PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

MÉTODO DE GALERKIN NO CONFORME PARA EL OPERADOR HIPERSINGULAR GOBERNADO POR LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

por

Gredy Jhovanny Salmerón Casco

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile para optar al grado de Magister en Matemáticas.

Profesor Guía: Norbert Heuer

Diciembre, 2014
Santiago, Chile

Resumen

En 2011 Chouly y Heuer introdujeron en [Chouly, Heuer, Numerische Mathematik, 121 (2012), 705-729] un método que combina el Método de Nitsche y el Método de Elementos de Contorno, en este trabajo ellos tomaron como problema modelo la ecuación integral que involucra el operador hipersingular asociado al Laplaciano. En esta tesis presentaremos una generalización del método descrito en [Chouly, Heuer, Numerische Mathematik, 121 (2012), 705-729]. Aplicaremos estas ideas al operador hipersingular gobernado por la ecuación de Helmholtz, para brindar un método no conforme para el operador hipersingular gobernado por la ecuación de Helmholtz. Mostramos en esta tesis la existencia y unicidad de la aproximación, y su convergencia cuasi-optimal.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo presentamos un método no conforme para la solución de la ecuación integral que involucra el operador hipersingular gobernado por la ecuación de Helmholtz, es decir nuestro problema es:
Sea Γ una superficie abierta con frontera poligonal. Dada $f \in L^2(\Gamma)$ y $k \in \mathbb{R}$ buscamos $u \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_x}\int_\Gamma u(y)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}dS_y = f(x), \quad \text{en} \quad \Gamma. \tag{1.1}$$

El método presentado en esta tesis constituye una generalización de un trabajo realizado por Chouly y Heuer en [1]. En su trabajo Chouly y Heuer proponen un método para la solución del operador hipersingular asociado al Laplaciano, dicho método constituye una combinación del método de elementos frontera y el método de Nitsche, además el método propuesto en [1] permite discretizaciones con cuadrículas no coincidentes sin el uso de multiplicadores de Lagrange. Puesto que el operador hipersingular asociado a la ecuación de Helmholtz resulta ser una perturbación compacta del Laplaciano, notamos que las ideas expuestas para el caso del Laplaciano pueden ser utilizadas para Helmholtz. Por tanto esta tesis se desarrollada sobre las ideas expuestas en [1].
Dividimos esta tesis en los siguientes capítulos:
En el capítulo 2 exponemos algunos resultados preliminares, los cuales constituirán las bases para el desarrollo del método en el capítulo 3. Exponemos brevemente las ideas del método de elementos de frontera en el que tomamos como base lo expuesto por Stephan en [5] y [17], además ilustramos algunas propiedades de los operadores integrales de frontera que pueden ser encontradas en [9, 3, 6]. Para nuestros intereses exponemos una fórmula de integración por partes dada por Nédélec en [8]. También exponemos las ideas del método de Nitsche, el cual es un método que tiene por objetivo la aproximación de problemas con condiciones de frontera de Dirichlet débil (ver [7]). Las ideas del método de Nitsche expuesta en esta tesis están tomadas de [13].
El capítulo 3 constituye el trabajo principal de esta tesis, en el que exponemos de manera

detallada el desarrollo del método de Nitsche basado en el método de elementos de frontera. Iniciamos este capítulo exponiendo el problema modelo, para luego detallar la formulación variacional discreta del método, en el que tal como se expone en [1], consideremos únicamente una descomposición de Γ en dos sub-dominios poligonales Γ_1, Γ_2. La extensión a un número arbitrario de sub-dominios es sencilla. Con ideas similares a la formulación variacional de Nitsche y utilizando una fórmula de integración por partes para el operador hipersingular, se propone la forma sesquilineal

$$\begin{aligned} A(u,v) \quad &:= \quad \langle \boldsymbol{V_k}\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, u, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\rangle_\Gamma - k^2 \langle V_k u, v\rangle_\Gamma \\ &+ \quad \langle T_k u, [v]\rangle_\gamma + \langle [u], T_{-k} v\rangle_\gamma + \nu \langle [u], [v]\rangle_\gamma, \end{aligned} \tag{1.2}$$

y por tanto el método de Nitsche basado elementos de frontera consiste en: Encontrar $u_h \in X_h$ tal que:

$$A(u_h, v) = \langle f, v\rangle_\Gamma \quad \forall v \in X_h, \tag{1.3}$$

con X_h un espacio discreto el cual está formado por funciones lineales a trozos.
Además hacemos notar que $X_h \not\subseteq \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$, y de esta forma el método de Nitsche es un método no conforme, pues un método conforme estándar necesita un espacio discreto que satisfaga $\tilde{X}_h \subset \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$. En el Lema 3.1 se demuestra la continuidad de la forma sesquilineal (1.2), y en el Lema 3.5 mostramos la consistencia del problema (1.3). También mostramos en el Lema 3.8, la desigualdad de Gårding, la cual es una herramienta fundamental para mostrar la existencia, unicidad y convergencia del problema discreto (1.3), sin embargo la desigualdad de Gårding que mostramos es sólo para funciones discretas, es decir mostramos que para h sufientemente pequeño se verifica

$$|A(v,v)| \gtrsim h^{2\varepsilon} \|v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} - c\varepsilon^{-1} h^{-1/2} \|v\|^2_{H^\varepsilon(\mathcal{T})} \quad \forall v \in X_h,$$

siendo h el máximo diámetro de los elementos de la malla.
Para poder establecer la convergencia del método, el factor $h^{-1/2}$ en la desigualdad anterior produce ciertos problemas. Para evitar dichos problemas nos auxiliamos del truco de Aubin-Nitsche el cuál nos permite eliminar el exponente negativo de h, es decir usamos el truco de Aubin-Nitsche para demostrar el Teorema 3.2, el cual establece que

$$\|u - u_h\|_{H^\varepsilon(\mathcal{T})} \lesssim h^{1/2-2\varepsilon} \varepsilon^{-2} \|u - u_h\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})},$$

con u la solución del problema (1.1) y u_h la solución del problema (1.3).
Finalmente mostramos el teorema principal de nuestra tesis, Teorema 3.4, el cuál garantiza la existencia y unicidad de la aproximación, y su convergencia cuasi-optimal.

Notación: A lo largo de esta tesis utilizaremos los símbolos "$\lesssim$" y "$\gtrsim$" en el sentido usual, es decir escribiremos $a_h(v) \lesssim b_h(v)$ cuando exista una constante $C > 0$ independiente de v y de la medida de la malla h tal que $a_h(v) \leq C b_h(v)$. Especificaremos en el contexto si C depende o no de ε, donde ε es el índice de los espacios de Sobolev fraccionarios. La doble desigualdad $a_h(v) \lesssim b_h(v) \lesssim a_h(h)$ será simplificada por la expresión $a_h(v) \cong b_h(v)$.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo expondremos brevemente el método de elementos de frontera, así como el método de Nitsche. Estos métodos son los cimientos del método que estableceremos en el siguiente capítulo. Además expondremos algunos resultados que serán utilizados a lo largo de toda la tesis. Estos resultados constituirán las bases para el desarrollo del capítulo 3.

2.1. Espacios de Sobolev

En todo lo que sigue sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con frontera Lipschitz $\partial\Omega$. Consideremos primero los siguientes espacios:
$C(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas en Ω,
$C^k(\Omega)$ el espacio de las funciones k veces diferenciables en Ω,
$C^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones infinitamente diferenciables en Ω,
$C_0^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω.

Además utilizamos el espacio $L^2(\Omega) := \{v : \|v\|_{L^2(\Omega)} < \infty\}$ con

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Para k un entero positivo, definimos el espacio $H^k(\Omega)$ como la clausura de $C^\infty(\Omega)$ bajo la norma

$$\|v\|_{H^k(\Omega)} := \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha v(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Por otro lado, sea B_r la bola abierta centrada en el origen de radio r, entonces definimos

$$H^1_{loc}(\Omega) := \{v \text{ es distribución en } \Omega : v \in H^1(\Omega \cap B_r)\ \forall r > 0\}.$$

Consideremos ahora los espacios de Sobolev estándar, en los cuales las siguientes normas son usadas: Para $0 < s < 1$ definimos

$$\|u\|^2_{H^s(\Omega)} := \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + |u|^2_{H^s(\Omega)} \tag{2.1}$$

con semi-norma

$$|u|_{H^s(\Omega)} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2s+n}} dxdy\right)^{1/2}.$$

Para un dominio Lipschitz Ω y $0 < s < 1$ el espacio $\tilde{H}^s(\Omega)$ es definido como la completación de $C_0^\infty(\Omega)$ bajo la norma

$$\|u\|_{\tilde{H}^s(\Omega)} := \left(|u|^2_{H^s(\Omega)} + \int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{(\mathrm{dist}(x,\partial\Omega))^{2s}}\, dx\right)^{1/2}.$$

Además hacemos las siguientes observaciones:
Para $s \in (0, 1/2)$, las normas $\|\cdot\|_{\tilde{H}^s(\Omega)}$ y $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$ son equivalentes, mientras que para $s \in (1/2, 1)$ se satisface que $\tilde{H}^s(\Omega) = H^s_0(\Omega)$, donde $H^s_0(\Omega)$ es la completación de $C_0^\infty(\Omega)$ con la norma en $H^s(\Omega)$. También notamos que funciones de $\tilde{H}^s(\Omega)$ son continuamente extendibles por cero sobre un dominio más grande. Todos estos resultados pueden ser encontrados en [10, 11]. Para $s > 0$ los espacios $H^{-s}(\Omega)$ y $\tilde{H}^{-s}(\Omega)$ son los espacio duales de $\tilde{H}^s(\Omega)$ y $H^s(\Omega)$, respectivamente.

2.2. Método de Elementos de Frontera

En esta sección explicaremos brevemente en qué consiste el método de elementos de frontera, y lo desarrollaremos particularmente para el problema de Neumann asociado a la ecuación de Helmholtz.

2.2.1. El operador hipersingular

Sea Γ un superficie abierta en $\mathbb{R}^3$ y asumamos que Γ es acotada, simplemente conexa, y que tiene como frontera la curva γ, la cual es Lipschitz y no se intersecta a si misma. Consideremos el problema:

Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea g una función dada definida sobre Γ, buscamos u en $\Omega := \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Gamma}$ que satisfaga

$$-\Delta u - k^2 u = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \qquad \text{en} \quad \Gamma \quad \text{y} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o(r^{-1}) \qquad \text{cuando } r := |x| \to \infty. \tag{2.4}$$

Aquí Δ es el operador Laplaciano definido por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

con $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Además la derivada normal de la función u es definida por

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} n_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} n_3 \quad \text{sobre} \quad \Gamma$$

con $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ un vector exterior normal unitario a lo largo de Γ.

En [3, Sección 5.4] se deduce que una solución fundamental de la ecuación (2.2) es

$$U_k(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3,\ x \neq y.$$

De este modo podemos definir el operador hipersingular gobernado por la ecuación de Helmholtz:

$$W_k u(x) := -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_x} \int_\Gamma u(y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y,\ x \in \Gamma,\ k \in \mathbb{R}.$$

Como antes $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ es un vector normal sobre Γ. Observemos que el operador hipersingular es un mapeo continuo de $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ en $H^{-1/2}(\Gamma)$, más aún tenemos el siguiente lema.

Lema 2.1. *El operador hipersingular*

$$W_k : \tilde{H}^{s+1/2}(\Gamma) \to H^{s-1/2}(\Gamma),\ k \in \mathbb{R},$$

es continuo y biyectivo para todo $s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Para una demostración de la continuidad ver [5, Lema 2.8] y para la inyectividad ver [17, Teorema 1].

Definamos a continuación el salto $[u]$ a través de Γ por

$$[u]|_\Gamma := u|_{\Gamma_+} - u|_{\Gamma_-}.$$

Aquí $\Gamma_+(\Gamma_-)$ denota el lado superior (inferior) de Γ según el vector normal $\boldsymbol{n}$.

