TIEMPOS DE REGENERACIÓN PARA ALGUNOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS UNIDIMENSIONALES

GREGORIO ROLANDO MORENO FLORES

RESUMEN. En el estudio asintótico de algunas marchas aleatorias en tiempo aleatorio, ha sido útil introducir una estructura de renovación. Estas técnicas han permitido, por ejemplo, probar la ley de los números grandes para marchas aleatorias en medio aleatorio bajo cierta condición de transciencia, en dimensiones arbitrarias. El punto de partida es la definición adecuada de un tiempo de regeneración, que, en general, no es un tiempo de parada, con respecto al cual se prueba una suerte de propiedad de Markov. En [9], se define previamente una sucesión de tiempos de parada $(S_k)_{k\geq 0}$, de modo que el tiempo de regeneración coincide trayectorialmente con el primer instante S_k de modo que $S_{k+1} = \infty$. Estas técnicas han sido aplicadas a ciertos sistemas de partículas en interacción que corresponden a modelos de crecimiento en una dimensión ([2]).

En este trabajo, volvemos a unas ideas presentes en trabajos anteriores de marchas aleatorias en medio aleatorio (ver [5]), en los cuales se define directamente un tiempo de regeneración. Este enfoque permite probar el análogo de la propiedad de Markov mediante una definición directa del tiempo de regeneración, logrando una prueba más sencilla e intuitiva, dependiendo del modelo estudiado.

El ejemplo central al cual se aplicarán estas técnicas es el proceso de combustión asimétrico: estudiamos un sistema de partículas en interacción sobre $\mathbb{Z}$, dependiente de dos parámetros $1 \leq a \leq M$, en el que las partículas recorren marchas aleatorias simples, independiente y asimétricas con tendencia a saltar a la derecha. Cuando una partícula decide saltar a un sitio ocupado por M partículas, muere. Cuando una partícula salta a un sitio que no ha sido visitado con anterioridad, se crean $a-1$ nuevas partículas en ese sitio, las cuales empiezan a moverse similarmente a las partículas antiguas. Consideramos condiciones iniciales para las cuales existe un sitio r tal que todos los sitios a su izquierda ya han sido visitados previamente. Suponemos que, inicialmente, ningún sitio a la derecha de r ha sido visitado. Llamamos r_t al sitio visitado más a la derecha en el instante t. Se prueba la ley de los números grandes y un teorema del límite central funcional para r_t. Las técnicas de estructuras de renovación ya habían sido utilizadas en [2] en el estudio del caso simétrico.

Se agradece,

Primordialmente, a mis padres, por la paciencia y las noches de desvelo por mi culpa (aunque siempre, lo confieso, fue por no creer en mí). Espero no haberlos defraudado.

A Michele, *Che Pykasumi*, por estos años de vida juntos, por darme ese pequeño desastre de canela y entregarme más amor del que sospechaba que podía existir.

A Alejandro Ramírez, a quien debo (casi) la totalidad de mi formación y la dicha de haberme encontrado con las matemáticas.

A Rolando Rebolledo, por sus enseñanzas y su ejemplo. También por toda su ayuda y por la gentileza de revisar cuidadosamente esta tesis.

Al padrino visigodo, José Ramón Zubizarreta, y señora. Por tus sabios consejos, no puedo más que decir que siempre tuviste la razón. Pero, dice un célebre cantoautor, *Si lo que quieres es vivir cien años, vacúnate contra el azar*. Y esa vacuna, Chaval, no la quiero por ningún motivo.

A Víctor, por nuestras canciones.

A los cirujanos que nos devolvieron a Serrat, vivito y conexo (informalmente, en un pedazo). A Serrat, por todas aquellas pequeñas cosas. A Sabina, por ser tan hijo de madre. Al Nica y a mi incomparable Juan Emar. También a Bob Dylan y Velvet Underground, quienes acompañaron mis viajes en metro, durante la última fase de redacción de esta tesis.

A la oficina 35 y allegados. Esto es: Juanito, Claudio (gracias por el soporte técnico en LaTex y por el deporte), a la oficina 29, la 30, Olivier, Jean, mis ayudantados, la señora Tina, don Oscar, los ingenieros matemáticos, en especial Tomás y Miguel, Daniela Vásquez, los amigos de física, el cartel, el CAM y muchos más.

A Martha, por la compañía incondicional, por el café, la salsa, los grupos y la amistad.

El autor de estas líneas le debe mucho a las frías mañanas de la facultad, al moscatel, Alicia, Javier Krahe, a los pingüinos, a Enrique Lihn, Rodrigo Lira, Jaime Sabines, Janis Joplin, al argumento de Frattini, la cafeina, Ronaldinho Gaúcho, la Rana, Brassens, el teorema de Stone-Weierstrass, Woody Allen, al subcomandante Marcos, Emir Kusturica y ChavelaVargas, y a todos quienes, de alguna manera, contribuyeron a formar este manojo de sueños que envejece con el pasar de las horas, y a pesar de todo.

Índice

1. Introducción

Sea $(X_n)_n$ una cadena de Markov y T un tiempo de parada tal que, $X_T = y$ c.s. sobre el evento $\{T < \infty\}$. Luego, $P_x[X_{T+\cdot} \in A | T < \infty] = P_y[X_\cdot \in A]$. A tal tiempo de parada se le denomina *tiempo de renovación*, pues, a partir de T, el proceso evoluciona sin memoria del pasado, de acuerdo a la ley P_y (véase [11], p. 90). La literatura probabilística anglosajona dispone de un término adecuado para describir esta situación: en [11], el autor escribe *the process starts afresh (...)*, para referirse al comportamiento del proceso a partir del tiempo de renovación.

