positivo del círculo f de clase C^2 tal que $\mathcal{A}_{\kappa(\theta),\sigma(\theta)} = \mathcal{T}_{f,\theta}$. En este caso decimos que la curva σ es \mathbb{T}^1 -integrable y que f es el difeomorfismo dado por σ . Sea α un número real y $R_\alpha : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ la rotación rígida de \mathbb{T}^1 en un ángulo α . Es fácil ver que $\mathcal{T}_{R_\alpha,\theta} = \mathcal{R}_\alpha$ donde \mathcal{R}_α es la rotación rígida de \mathbb{D} en un ángulo α . Entonces, la regla de cociclo (ver Corolario 6.1) se cumple:

$$\mathcal{T}_{R_\alpha \circ f, \theta} = \mathcal{R}_\alpha \cdot \mathcal{T}_{f, \theta} = \mathcal{R}_\alpha \cdot \mathcal{A}_{\kappa(\theta), \sigma(\theta)} = \mathcal{A}_{\alpha + \kappa(\theta), \sigma(\theta)}.$$

La discusión anterior permite mostrar lo siguiente:

Proposición 5.3 Sean $\sigma : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{D}$ una curva \mathbb{T}^1 -integrable. El difeomorfismo f dado por σ es único salvo post-composición por una rotación rígida.

Observación 1 Sea σ una curva \mathbb{T}^1 -integrable y f el difeomorfismo dado por σ . La siguiente igualdad es útil

$$\mathcal{T}_{f,\theta}^{-1}(0) = \sigma(\theta) \text{ para todo } \theta \in \mathbb{T}^1. \quad (37)$$

5.4. Un loop en $PSL(2, \mathbb{R})$

Sea $f : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ un mapeo del círculo, de clase C^2 , que preserva la orientación, de grado ≥ 1 . La derivada proyectiva induce una curva cerrada

$$\Gamma_f : \theta \mapsto \mathcal{T}_{f,\theta}$$

que, bajo la identificación del capítulo 2, toma valores en $PSL(2, \mathbb{R})$. Como $SL(2, \mathbb{R})$ es un cubrimiento doble de $PSL(2, \mathbb{R})$, podemos levantar Γ_f a una curva $\widetilde{\Gamma}_f \in SL(2, \mathbb{R})$. Decimos que f tiene una sola derivada proyectiva en $SL(2, \mathbb{R})$ si el levantamiento $\widetilde{\Gamma}_f$ es una curva cerrada en $SL(2, \mathbb{R})$. En este caso, podemos escoger continuamente $\mathcal{T}_{f,\theta}$ como un elemento de $SL(2, \mathbb{R})$. Notar que la otra posibilidad para $\widetilde{\Gamma}_f$ es la de una curva con distintos puntos extremos en la forma $\pm \mathcal{T} \in SL(2, \mathbb{R})$.

Lema 5.1 *f tiene una sola derivada proyectiva si y sólo si $\int_0^{2\pi} \kappa' = 0$.*

Demostración: la representación de \mathcal{T}_f en $SL(2, \mathbb{R})$ está dada por (7). Por lo tanto, f tiene una sola derivada proyectiva si y solo si podemos definir continuamente el mapeo $\theta \mapsto \kappa/2$.

■

Proposición 5.4 *Si f es un difeomorfismo ($n = 1$), entonces f tiene una sola derivada proyectiva.*

Demostración: f puede ser levantado al cubrimiento universal \mathbb{R} de \mathbb{T}^1 por una función $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 verificando que

$$\bar{f}(x+1) = \bar{f}(x) + 1, \quad \frac{d}{dx} \bar{f} > 0, \quad y \quad f(\Pi x) = \Pi(\bar{f}(x))$$

donde $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^1$ es el mapeo de cubrimiento. Uno puede construir un camino continuo uniendo \bar{f} a la identidad $id_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$. En efecto, para $\tau \in [0, 1]$ uno define

$$\bar{f}_\tau(x) := \tau x + (1 - \tau)\bar{f}(x).$$

Cada mapeo \bar{f}_τ verifica

$$\bar{f}_\tau(x+1) = \bar{f}_\tau(x) + 1, \quad \frac{d}{dx} \bar{f}_\tau > 0$$

por lo tanto \bar{f}_τ se proyecta a un difeomorfismo C^2 positivo del círculo f_τ para todo $\tau \in [0, 1]$, esto es $f_\tau(\Pi x) = \Pi(\bar{f}_\tau(x))$. Aún más, el mapeo $\tau \mapsto f_\tau$ es continuo. También el mapeo

$$\tau \mapsto \int_0^{2\pi} \kappa'_\tau$$

es continuo, donde $\kappa_\tau : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ es la parte racional de la derivada proyectiva de f_τ . Donde $\int_0^{2\pi} \kappa'_\tau \in 2\pi\mathbb{Z}$ para todo $\tau \in [0, 1]$, el mapeo anterior es constante. Como $f_0 = f$ y $f_1 = id_{\mathbb{T}^1}$, tenemos

$$\int_0^{2\pi} \kappa'_\tau = \int_0^{2\pi} \kappa'_0 = \int_0^{2\pi} \kappa'_1 = 0$$

y el resultado sigue usando el Lema 5.1. ■

5.5. Derivada proyectiva de $\theta \mapsto k\theta$: un ejemplo

Para $k \in \mathbb{N}$, queremos estudiar la derivada proyectiva para el mapeo del círculo

$$f_k : \theta \mapsto k\theta$$

Usando (35) es fácil ver que las componentes σ, κ de la derivada proyectiva están dadas por

