PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Representaciones de grupos e idempotentes de $\mathbb{Q}G$

por

Gabriel Muñoz Zolotoochin

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de
Magister Matemática

Profesor Guía: Antonio Behn

Comisión Informante:
Antonio Behn von Schmieden (Universidad de Chile)
Erdal Emsiz (co-tutor) (Pontificia Universidad Católica de Chile)
Anita Rojas Rodriguez (Universidad de Chile)

Santiago, Chile.

Índice

1. Introducción

El título presentado muestra en una frase el comienzo y el fin de este trabajo, representaciones de grupos, teoría de caracteres y álgebra de grupos son tres temas muy relacionados entre sí y prácticamente equivalentes en cuanto a resultados. Si bien existen libros completamente dedicados a cada una de estas tres áreas (que son muy bien estudiables de forma casi aislada) estas constantemente se mezclan y, al poco avanzar en cualquiera de ellas, uno se da cuenta de que son prácticamente lo mismo. Los mismos teoremas tienen sus versiones en estas tres lineas pero, dependiendo del interés de estudio, se verá más adecuada una perspectiva que otra. El cálculo de idempotentes por lo general se aborda desde la teoría de caracteres, siendo una herramienta muy útil pero también poco eficiente. El objetivo de este trabajo es mostrar una visión general sobre las formas de abordar el problema de cálculo de idempotentes primitivos de $\mathbb{Q}G$ y luego finalizar con una visión mas reciente.

Las primeras páginas, que comienzan en la sección 2, presentan estos tres temas, inicialmente de forma aislada, para luego relacionarlas. Escribí pocas demostraciones de teoremas,solo aquellas que fueran realmente ilustrativas de lo que está ocurriendo, ya que existe una vasta literatura en la cual se pueden encontrar estos resultados. En resumidas cuentas, comienzo describiendo lo que son las representaciones de grupos; luego se presentan algunos resultados útiles sobre álgebras simples y semi simples, para luego concluir con teoría de caracteres, funciones que nos entregan el puntapié inicial para hablar sobre idempotentes, presentados en esta parte como proyectores. Estas primeras páginas resumen lo que a mi parecer debería contener un primer curso sobre representaciones de grupos.

La sección 3 está completamente basada en "The Schur index in the theory of Group representation" escrito por Irving Reiner en 1960, sección en la cual, si bien se presentan tres teoremas importantes y una defininción, su importancia está en el problema mostrado al comienzo que plantea la situación de cambiar el cuerpo en el cual está definida una representación. Este problema se aborda en las secciones posteriores haciendo uso de estos tres teoremas.

La sección 4 presenta la situación específica a estudiar en el resto del trabajo, después de haber revisado lo que son las álgebras semi simples y como estas se descomponen en álgebras simples, el interés está en poder descomponer de forma efectiva el álgebra QG, que es un álgebra semi simple para luego, a partir de esto, cada álgebra simple descomponerla en lo que corresponderán a las Q-representaciones irreducibles asociadas. Esto se hará desde el punto de vista de idempotentes y se mostrará la primera forma de realizar esta descomposición presentada por [CR06].

Las secciones 5 en adelante, que bien podrían clasificarse como la parte central, presentan el enfoque reciente sobre el problema de encontrar idempotentes centrales y primitivos racionales presentado en la sección anterior. Es una recopilación bibliográfica de los resultados de una serie de trabajos publicados en los cuales, de forma muy ingeniosa y novedosa, se resuelve el problema de idempotentes primitivos ortogonales racionales para grupos nilpotentes. Si bien no son resultados tan generales como los mostrados en [CR06], que resuelve el problema para cualquier grupo finito, sí tiene una gran ventaja, que es la de prescindir del uso de la tabla de caracteres de un grupo y basarse solo en su estructura de subgrupos. Como últimas líneas se presenta el teorema publicado en [JOdR12] que presenta una forma de encontrar un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales para el algebra $\mathbb{Q}G$ cuando G es un grupo nilpotente y en las páginas previas se ablanda un poco el terreno y se presenta la demostración de una forma más sencilla de leer.

La última sección muestra ejemplos de $p-$grupos y un grupo nilpotente en los cuales se calcula un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales, esto se realizó utilizando [S$^+$YY] y el paquete [CKO$^+$09] de GAP, la importancia de esta sección es que es posible ver explícitamente la aplicación que tienen los métodos mostrados en este trabajo.

2. Preliminares

2.1. Representaciones de grupos

Definición 2.1. Sea G un grupo finito y V un $K-$espacio vectorial de dimensión finita. Una $K-$representación del grupo G sobre V es un par (V, ρ) donde ρ es un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \rho : G &\rightarrow GL(V) \\ g &\mapsto \rho_g : V \rightarrow V \end{aligned}$$

donde $GL(V) = \{T : V \rightarrow V : T \text{ es } K - \text{lineal e invertible}\}$

En términos prácticos, y de notación, llamaremos a las representaciones ρ, V o (V, ρ) cuando el o los elementos que estén ausentes no generen ambigüedad.

Si la función ρ es inyectiva, se dice que la representación es *fiel* y, en este caso, tenemos un isomorfismo entre el grupo y la imagen de ρ.

Definición 2.2. Dadas (V_1, ρ^1), (V_2, ρ^2) dos $K-$representaciones de un mismo grupo G, un homomorfismo entre ellas será una fución

$$T : V_1 \rightarrow V_2$$

tal que para todo $g \in G$ se cumple $T \circ \rho_g^1 = \rho_g^2 \circ T$, de forma equivalente, el siguiente diagrama conmuta para todo $g \in G$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_g^1"] \arrow[d, "T"'] & V_1 \arrow[d, "T"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_g^2"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

y, si T es un isomorfismo de espacios vectoriales, el homomorfismo de representaciones se llamará un isomorfismo de representaciones y las representaciones (V_1, ρ^1) y (V_2, ρ^2) se dirán isomorfas. En este último caso, si fijamos una base y a cada $\rho_i(g)$ le asociamos una matriz $[g]_i$, diremos que las representaciones son isomorfas si y solo si existe una matriz P invertible tal que para todo $g \in G$ se tiene

$$[g]_1 = P[g]_2P^{-1}$$

Definición 2.3. Si $V, \rho)$ es una representación de G y W es un subespacio vectorial de V que es ρ_g-invariante para todo $g \in G$ entonces considerando las restricciones ρ_g a W tenemos que (W, ρ) es una representación de G. En ese caso diremos que (W, ρ) es una subrepresentación de (V, ρ). Viendo una representación como una acción lineal del grupo G sobre el espacio V, diremos que W es un subespacio $G-$invariante de V.

Definición 2.4. Si (V, ρ) es una representación de G que no tiene subespacios $G-$invariantes diremos que la representación es *irreducible.*

Si H es un subgrupo de G y (W,ρ) una $K-$representación de H se puede considerar el espacio vectorial $V=\bigoplus_{[G:H]} W$ y a partir de esto hacer actuar G sobre V de la siguiente forma: cada elemento de V se descompone en $v=v_1+...+v_{[G:H]}$ donde cada v_i pertenece a un espacio isomorfo a W, por lo tanto de cierta forma ya sabemos como actúa H internamente en cada W que conforma la suma directa, por otro lado también podemos hacer actuar un conjunto de representante de clases laterales de G/H sobre V permutando los índices en la descomposición $v=v_1+...+v_{[G:H]}$, con estas dos herramientas podemos construir una nueva representación.

Explícitamente tenemos lo siguiente:

Sean G un grupo finito, $H<G$ un subgrupo cualquiera de índice h, (W,ρ) una representación de H sobre el cuerpo K y $G/H=\{x_1H, x_hH, ..., x_hH\}$ el conjunto de las clases laterales, es decir, $\{x_1, ..., x_h\}$ un conjunto de representantes de dichas clases. Supongamos $x_1\in H$.
Definamos el espacio vectorial $V=\bigoplus_{i=1}^h x_iW$, la suma directa de h espacios todos isomorfos a W, de tal forma que si $v\in V$ v se escribe de forma única $v=x_1v_1+...+x_hv_h$. Definimos la acción de G en V de la siguiente forma:

$$g\cdot x_iv_i = x_j\rho_{h_i}(v_i)$$

donde j y h_i se definen de tal forma que $gx_i=x_jh_i$. Notemos que hemos definido la acción sobre el elemento $x_iv_i\in x_iW$ y $g\cdot x_iv_i\in x_jW$, la acción queda bien definida sobre todo elemento $v\in V$ por linealidad.

Definición 2.5. A la representación definida anteriormente la llamamos *representación inducida de H a G* y la denotamos $Ind_H^G(\rho)$ o ρ^G.

Es claro que si tenemos una representación de G y H es un subgrupo de G podemos restringir la acción de G únicamente a elementos de H y de esta forma tendremos una representación de H. Este proceso es, en cierta forma, lo contrario de inducir una representación y la llamaremos la *restricción de ρ a H* y la denotaremos por $Res_H^G(\rho)$, adoptaremos la misma definición para los caracteres. La relación entre restringir e inducir se apreciará directamente en el teorema 2.24

Definición 2.6. Sean $(V_1,\rho_1),(V_2,\rho_2)$ dos representaciones, podemos construir dos representaciones asociadas a ellas

- $(V_1\oplus V_2, (\rho^1+\rho^2))$ donde $(\rho^1+\rho^2)_g(v_1,v_2)=\rho_g^1(v_1)+\rho_g^2(v_2)$
- $(V_1\otimes V_2, \rho^1\otimes\rho^2)$ donde $(\rho^1\otimes\rho^2)_g(v_1\otimes v_2)=\rho_g^1(v_1)\otimes\rho_g^2(v_2)$

En términos matriciales tenemos que si ρ_g^1 corresponde a la matriz M_1 y ρ_g^2 es la matriz M_2 (en alguna base fija) entonces la matriz de $(\rho^1+\rho^2)_g$ es la matriz por bloques:

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

Definición 2.7. Sea K un cuerpo y G un grupo finito, si consideramos el espacio vectorial $KG=\{\alpha : G\to K\}$ cuya dimensión es $|G|$ definiendo el producto de convolución en KG por $(\alpha\star\beta)(t)=\sum_{r\cdot s=t}\alpha(r)\beta(s)$ obtenemos un álgebra llamada *álgebra de grupo*. Esta álgebra tendrá una importancia fundamental en las secciones siguientes en las cuales profundizaremos más. A los elementos del subespacio $\mathcal{C}=\{\alpha\in KG : \forall t\in G, \forall g\in G : \alpha(t^{-1}gt)=\alpha(g)\}$ los llamamos funciones de clase.

Una forma estándar de denotar a los elementos de KG es escribirlos de la forma

$$\alpha = \sum_{g \in G} \alpha(g) g$$

Definición 2.8. Sea ρ una $K-$representación de G. A la función $\chi \in \mathcal{C}$ dada por $\chi(g) = Tr(\rho_g)$, donde $Tr(T)$ es la traza de la transformación lineal T, la llamaremos *caracter de* ρ. El caracter χ se dirá irreducible si ρ es una representación irreducible.

Si (V, ρ) es una representación de G con caracter χ, podemos extender tanto ρ como χ al álgebra KG linealmente. De esta forma obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho &: KG \rightarrow End(V) \\ \chi &: KG \rightarrow K \end{aligned}$$

La función χ es claramente sobreyectiva, no así necesariamente ρ, en secciones posteriores veremos condiciones necesarias y suficientes para que ρ sea sobreyectiva. Como primera condición necesaria podemos mencionar que (V, ρ) debe ser irreducible.

2.2. Álgebras Simples y Semi Simples

En toda esta sección, cuando hablemos de $K-$álgebras nos referiremos a álgebras finito dimensionales sobre el cuerpo K y los anillos serán anillos unitarios artinianos, es decir, que no existe una sucesión infinita de ideales izquierdos contenidos unos en otros formando un orden total.

Definición 2.9. Sea A un anillo, A se dirá *simple* si no contiene ideales bilaterales y A se dirá semi simple si para todo ideal izquierdo I existe un ideal izquierdo I' tal que $A = I \oplus I'$.

Fijando un anillo A, nos concentraremos en caracterizar cierta clase de $A-$módulos. Un $A-$módulo M se dirá completamente reducible si para cualquier sub $A-$módulo N de M se tiene que existe un sub $A-$módulo N' tal que $M = N \oplus N'$.

Para A un anillo, llamaremos ${}_AA$ al $A-$módulo regular, es decir, A considerado como módulo sobre si mismo con la acción de multiplicación por la izquierda.