Consideremos la siguiente generalización del caso anterior: sea $(X_t, \mathcal{F}_t)_t$ un proceso (no necesariamente markoviano) y T un tiempo aleatorio (no necesariamente de parada). Podemos asociar a T una tribu, definiendo $\mathcal{F}_T$ como la tribu generada por los eventos $\{T \leq t\} \cap B$, con $B \in \mathcal{F}_t$. Supongamos que el incremento $X_{T+\cdot} - X_T$ es independiente de la trayectoria antes de T y tiene la misma ley que el proceso reiniciado a partir de 0, condicionado con cierto evento $E_T \in \mathcal{F}_T$. En este caso, diremos que T es un *tiempo de regeneración*. Se cumple

$$P_x[X_{T+\cdot} - X_T \in A | \mathcal{F}_T] = P_0[X_\cdot \in A | E_T]. \tag{1}$$

Estos tiempos de regeneración abundan en el estudio de las marchas aleatorias en tiempo aleatorio y suelen ser utilizados del siguiente modo: sea D un tiempo de parada. Podemos pensar en D como una función de las trayectorias $D = D(X_\cdot)$. Supongamos que $\{T < \infty\} = \bigcup_n \{T = T_n\}$, donde $(T_n)_n$ es una sucesión creciente de tiempos de parada. Supongamos además que $\{T = T_n\} = E_n \cap \{D_n = \infty\}$, con $D_n = D \circ \theta_{T_n} := D(X_{T_n+\cdot})$ y E_n asegura que $D_m < \infty$, para cada $m < n$. Intuitivamente, T es el primer instante T_n tal que D_n no ocurre. En una situación razonable, podríamos esperar que se cumpla la siguiente propiedad:

$$P_x[X_{T+\cdot} - X_T \in A|\mathcal{F}_T] = P_0[X_\cdot \in A|D = \infty]. \tag{2}$$

Esta última propiedad permite definir una sucesión de tiempos de regeneración, definiendo $\tau_1 := T$ y $\tau_{n+1} := \tau_n(X_{T+\cdot})$. Así, dispondremos, en el mejor de los casos, de una sucesión de incrementos, $X_{t\wedge\tau_1}, X_{(\tau_1+\cdot)\wedge\tau_2} - X_{\tau_1}, ...,$ independientes y distribuidos según $P_0[\cdot|D = \infty]$, y de una sucesión (creciente) de tribus $(\mathcal{F}_{\tau_n})_n$. Esta sucesión $(\tau_n, \mathcal{F}_{\tau_n})_n$ se suele denominar *estructura de renovación.*

Esta construcción fue utilizada para probar la ley de los números grandes para marchas aleatorias en medio aleatorio ([9]) y, posteriormente, en el estudio de un proceso de combustión ([2]). En esta tesis, estudiaremos una variación del modelo estudiado en [2]. Sin embargo, seguiremos un enfoque distinto, similar a algunos trabajos previos de marchas aleatorias en medio aleatorio, que conducen a una prueba más directa de las propiedades mencionadas en los párrafos anteriores ([5]). Pensamos que estas modificaciones, aplicadas al proceso de combustión, son el objeto central de esta tesis. Serán ilustradas primero para marchas aleatorias pues se trata de un proceso más conocido y más fácil de definir. Enseguida, se aplicarán con toda su fuerza al proceso de combustión.

El proceso de combustión.

Estudiaremos un proceso estocástico que describe el comportamiento de partículas que se mueven sobre $\mathbb{Z}$ de acuerdo a la siguiente dinámica, que depende de dos parámetros, $1 \le a \le M$: Las partículas recorren marchas aleatorias a primeros vecinos sobre $\mathbb{Z}$, asimétricas, con probabilidad $p > 1/2$ de saltar a la derecha y probabilidad $q = 1 - p$ de saltar a la izquierda. Cuando una de ellas decide saltar a un sitio ocupado por M partículas, muere. Cuando alguna marcha salta a un sitio que no ha sido visitado con anterioridad, se despiertan $a - 1$ partículas en ese sitio, las cuales empiezan a moverse de manera similar a las partículas antiguas. Consideraremos sólo condiciones iniciales para las cuales existe un sitio r tal que todos los sitios a su izquierda han sido visitados previamente. Supondremos además que ningún sitio a la derecha de r ha sido visitado inicialmente. Estamos particularmente interesados en el comportamiento del frente r_t, esto es, el sitio visitado más a la derecha en tiempo t.

El espacio de estado de este proceso es

$$\Omega := \{(r, \eta) : r \in \mathbb{Z}, \eta \in \{0, ..., M\}^{\{...,r-1,r\}}\},$$

donde $\eta(x)$ se interpreta como el número de partículas por sitio. El generador infinitesimal del proceso es

$$\begin{aligned} Lf(r,\eta) = \ & \textstyle\sum_{x\le r, y \le r, |x-y|=1} P(x-y)\eta(x)(f(r, T_{xy}\eta) - f(r,\eta)) \\ & + \eta(r)P(1)(f(r+1, \eta - \delta_r + a\delta_{r+1}) - f(r,\eta)), \end{aligned}$$

donde $P(1) = p$, $P(-1) = q$, δ_x es la configuración con una partícula en x, y

$$T_{xy}\eta = \eta - \delta_x + \delta_y \mathbf{1}(\eta(y) < M).$$

Se probará la ley de los números grandes y el teorema del límite central funcional para el frente r_t, para cualquier valor $0 < p - q < 1$. Estos resultados se enuncian en forma precisa en el Teorema 1:

Teorema 1. *Considere el proceso con condición inicial $r = 0$, $\eta(0,0) \in \{1, ..., M\}$, $0 < p - q < 1$.*

(i)(Ley de los números grandes) Existe un $v \in (0, \infty)$, determinista, independiente de la condición inicial $\{\eta(x,0) : x \leq 0\}$ tal que, casi seguramente,

$$\lim_{t\to\infty} r_t/t = v.$$

Además, $v > p - q$.