De [5] podemos observar que resolver el problema (2.2)-(2.4) es equivalente a resolver un problema que involucre el operador hipersingular, lo cual queda de manifiesto en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *[5, Teorema 2.6]* $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ *es solución del problema (2.2)-(2.4) si y sólo si el salto* $[u]|_\Gamma \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ *es solución de la ecuación integral*

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_x} \int_\Gamma [u](y) \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y = g(x)$$

para $x \in \Gamma$ *y* $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ *dada.*

2.2.2. Problema modelo

Por simplicidad supongamos que Γ es una superficie plana abierta con frontera poligonal. En todo lo que sigue identificaremos Γ con un dominio en $\mathbb{R}^2$, por tanto nos referiremos a sub-dominios de Γ en lugar de sub-superficies. La frontera de Γ la denotemos por $\partial\Gamma$.

Nuestro problema modelo es: Dada $f \in L^2(\Gamma)$ y $k \in \mathbb{R}$ encontrar $u \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$W_k u = f \text{ sobre } \quad \Gamma. \tag{2.5}$$

Además el problema (2.5) puede también ser expresado en su formulación variacional, es decir: encontrar $u \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\langle W_k u, v \rangle_\Gamma = \langle f, v \rangle_\Gamma \quad \forall v \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma). \tag{2.6}$$

Aquí $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ denota la dualidad entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$. A lo largo de esta tesis, esta notación genérica será usada para el producto interno en L^2 o bien para otras dualidades, el dominio sobre el cual se define la dualidad queda determinado por el índice.

Un método estándar de Galerkin para elementos de frontera que permita aproximar la solución del problema (2.6), consiste en seleccionar un sub-espacio polinomial a trozos $\tilde{X}_h \subset \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ y encontrar $u_h \in \tilde{X}_h$ tal que

$$\langle W_k u_h, v \rangle_\Gamma = \langle f, v \rangle_\Gamma \quad \forall v \in \tilde{X}_h. \tag{2.7}$$

Para definir el espacio de elementos de frontera $\tilde{X}_h$ consideramos una triangulación (triángulos o cuadriláteros) $\mathcal{T}_h = \{K_j : j = 1, \dots m\}$ de Γ en triángulos o cuadriláteros K_j, es decir

$$\bar{\Gamma} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

Asumiremos que cualesquiera dos polígonos son disjuntos o se intersectan en un vértice o en un lado del polígono. La triangulación $\mathcal{T}_h$ es comúnmente llamada malla de Γ. Nuestro espacio de elementos de frontera es definido entonces por

$$\tilde{X}_h := \{\phi_h \in C^0(\bar{\Gamma}) : \phi|_K \in \mathbf{P}_r(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \phi \mid_{\partial\Gamma} = 0\}, \quad r \in \mathbb{Z} \quad \text{con} \quad r \geq 1.$$

$\mathbf{P}_r(K)$ denota el conjunto de polinomios definidos en K que tienen grado menor o igual a r. El máximo diámetro de los elementos K es denotado por h y es conocido como la medida de la malla.

2.2.3. Existencia y unicidad de la solución discreta

Para la existencia y unicidad del problema hacemos notar que el problema (2.7) no es un problema elíptico, pero este tipo de problemas puede ser tratado con la teoría de operadores coercivos (ver [3, Sección 8.6]).

Para explicar brevemente esta teoría consideremos lo siguiente:
Sean X, X' espacios de Hilbert tal que X' es el espacio dual de X y sea $\|\cdot\|_X$ una norma asociada al espacio de Hilbert X. Además, sea $A : X \to X'$ un operador lineal.
Consideremos el problema:

$$\text{Dado } f \in X' \text{ encontrar} \quad u \in X \quad \text{tal que} \quad Au = f.$$

También el problema anterior puede ser expresado en su formulación variacional:

$$\text{Encontrar} \quad u \in X \quad \text{tal que} \quad \langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad v \in X.$$

Luego el problema discreto asociado es:

$$\text{Encontrar} \quad u_h \in X_h \quad \text{tal que} \quad \langle Au_h, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad v \in X_h, \tag{2.8}$$

siendo X_h un espacio discreto apropiado (por ejemplo como definimos $\tilde{X}_h$).
Antes de continuar consideremos la siguiente definición.

Definición 2.1. *Un operador $A : X \to X'$ es llamado coercivo si existe un operador compacto $C : X \to X'$ y $\alpha > 0$ tal que se satisfaga la desigualdad de Gårding*

$$Re\,(\langle (A + C)v, v\rangle) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X.$$

A continuación enunciamos el siguiente teorema el cual brinda una condición de estabilidad que será usada para mostrar la existencia y unicidad de la solución del problema discreto (2.8). Para una demostración de este teorema ver [3, Teorema 8.11].

Teorema 2.2. *Sea $A : X \to X'$ un operador lineal acotado, asumamos además que es inyectivo y coercivo. Entonces para h suficientemente pequeño existe $c > 0$ tal que se satisface la condición de estabilidad*

$$c\|w_h\|_X \leq \sup_{v \in X_h, \|v\|_X > 0} \frac{\langle Aw_h, v\rangle}{\|v\|_X}. \tag{2.9}$$

Ahora enunciamos una versión del lema de Céa, el cual garantiza la existencia y unicidad de la solución del problema (2.8). Para una demostración de este teorema ver [3, Teorema 8.10].

Teorema 2.3. *Sea $A : X \to X'$ un operador lineal acotado y coercivo con h tal que la condición de estabilidad (2.9) se satisfaga. Entonces existe una única solución $u_h \in X_h$ del problema (2.8) que satisface la estimación de estabilidad*

$$\|u_h\|_X \leq \frac{1}{c}\|f\|_{X'}$$

y la estimación de error

$$\|u - u_h\|_X \leq \left(1 + \frac{c_1}{c}\right) \inf_{v \in X_h} \|u - v\|_X.$$

Ahora observemos que por [5, Lema 2.8] W_k es un operador coercivo y además inyectivo y continuo. Por tanto todo lo expresado anteriormente es aplicable para garantizar la existencia y unicidad de la solución del problema (2.7).

2.3. Método de Nitsche

En esta sección expondremos en qué consiste el método de Nitsche, el cual fue introducido por Nitsche en 1971 (ver [7]). Dicho método tiene por objetivo la aproximación de problemas donde se implementa una condición de frontera de Dirichlet de manera débil. Expondremos a continuación las ideas del método de Nitsche usando la ecuación de Poisson como modelo. Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$, y $f \in L^2(\Omega)$ una función dada. Consideremos el problema de Poisson

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \tag{2.10}$$

La formulación variacional del problema (2.10) en la forma clásica del método de elementos finitos es: Encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_\Omega = \langle f, v \rangle_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.11}$$

donde ∇u es el gradiente de u definido por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \quad \text{en} \quad \Omega.$$

La formulación variacional propuesta por Nitsche es: Encontrar $u \in V$ tal que

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle_\Omega - \left\langle \frac{\partial u}{\partial n}, v \right\rangle_{\partial\Omega} - \left\langle \frac{\partial v}{\partial n}, u \right\rangle_{\partial\Omega} + \nu \langle u, v \rangle_{\partial\Omega} = \langle f, v \rangle_\Omega \quad \forall v \in V,$$

con $\nu > 0$ y $V := \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega)\}$.

2.3.1. Definición del método

Consideremos el caso en el que Ω es dividido en dos sub-dominios disjuntos Ω_1, Ω_2 y llamemos a la interfaz $\Gamma := \left(\overline{\Omega}_1 \bigcap \overline{\Omega}_2\right)^\circ$.
Notemos que la solución u de (2.10) satisface que $u \in H_0^1(\Omega)$. Además puesto que $f \in L^2(\Omega)$, la siguiente igualdad está bien definida

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(v|_{\Omega_1} - v|_{\Omega_2}) ds, \tag{2.12}$$

con u la solución de (2.10) y $v \in \{H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) : v = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega\}$, lo cual dice que la derivada normal de la solución u es continua en el sentido débil. También la solución u es continua en la interfaz Γ.
El método de Nitsche que ahora se propone para la aproximación de la solución de (2.10) es un método de elementos finitos no conforme cuya aproximación es continua en Ω_i y discontinua a través de Γ.
Para la formulación del método se introducen los siguiente espacios:

$$V_i = \{v : v|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i),\ v|_{\Omega \cap \Omega_i} = 0\} \quad i = 1, 2,\ V := V_1 \times V_2.$$

Definimos también los espacios discretos

$$V_i^h = \{v \in V_i : v \text{ es un polinomio a trozos de grado } r \text{ sobre } \Omega_i\},\ V^h := V_1^h \times V_2^h.$$

Luego buscamos una aproximación $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)$ en el espacio V^h. Para poder comparar la aproximación con la solución exacta, podemos escribir la solución u de (2.11) como

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \quad \text{con} \quad u_i := u|_{\Omega_i} \quad i = 1, 2.$$

Además se introduce la notación

$$[u] := u_1 - u_2, \quad \{u\} := (u_1 + u_2)/2, \text{ sobre } \Gamma,$$

y denotamos por h el máximo de los diámetros de los elementos sobre Ω_1 y Ω_2.
El vector normal exterior de Ω_i es denotado por $\boldsymbol{n}_i$ y además definimos $\boldsymbol{n} := \boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$ sobre Γ.
El método de Nitsche es definido como: Encontrar $\boldsymbol{U} \in V^h$ tal que

$$a_h(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{v}) = \langle f, \boldsymbol{v}\rangle_\Omega \quad \boldsymbol{v} \in V^h, \tag{2.13}$$

con

$$\begin{aligned} a_h(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{v}) \quad &:= \quad \langle \nabla U_1, \nabla v_1\rangle_{\Omega_1} + \langle \nabla U_2, \nabla v_2\rangle_{\Omega_2} - \left\langle [\boldsymbol{U}], \left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial n}\right\}\right\rangle_\Gamma \\ &- \quad \left\langle \left\{\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial n}\right\}, [\boldsymbol{v}]\right\rangle_\Gamma + \frac{\gamma}{h}\langle [\boldsymbol{U}], \boldsymbol{v}\rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

Aquí $\gamma > 0$ es un número fijo que debe ser escogido suficientemente grande para garantizar la elípticidad de la forma bilineal $a_h(\cdot, \cdot)$, además es fácil ver que $a_h(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal simétrica.

2.3.2. Análisis del error

A continuación describiremos algunos resultados del análisis del error, cuyas demostraciones pueden ser encontradas en [13].
Para el análisis se usará la siguiente norma definida sobre V:

$$|||\boldsymbol{u}|||^2 = \sum_i \|\nabla u_i\|^2_{L^2(\Omega_i)} + \left\|h^{-1/2}[u]\right\|_{L^2(\Gamma)}.$$

El siguiente lema expresa la consistencia del problema (2.13) con (2.10), es decir que la solución u de (2.10) es también solución de (2.13).

Lema 2.2. *El problema* (2.13) *es consistente con* (2.10).