Teorema 2.10. *[CR66][Teo. 25.2] Sea A un anillo Artiniano, entonces A es semi simple si y solo si ${}_AA$ es completamente reducible como $A-$módulo (izquierdo).*

Corolario 2.11. *A, un anillo Artiniano, es semi simple si y solo si $A \cong N_1 \oplus ... \oplus N_r$ donde los N_i's son ideales izquierdos minimales.*

Proposición 2.12. *Si M es un $A-$módulo irreducible, entonces*

a) Existe un ideal izquierdo (maximal) N_0 tal que $A/N_0 \cong M$

b) Si A es semisimple entonces existe un ideal izquierdo (minimal) N de A tal que $M \cong_A N$

Demostración:

a) Sea $0 \neq m \in M$, como M es irreducible, $A \cdot m = M$. Consideremos el homomorfismo de $A-$módulos $\phi(1_A) = m$, por la observación anterior, ϕ es sobreyectiva y por lo tanto existe N_0 tal que $A/N_0 \cong M$.

b) Considerando el mismo homomorfismo de la parte a), tenemos que, dado que A es semisimple, existe N tal que $N \oplus N_0 = A$ y por lo tanto, el mismo homomorfismo ϕ de la parte anterior nos sirve para concluir que $M \cong_A N$. ■

Usualmente cuando se introduce el concepto de $A-$módulos, se les suele presentar como *espacios vectoriales donde en vez de tomar un cuerpo se toma un anillo*. Esta visión parece oportuna en un primer acercamiento a la idea intuitiva de lo que es un $A-$módulo y nos lleva a construir $A-$módulos de la forma $A \times A \times ... \times A$, al igual que en espacios vectoriales. La proposición anterior nos indica que si queremos buscar $A-$mdulos irreducibles, no debemos buscar "agrandar" nuestro anillo, sino que todo lo contrario, debemos buscar "dentro" del anillo los $A-$módulos irreducibles.

Hasta ahora tenemos una descomposición de los anillos semisimples en suma directa de ideales izquierdos minimales entre los cuales se encuentran todos los posibles $A-$módulos irreducibles. Sin embargo podemos caracterizar más precisamente esa descomposición agrupando los ideales que representen $A-$módulos irreducibles $A-$isomorfos.

Proposición 2.13. *Sea A un anillo unitario, N un ideal izquierdo minimal entonces, para $a \in A$, tenemos que $Na = \{na : n \in N\}$ es un ideal izquierdo minimal, $Na \cong_A N$, todo ideal izquierdo minimal $A-$isomorfo a N es de esta forma y la suma de todos los ideales izquierdos minimales $A-$isomorfos entre si es un ideal bilateral minimal de A.*

Corolario 2.14. *Todo anillo semisimple A se descompone como suma directa de la forma $A = I_1 \oplus ... \oplus I_r$ donde los $I_i's$ son anillos simples, cada uno de los cuales se descompone de la forma $I_i = N_i^1 \oplus ... \oplus N_i^{r_i}$ donde los N_i^j son ideales izquierdos minimales de A (y de I_i), todos ellos $A-$isomorfos entre si. Si $i \neq j$ entonces $N_i^k \ncong N_j^l$ para cualquier par k, l. Todo $A-$módulo irreducible es de la forma N_i^1 para algún i.*

Dada la descomposición anterior podemos restringirnos al estudio de anillos simples.

Teorema 2.15 (Teorema de descomposición de Artin-Wedderburn)**.** *Si A es un anillo simple Artiniano, entonces $A \cong End_D(I)$ donde I es un espacio vectorial derecho finito dimensional sobre un anillo de división D. I es isomorfo a un (cualquier) ideal izquierdo minimal de A y D es isomorfo a $End_A(I)$.*

Lema 2.16. *Sea $M = I \cdot e$ con $e^2 = e$ un ideal izquierdo en el anillo I y sea $D = End_I(M)$. Entonces $D \cong eIe$.*

2.3. Álgebra KG

En las dos secciones anteriores introdujimos el concepto de representaciones de grupos finitos y anillos simples y semisimples, en esta seccion unificaremos estos dos contenidos a través del álgebra KG.

Consideremos una $K-$representación ρ de G sobre V, es claro que tanto K como G actúan linealmente sobre V luego podemos extender, también linealmente, estas acciones y hacer actuar el álgebra de grupo KG sobre V. Recíprocamente, supongamos que tenemos un grupo abeliano V sobre el cual actúa KG, en particular tenemos que K actúa sobre V lo que lo convierte en un espacio vectorial así como también G actúa sobre V linealmente por lo tanto tenemos una representación. Esta importante observación relaciona los $KG-$módulos V con $K-$representaciones de G sobre V.

Proposición 2.17. *Existe una relación biunívoca entre $K-$representaciones del grupo G y $KG-$módulos. Esta relación pone en correspondencia $KG-$módulos irreducibles con $K-$representaciones irreducibles y a la representación regular de G le corresponde el $KG-$módulo regular ${}_{KG}KG$*

La proposición anterior no justificaría completamente nuestro estudio particular de los anillos simples si estamos interesados en las representaciones de grupos. Sin embargo, el teorema que se presenta a continuación, demostrado por Maschke en 1899, nos permite utilizar las herramientas para anillos simples en el estudio de representaciones sobre cuerpos de característica cero.

Teorema 2.18. *[SS77][Teo. 1] Si $Char(K) \nmid |G|$ entonces KG es semisimple. En particular, esta afirmación es válida en cuerpos de característica cero, que son los cuerpos que nos interesan.*

Corolario 2.19. *$\mathbb{C}G$ es semisimple, si ρ es una $\mathbb{C}-$representación de G entonces existen $\rho_1, ..., \rho_k$ $\mathbb{C}-$representaciones irreducibles tales que $\rho = \rho_1 + ... + \rho_k$. En particular, si ρ_r es la representación regular de G, esta se descompone en suma de representaciones irreducibles. Toda $\mathbb{C}-$representación irreducible es una subrepresentación de la $\mathbb{C}-$representación regular de G.*

Demostración La primera afirmación se obtiene de forma recursiva dado que KG tiene dimensión finita sobre K y la segunda del teorema del hecho que cada $KG-$módulo irreducible es un $KG-$submódulo de KG.

2.4. Caracteres

En las secciones anteriores vimos que, dada una $K-$representación de G esta tiene asociado un caracter χ. Hasta ahora sabemos que una representación determina unívocamente un caracter. En esta sección veremos que no solo si dos representaciones irreducibles tienen el mismo caracter son isomorfas, sino que prácticamente todo la información que se puede obtener de una representación se puede obtener solo conociendo su caracter.

Teorema 2.20. ***(Lema de Schur)*** *Si (V_1, ρ^1) y (V_2, ρ^2) son dos $K-$representaciones irreducibles de G y f un homomorfismo entre ellas entonces si $f \neq 0$ se tiene que $(V_1, \rho^1) \cong (V_2, \rho^2)$. Además, si $(V_1, \rho^1) = (V_2, \rho^2)$ entonces*
$\{f : (V_1, \rho^1) \to (V_1, \rho^1) : f$ es un homomorfismo$\}$ es un anillo de división. En particular, si K es algebraicamente cerrado $f = \lambda Id$

Observación La primera parte del Lema de Schur afirma que no existen homomorfismos no triviales entre representaciones irreducibles mientras la segunda indica que el conjunto de endomorfismos de un $KG-$módulo irreducible es un anillo de división.

El lema de Schur tiene los siguientes corolarios que muestran la importancia de este lema que se obtienen de la siguiente observación:

Sea $T : V_1 \to V_2$ cualquiera, entonces $T^0 = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}(\rho_t^2)^{-1}T(\rho_t^1)$ cumple que $\forall t \in G, T_0\rho_t^1 = \rho_t^2 T_0$ luego, si las representaciones no son isomorfas, $T^0 = 0$.

Corolario 2.21 (1)**.** *ρ^1 y ρ^2 son dos representaciones no isomorfas donde $\rho^1(t) = (r_{i_1,j_1}(t))$ y $\rho^2(t) = (r_{i_1,j_2}(t))$ son las correspondientes matrices en alguna base fija, entonces:*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} r_{i_2,j_2}(t^{-1})r_{i_1,j_1}(t) = 0$$

Corolario 2.22 (2)**.** *Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de las funciones de clase de G y definamos en $\mathcal{C}$ el producto*

$$\begin{array}{rcl} <\cdot,\cdot>: \mathcal{C}\times\mathcal{C} & \to & K \\ (\chi_1,\chi_2) & \mapsto & \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\chi_1(t^{-1})\chi_2(t) \end{array}$$

entonces, si ρ_1, ρ_2 son dos $K-$representaciones irreducibles no isomorfas, con caracteres χ_1, χ_2 respectivamente, $<\chi_1,\chi_2>=0$.

Corolario 2.23. *Si $K=\mathbb{C}$ y χ es un caracter de G entonces χ es irreducible si y solo si $<\chi,\chi>=1$.*

El corolario 2 indica que los caracteres irreducibles forman un conjunto ortogonal en el espacio de las funciones de clase y el corolario 3 indica que este conjunto es ortonormal si el cuerpo es $\mathbb{C}$.

En la definición 2.5 se presentaron representaciones inducidas y restringidas. De igual forma, podemos considerar caracteres inducidos y restringidos siguiendo la misma notación. El siguiente teorema muestra la relación que existe entre caracteres inducidos y restringidos presentando las acciones de restringir e inducir como operadores en cierto sentido adjuntos uno del otro:

Teorema 2.24. *(Reciprocidad de Frobenius) Si χ es el caracter de una representación de $H<G$ y ψ es un caracter de una representación de G entonces:*

$$<\chi, Res_H^G(\psi)>_H = <Ind_H^G(\chi),\psi>_G$$

Proposición 2.25. *La cantidad de $\mathbb{C}-$representaciones irreducibles de un grupo G es la cantidad de clases de conjugación del grupo.*

Esta última proposición, junto con el último corolario 2.22, nos muestran que los caracteres irreducibles de un grupo son una base ortonormal de las funciones de clase.

En lo que sigue de esta sección nuestro cuerpo será siempre $\mathbb{C}$, en las secciones siguientes partiremos desde $\mathbb{C}$ para enontrar $K-$representaciones irreducibles donde K es un subcuerpo de $\mathbb{C}$.

Teorema 2.26. *Sea χ un $\mathbb{C}-$caracter de G y $\{\chi_1,...,\chi_k\}$ el conjunto (ortonormal) de $\mathbb{C}-$caracteres irreducibles de G entonces la cantidad de veces que aparece χ_i en χ es $n_i=<\chi,\chi_i>$. En particular si $\chi=\chi_r$ es la representación regular tenemos que n_i es igual al grado del caracter χ_i.*

La última afirmación se obtiene dado que se conoce explícitamente el caracter de la representación regular, $\chi_r=(|G|,0,0,...,0)$.

Observación Este hecho ya era conocido de las secciones anteriores de la descomposición de Artin-Wedderburn.

El siguiente teorema termina por establecer la correspondencia biunivoca entre caracteres y representaciones. La demostración de este y del Teorema 2.25 se pueden encontrar en [SS77][Cap. 2.]

Teorema 2.27. *Sea V una $\mathbb{C}-$representación de G con caracter χ. Sabemos que V se descompone en representaciones irreducibles, agrupemos todas aquellas que sean isomorfas entre si para escribir*

$V = V_1 \oplus ... \oplus V_h$ (es decir, $V_i = W_i^1 \oplus ... \oplus W_i^{r_i}$ donde $W_i^j \cong W_i^k$ para todo i, j, k y $W_i^j \ncong W_l^k$ para $i \neq l$ y los W_i^k son irreducibles), entonces la proyección p_i de V sobre V_i está dada por

$$p_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} \chi_i(t^{-1}) \rho_t$$

donde χ_i es el caracter de W_i^j y n_i el grado de esta representación ($= \chi_i(1)$).

En términos de $\mathbb{C}G-$módulos, tenemos que si V es un $\mathbb{C}G-$módulo, entonces V se descompone como suma directa de $\mathbb{C}G-$módulos irreducibles, en este caso el elemento $p_i = e_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} \chi_i(t^{-1}) t$ es un idempotente central (en $\mathbb{C}G$) primitivo, el adjetivo primitivo indica que no es posible encontrar, dentro de V_i, otro idempotente central que genere un sub $KG-$módulo. Usualmente utilizaremos el nombre idempotente central al idempotente central primitivo asociado a la descomposición agrupada en $\mathbb{C}G-$módulos isomorfos de la representación regular, es decir, de la misma álgebra $\mathbb{C}G$.