(ii) (Teorema del límite central) Existe $\sigma \in (0, \infty)$, determinista, independiente de la condición inicial $\{\eta(x,0) : x \leq 0\}$ tal que

$$\epsilon^{1/2}(r_{\epsilon^{-1}t} - \epsilon^{-1}vt), \qquad t \geq 0,$$

converge en ley a un movimiento Browniano con varianza σ^2, cuando $\epsilon \to 0$.

Las pruebas que se dan aquí se inspiran en [2], donde se estudia el caso 'simétrico' $p = q$. Este último trabajo se inspira a su vez en [9], donde, tal como lo mencionábamos, se introduce una estructura de renovación para estudiar el comportamiento asintótico de algunas marchas aleatorias en medio aleatorio.

El caso de las marchas aleatorias en medio aleatorio.

En [4], el autor introduce condiciones bajo las cuales $l(X_n) \to \infty$, donde $(X_n)_n$ es una marcha aleatoria en medio aleatorio sobre un grupo abeliano C y $l : C \to \mathbb{R}$ satisface $l(x+y) = l(x) + l(y)$. La condición $l(X_n) \to \infty$ implica que para una cantidad infinita de valores $M > 0$, existe un primer instante N tal que $l(X_k) > N$ para todo $k \geq N$. Esta sencilla observación motiva la siguiente construcción: considere $C = \mathbb{Z}^d$ y $l(X_n) = l \cdot X_n$, donde $l \in \mathbb{Z}$ es un vector fijo. Podemos definir un concepto de transiencia en la dirección l mediante la condición $l \cdot X_n \to \infty$, c.s.. Definimos $Y_n := \sup_{0\leq k\leq n} l \cdot X_k$ y consideramos el primer instante $\mathcal{N}$ en que $Y_{\mathcal{N}} > Y_{\mathcal{N}-1}$ y $X_k \geq Y_{\mathcal{N}}$, para todo $k \geq \mathcal{N}$. Como el medio para sitios x con $l \cdot x \leq L$ es independiente del medio en sitios $l \cdot x > L$, para todo L, es razonable pensar que, $X_{\mathcal{N}+\cdot} - X_{\mathcal{N}}$ es independiente de $(X_n)_{n=0}^{\mathcal{N}}$, y corresponde a una marcha condicionada a no tocar la región $\{l \cdot x < 0\}$. Esta es la idea fundamental detrás de la estructura de renovación para marchas aleatorias en medio aleatorio.

El paso fundamental en la construcción de esta estructura es definir en forma adecuada un *tiempo de regeneración.* En [9], este tiempo de regeneración, denotado por τ, corresponde grosso modo al $\mathcal{N}$ definido más arriba. Observe que este tiempo no es un tiempo de parada con respecto a la filtración natural de la marcha aleatoria en medio aleatorio. Para definir el resto de la estructura de renovación, es crucial probar una suerte de propiedad de Markov con respecto a τ, como la que se menciona en (2) (véase la proposición 1,3 de [9]). Enseguida, escribiendo $\tau_1 := \tau$, los autores definen inductivamente τ_{n+1} como el primer instante en que τ_n ocurre, después de τ.

En [9], la definición exacta de τ requiere además de dos sucesiones de tiempos de parada, S_k y D_k, que indican respectivamente el primer instante en que la marcha cruza un cierto hiperplano y el primer instante en que vuelve a cruzarlo en la dirección contraria. Se define luego un índice (aleatorio) K que corresponde al menor valor de k de modo que $S_k < \infty$ y $D_k = \infty$. Finalmente, $\tau := S_K$. Esta forma de definir τ se utiliza explícitamente en la prueba de la *propiedad de Markov* con respecto a τ.

Las técnicas de estructura de renovación son una piedra angular en el estudio de las marchas aleatorias en medio aleatorio y han sido adaptadas en [2] al proceso de combustión. La dificultad adicional reside en la definición del tiempo de regeneración (aquí κ) y, luego, en la estimación de sus dos primero momentos.

Como en esta tesis se intenta mejorar la prueba de la propiedad de Markov con respecto al tiempo de regeneración para el proceso de combustión, es, por lo tanto, natural empezar revisando la prueba en el caso de una marcha aleatoria. Siguiendo ideas de Kesten ([5]), definimos directamente el tiempo de regeneración como el primer instante en que la marcha cruza algún hiperplano ortogonal a l y nunca vuelve a cruzarlo en dirección contraria.

El artículo [1] logra también una definición directa del tiempo de regeneración en el contexto de marchas aleatorias en medio aleatorio, donde el medio en cada sitio evoluciona de acuerdo a una cadena de Markov. Otro hecho interesante es que el tiempo de regeneración en ese caso es un tiempo de parada. Sin embargo, su naturaleza es distinta que en los casos que consideramos. El Lema 7 de [1] corresponde a la Proposición 1,3 de [9].

Tiempos de regeneración para el proceso de combustión

Buscamos un tiempo de regeneración con la siguiente característica. Debe correponder al primer instante t tal que el frente, en instantes subsiguientes, no es influenciado por las partículas que, en t, se encontraban a la izquierda de r_t. O sea, todas las partículas que se despiertan después de κ son despertadas por alguna de las partículas que nacieron en r_κ o alguna de sus descendientes. En [2], κ se define a través de sucesiones de tiempos de parada, similarmente a [9].