Además se tiene que la forma bilineal $a_h(\cdot,\cdot)$ no es sólo simétrica sino que también elíptica lo que permite deducir la estabilidad del problema (2.13)

Lema 2.3. *La forma bilinieal $a_h(\cdot,\cdot)$ es elíptica para γ suficientemente grande.*

Finalmente se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Sea $\boldsymbol{U}$ la solución de (2.13), u la solución de (2.10) y $\boldsymbol{u}$ la extensión de u sobre V, entonces para γ suficientemente grande se satisface la estimación de error*

$$|||\boldsymbol{U}-\boldsymbol{u}||| \leq Ch^{k-1}\|u\|_{H^k(\Omega)}, \quad 2 \leq k \leq r+1.$$

2.4. Detalles Técnicos

2.4.1. Operadores diferenciales de superficie

A continuación definiremos los operadores diferenciales de superficie, estos operadores serán requeridos para poder brindar una fórmula de integración por partes para el operador hipersingular. Nuestra definición de operadores estará limitada únicamente a superficies planas, las cuáles son las que utilizaremos a lo largo de esta tesis (las definiciones las expondremos tal como se hace en [2]).
Para cualquier función φ definida sobre Γ y para $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)^T$ definimos

$$\mathbf{curl}_\Gamma\,\varphi=\left(\partial_{x_2}\varphi,-\partial_{x_1}\varphi,0\right)^T, \quad \mathrm{curl}_\Gamma\,\boldsymbol{\varphi}=\partial_{x_1}\varphi_2-\partial_{x_2}\varphi_1.$$

En lo sucesivo extenderemos Γ a una superficie cerrada $\tilde{\Gamma}$. Para hacer diferencia sobre los diferentes operadores de superficie diremos que $\mathbf{curl}_\Gamma$ es definido sobre la superficie abierta Γ y $\mathbf{curl}_{\tilde{\Gamma}}$ es definido sobre la superficie cerrada $\tilde{\Gamma}$.
Tal como se expone en [2], $\mathbf{curl}_{\tilde{\Gamma}}$ puede ser extendido a un mapeo lineal y continuo de $H^{1/2}(\tilde{\Gamma})$ en $\boldsymbol{H}_t^{-1/2}(\tilde{\Gamma})$, donde $\tilde{\Gamma}$ es la frontera de un dominio Lipschitz con $\Gamma\subset\tilde{\Gamma}$. Aquí $\boldsymbol{H}_t^{-1/2}(\tilde{\Gamma})$ es un sub-espacio tangente de $\left(H^{-1/2}(\tilde{\Gamma})\right)^3$, para una definición precisa ver [20].
Usamos esta extensión de $H^{1/2}(\tilde{\Gamma})$ para definir $\mathbf{curl}_\Gamma$ sobre $H^{1/2}(\Gamma)$:

$$\mathbf{curl}_\Gamma : \begin{cases} H^{1/2}(\Gamma) & \to \quad \boldsymbol{H}_t^{-1/2}(\Gamma) \\ \quad\varphi & \mapsto \quad \left(\mathbf{curl}_{\tilde{\Gamma}}\,\tilde{\varphi}\right)|_\Gamma, \end{cases} \tag{2.14}$$

donde $\tilde{\varphi}\in H^{1/2}(\tilde{\Gamma})$ es una extensión de φ.
De forma general sea $s\in(0,1)$, entonces definimos $\boldsymbol{H}_t^s(\Gamma):=\{\varphi\in\left(H^s(\Gamma)\right)^3;\ \varphi\cdot\boldsymbol{n}=0\}$, luego para $s\in[0,1/2]$ el operador diferencial $\mathbf{curl}_\Gamma$ es un mapeo que satisface

$$\mathbf{curl}_\Gamma : H^{1/2+s}(\Gamma)\to\boldsymbol{H}_t^{-1/2+s}(\Gamma). \tag{2.15}$$

Luego tenemos los siguientes lemas los cuales nos serán de utilidad en el capítulo siguiente.

Lema 2.4. *El operador* $\mathbf{curl}_\Gamma : H^{1/2+s}(\Gamma) \to \boldsymbol{H}_t^{-1/2+s}(\Gamma)$ *es continuo para* $s \in [0, 1/2]$.

Para una demostración ver [14, Lema 3.4].

Lema 2.5. *Existe una constante positiva* C *tal que*

$$|u|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C \| \mathbf{curl}_\Gamma u \|_{\boldsymbol{H}_t^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall u \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Para una demostración ver [2, Lema 4.1].

2.4.2. El operador capa simple

El operador capa simple asociado a la ecuación de Helmholtz es definido por

$$V_k \varphi(x) := \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \varphi(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y \quad \varphi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma), \quad x \in \Gamma.$$

Además el operador capa simple para funciones vectoriales es definido por

$$\boldsymbol{V_k} \boldsymbol{\varphi}(x) := \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \boldsymbol{\varphi}(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dS_y \quad \boldsymbol{\varphi} \in (\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma))^3, \quad x \in \Gamma.$$

Los operadores $V_k : \tilde{H}^{-1/2+s}(\Gamma) \to H^{1/2+s}(\Gamma)$ y $\boldsymbol{V_k} : \tilde{\boldsymbol{H}}_t^{-1/2+s}(\Gamma) \to \boldsymbol{H}_t^{1/2+s}(\Gamma)$ son continuos para $s \in [-1/2, 1/2]$. Una demostración de estos resultados puede ser encontrada en [9].
A continuación enunciamos el siguiente teorema el cual nos dice que el operador capa simple es coercivo.

Teorema 2.5. *([3, Teorema 6.40]) El operador capa simple* $\boldsymbol{V_k} : \tilde{\boldsymbol{H}}_t^{-1/2}(\Gamma) \to \boldsymbol{H}_t^{1/2}(\Gamma)$ *es coercivo, es decir existe un operador compacto* $\mathcal{C} : \tilde{\boldsymbol{H}}_t^{-1/2}(\Gamma) \to \boldsymbol{H}_t^{1/2}(\Gamma)$ *y una constante positiva* c *tal que*

$$\langle \boldsymbol{V_k} w, w \rangle_\Gamma + \langle \mathcal{C} w, w \rangle_\Gamma \geq c \|w\|^2_{\tilde{\boldsymbol{H}}_t^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall w \in \tilde{\boldsymbol{H}}_t^{-1/2}(\Gamma).$$

En [3, Teorema 6.40] encontramos que el operador $\mathcal{C}$ esta definido por $\mathcal{C} := \boldsymbol{V_0} - \boldsymbol{V_k}$, con $\boldsymbol{V_0}$ el operador capa simple asociado al Laplaciano, es decir

$$\boldsymbol{V_0} \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\boldsymbol{\varphi}(y)}{|x-y|} dS_y, \ \boldsymbol{\varphi} \in (\tilde{H}^{1/2}(\Gamma))^3, \ x \in \Gamma.$$

Más aún en [3, Teorema 6.22] podemos ver que el operador $\boldsymbol{V_0}$ es elíptico, i.e., existe una constante positiva c tal que

$$\langle \boldsymbol{V_0} v, v \rangle_\Gamma \geq c \|v\|^2_{\tilde{\boldsymbol{H}}_t^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall v \in \tilde{\boldsymbol{H}}_t^{-1/2}(\Gamma).$$

Por otro lado utilizando integración por partes podemos encontrar la relación entre el operador W_k con V_k y $\boldsymbol{V_k}$ (ver [8, Teorema 2]):

$$\langle W_k u, v\rangle_\Gamma = \langle \boldsymbol{V_k}\, \mathbf{curl}_\Gamma\, u, \mathbf{curl}_\Gamma\, v\rangle_\Gamma - k^2\langle V_k u, v\rangle_\Gamma \quad \forall u, v \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma).$$

De aquí podemos deducir que

$$W_k = \mathrm{curl}_\Gamma\, \boldsymbol{V_k}\, \mathbf{curl}_\Gamma - k^2 V_k. \tag{2.16}$$

Notación: En todo lo que sigue, utilizaremos la siguiente notación genérica para la norma definida sobre funciones vectoriales. La norma $\|\cdot\|_{H^s(\Gamma)}$ será usada tanto para funciones escalares como para funciones vectoriales, pero se entenderá en el contexto que es la norma definida en los espacios adecuados, así por ejemplo cuando aparezca $\|\boldsymbol{V_k} u\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ quedará claro que es la norma sobre el espacio $\boldsymbol{H}_t^{-1/2}(\Gamma)$.

A continuación enunciamos algunos resultados que serán utilizados en el siguiente capítulo para realizar algunas estimaciones.

Lema 2.6. *Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ un dominio Lipschitz con frontera ∂R*

i) *[12, Lema 5] Para cualquier $s \in (-1/2, 1/2)$ y para cualquier $v \in H^s(R)$, se satisface*

$$\|v\|_{\tilde{H}^s(R)} \lesssim \frac{1}{1/2 - |s|}\|v\|_{H^s(R)}.$$

ii) *[2, Lema 4,3] Para cualquier $s \in (1/2, 1]$ y para cualquier $v \in H^s(R)$, se satisface*

$$\|v\|_{L^2(\partial R)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{s - 1/2}}\|v\|_{H^s(R)}.$$

Además podemos definir el operador T_k (el cuál será definido en rigor en el próximo capítulo)

$$T_k v = ((\boldsymbol{V_k}\, \mathbf{curl}_\Gamma\, v|_\Gamma) \cdot \boldsymbol{t})\,|_{\partial\Gamma},$$

con $\boldsymbol{t}$ un vector tangencial unitario sobre $\partial\Gamma$(con orientación matemática positiva cuando Γ es visto como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$). Una propiedad de la continuidad del operador T_k es descrita en el siguiente lema.

Lema 2.7. *El operador T_k satisface*

$$\|T_k v\|_{\partial\Gamma} \lesssim (s - 1/2)^{-3/2}|v|_{H^s(\Gamma)} \quad \forall v \in H^s(\Gamma), \quad 1/2 < s \leq 1.$$

Demostración. La demostración es exactamente igual a la que aparece en [1, Lema 4,1] únicamente cambiando $\boldsymbol{V_0}$ por $\boldsymbol{V_k}$. □

2.4.3. Propiedad Inversa

En esta parte discutiremos sobre la equivalencia de las normas de Sobolev en los espacios discretos. Es conocido que en dimensión finita dos normas son siempre equivalentes, además por el teorema de inmersión de Sobolev se sabe que si $t \leq s$ entonces existe una constante positiva $C > 0$ tal que

$$\|v\|_{H^t(\Gamma)} \leq C\|v\|_{H^s(\Gamma)} \quad v \in X_h,$$

para cualquier espacio discreto $X_h \subset H^s(\Gamma)$. Para obtener la desigualdad invertida notemos lo siguiente:
Sea $\mathcal{T}$ una malla regular cuasi-uniforme, de elementos regulares (cuadriláteros o triángulos),

$$\bar{\Gamma} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} \bar{K}.$$

El máximo y mínimo diámetro de los elementos de $\mathcal{T}$ es denotado por h y $\underline{h}$ respectivamente. Ahora definamos el espacio de funciones discretas, el cual es definido sobre un sub-dominio de funciones lineales a trozos:

$$X_h := \{v \in C^0(\Gamma); v|_K \text{ es un polinomio de grado uno para todo } K \in \mathcal{T}\}.$$

Enunciamos a continuación el siguiente resultado conocido como la propiedad inversa.

Lema 2.8. *Sean $s, t \in [0,1]$ con $t \leq s$. Entonces existe una constante positiva C tal que*

$$\|v\|_{H^s(\Gamma)} \leq Ch^{t-s}\|v\|_{H^t(\Gamma)} \quad v \in X_h.$$

Para una demostración ver [6, Sección 4.4.3] o [16, Sección 4.5].

Capítulo 3

Método de Nitsche para el operador hipersingular

En el capítulo anterior definimos el operador hipersingular asociado a la ecuación de Helmholtz. En este capítulo aplicaremos las ideas expuestas por Nitsche al problema (2.5), es decir esto constituirá una combinación de los métodos de Nitsche y el método de elementos de frontera.

3.1. Problema Modelo

Tal como lo hemos definido en los capítulos anteriores, recordemos que Γ es una superficie plana abierta con frontera poligonal. En todo lo que sigue identificaremos Γ con un dominio en $\mathbb{R}^2$, por tanto nos referiremos a sub-dominios de Γ en lugar de sub-superficies. La frontera de Γ la denotemos por $\partial\Gamma$.
Nuestro problema modelo es: Dada $f \in L^2(\Gamma)$ encontrar $u \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$W_k u = f \quad \text{en} \quad \Gamma. \tag{3.1}$$

El problema (3.1) puede ser expresado también en su formulación variacional, es decir: Encontrar $u \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\langle W_k u, v\rangle_\Gamma = \langle f, v\rangle_\Gamma \quad \forall v \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma). \tag{3.2}$$

Aquí $\langle \cdot, \cdot\rangle_\Gamma$ denota la dualidad entre $H^{-1/2}(\Gamma)$ y $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$, tal como se explicaba en el capítulo 2.