Con esta misma notación tenemos $V = V_1 \oplus ... \oplus V_h$, ahora estamos interesados en encontrar la proyección de p_i^j de V sobre W_i^j

Teorema 2.28. *La proyección p_i^j de V sobre W_i^j está dada por*

$$p_i^j = \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} [\rho_t]_{j,j} \rho_t$$

de la misma forma, el idempotente primitivo que general el álgebra simple asociada a la representación irreducible W_i^j es

$$l_i^j = \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} [\rho_t]_{j,j} t$$

3. Cambiando el Cuerpo

Sean K, L dos cuerpos tales que $\mathbb{Q} < K < L < \mathbb{C}$ y ρ una $K-$representación de G de grado n. Sabemos que ρ mapea los elementos de G en $K-$matrices de $n \times n$ invertibles, estas matrices se pueden considerar como $L-$matrices invertibles y ver esto como una $L-$representación de G también de grado n, la cual denotaremos por ρ^L. Si inicialmente consideramos V un $K-$espacio vectorial, sobre el cual actúa G, ahora estamos considerando $V \otimes_L K$ que ahora es un $L-$espacio vectorial sobre el cual actúa G. De forma inversa, si tenemos un $LG-$módulo M, este es un espacio vectorial sobre K (de dimensión $dim_K(V) = |K : L| \cdot dim_L(V)$) sobre el cual actúa G, por lo tanto tenemos un $KG-$módulo. Este nuevo $KG-$módulo lo denotaremos M_K y si a M le correspondía la representación ρ entonces a M_K le corresponderá la representación que denotaremos ρ_K.

Notemos que si ρ es una $K-$representación reducible, entonces ρ^L también será reducible, sin embargo si ρ es irreducible no necesariamente ρ^L es irreducible.

Definición 3.1. Sea ρ una $L-$representación de G y K un cuerpo tal que $\mathbb{Q} < K < L$. Diremos que ρ es realizable sobre K si existe una $K-$representación τ tal que $\tau^L \cong \rho$.

Proposición 3.2. *Sea ρ una L representación de G, entonces existe una extensión finita K de $\mathbb{Q}$ tal que ρ es realizable sobre K.*

Para una $L-$representación de G con caracter χ, consideremos el cuerpo que se obtiene al adjuntar a $\mathbb{Q}$ todos los elementos $\{\chi(g) : g \in G\}$. A tal cuerpo lo llamaremos cuerpo de trazas y lo denotaremos por $\mathbb{Q}(\chi)$. Es claro que el cuerpo L de la proposición anterior es una extensión (finita) de $\mathbb{Q}(\chi)$.

Definición 3.3. Sea ρ una $\mathbb{C}-$representación irreducible de G, definimos el índice de Schur de ρ

$$m(\rho) = \text{mín}(L : \mathbb{Q}(\chi))$$

donde el mínimo lo tomamos sobre todas las extensiones L de $\mathbb{Q}(\chi)$ sobre las cuales ρ es realizable.

A partir de las definiciones anteriores, existe una forma natural de construir nuevas representaciones a partir de alguna dada. Consideremos ρ una $L-$representación de G y $\sigma \in Gal(L/K)$, fijando una base e identificando la representación con un conjunto de matrices con coeficientes en L podemos aplicar ρ a cada una de las entradas de estas matrices para formar una nueva representación, que podemos denotar ρ^σ. Esta nueva representación puede ser similar (por ejemplo si trivialmente tomamos $\sigma = 1$, aunque no es el único caso) a ρ como podrá no serlo. Si χ es el caracter correspondiente a ρ y tomaramos por ejemplo $\sigma \in Gal(L/\mathbb{Q}(\chi))$ tenemos que el caracter χ^σ asociado a ρ^σ es igual a χ por lo tanto, por el Teorema 2.24, tenemos $\rho \cong \rho^\sigma$. El poder hacer actuar el grupo de Galois de L sobre el conjunto de representaciones definidas en L nos entrega más herramientas para estudiar las representaciones mismas.

En términos de módulos, es claro que si V es el espacio vectorial sobre el cual actua G y tomamos

V^σ entonces $V \cong_L V^\sigma$ sin embargo no es necesariamente cierto que $V \cong_{LG} V^\sigma$ lo cual dependerá justamente de la representación asociada a este $L-$módulo y su correspondiente caracter.

Irving Reiner, en 1960 [Rei61], reescribió y formalizó con lenguaje más moderno los siguientes tres teoremas que representan las bases del estudio de representaciones en las cuales se cambia el cuerpo y formalizan las ideas antes expuestas.

Teorema 3.4.

1. *Sea ρ una $\mathbb{C}-$representación irreducible de G con caracter χ, para cualquier extensión finita L de $\mathbb{Q}$ donde ρ es realizable, tenemos que $m(\rho)|(L:\mathbb{Q}(\chi))$. $m(\rho)$ es el menor valor tal que $m \cdot \rho$ es realizable sobre $\mathbb{Q}(\chi)$*

2. *Toda $\mathbb{Q}-$representación irreducible ρ de G se descompone completamente sobre $\mathbb{C}$ en representaciones irreducibles $\{\rho_1, ..., \rho_k\}$ con caracteres $\{\chi_1, ..., \chi_k\}$ respectivamente, cada una de las cuales ocurre con igual multiplicidad $m = m(\rho_i)$ donde $k = (\mathbb{Q}(\chi_i) : \mathbb{Q})$. Más aún, $\{\rho_i\}_i$ forman una clase completa Galois conjugada, es decir, los cuerpos $\mathbb{Q}(\chi_i)$ son todos iguales y $\{\chi_i\}_i = \{\chi_1^\sigma\}_{\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\chi_1)/\mathbb{Q})}$*

3. *Si ρ es una $\mathbb{Q}-$representación irreducible de G y extendemos ρ a una $\mathbb{Q}-$representación de $\mathbb{Q}G$ entonces, $A = \{\rho(x) : x \in \mathbb{Q}G\}$ es un álgebra simple sobre $\mathbb{Q}$ isomorfa a un anillo completo de matrices sobre Δ donde Δ es un anillo de división. Si P es el centro de Δ entonces $P \cong \mathbb{Q}(\chi_i)$ y la dimensión de Δ sobre P es $m(\rho)^2$.*

4. Objetivo Principal - Idempotentes

Si K es un cuerpo, de característica cero, y G un grupo finito, entonces el álgebra KG es semi simple, por lo tanto se descompone como suma directa en álgebras simples las cuales son, a su vez, isomorfas a álgebras de matrices sobre anillos de división.

$$KG = I_1 \oplus ... \oplus I_r$$

el elemento $1 \in KG$ se descompone como $1 = e_1 + ... + e_r$ y tenemos que I_i es un álgebra simple con unidad (y $KG-$generador) e_i.

Cada e_i es un elemento idempotente central de KG, el cual además es un $(KG-)$generador del álgebra simple I_i, además los $e_i's$ cumplen que $e_i \cdot e_j = 0$ para $i \neq j$. Matricialmente, según el teorema de Artin-Wedderburn, estos elementos son las matrices identidad en cada componente.

Recordemos el Teorema 2.27 que será sobre el cual basaremos esta sección.

Teorema 4.1 (2.27)**.** *Con la notación usada anteriormente, una forma explícita de escribir los e_i es*

$$e_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} \chi_i(t^{-1})t$$

donde χ_i es el caracter correspondiente a la representación irreducible asociada al $KG-$módulo I_i y n_i es el grado de esa representación ($n_i = \chi(1)$).

Teorema 4.2. *[Yam74][Prop. 1.1] Con la misma notación del teorema anterior, sea $e^i_{\mathbb{Q}}$ el idempotente central asociado a la representación $\rho_{\mathbb{Q}}$, entonces*

$$e^i_{\mathbb{Q}} = \frac{n_i}{|G|} \sum_{t \in G} Tr_{\mathbb{Q}(\chi_i):\mathbb{Q}}(\chi_i(t^{-1}))t$$

Si ρ es una $\mathbb{C}-$representación irreducible con caracter χ, tiene asociado un $\mathbb{C}G-$módulo irreducible V con índice de Schur $m(\rho) = m$. Por definición de índice de Schur, existe una extensión (finita) L de $K = \mathbb{Q}(\chi)$ de grado m tal que ρ es definible en L.

Si comenzamos desde $\mathbb{Q}$, tenemos que cualquier $\mathbb{Q}-$representación irreducible τ se descompone completamente en $\rho_1, ..., \rho_k$ $L-$representaciones irreducibles cada una de las cuales ocurre con multiplicidad m las cuales forman una clase completa Galois conjugada. Notemos que, por definición de m, los $m \cdot \rho_i$ son definibles en $\mathbb{Q}(\chi_i)$ y que todos los $\mathbb{Q}(\chi_i) = K$ son iguales. Sea $\sigma \in Gal(L/K)$ entonces $\sigma(\rho_i)$ es una $L-$representación irreducible con caracter $\sigma(\chi_i) = \chi_i$ y, por lo tanto, isomorfa a ρ_i. Con esto podemos construir el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & \rho_1, ..., \rho_k \arrow[d] \\
K = \mathbb{Q}(\chi_i) \arrow[r] \arrow[d, "k"'] & m \cdot \rho_1, ..., m \cdot \rho_k \arrow[d] \\
\mathbb{Q} \arrow[r] & m \cdot (\rho_1 + ... + \rho_k) \cong \tau
\end{tikzcd}$$

En términos de módulos, tenemos V un $\mathbb{C}G-$módulo, con cuerpo de definición L, $U = mV$ cuyo cuerpo de definición es $K = \mathbb{Q}(\chi)$ y $W = \oplus_{\phi\in Gal(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})} U^{\phi}$ con cuerpo de definición $\mathbb{Q}$. Si e es el idempotente central que genera el álgebra simple V y denotamos e_U y e_W los idempotentes que generan las correspondientes álgebras simples U y W respectivamente, tenemos que $e = e_U$ y $e_W = \sum_{\phi\in Gal(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})} \phi(e)$

Expresiones explícitas clásicas para estos idempotentes son [Yam74][Prop. 1.1]:

$$\begin{aligned} e &= \frac{dim(V)}{|G|}\sum_{t\in G}\chi(t^{-1})t \\ e_W &= \frac{dim(V)}{|G|}\sum_{t\in G}Tr_{K:\mathbb{Q}}(\chi(t^{-1}))t \end{aligned}$$

Estos idempotentes generan las $LG-$ y $\mathbb{Q}G-$álgebras simples respectivamente, es decir, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} LG\cdot e &= V \\ KG\cdot e &= U \\ \mathbb{Q}G\cdot e_W &= W \end{aligned}$$

considerando V, U y W como álgebras, estas son simples (sobre sus respectivos cuerpos) por lo tanto tienen una descomposición en ideales izquierdos minimales, que corresponden a los $LG-$, $KG-$ y $\mathbb{Q}G-$módulos irreducibles asociados a las L, K y $\mathbb{Q}-$representaciones irreducibles. Esto descompone los idempotentes centrales primitivos en idempotentes (no centrales) primitivos

$$\begin{aligned} e &= l_1 + ... + l_n \in LG \\ &= k_1 + ... + k_{\frac{n}{m}} \in KG \\ e_w &= f_1 + ... + f_{\frac{n}{m}} \in \mathbb{Q}G \end{aligned}$$

Existen expresiones explícitas para encontrar tanto $l_i's$ como los $k_i's$ y los $f_i's$.

Proposición 4.3. *Con la notación anterior, tenemos la siguiente expresión*

$$l_j = \frac{dim(V)}{|G|}\sum_{t\in G} r_{jj}(t^{-1})t$$

donde $r_{jj}(t^{-1})$ son los coeficientes $j-$ésimos de la diagonal de la matriz de la representación racional asociada del elemento t^{-1} en alguna base.

[CR06] describen un procedimiento para escribir explícitamente los elementos $k_i's$ y $f_i's$ que consiste en lo siguiente:

a) Considerar los idempotentes (complejos) primitivos $l_j's$.

b) Tomar los espacios vectoriales $J_i^1 = LG\cdot l_i$ y definir $J_s^h = \tau_h(J_s^1)$ donde $\{\tau_i\}_i^m = Gal(L/K)$ y encontrar bases B_s^h para J_s^h.

c) Definir $B = \cup_{s,h} B_s^h$, notar que B es una base para $LG \cdot e$.

d) Escribir e en la base B y encontrar los componentes u_s^h de e en J_s^h

e) Para cada s en $\{1, ..., n/m\}$, definir $k_s = \sum_{\tau \in Gal(L/K)} \tau(u_s^1)$.

f) Para cada s en $\{1, ..., n/m\}$, definir $f_s = \sum_{\sigma \in Gal(L/\mathbb{Q})} \sigma(u_s^1)$

Observación Así como los $l_j's$ no son únicos, tampoco lo son la elección de las bases B_s^h para J_s^h y por lo tanto las expresiones para los $k_i's$ y los $f_i's$ tampoco no son únicas. Sin embargo los idempotentes centrales si son únicos.