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \lambda_k e^{i\theta} \\ \kappa(\sigma) &= \theta \frac{2\lambda_k}{(1 - \lambda_k)} \end{aligned}$$

donde $\lambda_k \in [0, 1)$ es tal que $\frac{1 + \lambda_k}{1 - \lambda_k} = k$. Por lo tanto tenemos

$$\kappa(\theta) = \theta(k - 1) \quad \text{y} \quad e^{iT_{f_k, \theta}(\xi)} = e^{ik\theta} \frac{e^{i(\xi - \theta)} - \lambda_k}{1 - \lambda_k e^{i(\xi - \theta)}}.$$

Notar que podemos definir una raíz cuadrada continua $\theta \mapsto (e^{i\kappa(\theta)})^{1/2}$ si y sólo si $k - 1$ es par.

Lema 5.2 *El loop*

$$\theta \mapsto \mathcal{T}_{f_k, \theta} \in PSL(2, \mathbb{R})$$

puede ser levantado a un loop cerrado en $SL(2, \mathbb{R})$ si y sólo si k es impar.

Adaptando la demostración de la Proposición 5.4, se puede mostrar en mayor generalidad que:

Proposición 5.5 *Sea $f : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ un difeomorfismo positivo del círculo de clase C^2 . El loop*

$$\theta \mapsto \mathcal{T}_{f,\theta} \in PSL(2, \mathbb{R})$$

puede ser levantado a un loop cerrado en $SL(2, \mathbb{R})$ si y sólo el grado topológico de f es un número impar.

6. Derivada proyectiva como cociclo

Con el fin de aplicar la derivada proyectiva en el contexto de sistemas dinámicos, usaremos el hecho de que la derivada proyectiva verifica la propiedad de cociclo.

Lema 6.1 Sean $f : (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : (\gamma, \eta) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(\gamma, \eta) \subset (\alpha, \beta)$, dos funciones de clase C^2 . Para cada $y_0 \in (\gamma, \eta)$ se cumple lo siguiente

$$f \circ g(y) = (\mathcal{T}_{f,g(y_0)} \cdot \mathcal{T}_{g,y_0})(y) + O(y - y_0)^3.$$

Demostración: Escribimos

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{T}_{f,x_0}(x) + O_f(x - x_0)^3 \\ g(y) &= \mathcal{T}_{g,y_0}(y) + O_g(y - y_0)^3 = g(y_0) + O(x - x_0) \end{aligned}$$

de donde tenemos

$$f \circ g(y) = \mathcal{T}_{f,g(y_0)}(g(y)) + O_f(g(y) - g(y_0))^3 \quad (38)$$

$$= \mathcal{T}_{f,g(y_0)}(g(y)) + O(y - y_0)^3 \quad (39)$$

Aún más,

$$\mathcal{T}_{f,g(y_0)}(g(y)) = \mathcal{T}_{f,g(y_0)}(\mathcal{T}_{g,y_0}(y) + O_g(y - y_0)^3) \quad (40)$$

$$= \mathcal{T}_{f,g(y_0)}(\mathcal{T}_{g,y_0}(y) + O(y - y_0)^3) \quad (41)$$

■

Corolario 6.1 (Regla de Cociclo) $\mathcal{T}_{f \circ g, y_0} = \mathcal{T}_{f, g(y_0)} \cdot \mathcal{T}_{g, y_0}$. En particular, para mapeos invertibles se tiene $\mathcal{T}_{f^{-1}, y_0} = (\mathcal{T}_{f, f^{-1}(y_0)})^{-1}$.

Como el corolario anterior es local, esta relación de cociclo también se cumple para la derivada proyectiva de difeomorfismos positivos del círculo.

Corolario 6.2 (Regla de Cociclo para mapeos del círculo) Sean f, g difeomorfismos positivos del círculo de clase C^2 . Entonces para todo $t_0 \in \mathbb{T}^1$ se tiene que $\mathcal{T}_{f \circ g, t_0} = \mathcal{T}_{f, g(t_0)} \cdot \mathcal{T}_{g, t_0}$. En términos de derivada proyectiva como un mapeo de Möbius del círculo, se tiene $T_{f \circ g, t_0} = T_{f, g(t_0)} \circ T_{g, t_0}$.