Aquí, introducimos un método alternativo. Mediante una construcción adecuada del proceso de combustión, logramos definir directamente el tiempo de regeneración κ. Este enfoque simplifica significativamente la prueba de las proposiciones análogas a aquellas de la sección 4 de [2], vale decir, esta suerte de propiedad de Markov y la independencia de los incrementos $\kappa_{n+1} - \kappa_n$ y $r_{\kappa_{n+1}} - r_{\kappa_n}$. Nuevamente, estas pruebas parecen ser más intuitivas que aquellas dadas en los trabajos anteriores.

Otras dinámicas para el proceso de combustión

Las técnicas que estudiamos en esta tesis parecen ser bastante robustas. Permiten, al menos, elegir otras dinámicas para las partículas, como por ejemplo las dinámicas de exclusión y de rango cero (con tasas de salto uniformemente acotadas).

Presentamos en el Apéndice I una construcción del proceso de combustión con dinámica de exclusión simple y definimos el tiempo de regeneración. Este modelo ya había sido estudiado en [7]. Ahí, se conjetura una ley de los números grandes para el frente, en un contexto un poco más general (se considera el caso en que las partículas de tipo B se mueven). Las estimaciones para este proceso no se incluyen en esta tesis.

Las técnicas de regeneración han sido utilizadas en [3] para tratar el caso de un proceso de combustión simétrico con $M = \infty$. No es claro que podamos aplicar nuestro método de manera sencilla en este caso.

Es posible que estas técnicas tengan aplicaciones en otros procesos o puedan formularse en términos más generales, aunque no hemos efectuado aún un análisis acabado de estas posibilidades.

En la sección 2, ilustramos estas técnicas en el contexto de marchas aleatorias asimétricas y marchas aleatorias en medio aleatorio. En la sección 3, construimos el proceso de combustión, definimos el tiempo de regeneración y probamos las proposiciones referentes a los incrementos. Las estimaciones necesarias para probar el Teorema 1 se realizan en la sección 4, mientras que la demostración del Teorema 1 propiamente tal se deja para la sección 5.

Como ya lo adelantábamos, en el Apéndice I, se procede a construir el proceso de combustión con dinámica de exclusión simple. En el Apéndice II, probamos un resultado técnico relacionado con el proceso de combustión.

2. Tiempos de regeneración para marchas aleatorias

En esta sección, ilustramos las técnicas que serán utilizadas posteriormente para estudiar el proceso de combustión. Empezaremos con una marcha aleatoria asimétrica sobre $\mathbb{Z}$ ya que el argumento es más transparente en este caso (tanto del punto de vista conceptual como notacional). Proseguiremos luego con una generalización directa para el caso de una marcha aleatoria en $\mathbb{Z}^d$, con medio aleatorio, bajo cierta condición de transciencia.

2.1. Marcha aleatoria simple asimétrica. Sea $(X_n)_n$ una marcha aleatoria asimétrica sobre $\mathbb{Z}$ con $X_0 = 0$, que salta a la derecha con probabilidad p y a la izquierda con probabilidad $q = 1 - p$, con $p > q > 0$.

Definimos el tiempo aleatorio,

$$\kappa := \min\{n \geq 0 : \min_{k \geq n} X_k > \max_{j<n} X_j\},$$

con la convención $\max_{j<0} X_j = -1$. Sea $\mathcal{F}_n := \sigma(X_j, j \leq n)$ la filtración natural de la marcha aleatoria y $\mathcal{G}$ la tribu generada por los eventos de la forma $\{\kappa = n\} \cap \{X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\}$ donde $n \geq 0$ y $x_1, ..., x_n \in \mathbb{Z}$. Denotamos por P la ley de la marcha $(X_n)_n$. Tenemos el siguiente resultado:

Lema 1. *Para todo $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,*

$$P[X_{\kappa+\cdot} - X_\kappa \in A|\mathcal{F}_\kappa] = P[X_\cdot \in A|\kappa = 0]. \tag{3}$$

Demostración. Empezamos notando que

$$\{\kappa = n\} = \{\inf_{m \geq n} X_m \geq X_n\} \cap \{\sup_{1 \leq p \leq n-1} X_p = X_n - 1\} \cap B_n,$$

donde

$$\begin{aligned} B_n \quad := \quad & \Big\{\forall k < n, \text{ existe } j \text{ tal que } k < j < n \text{ y } X_j < \max_{i \leq k} X_i \\ & \text{o existe } j \text{ tal que } 0 \leq j < k \text{ y } \max_{i \leq j} X_i = X_k\Big\}. \end{aligned}$$

Observamos que la condición $q > p$ asegura que $P[\kappa = n] > 0$. Definimos $C_n = \{\sup_{1 \leq p \leq n-1} X_p = X_n - 1\} \cap B_n$ y observamos que $C_n \in \mathcal{F}_n$. Luego,

$$\begin{aligned} & P\left[X_{\kappa+\cdot} - X_\kappa \in A|\kappa = n, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right] \\ = \quad & \frac{P\left[X_{\kappa+\cdot} - X_\kappa \in A, \inf_{m \geq n} X_m \geq X_n, C_n, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right]}{P\left[\inf_{m \geq n} X_m \geq X_n, C_n, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right]}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $C_n \in \mathcal{F}_n$, tenemos

$$\begin{aligned} & P\left[X_{\kappa+\cdot} - X_\kappa \in A, \inf_{m \geq n} X_m \geq X_n, C_n, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right] \\ = \quad & E\left[\mathbf{1}_{\{C_n, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}} P\left[X_{n+\cdot} - X_n \in A, \inf_{m \geq n} X_m \geq X_n \middle| \mathcal{F}_n\right]\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Considerando la propiedad de Markov y la invariancia por traslaciones para $\{X_n\}$, obtenemos

$$\begin{aligned} & P\left[X_{n+\cdot} - X_n \in A,\ \inf_{m\geq n} X_m \geq X_n \middle| \mathcal{F}_n\right] \\ = \ & P\left[X_{n+\cdot} - X_n \in A,\ \inf_{m\geq n} X_m \geq X_n \middle| X_n\right] \\ = \ & P[X_\cdot \in A,\ \inf_{m\geq 0} X_m \geq 0]. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta última expresión en (4), obtenemos,

$$\begin{aligned} & P\left[X_{\kappa+\cdot} - X_\kappa \in A|\kappa = n, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right] \\ = \ & P\left[C_n,\ X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right] P\left[X_\cdot \in A,\ \inf_{m\geq 0} X_m \geq 0\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Finalmente, tomando $A = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ en (5), se obtiene (3). □

2.2. Marcha aleatoria en medio aleatorio. Adaptaremos la prueba anterior al caso de una marcha aleatoria en medio aleatorio.