Esta información la traducimos en la siguiente matriz con entradas en LG

$$\begin{pmatrix} u_1^{\tau_1} & u_1^{\tau_2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_1^{\tau_m} \\ u_2^{\tau_1} & u_2^{\tau_2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_2^{\tau_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n/m}^{\tau_1} & u_{n/m}^{\tau_2} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{n/m}^{\tau_m} \end{pmatrix}$$

en la cual se cumple

$$u_s^{\tau_h} \cdot u_t^{\tau_l} = \begin{cases} u_s^{\tau_h} & \text{si l=h;t=s} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

además, $e = \sum_{s,h} u_s^h$, los $k_i's$ se forman sumando los elementos de la $i-$ésima fila y $u_s^h \in J_s^h$.

Tanto la construcción de los idempotentes centrales, como de los idempotentes primitivos en cada uno de los cuerpos, requieren el cómputo de caracteres de los elementos del grupo. Estos métodos se han optimizando en una serie de trabajos que presentaremos en las secciones siguientes.

5. Idempotentes centrales - Enfoque Reciente

El cálculo de idempotentes primitivos (centrales y no centrales) explícito en las secciones anteriores, tiene la desventaja de utilizar la tabla de caracteres (complejos) de un grupo G. Este procedimiento es poco óptimo para grupos de ordenes superiores. [JLP03] presentaron en el 2002 un método para encontrar los idempotentes centrales de grupos nilpotentes. Posteriormente, en 2004, [OdRS04] generalizaron este procedimiento para idempotentes centrales para una clase especial de grupos, llamados monomiales y en 2010, [JOdR12] muestran expresiones para los idempotentes centrales de cualquier grupo e idempotentes ortogonales primitivos (no centrales) de grupos nilpotentes. En esta sección comenzaremos introduciendo la notación utilizada y mostrando los resultados correspondientes a los idempotentes centrales. Para caracteres correspondientes a representaciones inducidas, según la definición 2.5 se utilizará la notación χ^G para el caracter correspondiente a la representación inducida de H con caracter χ cuando H esté implícito. También utilizaremos la notación $H^g := gHg^{-1}$.

Para H un grupo finito y $K \trianglelefteq H$, denotaremos por $Lin(H, K)$ al conjunto de caracteres lineales de H cuyo ker es K.

Definición 5.1. Sea ρ una $\mathbb{C}-$representación de G con caracter χ. Diremos que χ es un caracter monomial si existen subgrupos H, K de G tales que $\chi = \phi^G$ para algún $\phi \in Lin(H, K)$. Un grupo se dirá monomial si todos sus caracteres irreducibles son monomiales.

Definición 5.2. Un par de subgrupos (H, K) de G se dice un par Shoda si existe $\phi \in Lin(H, K)$ tal que ϕ^G es irreducible.

Teorema 5.3. *(Shoda) Sea ϕ un caracter lineal de $H < G$, entonces ϕ^G es irreducible si y solo si, para todo $g \in G - H$ existe $h \in H \cap H^g$ tal que $\phi(ghg^{-1}) \neq \phi(h)$.*

Corolario 5.4. (H, K) *es un par Shoda si y solo si $K \trianglelefteq H$, H/K es cíclico y si $g \in G$ y $[H, g] \cap H \subseteq K$ entonces $g \in H$.*

La definición de par Shoda está claramente ligada a la teoría caracteres y, por lo tanto, la verificación si un par de subgrupos es un par Shoda pasaría necesariamente por el cómputo de caracteres irreducibles de G. El teorema de Shoda, sin embargo, nos da las herramientas para caracterizar los pares que determinarán caracteres irreducibles y, a partir de esto, las herramientas para poder identificar tales pares sin el cálculo de caracteres.

Sea G un grupo finito, χ un caracter irreducible (complejo) de G con e el idempotente central que genera el álgebra simple V asociada a χ y $e_{\mathbb{Q}}$ el idempotente central primitivo asociado a $\rho_{\mathbb{Q}}$. Recordemos que las expresiones para estos dos idempotentes están dadas por:

$$e = \frac{dim(V)}{|G|} \sum_{t \in G} \chi(t^{-1})t \qquad (1)$$

$$e_{\mathbb{Q}} = \frac{dim(V)}{|G|} \sum_{t \in G} Tr_{K:\mathbb{Q}}(\chi(t^{-1}))t \qquad (2)$$

(2) la podemos reescribir como:

$$e_{\mathbb{Q}} = \sum_{\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q})} \sigma \cdot e$$

El principal acierto demostrado en [OdRS04] consiste en mostrar que, en el caso que χ es monomial, el cálculo del idempotente $e_{\mathbb{Q}}$ solo depende de los subgrupos (H, K) donde $\chi = \phi^G$ y $\phi \in Lin(H, K)$. La demostración teórica que se presenta en [OdRS04] utilizará la tabla de caracteres del grupo para llegar a (2) pero en la práctica, la principal ventaja es que al encontrar $e_{\mathbb{Q}}$ se presciende de la utilización de caracteres.

Comenzaremos fijando la notación utilizada.

- Si $H < G$ entonces $\hat{H} = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$. Notamos que $\hat{H}$ es un idempotente y es central si y solo si $H \trianglelefteq G$.
- Para $N \trianglelefteq G$, definimos $\epsilon(G, N)$ por:

$$\epsilon(G,N) = \begin{cases} \hat{N} & \text{si } N = G \\ \prod_{M/N \in \mathcal{M}(G/N)} (\hat{N} - \hat{M}) & \text{si } N \neq G \end{cases}$$

  Si $N = \{1\}$ denotamos $\epsilon(G, 1) = \epsilon(G)$.

  donde $\mathcal{M}(G) = \{H \trianglelefteq G : H \text{ es minimal, no trivial}\}$

- Sean H, K dos subgrupos de G, $K \trianglelefteq H$ y T un conjunto de representantes de las clases laterales (derechas) de $G/Cen_G(\epsilon(H, K))$ denotamos $e(G, H, K)$ al elemento en $\mathbb{Q}G$:

$$e(G, H, K) = \sum_{t \in T} \epsilon(H, K)^t$$

Con esta notación, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.5. *Sea G un grupo finito, H un subgrupo de G, χ un caracter lineal de H con kernel K. Si χ^G, el caracter inducido de χ en G, es irreducible, entonces el idempotente central primitivo de $\mathbb{Q}G$ asociado a χ^G es:*

$$e_{\mathbb{Q}}(\chi^G) = \frac{[Cen_G(\epsilon(H, K)) : H]}{[\mathbb{Q}(\chi) : \mathbb{Q}(\chi^G)]} e(G, H, K)$$

Demostración Ver [OdRS04][Teo. 2.1]

El teorema anterior, nos dice que si χ es monomial, entonces existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $e_{\mathbb{Q}} = \alpha \cdot e(G, H, K)$

Es claro que si para $g \in G - N_G(H), \epsilon(H, K)\epsilon(H, K)^g = 0$ entonces $e(G, H, K)$ es un idempotente y $\alpha = 1$.

Definición 5.6. Un par (H, K) de subgrupos de G se dice que es un par Shoda fuerte si cumplen

i $K \leq H \trianglelefteq N_G(K)$

ii H/K es cíclico y abeliano maximal en $N_G(K)/K$

iii para todo $g \in G - N_G(H), \epsilon(H, K)\epsilon(H, K)^g = 0$

Proposición 5.7. *El par (H, K) es un par Shoda fuerte si y solo si (H, K) es un par Shoda, los $G-$conjugados de $\epsilon(H, K)$ son ortogonales y $H \trianglelefteq N_G(K)$*

Demostración Ver [OdRS04][Prop. 3.3] Notemos que, en tal caso, además $e(G, H, K)$ es un idempotente central primitivo.

Corolario 5.8. *Sea (H, K) un par de subgrupos de G que satisfacen las condiciones*

a) $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$

b) H/K es cíclico y subgrupo abeliano maximal de $N_G(K)/K$.

Entonces, (H, K) es un par Shoda fuerte.

ObservaciónUn par Shoda fuerte no necesariemente cumple las condiciones $a)$ y $b)$

Si G es un grupo finito y E el conjunto de idempotentes centrales primitivos de $\mathbb{Q}G$, consideremos

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{\alpha \cdot e(G, H, K) \in E : (H, K)\text{es un par Shoda}\} \\
E_2 &= \{e(G, H, K) \in E : (H, K)\text{es un par Shoda}\} \\
E_3 &= \{e(G, H, K) \in E : (H, K)\text{es un par Shoda Fuerte}\} \\
E_4 &= \{\alpha \cdot e(G, H, K) \in E : (H, K) \text{ Satisfacen las condiciones del corolario 5.7}\}
\end{aligned}$$

entonces, $E_4 \subseteq E_3 \subseteq E_2 \subseteq E_1$. Todas estas inclusiones son estrictas y en [OdRS04][Ej. 5.2-5.5] se muestran contraejemplos para cada una de ellas.

Hasta ahora, tenemos una forma explícita de calcular los caracteres monomiales de un grupo finito G, esto puede parecer a primera vista limitado, sin embargo esta idea se puede extender a cualquier grupo finito haciendo combinaciones lineales racionales de elementos $e(G, H, K)$ para pares Shoda (H, K).

Definición 5.9. Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G, diremos que H es un subgrupo elemental de G si es producto directo de un subgrupo cíclico y un $p-$grupo para algún primo p.

Teorema 5.10. *(Brauer) Si χ es un $\mathbb{C}-$caracter irreducible de G, existen enteros $\{a_i\}$ tales que $\chi = \sum_i a_i \chi_i^G$ donde los $\chi_i' s$ son caracteres lineales de subgrupos elementales de G.*

Utilizando el teorema de Brauer, podremos calcular directamente los idempotentes centrales de cualquier grupo, no solo de grupos monomiales. Antes de continuar con esto, podemos entregar un poco más de información sobre qué tipo de grupos son monomiales fuertes, es decir, todos sus idempotentes centrales son de la forma $e(H, K)$ para (H, K) un par Shoda fuerte.

Recordemos que un grupo G se dice soluble si existe una cadena de subgrupos de la forma $\{1\} = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq G_k = G$ tales que G_j/G_{j+1} es abeliano. Si estos cuocientes son además cíclicos y cada $G_i \trianglelefteq G$, el grupo se dirá supersoluble.

Definición 5.11. Un grupo G se dice abeliano por supersoluble si tiene un subgrupo normal H abeliano tal que G/H es supersoluble.

Directamente de la definición, tenemos que los grupos elementales son abelianos por supersolubles.

Teorema 5.12. *[OdRS04][Teo. 4.4] Si G es abeliano por supersoluble ($A \trianglelefteq G : G/A$ es supersoluble) entonces los idempotentes centrales primitivos de $\mathbb{Q}G$ son de la forma $e(G, H, K)$ para cierto par Shoda fuerte (H, K).*

Teorema 5.13. *[JOdR12][Prop. 3.2] Sea G un grupo finito de orden n y χ un caracter irreducible de G con idempotente central asociado e. El idempotente central que genera el $\mathbb{QG}-$módulo irreducible asociado a χ es de la forma*

$$e_{\mathbb{Q}} = \frac{\chi(1)}{[\mathbb{Q}(\omega_n) : \mathbb{Q}]} \sum_i \frac{a_i}{[G : C_i]} [\mathbb{Q}(\omega_n) : \mathbb{Q}(\phi_i)] e(G, H_i, K_i)$$

donde $\chi = \sum_i a_i \phi_i^G$ es la descomposición del teorema de Brauer con enteros a_i, subgrupos elementales H_i y tal que $\phi_i \in Lin(H_i, K_i)$.

6. Producto Cruzado y Álgebra de Cuaternios

El objetivo que viene es descomponer los idempotentes centrales en idempotentes primitivos ortogonales, para esto será necesario introducir dos estructuras algebraicas: el Álgebra de Cuaternios y el Producto Cruzado.

Si K es un cuerpo y G un grupo finito, hemos definido KG como los elementos de la forma

$$\sum_{g \in G} a_g g$$

donde para $g \in G$, $a_g \in K$.

En esta sección, construiremos un álgebra llamada producto cruzado que, en cierto sentido, es una generalización del álgebra de grupo.