3.2. Formulación variacional discreta

Consideremos una descomposición de Γ en dos sub-dominios poligonales Γ_1, Γ_2 los cuales no se intersectan entre si. La extensión a un número arbitrario de sub-dominios es sencillo. Denotaremos esta partición de Γ como

$$\mathcal{T} := \{\Gamma_1, \Gamma_2\}.$$

La interfaz entre los sub-dominios es denotada por $\gamma_0 := \left(\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2\right)^\circ$ y sea $\gamma := \gamma_0 \cup \partial\Gamma$. Denotaremos por v_i a la restricción de la función v a los sub-dominios Γ_i, además de manera análoga como se denotó en [1] utilizaremos la siguiente notación para el salto sobre γ:

$$[v] := \begin{cases} (v_1 - v_2)|_{\gamma_0} & \text{sobre} \quad \gamma_0, \\ v|_{\partial\Gamma} & \text{sobre} \quad \partial\Gamma. \end{cases} \tag{3.3}$$

También necesitamos introducir el espacio de Sobolev producto correspondiente a la descomposición de Γ, esto es

$$H^s(\mathcal{T}) := H^s(\Gamma_1) \times H^s(\Gamma_2),$$

con la norma producto usual

$$\|\varphi\|^2_{H^s(\mathcal{T})} = \sum_{i=1}^{2} \|\varphi_i\|^2_{H^s(\Gamma_i)} \quad \text{con} \quad \varphi_i = \varphi|_{\Gamma_i} \quad (i = 1, 2).$$

Esta notación de espacio producto será usada también para el espacio $\tilde{H}^s(\mathcal{T})$. Introducimos el producto interno

$$\langle v, w\rangle_{\mathcal{T}} := \langle v_1, w_1\rangle_{\Gamma_1} + \langle v_2, w_2\rangle_{\Gamma_2} \quad \forall v, w \in L^2(\mathcal{T})(= L^2(\Gamma))$$

y su extensión por dualidad a $\tilde{H}^s(\mathcal{T}) \times H^{-s}(\mathcal{T})$.
Para $1/2 \leq s \leq 1$ y $\nu > 0$ introducimos las siguientes semi-normas, las cuáles serán utilizadas en nuestras estimaciones de error.

$$\begin{aligned} |v|^2_{H^s(\mathcal{T})} &:= \sum_{i=1}^{2} |v|^2_{H^s(\Gamma_i)}, \\ \|v\|^2_{H^s_\nu(\mathcal{T})} &:= \sum_{i=1}^{2} |v|^2_{H^s(\Gamma_i)} + \nu\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)}, \end{aligned}$$

donde $|v|_{H^s(\Gamma_i)}$ es la semi-norma de Sobolev-Slobodeckij que se definió en el capítulo anterior. El caso $s = 1/2$ sólo será usado para funciones discretas donde el salto a través de γ_0 está bien definido.

Esquema discreto

A continuación introducimos nuestro esquema discreto, definamos una malla regular cuasi-uniforme $\mathcal{T}_i$, $i = 1, 2$, de elementos regulares (cuadriláteros o triángulos):

$$\bar{\Gamma}_i = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_i} \bar{K}.$$

El máximo y mínimo diámetro de los elementos de $\mathcal{T}_i$ es denotado por h_i y $\underline{h}_i$ respectivamente, y definimos:

$$h := \max\{h_1, h_2\}, \qquad \underline{h} := \min\{\underline{h}_1, \underline{h}_2\}$$

A lo largo de esta tesis asumiremos que $h < 1$. Ahora definamos los espacios de funciones discretas, las cuales son definidas sobre sub-dominios de funciones lineales a trozos:

$$X_{h,i} := \{v \in C^0(\Gamma_i); v|_K \text{ es un polinomio de grado uno para todo } K \in \mathcal{T}_i\},$$

para $i = 1, 2$. Luego podemos definir nuestro espacio discreto global sobre Γ :

$$X_h := X_{h,1} \oplus X_{h,2}.$$

Observación 3.1. *Las funciones $v \in X_h$ no poseen la condición nula en la frontera y son en general discontinuas a través de la interfaz γ_0, por tanto $X_h \not\subseteq \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$.*
Un método estándar de elementos de frontera para aproximar la solución del problema (3.2) consiste en seleccionar un sub-espacio de polinomios a trozos $\tilde{H}_h \subset \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ y definir una aproximación $\tilde{u}_h \in \tilde{H}_h$ tal que

$$\langle W_k \tilde{u}, v\rangle_\Gamma = \langle f, v\rangle_\Gamma \quad \forall v \in \tilde{H}_h.$$

X_h no puede ser utilizado para resolver el problema anterior, puesto que W_k no está definido para funciones en X_h.

Operadores diferenciales

En el capítulo anterior se introdujeron los operadores diferenciales, ahora definimos los correspondientes operadores diferenciales a trozos $\mathbf{curl}_\mathcal{T}$ y $\operatorname{curl}_\mathcal{T}$:

$$\mathbf{curl}_\mathcal{T}\,\varphi := \sum_{i=1}^{2} (\mathbf{curl}_{\Gamma_i}\,\varphi_i)^0, \quad \operatorname{curl}_\mathcal{T}\,\boldsymbol{\varphi} := \sum_{i=1}^{2} (\operatorname{curl}_{\Gamma_i}\,\boldsymbol{\varphi}_i)^0$$

para funciones suaves escalares $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ y funciones vectoriales $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2)$ donde $\varphi_i = \varphi|_{\Gamma_i}, \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\varphi}|_{\Gamma_i}$, aquí $(\cdot)^0$ indica la extensión por cero a Γ.
Por otra parte recordemos que por lo visto en el capítulo anterior el operador hipersingular está relacionado con el operador capa simple mediante la siguiente expresión

$$\langle W_k u, v\rangle_\Gamma = \langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_\Gamma\, u, \mathbf{curl}_\Gamma\, v\rangle_\Gamma - k^2\langle V_k u, v\rangle_\Gamma \quad \forall u, v \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma).$$

Esta fórmula nos permite dar nuestra formulación discreta.
Definimos la forma sesquilineal sobre $X_h \oplus X_h$:

$$\begin{aligned} A(u,v) &:= \langle \boldsymbol{V_k}\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, u, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\rangle_\Gamma - k^2 \langle V_k u, v\rangle_\Gamma \\ &+ \langle T_k u, [v]\rangle_\gamma + \langle [u], T_{-k} v\rangle_\gamma + \nu \langle [u],[v]\rangle_\gamma, \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $\nu > 0$ y el operador T_k para $k \in \mathbb{R}$ se define como

$$T_k v := \begin{cases} T_{k,i} v|_{\partial\Gamma_i \cap \Gamma} & \text{sobre} \quad \partial\Gamma_i \cap \Gamma \quad (i = 1,2), \\ T_{k,1} v|_{\gamma_0} & \text{sobre} \quad \gamma_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Con $T_{k,i} v = ((\boldsymbol{V_k}\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v)|_{\Gamma_i} \cdot \boldsymbol{t}_i)\,|_{\partial\Gamma_i} \quad (i = 1,2)$.
Aquí, $\boldsymbol{t}_i$ es un vector tangencial unitario sobre $\partial\Gamma_i$ (con orientación matemática positiva cuando identificamos Γ_i con un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ el cual es compatible con la identificación de Γ como subconjunto de $\mathbb{R}^2$). Observemos que en general $T_i v$ no está bien definido para $v \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ puesto que no está bien definida la traza de $H^{1/2}(\Gamma_i)$ a $\partial\Gamma_i$.
El método de elementos de frontera basado en Nitsche asociado al problema (3.2) consiste en: Encontrar $u_h \in X_h$ tal que:

$$A(u_h, v) = \langle f, v\rangle_\Gamma \quad \forall v \in X_h. \tag{3.6}$$

Observación 3.2. *Para cualquier función $u \in \tilde{H}^s(\Gamma)$ $(s > 1/2)$, en particular para la solución de* (3.1)*, se satisface que $\langle [u], T_{-k} v\rangle_\gamma = \langle [u],[v]\rangle_\gamma = 0$, para v suficientemente suave, por tanto los términos $\langle [u], T_{-k} v\rangle_\gamma, \langle [u],[v]\rangle_\gamma$ no son requeridos para la consistencia de* (3.6)*.*
Por otro lado ya habíamos comentado que $X_h \nsubseteq \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$, por tanto el método de Nitsche es un método no conforme, pues un método conforme estándar necesita un espacio discreto que satisfaga $\tilde{X}_h \subset \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$.

3.3. Continuidad y Consistencia

En esta sección mostraremos la continuidad de la forma sesquilineal (3.4), la cual será una herramienta fundamental para la estimación del error de nuestro método, además estableceremos la consistencia del problema (3.6), siendo la consistencia una propiedad importante en el método de Nitsche tal como se describió en el capítulo anterior.

3.3.1. Continuidad

Lema 3.1. *Sean $\nu > 0$ y $\varepsilon > 0$. La forma sesquilineal* (3.4) *es continua, es decir existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$|A(u,v)| \le C(\varepsilon)\nu \|u\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \quad \forall u, v \in H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T}), \tag{3.7}$$

donde $C(\varepsilon)$ es un número que no depende de ν.

Demostración. Acotemos término por término en la forma sesquilineal (3.4). Observemos que por dualidad y la continuidad de $\boldsymbol{V_k}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}|\langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v\rangle_\Gamma| &\leq \|\boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}\\ &\lesssim \|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)}.\end{aligned}$$

Además, para $u \in H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})$,

$$\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \left(\sum_{i=1}^{2}\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|^2_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_i)}\right)^{1/2} \lesssim \left(\sum_{i=1}^{2}\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|^2_{\tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)}\right)^{1/2},$$

por Lema 2.6 **i)**

$$\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|_{\tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} \lesssim \varepsilon^{-1}\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)},$$

y por la continuidad de $\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}$ (Lema 2.4)

$$\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|_{\tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} \lesssim \varepsilon^{-1}\|u\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)}.$$

Así

$$\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \left(\sum_{i=1}^{2}\varepsilon^{-2}\|u\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)}\right)^{1/2} = \varepsilon^{-1}\|u\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}. \tag{3.8}$$

Por tanto tenemos que

$$|\langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v\rangle_\Gamma| \lesssim \varepsilon^{-2}\|u\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}. \tag{3.9}$$

Por otro parte utilizando la dualidad y la continuidad de V_k llegamos a

$$|\langle V_k u, v\rangle_\Gamma| \lesssim \|u\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}. \tag{3.10}$$

También observemos lo siguiente

$$|\langle T_k u, [v]\rangle_\gamma| \leq \|T_k u\|_{L^2(\gamma)}\|[v]\|_{L^2(\gamma)},$$

y por Lema 2.6 **ii)** con $s = 1/2+\varepsilon$, la continuidad de $\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}$ y $\boldsymbol{V_k}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|T_k u\|^2_{L^2(\gamma)} &\leq \|\boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|^2_{L^2(\gamma)} \lesssim \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)}\\ &\lesssim \varepsilon^{-1}\|\boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma)} \lesssim \varepsilon^{-1}\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|^2_{\tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)}\\ &\lesssim \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{2}\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|^2_{\tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} \lesssim \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{2}\varepsilon^{-2}\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)}\\ &\lesssim \varepsilon^{-3}\sum_{i=1}^{2}\|u\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} = \varepsilon^{-3}\|u\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}.\end{aligned}$$

Una vez más por Lema 2.6 **ii)** con $s = 1/2 + \varepsilon$, tenemos que

$$\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)} \lesssim \varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{2} \|v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} = \varepsilon^{-1} \|v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}. \tag{3.11}$$

Por tanto

$$|\langle T_k u, [v] \rangle_\gamma| \lesssim \varepsilon^{-2} \|u\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}. \tag{3.12}$$

Puesto que T_k y T_{-k} se acotan de la misma forma, podemos concluir que

$$|\langle [u], T_{-k} v \rangle_\gamma| \lesssim \varepsilon^{-2} \|u\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}. \tag{3.13}$$

Finalmente utilizando (3.11) obtenemos

$$|\langle [u], [v] \rangle_\gamma| \quad \leq \quad \|[u]\|_{L^2(\gamma)} \|[v]\|_{L^2(\gamma)} \lesssim \varepsilon^{-1} \|u\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}. \tag{3.14}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} |A(u,v)| \quad &\leq \quad |\langle \boldsymbol{V_k} \, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}} \, u, \mathbf{curl}_\Gamma \, v \rangle_{\mathcal{T}}| + k^2 |\langle V_k u, v \rangle_\Gamma| \\ &+ \quad |\langle T_k u, [v] \rangle_\gamma| + |\langle [u], T_k v \rangle_\gamma| + |\nu \langle [u], [v] \rangle_\gamma|, \end{aligned}$$

y usando las estimaciones (3.9)-(3.14) concluimos que

$$|A(u,v)| \lesssim C(\varepsilon) \nu \|u\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \quad \forall u, v \in H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T}).$$

con $C(\varepsilon) = \varepsilon^{-2}$. □

Ahora estamos interesados en dar una estimación de la continuidad para funciones discretas. Para esto necesitamos los siguientes lemas.