Para $d \geq 1$, consideramos un ambiente $\omega = \{\omega_x : x \in \mathbb{Z}^d\}$ en $\Omega := \mathcal{P}^{\mathbb{Z}^d}$, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de los vectores de $\mathbb{Z}^{2d}$, $\{v(e) : e \in \mathbb{Z}^d, |e| = 1\}$, con coordenadas no negativas que suman 1. Enseguida, definimos la marcha aleatoria en el ambiente ω como la cadena de Markov $(X_n)_n$ con estados en $\mathbb{Z}^d$ y ley $P_{x,\omega}$ dada por

$$P_{x,\omega}[X_{n+1} = X_n + e|X_0, ..., X_n] = \omega_{X_n}(e)$$

para $n \geq 0$, $e \in \mathbb{Z}^d$, $|e| = 1$, y

$$P_{x,\omega}[X_0 = x] = 1$$

También consideraremos la marcha aleatoria bajo una ley *promediada* P_x. Para esto, sea μ una medida de probabilidad sobre $\mathcal{P}$ y sea $\mathbb{P} := \mu^{\otimes\mathbb{Z}^d}$ la ley producto sobre Ω. Finalmente, la ley *promediada* se define como $P_x := \mathbb{P} \times P_{x,\omega}$.

Así, el medio queda representado por una familia de variable aleatorias $\{\omega(x, \cdot) : x \in \mathbb{Z}^d\}$, con distribución común μ.

Sea $l \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Definimos, análogamente a la sección anterior, el tiempo aleatorio

$$\kappa := \min\{n \geq 0 : \min_{k\geq n} l \cdot X_k > \max_{j<n} l \cdot X_j\},$$

con la convención $\max_{j<0} l \cdot X_j = -1$. Se define $\mathcal{G}$ como la tribu generada por los eventos de la forma $\{\kappa = n\} \cap \{X_\kappa = x\} \cap A$, con $A \in \sigma(X_k,\ k \leq n,\ \omega(y, \cdot),\ l \cdot y < l \cdot x)$.

Proposición 1. *Supongamos que P_0-c.s. se tiene que $\lim_{n\to\infty} l.X_n = +\infty$. Luego, para todo $A \subset (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$,*

$$P_0[X_{\kappa+\cdot} - X_\kappa \in A|\mathcal{G}] = P_0[X_\cdot \in A|\kappa = 0]$$

Demostración. En el artículo de Kalikow [4], se da una condición suficiente para tener $\lim_n l \cdot X_n = +\infty$. Además, utilizando la Proposición 1.2 de [9] y el hecho de que $\kappa \leq \tau_1$, (donde τ_1 se define en [9]), vemos que $\kappa < \infty$, P_0-c.s..

Tal como en el lema 1, se tiene

$$\{\kappa = n\} = \{\inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot X_n\} \cap \{\sup_{1\leq p\leq n-1} l\cdot X_p < l\cdot X_n\} \cap B_n,$$

donde

$$\begin{aligned} B_n \;:=\; & \{\forall k < n, \text{ existe } j \text{ tal que } k < j < n \text{ y } l\cdot X_j < l\cdot X_k \\ & \text{o existe } j \text{ tal que } 0 \leq j < k \text{ y } l\cdot X_j \geq l\cdot X_k\}. \end{aligned}$$

Ahora, elegimos $x_0, ..., x_n \in \mathbb{Z}^d$ y $W_n \in \sigma(\omega(x,\cdot) : l\cdot x < \max_{0\leq j\leq n} l\cdot x_j)$. Definimos el evento $E_n := D_n \cap W_n$, donde $D_n := \{X_j = x_j : 0 \leq j \leq n\}$. Luego, si $C_n := \{\max_{1\leq p\leq n-1} l\cdot X_p < l\cdot X_n\} \cap B_n$, se tiene,

$$\begin{aligned} & P\left[X_{\kappa+\cdot} - X_\kappa \in A|\kappa = n, E_n\right] \\ = \; & \frac{P\left[X_{\kappa+\cdot} - X_\kappa \in A,\, \inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot X_n,\, C_n, E_n\right]}{P\left[\inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot X_n,\, C_n, E_n\right]}. \end{aligned} \tag{6}$$

Analizamos el numerador de esta expresión; por definición de P_x,

$$\begin{aligned} & P[X_{\kappa+\cdot} - X_\kappa \in A,\, \inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot X_n,\, C_n, E_n] \\ = \; & \mathbb{E}[\mathbf{1}_{W_n} P_{0,\omega}[X_{n+\cdot} - x_n \in A,\, \inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot x_n,\, C_n,\, D_n]] \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de Markov para $(X_n)_n$ en cada medio fijo, y C_n, $D_n \in \mathcal{F}_n$, esta última expresión es igual a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\mathbf{1}_{W_n} P_{0,\omega}[P_{0,\omega}[X_{n+\cdot} - X_n \in A,\, \inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot X_n,\, C_n,\, D_n|\mathcal{F}_n]]] \\ = \; & \mathbb{E}[\mathbf{1}_{W_n} P_{0,\omega}[P_{0,\omega}[\mathbf{1}_{C_n,D_n} X_{n+\cdot} - X_n \in A,\, \inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot X_n,\, C_n,\, D_n|X_n]]] \end{aligned} \tag{7}$$