6.1. La derivada proyectiva como un cociclo dinámico

Un cociclo dinámico (cociclo) es un sistema dinámico (un homeomorfismo) $T : X \rightarrow X$ junto con un mapeo continuo $F : X \rightarrow \mathbb{G}$, donde X es un espacio topológico y \mathbb{G} es un grupo topológico. Decimos que F es un cociclo con valores en \mathbb{G} sobre T . Dado un subgrupo $\mathbb{J} < \mathbb{G}$, decimos que el cociclo F es cohomólogo al cociclo tomando valores en \mathbb{J} siempre que exista un mapeo continuo $B : X \rightarrow \mathbb{G}$ tal que $B(Tx) \cdot F(x) \cdot B(x)^{-1}$ pertenezca a \mathbb{J} para todo $x \in X$.

Sea f un difeomorfismo positivo del círculo de clase C^2 . Usando la identificación dada en el capítulo 2, podemos ver la derivada proyectiva \mathcal{T}_f como un cociclo tomando valores en $PSL(2, \mathbb{R})$ sobre f . Asumamos que f es C^2 conjugada a la rotación $R_{\rho(f)}$, donde $\rho(f)$ es el número de rotación. Entonces \mathcal{T}_f es cohomólogo a un cociclo constante de rotaciones. En efecto, sea $\varphi : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ un difeomorfismo C^2 que conjugue f con $R_{\rho(f)}$

$$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = R_{\rho(f)}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} T_{\varphi, f(\theta)} \circ T_{f, \theta} \circ T_{\varphi, \theta}^{-1} &= R_{\rho(f)} \\ \mathcal{T}_{\varphi, f(\theta)} \cdot \mathcal{T}_{f, \theta} \cdot \mathcal{T}_{\varphi, \theta}^{-1} &= \mathcal{R}_{\rho(f)} \end{aligned}$$

Como una especie de recíproco tenemos el siguiente lema enunciado y demostrado en [1]:

Lema 6.2 *Si \mathcal{T}_f es cohomólogo a un cociclo de rotaciones, entonces f es C^2 conjugado a una rotación.*

7. Derivada proyectiva para difeomorfismos de la recta proyectiva

Sea $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ un difeomorfismo positivo de la recta proyectiva, de clase C^3 .

Definición 7.1 La derivada Schwarziana de f en el punto x_0 está definida como

$$Sf(x_0) := \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{3 f''(x_0)^2}{2 f'(x_0)^2}. \quad (42)$$

Esta derivada Sf mide cuán distinto es f de un mapeo lineal fraccionario. Más precisamente:

Lema 7.1

$$Sf(x_0) = \frac{f'''(x_0) - \mathcal{T}_{f,x_0}'''(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (43)$$

Demostración: Sea $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ una transformación de Möbius. Entonces

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

$$T''(z) = \frac{-2c(ad - bc)}{(cz + d)^3}$$

$$T'''(z) = \frac{6c^2(ad - bc)}{(cz + d)^4}$$

de donde

$$\frac{3 (T'')^2}{2 T'} = \frac{3 \frac{4c^2(ad-bc)^2}{(cz+d)^6}}{2 \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}} = \frac{6c^2(ad - bc)}{(cz + d)^4}.$$

Luego, tenemos la siguiente ecuación diferencial de tercer orden para cualquier mapeo lineal fraccionario T :

$$T''' = \frac{3 (T'')^2}{2 T'}. \quad (44)$$

Como \mathcal{T}_{f,x_0} coincide hasta orden 2 con f en x_0 , en particular se tiene

$$\mathcal{T}_{f,x_0}'''(x_0) = \frac{3 (\mathcal{T}_{f,x_0}''(x_0))^2}{2 \mathcal{T}_{f,x_0}'(x_0)} = \frac{3 f''(x_0)^2}{2 f'(x_0)} \quad (45)$$

y se sigue el resultado. ■

Corolario 7.1 $Sf \equiv 0$ si y sólo si f es un mapeo lineal fraccionario.

Demostración: Si f es un mapeo lineal fraccionario, sigue de la definición y de la ecuación (44) que:

$$Sf(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{3}{2} \frac{f''(x_0)^2}{f'(x_0)} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} - f'''(x_0) \frac{1}{f'(x_0)} = 0.$$

Por otro lado, tomemos $\tilde{x} \in \mathbb{CP}^1$ y consideremos el mapeo lineal fraccionario $\mathcal{T}_{f,\tilde{x}}$. Ambas funciones $f(\cdot)$ y $\mathcal{T}_{f,\tilde{x}}(\cdot)$ satisfacen la ecuación diferencial de tercer orden (27) y las mismas condiciones iniciales de segundo orden en el punto \tilde{x} . Por lo tanto, coinciden en todo punto.