Para G un grupo finito, K un cuerpo, sea $U = \{u_g : g \in G\}$ un conjunto de símbolos indexado por los elementos de G. Consideremos el espacio vectorial con base los elementos de U

$$K \star G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g u_g : a_g \in K \right\}$$

con la acción natural de K por la izquierda es un espacio vectorial de dimensión $|G|$, igual que el álgebra de grupo. Si $\alpha : G \to Aut(K)$ y $\tau : G \times G \to K^*$ son funciones, podemos considerar la acción de K por la derecha en $K \star G$ dada por $g \cdot k = \alpha_g(k)g$ y extenderla linealmente a todo $K \star G$, además podemos definir un producto en $K \star G$ dado por $u_g \cdot u_h = \tau(g,h)u_{gh}$ y extenderlo distributivamente sobre $K \star G$. Con estas operaciones tenemos que si el álgebra definida con este producto es asociativa, la llamaremos producto cruzado y se denotará $K \star_\tau^\alpha G$

Observaciónes

- Si $\tau(g,h) = 1$ y $\alpha = id$ tenemos el álgebra de grupo definido en las secciones anteriores.
- Existen definiciones más generales sobre producto cruzado, por ejemplo, al considerar K como un anillo unitario.
- Si α es inyectiva, podemos identificar G con $Gal(K/F)$ para algún cuerpo fijo F, en este caso al producto cruzado $K \star_\tau^\alpha G$ lo denotamos $(K/F, \tau)$ y lo llamaremos *producto cruzado clásico*

Los dos lemas que se presentan a continuación, nos servirán posteriormente para caracterizar las álgebras simples de cierto tipo de grupos.

Lema 6.1. *Si K es un cuerpo de característica cero, el producto cruzado clásico con torsión trivial $(K/F, 1)$ es isomorfo al álgebra de matrices $\mathbb{M}_n(F)$ donde $n = [K : F]$, por lo tanto un conjunto completo de idempotentes primtivos ortogonales de $(K/F, 1)$ tiene n elementos.*

Lema 6.2. *[JOdR12][Lema 4.1] Si $A = (K/F, 1)$ es el producto cruzado con torsión trivial con K un cuerpo de característica cero, entonces un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales de A se obtiene al conjugar $e = \sum_{g \in Gal(K/F)} g$ por elementos $x_1, ..., x_n \in K$ tales que $Tr_{K/F}(x_i x_j^{-1}) = 0$.*

Definición 6.3. Si K es un cuerpo, denotaremos por $\mathbb{H}(K)$ a la $K-$álgebra formada a partir del $K-$espacio vectorial con base $\{1, i, j, k\}$ donde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ y $ij = -k$, $ji = k$.

Definición 6.4. Diremos que el álgebra de cuaternios $\mathbb{H}(F)$ se descompone si $\mathbb{H}(F) \cong \mathbb{M}_2(F)$

Observación En general, si F es un cuerpo, el álgebra de cuaternios $\mathbb{H}(F)$ o es un álgebra de división o se descompone.

Lema 6.5 ([JOdR12]). *[Lema 4.4] Sea K un cuerpo de característica cero. El álgebra de cuaternios $\mathbb{H}(F)$ se descompone si y solo si existen $x, y \in K$ tales que $x^2 + y^2 = -1$. En tal caso, $\frac{1}{2}(1 + xi + yj)$ y $\frac{1}{2}(1 - xi - yj)$ forman un conjunto completo de idempotentes primitivos de $\mathbb{H}(F)$. Más aún, si denotamos ω_n como una raíz $n-$ésima primitiva de la unidad y consideramos $K = \mathbb{Q}(\omega_m, \omega_{2^n} + \omega_{2^n}^{-1})$, se tiene que $\mathbb{H}(K)$ se descompone si y solo si $m \neq 1$ y bien $n \geq 3$ o el orden multiplicativo de 2 módulo m es par.*

7. Idempotentes primitivos ortogonales

Hasta ahora se han entregado expresiones explícitas de los idempotentes centrales primitivos racionales asociados a cualquier caracter monomial. El paso siguiente consiste en caracterizar las álgebra simples que generan estos idempotences centrales lo que nos llevará, además, a expresiones para los idempotentes que generan los $\mathbb{Q}G-$módulos irreducibles. En esta sección mostraremos los resultados que existen para grupos nilpotentes.

Sea G un grupo nilpotente, en particular G es abeliano por supersoluble, por lo tanto por el teorema 5.9 tenemos que los idempotentes centrales de $\mathbb{Q}G$ son de la forma $e = e(G, H, K)$. En esta sección nos ocuparemos de descomponer el álgebra simple $\mathbb{Q}G \cdot e$ en $\mathbb{Q}G-$módulos irreducibles, lo que se hará mediante la descomposición de e en idempotentes primitivos ortogonales. Para mostrar esto, comenzaremos con un caso particular para luego mostrar como se extiende a cualquier grupo nilpotente.

Proposición 7.1. *Sea (H, K) un par Shoda fuerte y sean $h = [H : K]$, $N = N_G(K)$, $n = [G : N]$, aK un generador de H/K. Entonces se tienen los siguientes isomorfismos:*

$$\mathbb{Q}Ge \cong End_{\mathbb{Q}G}(\mathbb{Q}Ge) \cong \mathbb{M}_n(End_{\mathbb{Q}G}(\mathbb{Q}G\epsilon)) \cong \mathbb{M}_n(\epsilon\mathbb{Q}G\epsilon) = \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}N\epsilon) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{Q}(\omega_{[H:K]}) \star^{\sigma}_{\tau} N/H)$$

donde la acción σ y torsión τ están dadas por

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{nH}(\omega_{[H:K]}) & = & \omega^j_{[H:K]},\ si\ (aK)^{nH} = (aK)^j \\ \tau(n_1H, n_2H) & = & \omega^j_{[H:K]}\ si\ n_1n_2K = h^j n_i K \end{array}$$

para algún conjunto fijo $\{n_i\}_i$ de representantes de clases laterales de N/H.

Los primeros dos isomorfismos provienen del teorema de Artin-Wedderburn (Teorema 2.13), el tercer isomorfismo del lema 2.14, la igualdad que aparece a continuación es debido a que si $g \notin N$ entonces $\epsilon \cdot g \cdot \epsilon = gg^{-1} \cdot \epsilon g \epsilon = g \cdot \epsilon^g \epsilon = 0$ ya que (H, K) es un par Shoda fuerte, finalmente el último isomorfismo se obtiene considerando la función

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{Q}N \cdot \epsilon & \rightarrow & \mathbb{Q}(\omega) \star^{\sigma}_{\tau} N/H \cong \mathbb{Q}H \cdot \epsilon \star^{\sigma}_{\tau} N/H \\ an \cdot \epsilon & \mapsto & \omega(Hn) \end{array}$$

y extendiéndola linealmente sobre todo $\mathbb{Q}N \cdot \epsilon$. En este caso, dado que H es normal en N, representamos los elementos de N como an donde n es un elemento de un conjunto de representantes de las clases laterales de N/H.

Observaciones

- El último isomorfismo está definido para $an \cdot \epsilon$ y luego se extiende linealmente donde n pertenece a un conjunto de representantes (fijo) de clases laterales de N/H. Fijemos $\{n_i\}_i$ un conjunto de representantes de N/H, entonces $\phi(n_i \cdot n_j) = \phi(h^s \cdot n_t) = h^s\phi(n_t) = \omega^s \cdot Hn_t$ para ciertos s y t, en particular si H tiene complemento en N tendremos $n_i \cdot n_j = n_t$ y la torsión será trivial.

- La acción de N/H es fiel sobre $\mathbb{Q}(\omega_k)$ luego $\mathbb{Q}(\omega_h) \star_\tau^\sigma N/H = (\mathbb{Q}(\omega_h)/F, \tau)$ donde F es el centro del álgebra.

Corolario Sea G un grupo tal que $(H, 1)$ es par Shoda fuerte y H es subgrupo (cíclico) abeliano-maximal de G, entonces $\mathbb{Q}G \cdot e \cong \mathbb{Q}(\omega_h) \star_\tau^\sigma G/H = (\mathbb{Q}(\omega_h)/F, \tau)$ donde F es el cuerpo fijo por G/H y, por lo tanto $[\mathbb{Q}(\omega_h) : F] = [G : H]$

Lema 7.2. *Sea F un subcuerpo de $\mathbb{Q}(\omega_n)$ tal que $\omega_p \in F$ y $\omega_n^i \notin F$ con $i = 1, ..., p^k - 1$ y $\omega_4 \in F$ si $p = 2$ entonces $Tr_{\mathbb{Q}(\omega_n)/F}(\omega_n^i) = 0$.*

El primer acercamiento hacia los grupos nilpotentes se hará a partir de los $p-$grupos para los cuales $(H, 1)$ es un par Shoda fuerte. Con esto, el primer paso consiste en caracterizar los grupos con tales características. La demostración directa de la construcción de idempotentes primitivos ortogonales para grupos nilpotentes se encuentra en [JOdR12][Teo. 4.5], acá se desarrollará más la demostración separándola directamente por casos e intentando dar más detalles de su construcción.

Lema 7.3. *[JOdR12][Lema 4.3] Sea G un $p-$grupo que tiene un subgrupo $H =< a > \trianglelefteq G$ abeliano maximal en G, si denotamos $v_p(x)$ como la mayor potencia de p en la descomposición prima de $x \in \mathbb{Z}$, para $p \in \mathbb{Z}$ primo, entonces G es isomorfo a alguno de los tres grupos siguientes.*

- $P_1 =< a, b : a^{p^n} = b^{p^k} = 1, b^{-1}ab = a^r >$
  con $v_p(r-1) = n - k$ *o* $p = 2$ *y* $r \not\equiv 1\ (mod 4)$.

- $P_2 =< a, b, c : a^{2^n} = b^{2^k} = c^2, bc = cb, b^{-1}ab = a^r, c^{-1}ac = a^{-1} >$
  con $r \equiv 1\ (mod 4)$.

- $P_3 =< a, b, c : a^{2^n} = b^{2^k} = 1, c^2 = a^{2^{n-1}}, bc = cb, b^{-1}ab = a^r, c^{-1}ac = a^{-1} >$
  con $r \equiv 1\ (mod 4)$.

Observaciones

- El único caso impar corresponde a P_1 con $v_p(r-1) = n - k$.

- Los grupos P_1 y P_2 corresponden a los casos en que H tiene un complemento en G.

Utilizando lo anterior, mostraremos los idempotentes primitivos para estas clases de grupos.

Sea G un $p-$grupo y $< a >= H \trianglelefteq G$ un subgrupo de G tal que $(H, 1)$ es un par Shoda fuerte. Notemos que por ser $(H, 1)$ un par Shoda fuerte, H es un subgrupo cíclico y abeliano maximal en G por lo tanto cumple las condiciones del teorema 7.2 lo que significa que es del tipo P_1, P_2 o P_3. En este caso tenemos que $e = e(G, H, K)$ definido en las secciones anteriores se reduce a $e = \epsilon(H, K) = \epsilon(H, 1) = \epsilon(H)$, por lo tanto estamos buscando idempotentes primitivos en el álgebra simple $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon \cong \mathbb{Q}(\omega) \star_\tau^\alpha G/H$.

1. Supongamos que G es del tipo P_1 o P_2, es decir $H =< a >$ tiene un complemento $M =< b >$, es decir, $|H \cap M| = 1$ y $G = HM = MH$.
   En este caso tenemos que τ es trivial, por lo tanto si denotamos ω a una raíz $|H|-$ésima primitiva de la unidad tenemos que $\mathbb{Q}H \cdot \epsilon \cong \mathbb{Q}(\omega)$ y, usando la proposición 7.1 y el lema 6.1, tenemos
   $$\mathbb{Q}G \cdot \epsilon \cong \mathbb{Q}(\omega) \star_1^\sigma G/H \cong \mathbb{M}_n(F)$$
   donde F es un cuerpo isomorfo al centro de $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$ y de esta forma, por la caracterización de los idempotentes primitivos ortogonales de $\mathbb{Q}(\omega) \star_1^\alpha G/H$ tenemos que $\hat{M} \cdot \epsilon$ es un idempotente primitivo de $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$ y para completar el conjunto de idempotentes primitivos ortogonales debemos encontrar elementos $\{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{Q}(\omega)$ tales que $Tr_{\mathbb{Q}(\omega)/F}(x_i x_j^{-1}) = 0$ (si $i \neq j$) donde F es el centro de $\mathbb{Q}(\omega) \star_1^\alpha G/H$. Por lo tanto, nuestra primera tarea será encontrar el centro de $\mathbb{Q}(\omega) \star_1^\alpha G/H$. Como la torsión es trivial, el centro F será un subcuerpo de $\mathbb{Q}(\omega)$ fijo por G/H, por lo tanto tenemos $[\mathbb{Q}(\omega) : F] = [G : H]$ y, como en este caso $G/H \cong M$ el centro de $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$ debemos adjuntar a $\mathbb{Q}$ los elementos de H fijos por la conjugación de M. Dado el isomorfismo anterior, identificaremos ω con a y llamaremos $\mathbb{Q}(a)$ a la preimagen de $\mathbb{Q}(\omega)$ en $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$.