Lema 3.2. *Para $i = 1, 2$ se satisface que*

$$\| \mathbf{curl}_{\Gamma_\mathrm{i}} \, u \|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} \lesssim h^{-\varepsilon} |u|_{H^{1/2}(\Gamma_i)} \quad \forall u \in X_{h,i}. \tag{3.15}$$

Demostración. Por la continuidad del $\mathbf{curl}_{\Gamma_\mathrm{i}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \| \mathbf{curl}_{\Gamma_\mathrm{i}} \, u \|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} \quad &= \quad \| \mathbf{curl}_{\Gamma_\mathrm{i}} (u - c) \|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} \\ &\lesssim \quad \|u - c\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} \quad \forall u \in X_{h,i}, \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

por la propiedad inversa

$$\|u - c\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} \lesssim h^{-\varepsilon} \|u - c\|_{H^{1/2}(\Gamma_i)} \quad \forall u \in X_{h,i}, \quad c \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\| \mathbf{curl}_{\Gamma_\mathrm{i}} \, u \|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} \lesssim h^{-\varepsilon} \inf_{c \in \mathbb{R}} \|u - c\|_{H^{1/2}(\Gamma_i)} \cong h^{-\varepsilon} |u|_{H^{1/2}(\Gamma_i)}. \tag{3.16}$$

Para una demostración de la equivalencia de $\inf_{c \in \mathbb{R}} \|u - c\|_{H^{1/2}(\Gamma_i)}$ y $|u|_{H^{1/2}(\Gamma_i)}$ ver [15]. □

Por otro lado utilizando las ideas de la demostración de la desigualdad de Poincaré-Friedrichs y la propiedad inversa se tiene el siguiente lema.

Lema 3.3. *Sea $\nu > 0$. Para todo $s > 1/2$ se verifica*

$$\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|u\|^2_{H^s_\nu(\mathcal{T})} \quad \forall u \in H^s_\nu(\mathcal{T}). \tag{3.17}$$

Demostración. Procedamos a demostrar primero que

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_i)} \lesssim |u|_{H^s(\Gamma_i)} + \left| \int_{\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma} u ds \right| \quad \forall u \in H^s(\Gamma_i) \quad (i = 1, 2). \tag{3.18}$$

Para este fin utilizamos las ideas en la demostración de la desigualdad de Poincaré, es decir supongamos que existe una sucesión $(u_n) \subset H^s(\Gamma_i)$ tal que

$$\|u_n\|_{L^2(\Gamma_i)} \gtrsim n \left(|u_n|_{H^s(\Gamma_i)} + \left| \int_{\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma} u_n ds \right| \right).$$

Definamos

$$v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Gamma_i)}}.$$

Es claro que $\|v_n\|_{L^2(\Gamma_i)} = 1$. Definamos $b(v_n) := |v_n|_{H^s(\Gamma_i)} + \left| \int_{\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma} v_n ds \right|$. De lo anterior sabemos que $\frac{1}{n} \geq b(v_n)$, por tanto $b(v_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y así

$$|v_n|_{H^s(\Gamma_i)} \to 0 \quad \text{y} \quad \left| \int_{\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma} v_n ds \right| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty. \tag{3.19}$$

Luego (v_n) es una sucesión acotada en $H^s(\Gamma_i)$ entonces se tiene que existe una sub-sucesión $(v_{n_k}) \subset (v_n)$ tal que $v_{n_k} \to v$ débilmente, ver [18, Teorema 16.2.6].
Observemos que la semi-norma $|\cdot|_{H^s(\Gamma_i)} : H^s(\Gamma_i) \to \mathbb{R}$ es un funcional continuo y convexo. Dado que $v_{n_k} \to v$ débilmente, entonces por [21, Teorema 3.1.2] se verifica

$$|v|_{H^s(\Gamma_i)} \leq \liminf |v_{n_k}|_{H^s(\Gamma_i)},$$

y por (3.19) podemos concluir que

$$|v|_{H^s(\Gamma_i)} = 0.$$

Entonces v es constante.
Por otro lado definamos $f : H^s(\Gamma_i) \to \mathbb{R}$ tal que $f(v) = \left| \int_{\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma} v ds \right|$. Observemos que el funcional f es continuo y convexo. Entonces puesto $v_{n_k} \to v$ débilmente se cumple que

$$f(v) \leq \liminf f(v_{n_k}) \quad (\text{ver [21, Teorema 3.1.2]}).$$

Utilizando lo anterior y nuevamente (3.19) se tiene que $f(v) = \left|\int_{\partial\Gamma_i \cap \partial\Gamma} v ds\right| = 0$, por lo que podemos concluir que $v = 0$, lo cual es una contradicción, por tanto (3.18) se satisface. Utilizando (3.18) podemos concluir

$$\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} \lesssim \sum_{i=1}^{2} |u|^2_{H^s(\Gamma_i)} + \nu \|[u]\|^2_{L^2(\gamma)} = \|u\|_{H^s_\nu(\mathcal{T})} \quad \forall u \in H^s_\nu(\mathcal{T}).$$

$\square$

Luego podemos establecer un tipo de continuidad de la forma sesquilineal para funciones en el espacio discreto.

Lema 3.4. *Sea $\nu > 0$. La forma sesquilineal* (3.4) *satisface*

$$|A(u,v)| \lesssim C(\varepsilon,\nu) h^{-2\varepsilon} \|u\|_{H^{1/2}_\nu(\mathcal{T})} \|v\|_{H^{1/2}_\nu(\mathcal{T})} \quad \forall u, v \in X_h, \tag{3.20}$$

donde $C(\varepsilon,\nu)$ es un número que no depende de h.

Demostración. Trabajando similarmente a la demostración del Lema 3.1 y utilizando los Lemas 3.2 y 3.3, se obtiene lo buscado. $\square$

3.3.2. Consistencia de la formulación de Nitsche

A continuación mostraremos la consistencia de la formulación de Nitsche para el operador hipersingular. Mostraremos que la solución u de (3.1) soluciona el problema (3.6). Este es un resultado clásico en el método Nitsche tal como se expuso en el capítulo anterior.

Lema 3.5. *Sea $\nu > 0$. El problema (3.6) es consistente.*

Demostración. Observemos que la solución u de (3.1) satisface $u \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$, más aún es conocido que $u \in \tilde{H}^s(\Gamma)$ para cualquier $s < 1$ (ver [5]) y de este modo la traza de u sobre γ esta bien definida y pertenece a $L^2(\gamma)$. Además $T_{k,i}u \quad (i = 1,2)$, también está bien definido y pertenece a $L^2(\gamma)$. Por tanto la forma sesquilineal $A(u,v)$ está bien definida para todo $v \in X_h$. Procedamos como en [1]. Sea $v \in X_h$. Entonces, para una función vectorial suave $\boldsymbol{\varphi}$, aplicando integración por partes sobre Γ_i obtenemos

$$\langle \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{t}_i, v_i \rangle_{\partial\Gamma_i} = \langle \mathrm{curl}_{\Gamma_\mathrm{i}} \boldsymbol{\varphi}, v_i \rangle_{\Gamma_i} - \langle \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{curl}_{\Gamma_\mathrm{i}} v_i \rangle_{\Gamma_i},$$

para $i = 1, 2$. Luego aplicando la fórmula anterior con $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{V_k}\, \mathbf{curl}_\Gamma u)|_{\Gamma_i}$ y por la definición de $T_{k,i}$ llegamos a

$$\langle T_{k,i} u, v_i \rangle_{\partial\Gamma_i} = \langle \mathrm{curl}_{\Gamma_\mathrm{i}} (\boldsymbol{V_k}\, \mathbf{curl}_\Gamma u), v_i \rangle_{\Gamma_i} - \langle \boldsymbol{V_k}\, \mathbf{curl}_\Gamma u, \mathbf{curl}_{\Gamma_\mathrm{i}} v_i \rangle_{\Gamma_i}. \tag{3.21}$$

Por otro lado la solución $u \in \tilde{H}^{1/2}$ de (3.1) satisface que $u \in H^s_0$ para todo $s < 1$, es decir u tiene traza nula sobre $\partial\Gamma$, es decir $[u] = 0$.

Además observemos que $[(\boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u)|_{\Gamma_1} - (\boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u)|_{\Gamma_2}]|_{\gamma_0} = 0$ y $\boldsymbol{t}_1 = -\boldsymbol{t}_2$ sobre γ_0. Entonces se satisface que $T_{k,1}u + T_{k,2}u = 0$ sobre γ_0, por tanto

$$\langle T_{k,1}u, [v]\rangle_{\gamma_0} = \frac{1}{2}\langle T_{k,1}u - T_{k,2}u, [v]\rangle_{\gamma_0} = \sum_{i=1}^{2}\langle T_{k,i}u, v_i\rangle_{\gamma_0}.$$

De lo anterior concluimos que

$$\begin{aligned}
\langle T_k u, [v]\rangle_{\gamma} &= \sum_{i=1}^{2}\langle T_{k,i}u, [v]\rangle_{\partial\Gamma_i\cap\partial\Gamma} + \langle T_{k,1}u, [v]\rangle_{\gamma_0} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\langle T_{k,i}u, v_i\rangle_{\partial\Gamma_i}.
\end{aligned}$$

Usando todo lo anterior y (3.21) se tiene

$$\begin{aligned}
A(u,v) &= \langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,u, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v\rangle_{\Gamma} - k^2\langle V_k u, v\rangle_{\Gamma} + \langle T_k u, [v]\rangle_{\gamma} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\Gamma}\,u, \mathbf{curl}_{\Gamma_i}\,v_i\rangle_{\Gamma_i} - k^2\langle V_k u, v\rangle_{\Gamma} + \sum_{i=1}^{2}\langle T_{k,i}u, v_i\rangle_{\partial\Gamma_i} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\left(\langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\Gamma}\,u, \mathbf{curl}_{\Gamma_i}\,v_i\rangle_{\Gamma_i} + \langle T_{k,i}u, v_i\rangle_{\partial\Gamma_i}\right) - k^2\langle V_k u, v\rangle_{\Gamma} \\
&= \sum_{i=1}^{2}\langle \mathrm{curl}_{\Gamma_i}(\boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\Gamma}\,u), v_i\rangle_{\Gamma_i} - k^2\langle V_k u, v\rangle_{\Gamma} \\
&= \langle \mathrm{curl}_{\Gamma}(\boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\Gamma}\,u), v\rangle_{\Gamma} - k^2\langle V_k u, v\rangle_{\Gamma}.
\end{aligned}$$

Luego por (2.16) se tiene lo buscado, es decir

$$A(u,v) = \langle W_k u, v\rangle_{\Gamma} = \langle f, v\rangle_{\Gamma} \quad \forall v \in X_h.$$

□

Como corolario del lema anterior obtenemos el resultado que corresponde a la ortogonalidad de Galerkin.

Corolario 3.1. *Consideremos h sufucientemente pequeño tal que la solución del problema* (3.6) *exista. Sean u la solución de* (3.2), *y u_h la solución de* (3.6). *Entonces*

$$A(u - u_h, v) = 0 \quad \forall v \in X_h.$$

3.4. Truco de Aubin-Nitsche

En esta sección usaremos el truco de Aubin Nitsche para encontrar una estimación de la forma

$$\|u-u_h\|_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})} \lesssim h^{1/2-2\varepsilon}\varepsilon^{-2}\|u-u_h\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})},$$

donde u es la solución del problema (3.2) y u_h la solución del problema (3.6).
Está estimación constituirá una herramienta potente para la demostración del teorema principal, en especial para lograr la convergencia adecuada del método de Nitsche.