■

El Lema 7.1 dice que un punto x_0 tal que $Sf(x_0) = 0$ corresponde a un punto donde el contacto entre f y \mathcal{T}_f tiene orden 3. Tal punto es llamado un *vértice* de f .

El siguiente resultado es atribuido a É. Ghys (1995):

Teorema 7.1 (Teorema de los cuatro vértices de Ghys) *Si $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ es un difeomorfismo positivo de la recta proyectiva de clase C^2 , entonces la derivada Schwarziana Sf tiene al menos cuatro ceros distintos.*

Es decir, dado un difeomorfismo de la recta proyectiva, existen al menos cuatro puntos distintos en los cuales el difeomorfismo se puede aproximar de buena manera por una transformación proyectiva. Ghys obtuvo su resultado como un análogo al teorema usual de los cuatro vértices. La demostración que él hizo es puramente geométrica y está inspirada en el teorema de Kneser para círculos osculadores de curvas planas. En [6] se puede revisar una posible demostración.

8. Difeomorfismos del círculo y curvatura hiperbólica

8.1. Traza hiperbólica

Singer define en [8] la traza hiperbólica de un difeomorfismo positivo de la recta proyectiva $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ en el punto x_0 como

$$tr(f, x_0) = \frac{1}{2} \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^{3/2}} (x_0 - f(x_0)) + \frac{f'(x_0) + 1}{f'(x_0)^{1/2}}. \quad (46)$$

Entonces,

$$tr(f, x_0)' = \frac{x_0 - f(x_0)}{2} \left(\frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{f''(x_0)^2}{f'(x_0)^{5/2}} \right) = \frac{x_0 - f(x_0)}{2f'(x_0)^{1/2}} Sf(x_0). \quad (47)$$

De esto sigue inmediatamente que $tr(f, x_0)$ es constante cuando f es una transformación de Möbius (sigue del Corolario 7.1). Aún más:

Lema 8.1 *La traza hiperbólica $tr(f, x_0)$ es igual a la traza de la derivada proyectiva de f en el punto x_0 , $Trace\mathcal{T}_{f,x_0}$.*

Demostración: de las relaciones del comienzo tenemos que

$$\begin{aligned} Trace(\mathcal{T}_{f,x_0}) = a + d &= \left(1 - \frac{f(x_0)f''(x_0)}{2f'(x_0)^2} \right) f'(x_0)^{1/2} + \frac{1}{f'(x_0)^{1/2}} + \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)^{3/2}} x_0 \\ &= \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)^{3/2}} x_0 + \frac{-f(x_0)f''(x_0)}{2f'(x_0)^{3/2}} + f'(x_0)^{1/2} + \frac{1}{f'(x_0)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^{3/2}} (x_0 - f(x_0)) + \frac{f'(x_0) + 1}{f'(x_0)^{1/2}} = tr(f, x_0). \end{aligned}$$

■

Como la traza es invariante por conjugación bajo matrices invertibles de 2×2 (en particular bajo transformaciones de Möbius)

$$Trace(B^{-1}AB) = Trace(A)$$

y la traza hiperbólica coincide con la traza de la derivada proyectiva \mathcal{T}_{f,x_0} como vimos en el Lema 8.1, entonces se deducen los siguientes resultados:

Teorema 8.1 *La traza hiperbólica es invariante bajo transformaciones de Möbius. Esto es, si R es una transformación de Möbius, si g está definida por $g(R(x_0)) = R(f(x_0))$ y si $y_0 = R(x_0)$, entonces $tr(g, y_0) = tr(f, x_0)$.*

Proposición 8.1 *Si $y_0 = f(x_0)$ tiene inversa $x_0 = g(y_0)$, entonces $tr(g, y_0) = tr(f, x_0)$.*

8.2. Curvas convexas hiperbólicas y transformaciones inducidas al infinito

En esta sección consideraremos el modelo del disco de Poincaré, en conjunto con el modelo del semiplano superior. La idea es analizar la construcción que hace Singer en [8]. El círculo unitario \mathbb{S}^1 será pensado como el conjunto de puntos ideales de \mathbb{D} . Consideraremos difeomorfismos de \mathbb{S}^1 y sus respectivas trazas calculadas con respecto a sistemas de coordenadas *conformes* en \mathbb{S}^1 . Esto quiere decir que consideraremos sistemas de coordenadas de transformaciones de Möbius, desde \mathbb{S}^1 a círculos o rectas en la esfera de Riemann. En particular la parametrización usual por $\theta \bmod 2\pi$ no es un sistema de coordenadas permitido. Por ejemplo, la rotación $z \rightarrow e^{2\pi\alpha}z$ está dada por multiplicación por una constante, mientras que la correspondiente transformación $\theta \rightarrow \theta + \alpha$ está dada por adición de una constante. Ambas funciones tienen diferente traza hiperbólica.