Ahora, sobre el evento $C_n \cap D_n$, se tiene que

$$P_{0,\omega}[X_{n+\cdot} - x_n \in A,\, \inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot x_n|X_n] = P_{x_n,\omega}[X_\cdot - x_n \in A,\, \inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot x_n]$$

Utilizando este hecho, (7) se escribe como

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{W_n} P_{0,\omega}[C_n, D_n] P_{x_n,\omega}[X_{n+\cdot} \in A,\, \inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot x_n]\right]$$

Ahora, observamos que $\mathbf{1}_{W_n} P_{0,\omega}[C_n, D_n]$ depende del medio sólo para sitios con $l\cdot x < l\cdot x_n$, mientras que $P_{x_n,\omega}[X_{n+\cdot} - X_n \in A, \inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot x_n]$ depende del medio sólo para sitios con $l\cdot x \geq l\cdot x_n$. Luego, ambas expresiones son independientes con respecto a $\mathbb{P}$. Utilizando además la invariancia por traslaciones al promediar con respecto a $\mathbb{P}$ y la invariancia por traslaciones con respecto al tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned} & P_0[X_{\kappa+\cdot} - X_\kappa \in A,\, \inf_{m\geq n} l\cdot X_m \geq l\cdot X_n,\, C_n, E_n] \\ = \; & P_0[C_n, E_n] P_0[X_\cdot \in A,\, \inf_{m\geq 0} l\cdot X_m \geq 0]. \end{aligned} \tag{8}$$

Finalmente, tomando A como todo el espacio en (8) y sustituyendo en (6), se concluye la prueba de la proposición. □

3. Proceso de combustión

Introducimos ahora el *proceso de combustión*, que será el objeto de estudio central de este trabajo. Para definir los tiempos de regeneración, construiremos un proceso en el que las partículas llevan índices, en los cuales se conserva información con respecto al lugar de nacimiento de las partículas. Siguiendo [2], se define también un *proceso aumentado* y un *proceso auxiliar*, los cuales se utilizarán para las estimaciones de los momentos de κ, el tiempo de regeneración.

3.1. Proceso indexado. Consideraremos un proceso en el que algunas partículas tienen prioridad sobre otras. Supongamos, por ahora, que $r = 0$. Cada partícula activa recorre una marcha aleatoria asimétrica a tiempo continuo, hasta que llega a un sitio x ocupado por M partículas. Si todas las partículas de ese sitio tienen prioridad igual o mayor que ella, la partícula muere. En caso contrario, se realiza el salto y una de las partículas de x con menor prioridad muere.

Supongamos que, inicialmente, hay una nube de partículas con una cantidad finita de partículas activas en cada sitio a la izquierda de 0 y $a-1$ partículas dormidas en cada sitio a la derecha de 0. Supongamos además que hay al menos $a-1$ partículas sobre 0. A estas $a-1$ partículas les asociamos prioridad 1. A todas las demás partículas activas, les asociamos prioridad 0. Rellenamos cada sitio a la derecha de 0 con partículas de prioridad -1, hasta tener exactamente M partículas en cada sitio.

Cuando alguna partícula de prioridad 0 o 1 toca el sitio $x = 1$, se despiertan las $a-1$ partículas en ese sitio. A ellas, se les asigna prioridad 2. Se rellena cada sitio a la derecha de 1 con partículas de prioridad -2, hasta obtener exactamente M partículas en cada sitio.

Supongamos que ya hemos definido el proceso hasta que una partícula de prioridad mayor o igual a 0 toca el sitio $k-1$. El primer instante en que una partícula de prioridad no negativa toca el sitio k, se despiertan las $a-1$ partículas dormidas, y se les asocia prioridad $k+1$. Se rellena cada sitio a la izquierda de k con partículas de prioridad $-k-1$, hasta tener exactamente M partículas en cada sitio. Veremos que esto define un proceso, fuertemente markoviano con respecto a una familia creciente de tiempos de parada, que se puede construir formalmente con técnicas habituales en sistemas de partículas (ver [6]). Sin embargo, entregaremos una construcción que será de mayor utilidad para probar los resultados de esta sección.

Inicialmente, se tiene un $r \in \mathbb{Z}$ que representa el sitio visitado más a la derecha. Se consideran marchas aleatorias a tiempo continuo $Y_{x,i,j}$ indexadas por $\mathbb{Z} \times \{1, ..., a\} \times \{r-1, r, r+1, ...\}$, con $Y_{x,i,j}(0) = x$. Ordenamos el conjunto de índices con el siguiente orden: $(x_1, i_1, j_1) \preceq (x_2, i_2, j_2)$ si $(x_1, i_1, -j_1) \leq (x_2, i_2, -j_2)$ en el orden lexicográfico. Si $j = r-1$, diremos que se trata de una partícula negra; si $j \geq r$, diremos que la partícula es roja. En lo que sigue, denotaremos a veces un índice genérico por las letras α o β.

Consideramos un conjunto $\mathcal{I}(0)$ de partículas negras de índices $(x, i, r-1)$ con $x \leq r$ que representa las partículas vivas en tiempo $t = 0$. Consideramos además un función de posición $\mathcal{Z}(0) : \mathcal{I}(0) \to \{..., r-2, r-1, r\}$ para denotar el punto de partida de las marchas. O sea, a cada índice $(x, i, r-1)$ se le asocia un sitio $z \leq r$ que denotará la posición inicial de la partícula correspondiente a este índice. En instantes posteriores, la posición de estas partículas está dada por $Z_{x,i,r-1}(t) = Y_{x,i,r-1}(t) + z - x$. Suponemos además que, inicialmente, el sitio r está ocupado al menos por las $a-1$ partículas de índices $(r, 1, r-1), ..., (r, a-1, r-1)$.