En el capítulo anterior comentamos acerca de la continuidad del operador hipersingular (Lema 2.1), si tomamos $s := \frac{1}{2} - \varepsilon$ con $\varepsilon \in [0, 1/2]$ tenemos que $W_k : \tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma) \to H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ es continuo para $k \in \mathbb{R}$.
Sean $\psi \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ y $k \in \mathbb{R}$. Luego por la biyectividad del operador hipersingular (Lema 2.1), sabemos que existe $\varphi \in \tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)$ tal que

$$W_k\varphi = \psi \tag{3.22}$$

y

$$\|\varphi\|_{\tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \lesssim \|\psi\|_{H^{-\varepsilon}(\Gamma)}, \tag{3.23}$$

con $\lesssim$ que incluye un constante que depende de ε y k.

Ahora consideremos los siguientes lemas los cuales serán de importancia para establecer la estimación de error deseada.
Observemos que para φ podemos encontrar una aproximación $\varphi_{h,i}$ en cada sub-dominio Γ_i, esto se establece en el siguiente lema.

Lema 3.6. *Sea φ la solución del problema* (3.22)*. Entonces existe una aproximación $\varphi_{h,i}$ de φ en cada sub-dominio Γ_i tal que se satisface*

$$\|\varphi-\varphi_{h,i}\|_{H^s(\Gamma_i)} \lesssim h^{r-s}\|\varphi\|_{H^r(\Gamma_i)} \quad (i=1,2) \quad \textit{para} \quad 1/2 \leq s \leq r < 1.$$

Para una demostración ver [19].
Del lema anterior podemos definir

$$\varphi_h \in X_h \quad \text{tal que} \quad \varphi_h|_{\Gamma_i} = \varphi_{h,i} \quad (i=1,2). \tag{3.24}$$

Lema 3.7. *Sean φ la solución de* (3.22) *y φ_h una aproximación de φ tal como se definió en* (3.24)*, y sea $v \in H^s(\Gamma), 0 \leq s < 1$. Entonces para $\varepsilon > 0$ se satisfacen las estimaciones*

i) $|\langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(\varphi-\varphi_h)\rangle_\Gamma| \lesssim \varepsilon^{-1}h^{1/2-2\varepsilon}\|v\|_{\tilde{H}^{1/2-\varepsilon}(\mathcal{T})}\|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}$,

ii) $|\langle V_k v, \varphi-\varphi_h\rangle_\Gamma| \lesssim h^{1/2-2\varepsilon}\|v\|_{\tilde{H}^{-1}(\mathcal{T})}\|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}$,

iii) $|\langle [v], T_k(\varphi - \varphi_h)\rangle_\gamma| \lesssim \varepsilon^{-2} h^{1/2-2\varepsilon} \|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}$.

Demostración. Para **i)** sea $t \in [0, 1/2)$. Observemos que para $i = 1, 2$ del Lema 2.6 **i)** y la continuidad de $\mathbf{curl}_\mathcal{T}$ se tiene

$$\|\mathbf{curl}_\mathcal{T}(\varphi - \varphi_{h,i})\|_{\tilde{H}^{-t}(\Gamma_i)} \lesssim \frac{1}{1/2 - |t|} \|\mathbf{curl}_\mathcal{T}(\varphi - \varphi_{h,i})\|_{H^{-t}(\Gamma_i)} \lesssim \frac{1}{1/2 - |t|} \|\varphi - \varphi_{h,i}\|_{H^{1-t}(\Gamma_i)}.$$

Utilizando la continuidad de $\boldsymbol{V_k}$, la estimación anterior y la continuidad de $\mathbf{curl}_\mathcal{T}$ se satisface

$$\begin{aligned}
|\langle \boldsymbol{V_k} \, \mathbf{curl}_\mathcal{T} \, v, \mathbf{curl}_\mathcal{T}(\varphi - \varphi_h)\rangle_\Gamma| &\lesssim \|\boldsymbol{V_k} \, \mathbf{curl}_\mathcal{T} \, v\|_{H^t(\Gamma)} \|\mathbf{curl}_\mathcal{T}(\varphi - \varphi_h)\|_{\tilde{H}^{-t}(\Gamma)} \\
&\lesssim \|\mathbf{curl}_\mathcal{T} \, v\|_{\tilde{H}^{t-1}(\Gamma)} \|\mathbf{curl}_\mathcal{T}(\varphi - \varphi_h)\|_{\tilde{H}^{-t}(\Gamma)} \\
&\lesssim \left(\sum_{i=1}^{2} \|\mathbf{curl}_\mathcal{T} \, v\|^2_{\tilde{H}^{t-1}(\Gamma_i)} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{2} \|\mathbf{curl}_\mathcal{T}(\varphi - \varphi_{h,i})\|^2_{\tilde{H}^{-t}(\Gamma_i)} \right)^{1/2} \\
&\lesssim \left(\sum_{i=1}^{2} \|v\|^2_{\tilde{H}^{t}(\Gamma_i)} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{1/2 - |t|} \right)^2 \|\varphi - \varphi_{h,i}\|^2_{H^{1-t}(\Gamma_i)} \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{1/2 - |t|} \|v\|_{\tilde{H}^t(\mathcal{T})} \|\varphi - \varphi_h\|_{H^{1-t}(\mathcal{T})}.
\end{aligned}$$

Podemos tomar $t := 1/2 - \varepsilon$ con $\varepsilon \in (0, 1/2]$ y aplicar el Lema 3.6 con $s = 1/2 + \varepsilon$ y $r = 1 - \varepsilon$ para decir que

$$\begin{aligned}
\|\varphi - \varphi_h\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} &= \left(\sum_{i=1}^{2} \|\varphi - \varphi_{h,i}\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} \right)^{1/2} \\
&\lesssim \left(\sum_{i=1}^{2} h^{1-4\varepsilon} \|\varphi\|^2_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma_i)} \right)^{1/2} = h^{1/2-2\varepsilon} \|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$|\langle \boldsymbol{V_k} \, \mathbf{curl}_\Gamma \, v, \mathbf{curl}_\Gamma(\varphi - \varphi_h)\rangle_\Gamma| \lesssim \varepsilon^{-1} h^{1/2-2\varepsilon} \|v\|_{\tilde{H}^{1/2-\varepsilon}(\mathcal{T})} \|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}.$$

Para **ii)** notemos que por la continuidad de V_k

$$\begin{aligned}
|\langle V_k v, \varphi - \varphi_h\rangle_\Gamma| &\lesssim \|V_k v\|_{L^2(\Gamma)} \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\lesssim \|v\|_{\tilde{H}^{-1}(\Gamma)} \|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(\Gamma)}.
\end{aligned}$$

Similarmente como trabajamos en **i)** se tiene

$$\|\varphi - \varphi_h\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|\varphi - \varphi_h\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \lesssim h^{1/2-2\varepsilon} \|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}.$$

Luego

$$|\langle V_k v, \varphi - \varphi_h\rangle_\Gamma| \lesssim h^{1/2-2\varepsilon} \|v\|_{\tilde{H}^{-1}(\Gamma)} \|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}.$$

Para **iii)** observemos que similarmente como llegamos a (3.12) se obtiene

$$|\langle [v], T_k(\varphi-\varphi_h)\rangle_\gamma| \lesssim (s-1/2)^{-3/2}\|\varphi-\varphi_h\|_{H^s(\mathcal{T})}(s-1/2)^{-1/2}\|v\|_{H^s(\mathcal{T})} \quad 1/2 < s \leq 1.$$

Podemos tomar $s := 1/2+\varepsilon$ y usando (3.25) concluimos que

$$|\langle [v], T_k(\varphi-\varphi_h)\rangle_\gamma| \lesssim \varepsilon^{-2} h^{1/2-2\varepsilon}\|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}.$$

□

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.2. ***(Truco de Aubin-Nitsche)*** *Consideremos h suficientemente pequeño tal que la solución del problema* (3.6) *exista. Sean $\nu > 0$, $\varepsilon \in (0, 1/4)$, u la solución del problema* (3.2) *y u_h la solución del problema* (3.6). *Entonces se satisface la estimación de error*

$$\|u-u_h\|_{H^\varepsilon(\mathcal{T})} \lesssim h^{1/2-2\varepsilon}\nu\varepsilon^{-2}\|u-u_h\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}.$$

Demostración. Usando la dualidad de normas de Sobolev se tiene

$$\|u-u_h\|_{H^\varepsilon(\mathcal{T})} \cong \|u-u_h\|_{\tilde{H}^\varepsilon(\mathcal{T})} \cong \sup_{\psi\in H^{-\varepsilon}(\mathcal{T})}\frac{|\langle u-u_h,\psi\rangle_{\mathcal{T}}|}{\|\psi\|_{H^{-\varepsilon}(\mathcal{T})}}.$$

Dado que los espacios $H^{-\varepsilon}(\mathcal{T})$ y $H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ poseen normas equivalentes, entonces si $\psi \in H^{-\varepsilon}(\mathcal{T})$ se tiene que $\psi \in H^{-\varepsilon}(\Gamma)$ luego podemos aplicar la biyectividad de W_{-k} y por tanto tenemos que existe $\varphi \in \tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)$ tal que se satisface (3.23) y por tanto

$$\sup_{\psi\in H^{-\varepsilon}(\mathcal{T})}\frac{|\langle u-u_h,\psi\rangle_{\mathcal{T}}|}{\|\psi\|_{H^{-\varepsilon}(\mathcal{T})}} \lesssim \sup_{\varphi\in\tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)}\frac{|\langle u-u_h,W_{-k}\varphi\rangle_{\mathcal{T}}|}{\|\varphi\|_{\tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)}}.$$

Similarmente como se trabajó en la demostración de la consistencia (Lema 3.5), podemos ver que

$$\sup_{\varphi\in\tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)}\frac{|\langle u-u_h,W_{-k}\varphi\rangle_{\mathcal{T}}|}{\|\varphi\|_{\tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)}} \tag{3.26}$$

$$= \sup_{\varphi\in\tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)}\frac{|\langle \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(u-u_h), \boldsymbol{V_{-k}}\,\mathbf{curl}_\Gamma\,\varphi\rangle_{\mathcal{T}} - k^2\langle u-u_h, V_{-k}\varphi\rangle_{\mathcal{T}} + \langle [u-u_h], T_{-k}\varphi\rangle_\gamma|}{\|\varphi\|_{\tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)}}.$$

Observemos que como $\boldsymbol{V_k}$ es el adjunto de $\boldsymbol{V_{-k}}$ y $\mathbf{curl}_\Gamma\,\varphi = \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,\varphi$ (pues $\varphi \in \tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)$) se tiene la igualdad

$$\langle \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(u-u_h), \boldsymbol{V_{-k}}\,\mathbf{curl}_\Gamma\,\varphi\rangle_{\mathcal{T}} - k^2\langle u-u_h, V_{-k}\varphi\rangle_{\mathcal{T}} + \langle [u-u_h], T_{-k}\varphi\rangle_\gamma$$

$$= \langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(u-u_h), \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,\varphi\rangle_{\mathcal{T}} - k^2\langle V_k(u-u_h),\varphi\rangle_{\mathcal{T}} + \langle [u-u_h], T_{-k}\varphi\rangle_\gamma.$$

Sea φ_h una aproximación de φ (como se definió en (3.24)). Dado que $\varphi_h \in X_h$ por la ortogonalidad de Galerkin (Corolario 3.1) se tiene que

$$\begin{aligned} A(u-u_h,\varphi_h) = \langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(u-u_h), \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,\varphi_h\rangle_{\mathcal{T}} &+ \langle [u-u_h], T_{-k}\varphi_h\rangle_\gamma - k^2\langle V_k(u-u_h),\varphi_h\rangle_{\mathcal{T}} \\ &+ \langle T_k(u-u_h),[\varphi_h]\rangle_\gamma + \nu\langle [u-u_h],[\varphi_h]\rangle_\gamma = 0. \end{aligned}$$

Puesto que $\varphi \in \tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)$ entonces $[\varphi]=0$ sobre γ, luego

$$\langle T_k(u-u_h),[\varphi_h]\rangle_\gamma = \langle T_k(u-u_h),[\varphi-\varphi_h]\rangle_\gamma \quad \text{y} \quad \langle [u-u_h],[\varphi_h]\rangle_\gamma = \langle [u-u_h],[\varphi-\varphi_h]\rangle_\gamma.$$