Sea $\gamma(t)$ una curva regular suave en \mathbb{D} . Para cada t , la curva determina un único par de puntos ideales $(\alpha(t), \omega(t))$ en \mathbb{S}^1 tal que la geodésica en \mathbb{D} desde $\alpha(t)$ a $\omega(t)$ es la recta orientada tangente a γ en t . Así, una curva regular γ en \mathbb{D} determina una curva $\bar{\gamma}$ en el espacio $\Sigma = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 - \Delta$, donde Δ es la diagonal ($\bar{\gamma}$ es la geodésica).

Algunos ejemplos serán revisados en \mathbb{D} y otros en \mathbb{H} , para simplificar los cálculos.

- Ejemplo 1: círculo hiperbólico

Sea ϵ_r un círculo hiperbólico de radio hiperbólico r centrado en el origen.

Sea $z \in \mathbb{D}$, $z = \lambda e^{i\theta}$ con $\lambda \in (0, 1)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. Sea $\beta(t) = te^{i\theta}$, $t \in [0, \lambda]$ la curva que une 0 con z , entonces:

$$\begin{aligned}\rho(0, z) &= \int_0^\lambda \frac{2}{1 - |\beta(t)|^2} |\beta'(t)| dt = \int_0^\lambda \frac{2}{1 - t^2} dt \\ &= \int_0^\lambda \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \ln(1 + \lambda) - \ln(1 - \lambda) = \ln \left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right)\end{aligned}$$

Sea L la inversa de $\frac{1+z}{1-z}$, es decir $L(w) = \frac{w-1}{w+1}$, la cual es una función creciente ya que $L'(w) = \frac{2}{(w+1)^2} > 0$. Luego, $\rho(0, z) < r$ equivale a $\ln \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) < r$, o a $\frac{1+\lambda}{1-\lambda} < e^r$. Aplicando L a esta desigualdad, obtenemos $\lambda < L(e^r) = \frac{e^r - 1}{e^r + 1}$, lo que equivale a

$$|z| < \frac{e^{r/2} - e^{-r/2}}{e^{r/2} + e^{-r/2}} = \tanh(r/2)$$

Luego, el círculo hiperbólico ϵ_r es un círculo euclidiano centrado en el origen y de radio euclidiano $R = \tanh(r/2)$.

Por el Teorema de Gauss-Bonnet sabemos que su curvatura geodésica está dada por

$$K = \coth r = \frac{1 + R^2}{2R}$$

la cual efectivamente es mayor que 1.

Una geodésica tangente a ϵ_r es un círculo euclidiano de radio A centrado en un punto c cuya distancia euclidiana desde el origen es $A + R$. Como este círculo es ortogonal al círculo unitario, por Pitágoras tenemos que $(A + R)^2 = A^2 + 1$ de donde $A = \frac{1 - R^2}{2R}$.

Luego, el difeomorfismo que envía α en ω es la rotación $f(z) = e^{2i\phi}z$, donde ϕ es tal que $\tan \phi = A = \frac{1 - R^2}{2R}$. Sigue que $f'(z) = e^{2i\phi}$ y $f''(z) = 0$, por que lo que

$$tr(f, z) = \frac{f'(z) + 1}{\sqrt{f'(z)}} = \frac{e^{2\phi} + 1}{e^{i\phi}} = e^{i\phi} + e^{-i\phi} = 2 \cos \phi = 2 \cdot \frac{1}{A + R} = \frac{2}{1 + R^2} = \frac{2}{K}$$

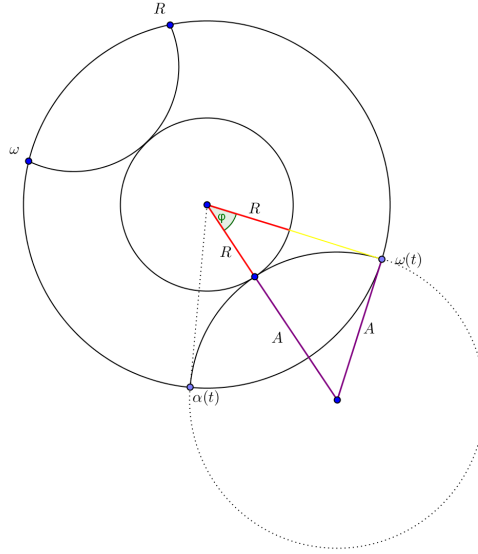


Figura 10: Círculo hiperbólico

Así, por el Teorema 8.1, para cualquier círculo hiperbólico de curvatura K en \mathbb{H} , el correspondiente difeomorfismo f tiene traza hiperbólica $tr(f, z) \equiv \frac{2}{K}$.

■ Ejemplo 2: horociclo

Sea h un horociclo. Ya vimos que en el disco de Poincaré, esta curva es representada por un círculo tangente al círculo unitario mientras que en el semiplano superior podemos tomar como representación una recta horizontal $y = y_0 > 0$ (la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $x(t) = t, y(t) = y_0$), la cual según lo visto en el ejemplo (3.3) tiene curvatura geodésica igual a $K = 1$.