   1.1 Supongamos el primer caso de $G = P_1$, es decir, $v_p(r - 1) = n - k$. En este caso notemos que $b^{-1}a^{p^k}b = a^{r(p^k)} = a^{p^k}$ (ya que $r - 1 = p^{n-k} \cdot s$ con $(s, p) = 1$). Además, $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(a^{p^k})] = [G : H] = p^k$ y tenemos el cuerpo que queríamos más aún si $p = 2$ entonces $b^{-1}a^{2^{n-2}}b = a^{r(2^{n-2})}$ y, dado que $r \equiv 1 \pmod 4$, tenemos que $\omega_4 \in F$. Con esto tenemos las condiciones del lema 7.2 y nuestro conjunto conjugador puede ser $\{1, a, a^2, ..., a^{p^k-1}\}$

   1.2 Supongamos que $G = P_1$ pero $p = 2$ y $r \not\equiv 1 \pmod 4$ ($\omega_4 = a^{2^{n-2}} \notin F$) y, por lo tanto, $F(a^{2^{n-2}})$ es la única subextensión de $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}(\omega_4)$ de índice $[G : H]/2 = 2^{k-1}$.

   $$\begin{array}{c} \mathbb{Q}(a) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 2^{k-1}} \\ F(\omega_4) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 2} \\ F \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 2^{n-k}} \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

   Tomamos entonces $T = \{1, a, a^2, ..., a^{2^{k-1}-1}\} \cup \{\omega_4, \omega_4 a, \omega_4 a^2, ..., \omega_4 a^{2^{k-1}-1}\}$. Notamos que si $x, y \in T$ entonces $x \cdot y^{-1}$ es de la forma $\omega_4^{\pm 1}$, a^j o $\omega_4^{\pm 1} a^{\pm j}$ para algún j y, dado que F es real, $Tr_{\mathbb{Q}(a)/F}(a^j) = Tr_{\mathbb{Q}(a)/F}(\omega_4) = Tr_{\mathbb{Q}(a)/F}(a^j \omega_4) = 0$

   Por lo tanto, el conjunto T es el conjunto buscado del Lema 6.2

   1.3 Supongamos que $G = P_2$ entonces tomando el mismo argumento anterior de las trazas, dado que $F = \mathbb{Q}(a^{2^k} + a^{-2^k})$ es real, podemos considerar el siguiente conjunto conjugador $\{1, a, a^2, ..., a^{2^k-1}, a^{2^{n-2}}, a^{2^{n-2}}a, a^{2^{n-2}}a^2, ..., a^{2^{n-2}}a^{2^k-1}\}$

En resumen, este primer caso lo podemos sintetizar en la siguiente proposición:

Proposición 7.4. *Si G es del tipo P_1 o P_2 y $(H,1)$ es un par Shoda fuerte de G, con álgebra simple asociada $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$ entonces, con la misma notación utilizada hasta ahora:*

- $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon \cong \mathbb{M}_{p^k}(F)$ *donde F es el centro de $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$*
- $F = \mathbb{Q}(a^k)$ *en el caso que $G = P_1$ y $v_p(r-1) = n-k$*
- *Si $G = P_1$, $p = 2$ y $r \not\equiv 1$ (mod 4) o $G = P_2$, entonces $\omega_4 \notin F$.*
- $\hat{M}\epsilon$ *es un idempotente primitivo de $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$*
- *Un conjunto completo de idempotentes primitivos tendrá p^k elementos en el caso de que $G \cong P_1$ y 2^{k+1} elementos cuando $G \cong P_2$.*
- *Un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales de $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$ consiste en conjugar $\hat{M}\epsilon$ por*
  - $\{1, a, a^2, ..., a^{p^k-1}\}$ *si $v_p(r-1) = n-k$*
  - $\{1, a, a^2, ..., a^{2^{k-1}-1}\} \cup \{1 \cdot a^{2^{n-2}}, a \cdot a^{2^{n-2}}, a^2 \cdot a^{2^{n-2}}, ..., a^{2^{k-1}-1} \cdot a^{2^{n-2}}\}$ *si $p = 2$ y $r \not\equiv 1$ (mod 4).*
  - $\{1, a, a^2, ..., a^{2^k-1}\} \cup \{1 \cdot a^{2^{n-2}}, a \cdot a^{2^{n-2}}, a^2 \cdot a^{2^{n-2}}, ..., a^{2^k-1} \cdot a^{2^{n-2}}\}$ *si $G \cong P_2$.*

2 Si G es isomorfo a P_3 entonces el centro de $\mathbb{Q}G \cdot e$ es $\mathbb{Q}(a^{2^k} + a^{-2^k})$. En este caso no podemos utilizar el lema 6.2 ya que la torsión no es trivial. Analizamos la estructura de $(\epsilon\hat{b})\mathbb{Q}G(\epsilon\hat{b})$. Primero notamos que $\epsilon\hat{b}$ es un idempotente (en cierto sentido más pequeño que ϵ, ya que genera una sub $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon-$álgebra), por lo tanto, por el lema 2.16, $End_{\mathbb{Q}G}(\mathbb{Q}G \cdot \epsilon\hat{b}) \cong (\epsilon\hat{b})\mathbb{Q}G(\epsilon\hat{b}) = \hat{b}\mathbb{Q} < a, c > \epsilon\hat{b} = F + F \cdot a^{2^{n-2}} + Fc + F(a^{2^{n-2}}c) \cong \mathbb{H}(F)$ que, como F es real, es un álgebra de división y por lo tanto $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon\hat{b}$ es irreducible y $\epsilon\hat{b}$ es un idempotente primitivo.

Proposición 7.5. *Si G es del tipo P_3 y $(H,1)$ es un par Shoda fuerte de G, con álgebra simple asociada $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$ entonces, con la misma notación utilizada hasta ahora:*

- $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon \cong \mathbb{M}_{2^k}(\mathbb{H}(F))$ *donde* $F = \mathbb{Q}(a^{2^k} + a^{-2^k})$
- $\hat{b}\epsilon$ *es un idempotente primitivo de $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$.*
- *Un conjunto completo de idempotentes primitivos de $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$ consiste en conjugar $\hat{b}\epsilon$ por* $\{1, a, a^2, ..., a^{2^k-1}\}$

La caracterización anterior muestra las bases de cómo encontrar idempotentes primitivos en $p-$grupos en los cuales $(H,1)$ es un par Shoda fuerte. Esta aplicación directa quedará más clara con el siguiente lema:

Lema 7.6. *Sea* (H, K) *un par Shoda fuerte de* N *entonces* $\mathbb{Q}N\hat{K} \cong \mathbb{Q}(N/K)$

Demostración

Consideremos el homomorfismo natural

$$\omega_K : \mathbb{Q}N \to \mathbb{Q}(N/K)$$

y tenemos que $\ker(\omega_N) = \mathbb{Q}N(1 - \hat{K})$ *y, por lo tanto,* $\mathbb{Q}N\hat{K} \cong \mathbb{Q}N/(1 - \hat{K}) \cong \mathbb{Q}(N/K)$.

A partir de todo esto, el cálculo de los idempotentes primitivos de un grupo $p-$grupo se reduce a los siguientes pasos

i) Encontrar los pares Shoda (H_i, K_i), cada uno de estos pares Shoda generará un idempotente central que se decompondrá en los siguientes pasos. Fijando i, trabajaremos con (H, K) un par Shoda fuerte.

ii) Identificar $N = N_G(K)$ y T un conjunto de representantes de las clases laterales de $G/N_G(K)$. Recordemos que, por la definición de par Shoda fuerte, $H \trianglelefteq N$.

iii) En estos momentos, $e(N, H, K) = \epsilon(H, K)$ es un idempotente central de $\mathbb{Q}N$. Definimos $G' = N/K$ y $H' = H/K$ y ahora tenemos que $\epsilon(H', 1)$ es idempotente central de G', que también es un $p-$grupo.

iv) Encontramos la descomposición de $\epsilon(H', 1) = \epsilon(H')$ en idempotentes primitivos ortogonales $\{f'_i\}_i$ según lo descrito en el Teorema 7.3.

v) Via el isomorfismo $\mathbb{Q}N\hat{K} \cong \mathbb{Q}(N/K)$, encontramos la pre imagen f_i de cada f'_i.

vi) Un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales para el par Shoda fuerte (H, K) de G será $\{\sum_{t\in T} f_i^t\}_i$.

Consideremos ahora el caso nilpotente general en el cual los pares Shoda fuertes son de la forma $(H, 1)$ para subgrupos cíclicos abelianos maximales H.Además de esta condición, en lo que sigue de esta sección, G es un grupo nilpotente y $G = G_2 \times G_{p_1} \times ... \times G_{p_r} = G_2 \times G_{2'}$ será la descomposición de G, primero en $p-$grupos, y luego en un $2-$grupo maximal y su complemento.

Lema 7.7. *Si* G *es un grupo nilpotente con* $(H, 1)$ *un par Shoda y* H_i *la proyección de* H *en* G_i, *entonces*

$$\epsilon(H) = \prod_i \epsilon(H_i)$$

Corolario 7.8. *Con la misma notación del lema anterior,*

$$\mathbb{Q}G\epsilon(H) \cong \bigotimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}G\epsilon(H_i)$$

Lema 7.9. *Si* G *es un grupo nilpotente,* $(H, 1)$ *es un par Shoda fuerte de* G *si y solo si* $(H_i, 1)$ *es un par Shoda fuerte de* G_i *donde* H_i *denota la proyección de* H *en* G_i.

Si G es un grupo nilpotente, de orden impar y $(H,1)$ es un par Shoda fuerte, entonces $G = G_{p_1} \times ... \times G_{p_r}$ donde $(2, p_i) = 1$ y tenemos $(H_1, 1), ..., (H_r, 1)$ pares Shoda fuertes en G_{p_i} respectivamente. Además, cada G_{p_i} es un $P-$grupo del tipo 1.1 (que es el único caso impar) por lo tanto, cada $\mathbb{Q}G\epsilon(H_i) \cong \mathbb{M}_{[G_i:H_i]}(\mathbb{Q}(a_i^{p^{[G_i:H_i]}}))$ donde a_i es el generador de H_i según la presentación del grupo isomorfo a P_1. Con esto último obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}G \cdot \epsilon &\cong \mathbb{M}_{p_1^{k_1}}(\mathbb{Q}(a_1^{p_1^{k_1}})) \otimes_{\mathbb{Q}} ... \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{M}_{p_r^{k_r}}(\mathbb{Q}(a_r^{p_r^{k_r}})) \\
&\cong \mathbb{M}_{\prod_i p_i^{k_i}} \left(\mathbb{Q} \left(\omega_{\prod_i p_i^{n_i - k_i}} \right) \right)
\end{aligned}$$

del punto de vista de los $\mathbb{Q}G-$módulos, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{Q}G \cdot \epsilon & = & \mathbb{Q}G \cdot \epsilon_1 \otimes_{\mathbb{Q}} & \mathbb{Q}G \cdot \epsilon_2 \otimes_{\mathbb{Q}} & ... & \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}G \cdot \epsilon_r \\
 & & f_1 & f_2 & ... & f_r \\
 & & f_1^{a_1} & f_2^{a_2} & ... & f_r^{a_r} \\
 & & f_1^{a_1^2} & f_2^{a_2^2} & ... & f_r^{a_r^2} \\
 & & . & . & ... & . \\
 & & . & . & ... & . \\
 & & . & . & ... & . \\
 & & f_1^{a_1^{k_1}-1} & f_2^{a_2^{k_2-1}} & ... & f_r^{a_r^{k_r}-1}
\end{array}$$

donde $f_j = \hat{b_j}\epsilon_j$ y cada columna (no necesariamente de los mismos largos) corresponden a los idempotentes primitivos de cada p_j-grupo. Como $f_j^{a_s} = f_j$ si $s \neq j$ al considerar los productos de un idempotente primitivo por factor podemos tomar los elementos de la forma $(f_1 \cdot ... \cdot f_r)^{a^j}$ donde $a = a_1 \cdot .... \cdot a_r$ y $j = 0, ..., p_1^{n_1-k_1} \cdot ... \cdot_r^{n_r-k_r}$. $(j = 0, ..., [G:H]-1)$.