De esta forma tenemos las igualdades

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(u-u_h), \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,\varphi\rangle_{\mathcal{T}} - k^2\langle V_k(u-u_h),\varphi\rangle_{\mathcal{T}} + \langle [u-u_h], T_{-k}\varphi\rangle_\gamma \\ &= \langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(u-u_h), \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,\varphi\rangle_{\mathcal{T}} - k^2\langle V_k(u-u_h),\varphi\rangle_{\mathcal{T}} + \langle [u-u_h], T_{-k}\varphi\rangle_\gamma - A(u-u_h,\varphi_h) \\ &= \langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(u-u_h), \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(\varphi-\varphi_h)\rangle_{\mathcal{T}} - k^2\langle V_k(u-u_h),\varphi-\varphi_h\rangle_{\mathcal{T}} + \langle [u-u_h], T_{-k}(\varphi-\varphi_h)\rangle_\gamma \\ &+ \langle T_k(u-u_h),[\varphi-\varphi_h]\rangle_\gamma + \nu\langle [u-u_h],[\varphi-\varphi_h]\rangle_\gamma. \end{aligned}$$

Observemos que del Lema 3.7 con $v = u-u_h$, se satisfacen las estimaciones

$$\begin{aligned} |\langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(u-u_h), \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(\varphi-\varphi_h)\rangle_{\mathcal{T}}| &\lesssim \varepsilon^{-1}h^{1/2-2\varepsilon}\|u-u_h\|_{\tilde{H}^{1/2-\varepsilon}(\mathcal{T})}\|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})} \\ &\lesssim \varepsilon^{-1}h^{1/2-2\varepsilon}\|u-u_h\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle V_k(u-u_h),\varphi-\varphi_h\rangle_{\mathcal{T}}| &\lesssim h^{1/2-2\varepsilon}\|u-u_h\|_{\tilde{H}^{-1}(\mathcal{T})}\|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})} \\ &\lesssim h^{1/2-2\varepsilon}\|u-u_h\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}. \end{aligned}$$

$$|\langle [u-u_h], T_{-k}(\varphi-\varphi_h)\rangle_\gamma| \lesssim \varepsilon^{-2}h^{1/2-2\varepsilon}\|u-u_h\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}.$$

Con ideas similares a la prueba de la parte **iii)** en el Lema 3.7 puede desmostrarse que

$$|\langle T_k(u-u_h),[\varphi-\varphi_h]\rangle_\gamma| \lesssim \varepsilon^{-2}h^{1/2-2\varepsilon}\|u-u_h\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}$$

y

$$|\langle [u-u_h],[\varphi-\varphi_h]\rangle_\gamma| \lesssim \varepsilon^{-1}h^{1/2-2\varepsilon}\|u-u_h\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})}.$$

Luego usando las estimaciones previas, la desigualdad triangular y la estimación $\|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\mathcal{T})} \cong \|\varphi\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \lesssim \|\varphi\|_{\tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)}$ llegamos a

$$\sup_{\varphi\in\tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \frac{|\langle \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}(u-u_h), \boldsymbol{V_{-k}}\,\mathbf{curl}_\Gamma\,\varphi\rangle_{\mathcal{T}} - k^2\langle u-u_h, V_{-k}\varphi\rangle_{\mathcal{T}} + \langle [u-u_h], T_{-k}\varphi\rangle_\gamma|}{\|\varphi\|_{\tilde{H}^{1-\varepsilon}(\Gamma)}}$$

$$\lesssim h^{1/2-2\varepsilon}\nu\varepsilon^{-2}\|u-u_h\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})},$$

lo cual concluye la demostración. □

3.5. Desigualdad de Gårding

A continuación mostraremos la desigualdad de Gårding, la cual aparece frecuentemente en problemas no elípticos, más específicamente en formas bilineales (o sesquilineales) que se escriben como formas elípticas con perturbaciones compactas. En nuestro caso particular estableceremos un tipo de desigualdad de Gårding, únicamente para funciones que están en el espacio discreto X_h, para nuestros intereses esto será suficiente. La desigualdad de Gårding será una herramienta fundamental para la existencia, unicidad y convergencia de la solución del problema discreto (3.6).
Antes de demostrar la desigualdad de Gårding recordamos lo visto en el capítulo anterior. El operador capa simple $\boldsymbol{V_k} : \tilde{\boldsymbol{H}}_t^{-1/2}(\Gamma) \to \boldsymbol{H}_t^{1/2}(\Gamma)$ es coercivo, puesto que existe un operador compacto $\mathcal{C} : \tilde{\boldsymbol{H}}_t^{-1/2}(\Gamma) \to \boldsymbol{H}_t^{1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\langle \boldsymbol{V_k} w, w\rangle_\Gamma + \langle \mathcal{C} w, w\rangle_\Gamma \gtrsim c_1 \|w\|^2_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall w \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma).$$

Aquí $\mathcal{C} = \boldsymbol{V_0} - \boldsymbol{V_k}$, donde $\boldsymbol{V_0}$ es el operador capa simple asociado al Laplaciano tal como se definió en el capítulo anterior.

Lema 3.8. *Consideremos la forma sesquilineal* (3.4) *y sea* $\varepsilon \in (0, 1/16)$. *Entonces para* h *suficientemente pequeño,* $\nu \gtrsim h^{-4\varepsilon}$ *existe una constante* $c > 0$ *independiente de* h, ν *y* ε *tal que se verifica*

$$|A(v, v)| \gtrsim h^{2\varepsilon} \|v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} - c\varepsilon^{-1} h^{-1/2} \|v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})} \quad \forall v \in X_h. \tag{3.27}$$

Demostración. De las observaciones previas podemos notar que

$$\langle \boldsymbol{V_k}\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\rangle_\Gamma \;=\; \langle \boldsymbol{V_0}\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\rangle_\Gamma - \langle \mathcal{C}\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\rangle_\Gamma.$$

Por la elipticidad de $\boldsymbol{V_0}$ y (2.5) se cumple que

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{V_0}\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\rangle_\Gamma &\gtrsim \|\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\|^2_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \gtrsim \sum_{i=1}^{2} \|\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma_i)} \\ &\gtrsim \sum_{i=1}^{2} |v|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)} = |v|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Por otro lado en [4] podemos ver que el operador $\mathcal{C}$ satisface que

$$\left|\langle \mathcal{C} u, v\rangle_\Gamma\right| \le \|u\|_{\tilde{H}^{-1}(\Gamma)} \|v\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall u, v \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma).$$

Utilizando lo anterior y la estimación (3.8) obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\langle \mathcal{C}\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\rangle_\Gamma\right| &\le \|\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\|_{\tilde{H}^{-1}(\Gamma)} \|\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim \epsilon^{-1} \|\, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\, v\|_{\tilde{H}^{-1}(\Gamma)} \|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}.\end{aligned}$$

De la continuidad de $\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}$ (Lema 2.4) nos da que

$$\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v\|_{\tilde{H}^{-1}(\Gamma)} \lesssim \left(\sum_{i=1}^{2}\|\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v\|^2_{\tilde{H}^{-1}(\Gamma_i)}\right)^{1/2} \lesssim \left(\sum_{i=1}^{2}\|v\|^2_{L^2(\Gamma_i)}\right)^{1/2} = \|v\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|v\|_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})}.$$

Por la propiedad inversa tenemos

$$\|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \lesssim h^{-1/2}\|v\|_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})} \quad \forall v \in X_h.$$

Por tanto

$$\left|\langle \mathcal{C}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v\rangle_{\Gamma}\right| \lesssim \varepsilon^{-1}h^{-1/2}\|v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})}. \tag{3.29}$$

Ahora usando la continuidad de V_k obtenemos

$$|\langle V_k v, v\rangle_{\Gamma}| \lesssim \|V_k v\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\|v\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \|v\|^2_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \|v\|^2_{H^{\varepsilon}(\Gamma)} \lesssim \|v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})}. \tag{3.30}$$

De forma análoga a [1, Lemma 4.4] y utilizando el Lema 2.7 con $s = 1/2+\varepsilon$ y la desigualdad de Young se tiene

$$\begin{aligned}
|\langle T_k v, [v]\rangle_{\gamma}| &\lesssim \delta\|T_k v\|^2_{L^2(\gamma)} + \delta^{-1}\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)} \\
&\lesssim \frac{\delta}{\varepsilon^3}\sum_{i=1}^{2}|v|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} + \delta^{-1}\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)} \\
&= \frac{\delta}{\varepsilon^3}|v|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} + \delta^{-1}\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)} \quad \forall \delta > 0,
\end{aligned}$$

y por la propiedad inversa

$$|\langle T_k v, [v]\rangle_{\gamma}| \lesssim \delta\frac{h^{-2\varepsilon}}{\varepsilon^3}|v|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + \delta^{-1}\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)} \quad \forall \delta > 0. \tag{3.31}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
|A(v,v)| &= \left|\langle \boldsymbol{V_k}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v\rangle_{\Gamma} - k^2\langle V_k v, v\rangle_{\Gamma} + \langle T_k v, [v]\rangle_{\gamma} + \langle [v], T_{-k}v\rangle_{\gamma} + \nu\langle [v],[v]\rangle_{\gamma}\right| \\
&\gtrsim \langle V_0\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v\rangle_{\Gamma} + \nu\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)} - 2|\langle T_k v, [v]\rangle_{\gamma}| \\
&- \left|\langle \mathcal{C}\,\mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v, \mathbf{curl}_{\mathcal{T}}\,v\rangle_{\Gamma} + k^2\langle V_k v, v\rangle_{\Gamma}\right|.
\end{aligned}$$

Usando(3.28)-(3.31) concluimos que

$$|A(v,v)| \gtrsim \left(1 - c_1\delta\frac{h^{-2\varepsilon}}{\varepsilon^3}\right)|v|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + (\nu - c_2\delta^{-1})\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)} - c_3(k^2 + \varepsilon^{-1}h^{-1/2})\|v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})},$$

con constantes desconocidas $c_1, c_2, c_3 > 0$.
Luego escogiendo $\delta = h^{3\varepsilon}$ y para h suficientemente pequeño, necesitamos que

$$\nu - c_2 h^{-3\varepsilon} \gtrsim \nu,$$

para ello es suficiente con tomar $\nu \gtrsim h^{-4\varepsilon}$.
Así para h suficientemente pequeño se obtiene

$$|A(v,v)| \gtrsim |v|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + \nu\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)} - c_3(k^2 + \varepsilon^{-1}h^{-1/2})\|v\|^2_{H^\varepsilon(\mathcal{T})}.$$

Puesto que $k^2 + \varepsilon^{-1}h^{-1/2} \leq \varepsilon^{-1}k^2 + \varepsilon^{-1}h^{-1/2} \lesssim \varepsilon^{-1}h^{-1/2}$, llegamos a

$$|A(v,v)| \gtrsim |v|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + \nu\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)} - c_3\varepsilon^{-1}h^{-1/2}\|v\|^2_{H^\varepsilon(\mathcal{T})}.$$

Por otra parte utilizando el Lema 3.3 con $s = 1/2 + \varepsilon$ obtenemos la estimación

$$\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \lesssim \sum_{i=1}^{2} |v|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\Gamma_i)} + \nu\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)},$$

y por la propiedad inversa tenemos

$$\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \lesssim h^{-2\varepsilon}\sum_{i=1}^{2} |v|^2_{H^{1/2}(\Gamma_i)} + \nu\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)} \lesssim h^{-2\varepsilon}\|v\|^2_{H^{1/2}_\nu(\mathcal{T})}.$$

Utilizando la estimación anterior concluimos que

$$\begin{aligned} |v|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + \nu\|[v]\|^2_{L^2(\gamma)} &= \|v\|^2_{H^{1/2}_\nu(\mathcal{T})} \\ &\gtrsim |v|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + h^{2\varepsilon}\|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \\ &\gtrsim \text{mín}\{1, h^{2\varepsilon}\}\|v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}. \end{aligned}$$

Lo cual finaliza la demostración. □

3.6. Resultados principales

A continuación demostraremos la unicidad del problema (3.6), la cual se expresa en el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sean h suficientemente pequeño, $\nu \gtrsim h^{-4\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0, 1/16)$. Entonces el problema (3.6) tiene una única solución $u_h \in X_h$.*