Las geodésicas tangentes a h en el punto (x, y_0) son semicírculos centrados en el eje real, todos del mismo radio y_0 , por lo que unen los puntos $\alpha(t)$ y $\omega(t)$, los que siempre están a la misma distancia independiente del punto $x(t)$.

Así, el difeomorfismo del círculo (que en este modelo está representado por el eje real) es una traslación en c , $\bar{f}(z) = z + c$, donde $c = \pm 2y_0$. La representación matricial de \bar{f} es $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como la traza hiperbólica es invariante bajo transformaciones de

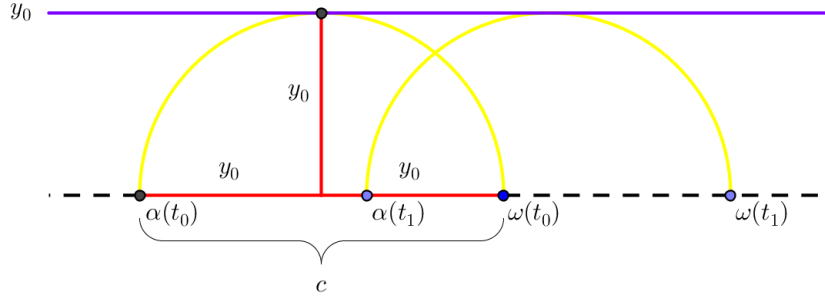


Figura 11: Horociclo

Möbius, nuevamente obtenemos que

$$tr(f, x_0) = tr(\bar{f}, x_0) \equiv 2 = \frac{2}{K}.$$

Es más, si conjugamos \bar{f} con $H(z) = \frac{z+i}{iz+1}$ (Cayley) cuya representación matricial es

$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ obtenemos la siguiente representación matricial para $f = H^{-1} \circ \bar{f} \circ H$:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+ic & c \\ c & 2-ic \end{pmatrix},$$

cuya traza hiperbólica es 2, como ya sabíamos.

■ Ejemplo 3: curvas equidistantes

Sea e una curva equidistante. Ya vimos que en el disco de Poincaré, esta curva es representada por semicírculos con extremos tangentes a \mathbb{S}^1 mientras que en el semiplano superior podemos tomar como representación una recta de la forma $y = mx$ (la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $x(t) = t, y(t) = mt$) la cual según el ejemplo (3.4) tiene curvatura geodésica igual a $K = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$.

Las geodésicas tangentes a e en el punto $P = (x_0, mx_0)$ son semicírculos centrados en el eje real, no todos del mismo radio (como sucedía en el ejemplo anterior).

Sea L la recta cuya ecuación está dada por $y = \frac{-1}{m}x + n$. Como pasa por el punto P tenemos que $mx_0 = \frac{-1}{m}x_0 + n$ de donde $n = x_0 \left(m + \frac{1}{m}\right)$, por lo que la ecuación de la recta L es $y = \frac{-1}{m}x + x_0 \left(m + \frac{1}{m}\right)$.

Para encontrar el centro del semicírculo, hacemos $y = 0$ en la ecuación anterior, de donde

$$C = \left(mx_0 \left(m + \frac{1}{m} \right), 0 \right).$$

Luego la distancia euclidiana desde C hasta P es

$$d := d_E(C, P) = \sqrt{\left(mx_0 \left(m + \frac{1}{m} \right) - x_0 \right)^2 + (0 - mx_0)^2} = |x_0| |m| \sqrt{m^2 + 1}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos $x_0, m > 0$. Luego, el punto $\alpha(x_0)$ está dado por $\alpha(x_0) = mx_0 \left(m + \frac{1}{m}\right) - x_0 m \sqrt{m^2 + 1}$, de donde

$$\alpha(x_0) = x_0 \sqrt{m^2 + 1} (\sqrt{m^2 + 1} - m)$$

mientras que $\omega(x_0) = \alpha(x_0) + 2d = \alpha(x_0) + 2x_0 m \sqrt{m^2 + 1} = x_0 \sqrt{m^2 + 1} (\sqrt{m^2 + 1} - m + 2m)$, de donde

$$\omega(x_0) = x_0 \sqrt{m^2 + 1} (\sqrt{m^2 + 1} + m).$$

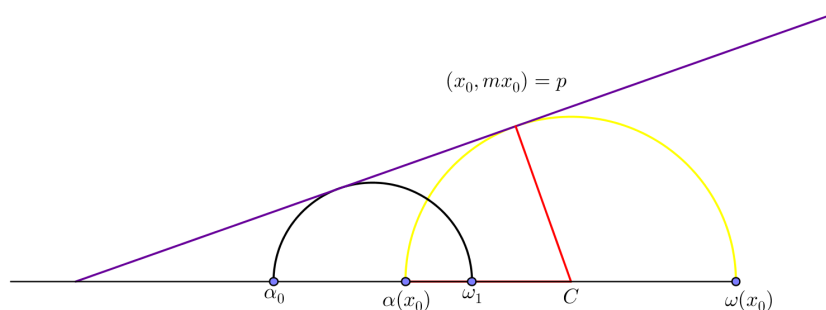


Figura 12: Curva equidistante

Así, no están a distancia constante como en el ejemplo anterior. Luego,

$$\frac{\omega(x_0)}{\alpha(x_0)} = \frac{\sqrt{m^2 + 1} + m}{\sqrt{m^2 + 1} - m}$$