Si G es un grupo nilpotente cualquiera $G = G_{p_0} \times G_{p_1} \times ... \times G_{p_r}$, donde esta vez agregamos G_{p_0} que es el $2-$ grupo de G, nuevamente tendremos la situación

$$\mathbb{Q}G \cdot \epsilon \cong \mathbb{M}_{\prod_i p_i^{k_i}} \left(\mathbb{Q} \left(\omega_{\prod_i p_i^{n_i - k_i}} \right) \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}G \cdot \epsilon_0$$

Si G_{p_0} solo contiene grupos del tipo P_1 o P_2, entonces estamos en el mismo caso de antes, tendremos un anillo de matrices sobre un cuerpo y nuestro conjunto conjugador será $\{a^j\}$. Si estamos en el caso P_3, tendremos que $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon_0 \cong \mathbb{H}(F)$ con $F = \mathbb{H}(a_2^k + a_2^{-k})$ y por lo tanto,

$$\mathbb{Q}G \cdot \epsilon \cong \mathbb{M}_{\prod_i p_i^{k_i}} \left(\mathbb{Q} \left(\omega_{\prod_i p_i^{n_i - k_i}} \right) \right) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{M}_{[G_2:H_2]}(\mathbb{H}(a^{2^k} + a^{-2^k})) \cong \mathbb{M}_{[G:H]/2}(\mathbb{H}(F))$$

donde $F = \mathbb{Q}(\omega_m, \omega_{2^{n-k}} + \omega_{2^{n-k}}^{-1})$. Si $\mathbb{H}(F)$ es un anillo de división el mismo conjunto de idempotentes primitivos servirá (conjugar por a^j), sin embargo si no (es decir el álgebra de cuaternios se descompone) los idempotentes encontrados no serán primitivos y debemos descomponer multiplicando por los idempotentes primitivos de $\mathbb{H}(F)$ según el lema 6.5.

Con todo lo anterior, podemos enunciar el siguiente teorema presentado [JOdR12] en cuya demostración se basa en la explicación entregada:

Teorema 7.10. *Sea G un grupo nilpotente y (H,K) un par Shoda fuerte de G. Sean $e=e(G,H,K)$, $\epsilon=\epsilon(H,K)$, $H/K=<\overline{a}>$, $N=N_G(K)$ y sean N_2/K y $H_2/K=<\overline{a}_2>$ (respectivamente $N_{2'}/K$ y $H_{2'}/K=<\overline{a}_{2'}>$) las $2-$partes (respectivamente las $2'-$partes) de N/K y H/K respectivamente. Entonces $<\overline{a}_{2'}>$ tiene un complemento cíclico $<\overline{b}_{2'}>$ en $N_{2'}/K$.*
Un conjunto completo de idempotentes primitivos de $\mathbb{Q}G\cdot e$ consiste en los conjugados de $\hat{b_{2'}}\beta_2\epsilon$ por elementos de $T_{2'}T_2T_{G/N}$, donde $T_{2'}=\{1,a_{2'},...,a_{2'}^{[N_{2'}:H_{2'}]-1}\}$, $T_{G/N}$ muestra un conjunto de representantes de clases laterales izquierdas de N en G y β_2 y T_2 están dados de acuerdo a los siguientes casos:

(1) Si H_2/K tiene complemento M_2/K en N_2/K entonces $\hat{\beta}_2=\hat{M}$. Más ań, si M_2/K es cíclico entonces existe $b_2\in N_2$ tal que N_2/K está dado por la siguiente presentación:

$$\left\langle \overline{a}_2,\overline{b}_2|\overline{a}_2^{2^n}=\overline{b}_2^{2^k}=1,\overline{a}_2^{\overline{b}_2}=\overline{a}_2^r\right\rangle$$

y si M_2/K no es cíclico, entonces existen $b_2,c_2\in N_2$ tales que N_2/K está dado por la siguiente presentación:

$$\left\langle \overline{a}_2,\overline{b}_2\overline{c}_2|\overline{a}_2^{2^n}=\overline{b}_2^{2^k}=\overline{c}_2^2=1,\overline{a}_2^{\overline{b}_2}=\overline{a}_2^{\overline{c}_2}=\overline{a}_2^{-1},[\overline{b}_2,\overline{c}_2]=1\right\rangle$$

con $r\equiv 1 \pmod 4$ (o equivalentemente, $\overline{a}_2^{2^{n-2}}$ es central en N_2/K. Entonces

(i) $T_2=\{1,a_2,a_2^2,...,a_2^{2^k-1}\}$, si $\overline{a}_2^{2^{n-2}}$ es central en N_2/K y M_2/K es cíclico;

(ii) $T_2=\{1,a_2,a_2^2,...,a_2^{2^k-1},a_2^{2^{n-2},a_2^{2^{n-2}+1}},...,a_2^{2^{n-2}+2^k-1}\}$, en otro caso.

(2) Si H_2/K no tiene complemento en N_2/K entonces existen $b_2,c_2\in N_2$ tales que N_2/K está dado por la siguiente presentación

$$\left\langle \overline{a}_2,\overline{b}_2,\overline{c}_2|\overline{a}_2^{2^n}=\overline{b}_2^{2^k}=1,\overline{c}_2^2=\overline{a}_2^{2^{n-1}},\overline{a}_2^{\overline{b}_2}=\overline{a}_2^r,\overline{a}_2^{\overline{c}_2}=\overline{a}_2^{-1},[\overline{b}_2,\overline{c}_2]=1\right\rangle$$

con $r\equiv 1 \pmod 4$ y definimos $m=[H_{2'}:K]/[N_{2'}:H_{2'}]$. Entonces

(i) $\beta_2=\hat{b}_2$ y $T_2=\{1,a_2,a_2^2,...,a_2^{2^k-1}\}$, si $H_{2'}=K$ o el orden de 2 módulo m es impar y $n-k<2$ y

(ii) $\beta_2=\hat{b}_2\frac{1+xa_2^{2^{n-2}}+ya_2^{2^{n-2}}c_2}{2}$ y $T_2=\{1,a_2,a_2^2,...,a_2^{2^k-1},c_2,a_2c_2,a_2^2c_2,...,a_2^{2^k-1}c_2\}$ con

$$x,y\in\mathbb{Q}\left[a_{2'}^{[N_{2'}:H_{2'}]},a_2^{2^k}+a_2^{-2^k}\right]$$

satisfaciendo $(1+x^2+y^2)\epsilon=0$, si $H_{2'}\neq K$ y el orden de 2 módulo m es par o $n-k>2$.

8. Ejemplos

En los siguientes ejemplos, se aplicaron los métodos mostrados en esta tesis y que sirven para ver de forma más evidente la forma en la cual se utilizan los teoremas y cómo lucen usualmente los idempotentes primitivos. Los primeros cuatro ejemplos corresponden a los casos más simples, $p-$grupos según la clasificación del teorema 7.3 en los cuales se muestra un par Shoda fuerte de la forma $(H, \{1\})$ y sus idempotentes primitivos asociados, mientras que en el último consideramos el producto directo del grupo cíclico de 9 elementos con el grupo diedral de 8 elementos, se calcula un conjunto completo de idempotentes centrales para luego descomponerlos en idempotentes primitivos ortogonales.

Los ejemplos fueron construidos con una rutina creada en [S$^+$YY] en las cuales esencialmente se siguieron los mismos pasos descritos a continuación del Lema 7.6 para utilizarlos computacionalmente:

- Descomponemos G en sus $p-$grupos $G_1, G_2, ..., G_r$ y trabajamos con cada uno de ellos por separado.
- Se generan los pares Shoda fuertes de G_i utilizando el paquete Wedderga [CKO$^+$09]
- Para cada par Shoda fuerte (H, K) de G_i, se calcula $N = N_G(K)$, en este momento (H, K) es un par Shoda fuerte de N
- Se definen los grupos $G' = N/K$ y $H' = N/K$, ahora $(H', \{1\})$ es un par Shoda fuerte de G'
- Se identifica, según la clasificación del teorema 7.3, que tipo de grupo es G'.
- Según el tipo de grupo P_1, P_2 o P_3, se calculan: un idempotente primitivo de $\mathbb{Q}G \cdot \epsilon$ ($\hat{M} \cdot \epsilon$ en los casos P_1 y P_2 y $\epsilon\hat{b}$ en el caso P_3 según la notación de la página 23)y un conjunto conjugador también descrito en la página 23 según sea el caso.
- Via el isomorfismo $\mathbb{Q}N\hat{K} \cong \mathbb{Q}(N/K)$ calculamos las preimagenes de los idempotentes generados en el paso anterior, digamos $\{f_j\}$
- Tomamos un conjunto T de representantes de clases laterales de G/N y con cada f_i del paso anterior, generamos los idempotentes primitivos para G_j de la forma $\sum_{t \in T} f_i^t$.
- Con esto tenemos un conjunto completo de idempotentes primitivos de G_i, que corresponde a los primeros 4 ejemplos ya que son $p-$grupos. En el caso más general (calculado de forma explćita en el último ejemplo) se escoge un idempotente primitivo de cada $p-$grupo y se calcula el producto generando un conjunto completo de idempotentes. En el ejemplo mostrado estos idempotentes son primitivos ya que, siguiendo la notación de la página 26, $\mathbb{H}(F)$ es un álgebra de división por lo tanto no se separa.

1. Grupo de orden 81 del primer caso del tipo P_1 según el teorema 7.3

$$G_{11} =< a, b|b^3, b^{-1}ab = a^{19} >$$

Tomando $H_{11} =< a > \trianglelefteq G$ tenemos que el par Shoda fuerte $(H_{11}, \{1\})$ genera tres idempotentes primitivos:

$$\begin{aligned}
e_1^{11} &= \frac{1}{9}(2 - b - ab^{-1}a^{-1}b - b^{-1} + 2a^{-1}ba - aba^{-1}b^{-1} - ab^{-1}a^{-1} - aba^{-1} + 2a^{-1}b^{-1}a) \\
e_2^{11} &= \frac{1}{9}(2 + 2b - ab^{-1}a^{-1}b + 2b^{-1} - a^{-1}ba - aba^{-1}b^{-1} - ab^{-1}a^{-1} - aba^{-1} - a^{-1}b^{-1}a) \\
e_3^{11} &= \frac{1}{9}(2 - b - ab^{-1}a^{-1}b - b^{-1} - a^{-1}ba - aba^{-1}b^{-1} + 2ab^{-1}a^{-1} + 2aba^{-1} - a^{-1}b^{-1}a)
\end{aligned}$$

2. G_{12} es del segundo tipo de grupo P_1, de orden 64, dado por la presentación:

$$G_{12} =< a, b|b^4, a^{27}, b^{-1}ab = a^3 >$$

En este caso $(H_{12}, \{1\})$ es un par Shoda fuerte con $H_{12} =< a > \trianglelefteq G$.
Este par Shoda fuerta genera cuatro idempotentes primitivos ortogonales:

$$\begin{aligned}
e_1^{12} &= \frac{1}{8}(1 - b^2 - b^2ab^2a^{-1} + ab^2a^{-1} - a^2b + a^2b^{-1} + ba^{-2} - b^{-1}a^{-2}) \\
e_2^{12} &= \frac{1}{8}(1 - b^2 - b^2ab^2a^{-1} + ab^2a^{-1} + a^2b - a^2b^{-1} - ba^{-2} + b^{-1}a^{-2}) \\
e_3^{12} &= \frac{1}{8}(1 + b + b^2 - b^2ab^2a^{-1} + b^{-1} - b^{-1}ab^2a^{-1} - ab^2a^{-1} - bab^2a^{-1}) \\
e_4^{12} &= \frac{1}{8}(1 - b + b^2 - b^2ab^2a^{-1} - b^{-1} + b^{-1}ab^2a^{-1} - ab^2a^{-1} + bab^2a^{-1})
\end{aligned}$$

3. Grupo del tipo P_2 según el teorema 7.3 de orden 32.

$$G_2 =< a, b, c|a^8, c^2, b^2, bc = cb, b^{-1}ab = a^5, c^{-1}ac = a^{-1} >$$

tomando el subgrupo $H_2 =< a > \trianglelefteq G$ tenemos que $(H, \{1\})$ es un par Shoda fuerte que genera 4 idempotentes primitivos ortogonales

$$\begin{aligned}
e_1^2 &= \frac{1}{8}(1 - b - a^4 - a^2c + a^4b + a^2bc + a^6c - a^6bc)) \\
e_2^2 &= \frac{1}{8}(1 - b - a^4 + a^2c + a^4b - a^2bc - a^6c + a^6bc)) \\
e_3^2 &= \frac{1}{8}(1 + c + b - a^4 + bc - a^4c - a^4b - a^4bc) \\
e_4^2 &= \frac{1}{8}(1 + c + b - a^4 - bc + a^4c - a^4b + a^4bc)
\end{aligned}$$

4. El último ejemplo de $p-$grupo según la clasificación del teorema 7.3 (del tipo P_3) es

$$G_3 =< a, b, c|a^8, b^2, c^2 = a^4, bc = cb, b^{-1}ab = a^5, c^{-1}ac = a^{-1} >$$

Con $H_3 =< a > \trianglelefteq G$, en este caso, $(H_3, \{1\})$ es un par Shoda fuerte que genera dos idempotentes primitivos ortogonales:

$$\begin{aligned} e_1^3 &= \frac{1}{4}(1 + b - c^2 - a^4 b) \\ e_2^3 &= \frac{1}{4}(1 - b - c^2 + a^4 b) \end{aligned}$$

5. Finalmente, sea $G =< a, b, c : a^2 = b^2 = c^9 = 1, (ba)^4, bc = cb, ac = ca >\cong \mathbb{Z}_9 \times D_4$. G es un grupo nilpotente de orden 72. En este caso, se calcularon los pares Shoda fuertes (H, K) utilizando el paquete [CKO+09] de GAP y a partir de ellos se creo una rutina en Sage [S+YY], la cual puede ser solicitada al autor, para calcular explícitamente los idempotentes primitivos asociados a cada par.