Cada vez que en un sitio $x \leq r$ hay menos de M partículas, agregamos las partículas rojas de índices $(x, 1, r)$, $(x, 2, r)$, ... hasta tener exactamente M partículas en ese sitio. Denotamos por $\overline{\mathcal{I}}(0)$ el conjunto que se obtiene de $\mathcal{I}(0)$ al agregar estas partículas rojas. La partícula de índice (x, i, r) seguirá la marcha $Z_{x,i,r}(t) = Y_{x,i,r}(t)$.

En instantes posteriores, denotaremos por $\mathcal{I}(t)$ (respectivamente $\overline{\mathcal{I}}(t)$) el conjunto de partículas negras vivas en el instante t (resp. partículas negras y rojas vivas en el instante t). Cada vez que una partícula salta a un sitio ocupado por M partículas, la partícula de menor índice muere y su índice se retira del conjunto de partículas vivas.

Sea ρ_1 el primer instante en que una partícula negra visita el sitio $r+1$. Cuando esto ocurre, se agrega a $\mathcal{I}(\rho_1^-)$ los índices $(r+1,1,r-1),...,(r+1,a-1,r-1)$ y las partículas correspondientes a estos índices siguen trayectorias $Z_{r+1,i,r-1}(t) = Y_{r+1,i,r-1}(t-\rho_1)$, $t \geq \rho_1$.

En este instante, cada vez que en un sitio $x \leq r+1$ hay menos de M partículas, se agrega a $\overline{\mathcal{I}}(\rho_1^-)$, los índices $(x,1,r+1)$, $(x,2,r+1),...$ hasta obtener exactamente M partículas en ese sitio. La partícula de índice $(x,i,r+1)$ seguirá la marcha $Z_{x,i,r+1}(t) = Y_{x,i,r+1}(t-\rho_1)$.

En general, sea $\rho_1+...+\rho_k$ el primer instante en que una partícula negra alcanza el sitio $r+k$. En este instante, se agrega a $\mathcal{I}(\rho_1+...+\rho_k^-)$ los índices $(r+k,1,r-1),...,(r+k,a-1,r-1)$ y las respectivas partículas siguen trayectorias $Z_{r+k,i,r-1}(t) = Y_{r+k,i,r-1}(t-\rho_1-...-\rho_k)$. También, cada vez que en un sitio $x \leq r+k$ hay menos de M partículas, se agrega a $\overline{\mathcal{I}}(\rho_1+...+\rho_k^-)$, los índices $(x,1,r+k)$, $(x,2,r+k),...$ hasta obtener exactamente M partículas en ese sitio. La partícula de índice $(x,i,r+k)$ seguirá la marcha $Z_{x,i,r+1}(t) = Y_{x,i,r+1}(t-\rho_1-...-\rho_k)$.

Denotamos por r_t el sitio más a la derecha visitado por una partícula negra.

Definimos una función $\phi : \bigcup_{t\geq 0}\overline{\mathcal{I}}(t) \to \mathbb{Z}$, mediante

$$\phi(r+k,i,r-1) = k+1,\ k \geq 0 \quad \phi(r+k,i,r-1) = 0,\ k < 0, \quad \phi(x,i,r+k) = -k-1, k \geq 0.$$

Decimos que una partícula de índice α tiene prioridad sobre una partícula de índice β si $\phi(\alpha) > \phi(\beta)$.

Definimos $w(t,x,z)$ como el número de índices $\alpha \in \overline{\mathcal{I}}(t)$ con $\phi(\alpha) = z$ de modo que $Z_\alpha(t) = x$, $w_t := \{w(t,x,z) : x,z \in \mathbb{Z}\}$. Luego, el par $(w_t)_{t\geq 0}$ define un proceso estocástico, que denominaremos *proceso aumentado*, con estados en

$$\mathcal{E} := \left\{ (r,\zeta) : r \in \mathbb{Z},\, \zeta : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^+,\, \sum_{z\in\mathbb{Z}} \zeta(x,z) \leq M,\, \forall\, x \in \mathbb{Z},\, \sum_{z\geq 0} \zeta(y,z) = 0,\, \forall\, z > r \right\},$$

y con ley $\mathbb{P}_w$ definida sobre el espacio de Skorohod $\mathcal{D}([0,+\infty);\mathcal{E})$. Notamos que hemos premunido $\mathcal{E}$ de la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, donde la topología que consideramos sobre este último espacio es la topología producto que se obtiene al dotar cada coordenada de la topología discreta.

Denotamos la filtración natural del proceso por $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. La prueba de que $(w_t,\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisface la propiedad fuerte de Markov con respecto a cierta familia creciente de tiempos de parada es un asunto técnico que relegamos al Apéndice 2, para no perder el hilo de la discusión. Se puede ver que la dinámica de este proceso coincide con aquella definida en el primer párrafo de esta subsección. A menudo, nos interesará considerar solamente la trayectoria de las partículas negras. Nos referiremos a este proceso como el *proceso indexado.*

Se define el *proceso de combustión*, $\eta_t := \{\eta(y,t) : y \leq r_t\}$, donde

$$\eta(y,t) = \sum_{(x,i,1)\in\mathcal{I}(t)} \mathbf{1}(Z_{x,i,r-1}(t) = y).$$

Naturalmente, esta definición coincide con la descripción del proceso de combustión dada en la introducción.