Sigue que la transformación \bar{f} en \mathbb{H} es por lo tanto la dilatación dada por $\bar{f}(x) = \frac{\sqrt{1 + m^2} + m}{\sqrt{1 + m^2} - m}x$. La correspondiente representación matricial es

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1 + m^2} + m & 0 \\ 0 & \sqrt{1 + m^2} - m \end{pmatrix}.$$

Como la traza hiperbólica es invariante bajo transformaciones de Möbius, si aplicamos la inversa de Cayley tenemos que $tr(\bar{f}, x_0) = tr(f, x_0) = 2\sqrt{m^2 + 1} = \frac{2}{K}$.

Por lo tanto, cuando la mesa del billar, γ , es una curva cerrada convexa en \mathbb{D} , la correspondiente curva $\bar{\gamma}$ (la única geodésica tangente a la mesa) es el grafo de un difeomorfismo f del círculo unitario.

Recordar que una isometría de \mathbb{H} está dada por una transformación de Möbius del plano complejo. Supongamos tenemos dos curvas γ_1 y γ_2 , tales que cada una de estas curvas define un difeomorfismo f_1 y f_2 en el borde, respectivamente. Si consideramos una isometría T que manda γ_1 en γ_2 , ¿qué pasa con el difeomorfismo en el borde?. Las geodésicas van a geodésicas bajo T . Notar que el difeomorfismo f_2 lo podemos leer a partir de f_1 y de cómo se mueve el borde bajo T . Entonces f_2 es evidentemente conjugado a f_1 . Así, curvas isométricas dan lugar a difeomorfismos del círculo los cuales son conjugados por elementos de $PSL(2, \mathbb{C})$.

Ahora, si $\gamma(t)$ es cualquier curva de clase C^2 en \mathbb{H} , puede ser aproximada en el punto $\gamma(t)$ hasta segundo orden por una curva de curvatura constante, la cual llamaremos el *círculo osculador* \mathcal{C} . Sigue que el valor de $tr(f, \alpha(t))$ es el mismo que el valor de $tr(f_{\mathcal{C}}, \alpha(t))$ donde $f_{\mathcal{C}}$ es el difeomorfismo asociado al círculo osculador. Hemos probado:

Teorema 8.2 *Para cualquier curva cerrada simple $\gamma(t)$ en \mathbb{H} con curvatura $K(t)$ que no se anula, el correspondiente difeomorfismo f satisface*

$$tr(f, \alpha(t)) = \frac{2}{K(t)}. \tag{48}$$

8.3. El teorema de los cuatro vértices

El teorema clásico de los cuatro vértices establece que una curva cerrada simple en el plano, de clase C^2 , con curvatura que no se anula, tiene al menos cuatro extremos de curvatura.

Teorema 8.3 *Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva plana, simple, convexa y cerrada. Entonces tiene al menos cuatro vértices.*

Este teorema también es válido en el plano hiperbólico.

Teorema 8.4 (Teorema de los Cuatro Vértices en el plano hiperbólico) *Sea γ una curva simple, convexa y cerrada, en el plano hiperbólico, con curvatura que no se anula. Entonces su curvatura tiene al menos cuatro extremos.*

Demostración: Derivando en la ecuación (48) del Teorema 8.2 obtenemos:

$$\text{tr}(f, \alpha(t))' \alpha'(t) = \frac{-2}{K(t)^2} K'(t)$$

de donde

$$K'(t) = \frac{-\text{tr}(f, \alpha(t))' \alpha'(t) K(t)^2}{2}$$

y combinando con la ecuación (47) (recordar que $f(\alpha(t)) = \omega(t)$) obtenemos que:

$$K'(t) = \frac{K(t)^2 \alpha'(t) (\omega(t) - \alpha(t))}{4\sqrt{f'(\alpha(t))}} Sf(\alpha(t)). \quad (49)$$

La curva γ es tal que su curvatura no se anula y tal que determina una curva γ en el espacio Σ , por lo que $K(t) \neq 0$ y $\alpha(t) \neq \omega(t)$. Sigue que la derivada de la curvatura se anula sólo cuando $Sf(\alpha(t))$ se anula, pero ya sabemos por el Teorema de Ghys que esto ocurre al menos 4 veces. Así, el Teorema de Ghys implica el Teorema de los Cuatro Vértices en el plano hiperbólico. ■

9. Una interpretación geométrica de la derivada proyectiva en el contexto de billares hiperbólicos exteriores

Hemos revisado los resultados de Singer [8] utilizando el punto de vista de la derivada proyectiva estudiada en los capítulos anteriores. En esta sección final vamos a hacer un recuento a modo de conclusión.

Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}$ una curva regular de clase C^2 , convexa en el disco de Poincaré. Sea $f_\gamma : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ el difeomorfismo al infinito inducido por el billar exterior a la curva γ (considerando una orientación positiva y las geodésicas tangentes exteriores). Sin pérdida de generalidad vamos a usar como parámetros de γ los puntos del círculo al infinito $\partial\mathbb{D}$. Así, la geodésica que une $\alpha \in \partial\mathbb{D}$ con $f_\gamma(\alpha) \in \partial\mathbb{D}$ es tangente a la curva γ en $\gamma(\alpha)$. Por lo tanto, el difeomorfismo f_γ se puede interpretar como una transformación de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Los resultados previos se pueden resumir e interpretar geoméricamente de la siguiente manera:

1. La traza hiperbólica definida por Singer coincide con la traza de la derivada proyectiva, es decir

$$tr(f_\gamma, \alpha) = Trace(\mathcal{T}_{f_\gamma, \alpha}).$$

2. Para cada $\alpha \in \partial\mathbb{D}$ denotamos por $C_\gamma(\alpha)$ al *círculo osculador* de γ en $\gamma(\alpha)$, es decir, a la curva de curvatura constante que coincide a orden 2 con γ en $\gamma(\alpha)$. Entonces se tiene:

$$\mathcal{T}_{f_\gamma, \alpha} = f_{C_\gamma(\alpha)},$$

donde $f_{C_\gamma(\alpha)}$ es la transformación al infinito inducida por el billar hiperbólico exterior a la curva de curvatura constante $C_\gamma(\alpha)$. Esta transformación resulta ser una transformación de Möbius, que corresponde a:

- a) Una transformación elíptica (rotación) en el caso $K(\alpha) > 1$ (cuando $C_\gamma(\alpha)$ es un círculo hiperbólico).

- b) Una transformación parabólica (traslación) en el caso $K(\alpha) = 1$ (cuando $C_\gamma(\alpha)$ es un horociclo).
- c) Una transformación hiperbólica (homotecia) en el caso $K(\alpha) < 1$ (cuando $C_\gamma(\alpha)$ es una curva equidistante).

Dicho de otro modo, la mejor transformación de Möbius $\mathcal{T}_{f_\gamma, \alpha}$ que aproxima a la transformación al infinito f_γ inducida por el billar hiperbólico exterior en el punto α , corresponde a la transformación de Möbius obtenida al considerar el billar hiperbólico exterior a la curva $C_\gamma(\alpha)$, que a su vez, es la mejor curva de curvatura constante que aproxima a la curva γ en el punto $\gamma(\alpha)$.

3. En vista del Lema 7.1, la relación que exhibe el trabajo de Singer entre el Teorema de los cuatro vértices de Ghys acerca de la derivada Schwarziana y el Teorema de los cuatro vértices en el disco de Poincaré para curvas convexas se puede interpretar geoméricamente de la siguiente manera:

La curva γ tiene un vértice en el punto $\gamma(\alpha)$ (es decir $K'(\alpha) = 0$) en aquellos puntos donde γ y $C_\gamma(\alpha)$ coinciden a orden 3. Estos puntos son exactamente aquellos puntos donde $\mathcal{T}_{f_\gamma, \alpha}$ y f_γ coinciden a orden 3 (es decir $Sf_\gamma(\alpha) = 0$).

Referencias

- [1] Navas A. and Ponce M. The projective derivative as a dynamical cocycle. Pre-print, 2012.
- [2] James W. Anderson. *Hyperbolic geometry*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, second edition, 2005.
- [3] M. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Mathematics: Theory and Applications. Pearson, 1976.
- [4] M. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory and Applications. Birkhauser Basel, 1992.
- [5] F. Gardiner and N. Lakic. *Quasiconformal Teichmüller Theory*, volume 76 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2000.
- [6] V. Ovsienko and S. Tabachnikov. Sturm theory, Ghys theorem on zeroes of the Schwarzian derivative and flattening of Legendrian curves. *Selecta Math. (N.S.)*, 2(2):297–307, 1996.
- [7] V. Ovsienko and S. Tabachnikov. *Projective differential geometry old and new*, volume 165 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. From the Schwarzian derivative to the cohomology of diffeomorphism groups.
- [8] David A. Singer. Diffeomorphisms of the circle and hyperbolic curvature. *Conform. Geom. Dyn.*, 5:1–5 (electronic), 2001.