Demostración. Sea $u = 0$ la solución del problema homogéneo asociado a (3.1) y sea u_h la solución del problema homogéneo discreto. Necesitamos demostrar que $u_h = 0$. Para esto consideremos $e = u - u_h = -u_h$, entonces $e \in X_h$.
Por la desigualdad de Gårding (Lema 3.8) y la ortogonalidad de Galerkin (Lema 3.1) tenemos

$$0 = |A(e, u_h)| = |A(e,e)| \gtrsim h^{2\varepsilon}\|e\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} - c\varepsilon^{-1}h^{-1/2}\|e\|^2_{H^\varepsilon(\mathcal{T})}. \tag{3.32}$$

Por otra parte utilizando el Teorema 3.2 y la propiedad inversa se tiene

$$\|e\|_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})} \lesssim \varepsilon^{-2}\nu h^{1/2-2\varepsilon}\|e\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \lesssim \varepsilon^{-2}\nu h^{1/2-3\varepsilon}\|e\|_{H^{1/2}(\mathcal{T})}.$$

Usando la última desigualdad en (3.32) obtenemos:

$$\|e\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}(h^{2\varepsilon} - c\varepsilon^{-5}\nu^2 h^{1/2-6\varepsilon}) \lesssim h^{2\varepsilon}\|e\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} - c\varepsilon^{-1}h^{-1/2}\|e\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})} \lesssim 0.$$

Puesto $h^{2\varepsilon} - c\varepsilon^{-5}\nu^2 h^{1/2-6\varepsilon} > 0$ para h suficientemente pequeño, concluimos que

$$\|e\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} = 0.$$

Por tanto $u_h = 0$. □

El siguiente teorema es el resultado principal del método de Nitsche basado en el método de elementos de frontera.

Teorema 3.4. *Sean $\alpha > 0$ y $u \in H^r(\Gamma)$ con $r \in (1/2 + \alpha, 1)$ la solución de* (3.1)*. Sea $\nu \gtrsim h^{-4\varepsilon}$, entonces para h suficientemente pequeño el problema* (3.6) *tiene una única solución y existe una constante $C > 0$ dependiendo de r y α, pero no de h y de u, tal que*

$$\|u - u_h\|_{H^{1/2}(\mathcal{T})} \leq C\nu^2 h^{r-1/2-\alpha}\|u\|_{H^r(\Gamma)}. \tag{3.33}$$

Demostración. La demostración de la unicidad se estableció en el Teorema 3.3, sólo resta demostrar la estimación del error.
En todo lo que sigue $\lesssim$ incluirá una constante que puede depender de ε y de r.
Consideremos las siguientes observaciones:

i) Por la desigualdad triangular y la propiedad inversa se cumple que para todo $v \in X_h$

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} &\leq 2\|u - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} + 2\|u_h - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} \\
&\leq 2\|u - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} + 2h^{-2\varepsilon}\|u_h - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} \\
&\leq 2\|u - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} + 4h^{-2\varepsilon}\|u - u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + 4h^{-2\varepsilon}\|u - v\|_{H^{1/2}(\mathcal{T})}.
\end{aligned}$$

ii) Por una aproximación estándar se tiene que para $0 \leq s < r < 1$ existe $v \in X_h$ tal que

$$\|u - v\|_{H^s(\mathcal{T})} \lesssim h^{r-s}\|u\|_{H^r(\Gamma)} \quad \text{(ver [19])}.$$

iii) De la desigualdad de Gårding (Lema 3.8) y usando la consistencia (Lema 3.5) tenemos

$$\begin{aligned}
\|u_h - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} &\lesssim h^{-2\varepsilon}|A(u_h - v, u_h - v)| + h^{-1/2-2\varepsilon}\|u_h - v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})} \\
&= h^{-2\varepsilon}|A(u - v, u_h - v)| + h^{-1/2-2\varepsilon}\|u_h - v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})}.
\end{aligned}$$

Luego de la continuidad de la forma sesquilineal (Lema 3.1) obtenemos

$$\|u_h - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} \lesssim \nu h^{-2\varepsilon}\|u - v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\|u_h - v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} + h^{-2\varepsilon-1/2}\|u_h - v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})}.$$

Usando la desigualdad de Young en el primer término y la desigualdad del triángulo en el segundo término se tiene que

$$\begin{aligned}\|u_h - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} &\lesssim \nu h^{-2\varepsilon}\delta^{-1}\|u - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} + \nu h^{-2\varepsilon}\delta\|u_h - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\\ &+ h^{-2\varepsilon-1/2}\|u - u_h\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})} + h^{-2\varepsilon-1/2}\|u - v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})} \quad \forall\delta > 0.\end{aligned}$$

Ahora aplicando la propiedad inversa y la desigualdad triangular al segundo término del lado derecho y el Teorema 3.2 al tercer término concluimos que

$$\begin{aligned}\|u_h - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} &\lesssim \nu h^{-2\varepsilon}\delta^{-1}\|u - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\\ &+ \nu h^{-4\varepsilon}\delta\left(\|u - u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + \|u - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}\right)\\ &+ \nu^2 h^{1/2-6\varepsilon}\|u - u_h\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} + h^{-2\varepsilon-1/2}\|u - v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})}.\end{aligned}$$

Usando **i)** en el cuarto término del lado derecho nos da

$$\begin{aligned}\|u_h - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} &\lesssim \nu h^{-2\varepsilon}\delta^{-1}\|u - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} + \nu h^{-4\varepsilon}\delta\|u - u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}\\ &+ \nu h^{-4\varepsilon}\delta\|u - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + \nu^2 h^{1/2-6\varepsilon}\|u - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\\ &+ \nu^2 h^{1/2-8\varepsilon}\|u - u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + \nu^2 h^{1/2-8\varepsilon}\|u - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}\\ &+ h^{-2\varepsilon-1/2}\|u - v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})}.\end{aligned}$$

Ahora necesitamos estimar $\|u - u_h\|_{H^{1/2}(\mathcal{T})}$. Para este fin observemos que

$$\|u - u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} \leq 2\|u - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + 2\|u_h - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}.$$

De **iii)** concluimos que

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} &\lesssim \|u - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + \nu h^{-2\varepsilon}\delta^{-1}\|u - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} + \nu h^{-4\varepsilon}\delta\|u - u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}\\ &+ \nu h^{-4\varepsilon}\delta\|u - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + \nu^2 h^{1/2-6\varepsilon}\|u - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\\ &+ \nu^2 h^{1/2-8\varepsilon}\|u - u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + \nu^2 h^{1/2-8\varepsilon}\|u - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}\\ &+ h^{-2\varepsilon-1/2}\|u - v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})}.\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}\left(1 - \nu h^{-4\varepsilon}\delta - \nu^2 h^{1/2-8\varepsilon}\right)\|u - u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} &\lesssim \|u - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + \nu h^{-2\varepsilon}\delta^{-1}\|u - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\\ &+ \nu h^{-4\varepsilon}\delta\|u - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}\\ &+ \nu^2 h^{1/2-6\varepsilon}\|u - v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\\ &+ \nu^2 h^{1/2-8\varepsilon}\|u - v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}\\ &+ h^{-2\varepsilon-1/2}\|u - v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})}.\end{aligned}$$

Podemos elegir $\delta = \dfrac{1}{2}\nu^{-1}h^{4\varepsilon}$ para obtener

$$\begin{aligned}\left(1/2 - \nu^2 h^{1/2-8\varepsilon}\right)\|u-u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} &\lesssim \frac{3}{2}\|u-v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} + 2\nu^2 h^{-6\varepsilon}\|u-v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})}\\ &+ \nu^2 h^{1/2-6\varepsilon}\|u-v\|^2_{H^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T})} + \nu^2 h^{1/2-8\varepsilon}\|u-v\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})}\\ &+ h^{-2\varepsilon-1/2}\|u-v\|^2_{H^{\varepsilon}(\mathcal{T})},\end{aligned}$$

y aplicando **ii)** con $s = 1/2+\varepsilon, s = 1/2, s = \varepsilon$ concluimos que

$$\begin{aligned}\left(1/2 - \nu^2 h^{1/2-8\varepsilon}\right)\|u-u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} &\lesssim (\frac{3}{2}h^{2r-1} + 2\nu^2 h^{2r-8\varepsilon-1} + 2\nu^2 h^{2r-8\varepsilon-1/2}\\ &+ h^{2r-4\varepsilon-1/2})\|u\|^2_{H^r(\Gamma)}.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\left(1/2 - \nu^2 h^{1/2-8\varepsilon}\right)\|u-u_h\|^2_{H^{1/2}(\mathcal{T})} \lesssim (\frac{3}{2}h^{8\varepsilon} + 2 + 2h^{1/2} + h^{1/2+4\varepsilon})h^{2r-8\varepsilon-1}\nu^2\|u\|^2_{H^r(\Gamma)}.$$

Observemos que para h suficientemente pequeño existen constantes $K_1, M_1 > 0$ tal que

$$\frac{3}{2}h^{8\varepsilon} + 2 + 2h^{1/2} + h^{1/2+4\varepsilon} < M_1 \quad \text{and} \quad 1/2 - \nu^2 h^{1/2-8\varepsilon} > K_1.$$

Luego podemos definir $\alpha := 4\varepsilon$, lo cual finaliza la demostración. $\square$

Bibliografía

[1] F. Chouly and N. Heuer, *A Nitsche-based domain decomposition method for hypersingular integral equations*, Numerische Mathematik, 121 (2012), pp. 705-729.

[2] G. N. Gatica, M. Healey, AND N. Heuer, *The boundary element method with Lagragian multipliers*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 25 (2009), pp. 1303-1319.

[3] O. Steinbach, *Numerical Approximation Methods for a Elliptic Boundary Value Problems*, Springer Science+Business Media LLC, 2008.

[4] E.P. Stephan and T. Tran, *Domain descomposition algorithms for indefinite weakly singular intgral equations: the h and p versions*, IMA Journal of Numerical Analysis 20 (2000), pp. 1-24.

[5] E.P. Stephan, *Boundary integral equations for screen problems in* $\mathbb{R}^3$. Integral Equations Operator Theory, 10 (1987), pp. 257-263.

[6] S. Sauter and C. Schwab, *Boundary Elements Methods*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2011.

[7] J. Nitsche, *Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 36 (1971), pp. 9-15.

[8] J.C. Nédélec, *Integral equations with nonintegrable kernels*, Integral Equations Operator Theory, 5 (1982), pp. 562,572.

[9] M. Costabel, *Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 19 (1988), pp. 613-626.

[10] J.L. Lions and E. Magenes, *Non-homogeneous boundary value problems and applications*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1972.

[11] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman Advanced Pub. Program, Boston, 1985.

[12] N. Heuer, *Additive Schwarz method for the p-version of the boundary element method for the single layer potential operator on a plane screen*, Numerische Mathematik, 88 (2001), pp. 485-511.

[13] R. Becker, P. Hansbo, and R. Stenberg, *A finite element method for domain decomposition with non-matching grids*, M2AN Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 37 (2003), pp. 209-225.

[14] M. Healey and N. Heuer, *Mortar boundary elements*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 48 (2010), pp. 1395-1418.

[15] N. Heuer, *On the equivalence of fractional-order Sobolev semi-norms* J. Math. Anal. Appl. 417 (2), 505-518, 2014.

[16] S.C. Brenner and L.R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* Springer Science+Business Media LLC, 2008.

[17] H. Holm, M. Maischak, and E.P Stephan, *The hp-version of the Boundary Element Method for Helmholtz Screen Problems*, Computing 57 (1996), pp. 105-134.

[18] H.L. Royden and P.M. Fitzpatrick, *Real Analysis,* Fourth Edition, Prentice Hall, 2010.

[19] J.H. Bramble and L.R. Scott, *Simultaneous approximation in scales of Banach spaces.* Math. Comp. 32 (1978) 947-954.

[20] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen, *On traces for $H(curl, \Omega)$ in Lipschitz domains*, J. Math. Anal. Appl., 276 (2002), pp. 845-867.

[21] B. Dacarogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1989.