   Cantidad de representaciones complejas irreducibles: 45
   Cantidad de representaciones racionales irreducibles: 15

   En este caso tenemos 15 pares Shoda donde cada uno de ellos genera un idempotente central (racional). Para expresar los idempotentes consideramos $\mathbb{Q}G$ como $\mathbb{Q}$ espacio vectorial con el siguiente ordenamiento de G como $\mathbb{Q}-$base de $\mathbb{Q}G$:

$$\begin{gathered}\{1, b, a, c^2, (ab)^2, c^{-3}, ba, bc^2, aba, bc^{-3}, ac^2, bab, ac^{-3}, c^4, (ab)^2c^2, c^{-1}, (ab)^2c^{-3}, c^3, bac^2, ab, \\ bac^{-3}, bc^4, abac^2, bc^{-1}, abac^{-3}, bc^3, ac^4, babc^2, ac^{-1}, babc^{-3}, ac^3, (ab)^2c^4, c, (ab)^2c^{-1}, c^{-4}, \\ (ab)^2c^3, bac^4, abc^2, bac^{-1}, abc^{-3}, bac^3, abac^4, bc, abac^{-1}, bc^{-4}, abac^3, babc^4, ac, babc^{-1}, ac^{-4}, \\ babc^3, (ab)^2c, c^{-2}, (ab)^2c^{-4}, abc^4, bac, abc^{-1}, bac^{-4}, abc^3, abac, bc^{-2}, abac^{-4}, babc, ac^{-2}, \\ babc^{-4}, (ab)^2c^{-2}, abc, bac^{-2}, abc^{-4}, abac^{-2}, babc^{-2}, abc^{-2}\}\end{gathered}$$

   Con esta base, tenemos las coordenadas de los 15 idempotentes centrales de $\mathbb{Q}G$, cada uno de ellos generado por un par Shoda fuerte (H, K)

$$
\begin{aligned}
e_0 &= \frac{1}{72}\cdot(1,1,....,1)\\
e_1 &= \frac{1}{72}\cdot(1,-1,-1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,1,1,-1,\\
&\quad -1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,\\
&\quad -1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\\
&\quad 1,1,1,1,-1,-1,1)\\
e_2 &= \frac{1}{72}(1,-1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,\\
&\quad -1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\\
&\quad -1,-1,1,1,1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,\\
&\quad -1,-1,-1,1,-1)\\
e_3 &= \frac{1}{72}(1,1,-1,1,1,1,-1,1,1,1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,1,1,1,\\
&\quad 1,1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,1,-1,\\
&\quad -1,-1,-1,-1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,-1,-1,-1,1,-1,-1,\\
&\quad -1,1,-1,-1)\\
e_4 &= \frac{1}{72}(2,2,2,-1,2,2,2,-1,2,2,-1,2,2,-1,-1,-1,2,2,-1,2,2,-1,-1,-1,\\
&\quad 2,2,-1,-1,-1,2,2,-1,-1,-1,-1,2,-1,-1,-1,2,2,-1,-1,-1,-1,2,\\
&\quad -1,-1,-1,-1,2,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,2,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\\
&\quad -1,-1,-1,-1,-1,-1)\\
e_5 &= \frac{1}{72}(4,0,0,4,-4,4,0,0,0,0,0,0,0,4,-4,4,-4,4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\\
&\quad 0,0,-4,4,-4,4,-4,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-4,4,-4,0,0,0,0,0,\\
&\quad 0,0,0,0,0,0,-4,0,0,0,0,0,0)\\
e_6 &= \frac{1}{72}(2,-2,-2,-1,2,2,2,1,-2,-2,1,-2,-2,-1,-1,-1,2,2,-1,2,2,1,1,\\
&\quad 1,-2,-2,1,1,1,-2,-2,-1,-1,-1,-1,2,-1,-1,-1,2,2,1,1,1,1,-2,\\
&\quad 1,1,1,1,-2,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,2,1,1,1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,-1)\\
e_7 &= \frac{1}{72}(2,-2,2,-1,2,2,-2,1,-2,-2,-1,2,2,-1,-1,-1,2,2,1,-2,-2,1,1,1,\\
&\quad -2,-2,-1,-1,-1,2,2,-1,-1,-1,-1,2,1,1,1,-2,-2,1,1,1,1,-2,-1,\\
&\quad -1,-1,-1,2,-1,-1,-1,1,1,1,1,-2,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1,-1,1)\\
e_8 &= \frac{1}{72}(2,2,-2,-1,2,2,-2,-1,2,2,1,-2,-2,-1,-1,-1,2,2,1,-2,-2,-1,-1,\\
&\quad -1,2,2,1,1,1,-2,-2,-1,-1,-1,-1,2,1,1,1,-2,-2,-1,-1,-1,-1,2,1,1,\\
&\quad 1,1,-2,-1,-1,-1,1,1,1,1,-2,-1,-1,-1,1,1,1,-1,1,1,1,-1,1,1)\\
e_9 &= \frac{1}{72}(6,6,6,0,6,-3,6,0,6,-3,0,6,-3,0,0,0,-3,-3,0,6,-3,0,0,0,-3,-3,0,\\
&\quad 0,0,-3,-3,0,0,0,0,-3,0,0,0,-3,-3,0,0,0,0,-3,0,0,0,0,-3,0,0,\\
&\quad 0,0,0,0,0,-3,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{10} &= \frac{1}{72}(8, 0, 0, -4, -8, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 4, -4, -8, 8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,\\
&\quad 0, 4, -4, 4, -4, -8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, -4, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,\\
&\quad 0, 0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\\
e_{11} &= \frac{1}{72}(6, -6, -6, 0, 6, -3, 6, 0, -6, 3, 0, -6, 3, 0, 0, 0, -3, -3, 0, 6, -3, 0, 0, 0, 3, 3,\\
&\quad 0, 0, 0, 3, 3, 0, 0, 0, 0, -3, 0, 0, 0, -3, -3, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0,\\
&\quad 0, -3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\\
e_{12} &= \frac{1}{72}(6, -6, 6, 0, 6, -3, -6, 0, -6, 3, 0, 6, -3, 0, 0, 0, -3, -3, 0, -6, 3, 0, 0, 0, 3, 3, 0,\\
&\quad 0, 0, -3, -3, 0, 0, 0, 0, -3, 0, 0, 0, 3, 3, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, -3, 0, 0, 0, 0, 0, 0,\\
&\quad 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\\
e_{13} &= \frac{1}{72}(6, 6, -6, 0, 6, -3, -6, 0, 6, -3, 0, -6, 3, 0, 0, 0, -3, -3, 0, -6, 3, 0, 0, 0, -3, -3,\\
&\quad 0, 0, 0, 3, 3, 0, 0, 0, 0, -3, 0, 0, 0, 3, 3, 0, 0, 0, 0, -3, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0,\\
&\quad 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\\
e_{14} &= \frac{1}{72}(24, 0, 0, 0, -24, -12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 12, -12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,\\
&\quad 0, 0, 0, 0, 0, 0, 12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,\\
&\quad 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

Los idempotentes e_5, e_{10}, e_{14} no son primitivos, estos se descomponen en $f_{5,1} + f_{5,2}, f_{10,1} + f_{10,2}, f_{14,1} + f_{14,2}$ respectivamente:

$$
\begin{aligned}
e_5 &= \frac{1}{72}(2, 0, 2, 2, -2, 2, 0, 0, 0, 0, 2, -2, 2, 2, -2, 2, -2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -2, 2, -2,\\
&\quad 2, -2, 2, -2, 2, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 2, -2, 2, -2, -2, 2, -2, 0, 0, 0, 0, 0,\\
&\quad 0, 0, 0, -2, 2, -2, -2, 0, 0, 0, 0, -2, 0)\\
&+\\
&\quad \frac{1}{72}(2, 0, -2, 2, -2, 2, 0, 0, 0, 0, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,\\
&\quad -2, 2, -2, 2, -2, -2, 2, -2, 2, -2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2,\\
&\quad 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -2, 2, -2, 0, 0, 0, 0, 2, 0)\\
e_{10} &= \frac{1}{72}(4, 0, 4, -2, -4, 4, 0, 0, 0, 0, -2, -4, 4, -2, 2, -2, -4, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,\\
&\quad -2, 2, -2, -4, 4, 2, -2, 2, -2, -4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -2, 2, -2, -4, 2, -2, 2,\\
&\quad 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 2, 0)\\
&+\\
&\quad \frac{1}{72}(4, 0, -4, -2, -4, 4, 0, 0, 0, 0, 2, 4, -4, -2, 2, -2, -4, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, -2,\\
&\quad 2, 4, -4, 2, -2, 2, -2, -4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2, 2, -2, 2, 4, 2, -2, 2, 0, 0, 0,\\
&\quad 0, 0, 0, 0, 0, -2, 2, -2, 2, 0, 0, 0, 0, -2, 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{14} \quad = \quad & \frac{1}{72}(12, 0, 12, 0, -12, -6, 0, 0, 0, 0, 0, -12, -6, 0, 0, 0, 6, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6, \\
& -6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\
& 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
+ \quad & \\
& \frac{1}{72}(12, 0, -12, 0, -12, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 12, 6, 0, 0, 0, 6, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -6, \\
& 6, 0, 0, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\
& 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)
\end{aligned}
$$

Referencias

[CKO+09] O Broche Cristo, Alexander Konovalov, Aurora Olivieri, Gabriela Olteanu, and A del Rıo. Wedderga–wedderburn decomposition of group algebras. *GAP package, Version*, 4(3), 2009.

[CR66] Charles W Curtis and Irving Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*, volume 356. American Mathematical Soc., 1966.

[CR06] Angel Carocca and Rubí E Rodríguez. Jacobians with group actions and rational idempotents. *Journal of Algebra*, 306(2):322–343, 2006.

[JLP03] Eric Jespers, Guilherme Leal, and Antonio Paques. Central idempotents in the rational group algebra of a finite nilpotent group. *Journal of Algebra and its Applications*, 2(01):57–62, 2003.

[JOdR12] Eric Jespers, Gabriela Olteanu, and Ángel del Río. Rational group algebras of finite groups: from idempotents to units of integral group rings. *Algebras and representation theory*, 15(2):359–377, 2012.

[OdRS04] Aurora Olivieri, Ángel del Río, and Juan Jacobo Simón. On monomial characters and central idempotents of rational group algebras. 2004.

[Rei61] Irving Reiner. The Schur index in the theory of group representations. *Michigan Math. J.*, 8:39–47, 1961.

[SS77] Jean Pierre Serre and Leonard L Scott. *Linear representations of finite groups*, volume 42. Springer, 1977.

[S+YY] W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version x.y.z)*. The Sage Development Team, YYYY. `http://www.sagemath.org`.

[Yam74] Toshihiko Yamada. *The Schur subgroup of the Brauer group*. Springer, 1974.