Necesitaremos introducir las siguientes notaciones: sea $\overline{\mathcal{L}}(t)$ el conjunto que se obtiene al remover de $\overline{\mathcal{I}}(t)$ todos los índices (x,i,j) con $x \geq r$. Para $y \geq r_t$, se define

$$\overline{\phi}(y,t) = \sum_{(x,i,r+l)\in\overline{\mathcal{L}}(t)} \mathbf{1}(Z_{x,i,r+l}(t) = y). \tag{9}$$

Considere también el conjunto $\mathcal{R}(t)$, obtenido a partir de $\mathcal{I}(t)$, eliminando los índices $(x,i,r-1)$ con $x < r = \sup\{y : (y,i,r-1) \in \mathcal{I}(0)\}$. Definimos, para $y \leq r_t$, el conteo de partículas

$$\zeta(y,t) = \sum_{(x,i,r-1)\in\mathcal{R}(t)} \mathbf{1}(Z_{x,i,r-1}(t) = y). \tag{10}$$

Finalmente, se define el conjunto $\overline{\mathcal{R}}(t)$, obtenido a partir de $\overline{\mathcal{I}}(t)$, eliminando los índices (x,i,k) con $x < r = \sup\{y : (y,i,r-1) \in \mathcal{I}(0)\}$.

3.2. Tiempos de regeneración. Para $x \geq r$, definimos T_x como el primer instante en que una partícula negra toca el sitio x.

Para $x \geq r$, definimos w_t^x como el proceso aumentado con condición inicial dada por las partículas de índices $(x,1,r-1),...,(x,a-1,r-1)$ inicialmente en x. Observe que el conteo de partículas asociado a $w^x(s)$ corresponde a $\zeta(T_x+s) := \zeta\circ\theta_{T_x}(s)$.

Definimos r_t^x como la posición del frente asociado al proceso w^x en el instante t, o sea, el mayor valor de $\phi(\alpha)$, donde α corresponde al índice de una partícula activa en el proceso w^x. Definimos, para $x \geq r$, el conjunto $\mathcal{B}_x$ como el conjunto que se obtiene de $\overline{\mathcal{I}}(T_x)$, al retirar los índices α con $\phi(\alpha) = x+1$. Heurísticamente, $\mathcal{B}_x$ denota el conjunto de las partículas *de atrás.* Para $t \geq T_x$, ponemos $\mathcal{B}_x(t) = \mathcal{B}_x \cap \overline{\mathcal{I}}(t)$. Luego, se define

$$D := \text{ínf}\{t \geq 0 : Z_\alpha(t) = r^r(t)+1,\ \text{para algún}\, \alpha \in \mathcal{B}_r(t)\, \text{con}\, \phi(\alpha) < r\}.$$

En general, para $x > r$, se define

$$D'_x := \text{ínf}\{t \geq 0 : Z_\alpha(T_x+t) = r^x(t)+1,\ \text{para algún}\, \alpha \in \mathcal{B}_x(T_x+t)\, \text{con}\, \phi(\alpha) < x\},$$

$$D_x := D'_x + T_x.$$

Lema 2. *Los tiempos D'_x son idénticamente distribuidos.*

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que

$$D'_x := \text{ínf}\{t \geq 0 : \overline{\phi}\circ\theta_{T_x}(r_t^x+1,t) > 0\},$$

y utilizar la invariancia por traslaciones. □

Se define κ como el primer instante en que el frente r_t visita un sitio nuevo (digamos x) y $D_x = \infty$. O sea,

$$\kappa := \text{ínf}\{t \geq 0 : r_t = r_{t^-}+1,\ D_{r_t} = \infty\}.$$

Definimos $\mathcal{G}$ como la información hasta tiempo κ, esto es, la completación con respecto a $\mathbb{P}_\omega$ de la tribu más pequeña que contiene a todos los eventos de la forma $\{\kappa \leq t\} \cap A$, $A \in \mathcal{F}_t$. Observe que κ *no* es un tiempo de parada.

Los próximos Lemas formalizan algunos hechos intuitivos acerca de los procesos construidos hasta ahora.

Lema 3. *Sobre el evento $\{t \leq D'_x\}$, se tiene*

$$\zeta(T_x + t) = \eta_{(a-1)\delta_x}(t),$$

donde $(a-1)\delta_x$ es la configuración con las $a-1$ partículas de índices $(x,1,r-1),\dots,(x,a-1,r-1)$ en x.

En particular, sobre el evento $\{\kappa = T_x < \infty\}$, se tiene la igualdad anterior para todo $t \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición de D'_x, las partículas con índice $(y,i,r-1)$ con $y < x$ no vuelven a tocar la derecha del frente $r(T_x + t)$. Luego, ellas no participan en la creación de nuevas partículas.
Por otro lado, ellas no influyen en la dinámica de las partículas que nacieron en x a tiempo κ (o sus descendientes) pues tienen menor índice, con lo cual se obtiene la primera afirmación.

Para lograr la igualdad para todo $t \geq 0$, basta recordar que sobre el evento $\{\kappa = T_x < \infty\}$, se tiene $D'_x = \infty$.

□

Lema 4. $r^x(t) = r(T_x + t)$, $\forall t \leq D'_x$. *En general, se tiene* $r^x(t) \leq r(T_x + t)$, $\forall\, t \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema anterior, el frente $r(T_x+t)$ es generado solamente por las partículas nacidas en x para $t \leq D'_x$, o sea, exactamente aquellas que forman parte del proceso $r^x(t)$.

Se logra la desigualdad cuando una partícula nacida a la izquierda de x alcanza la derecha del frente.

□

Lema 5. *Sea $x < y$. Luego, sobre el evento $\{\kappa = y\}$, se tiene $D_x \leq T_y$.*

DEMOSTRACIÓN. Por construcción, se tiene que $r^x(T_y - T_x + s) \geq r^y(s)$. En particular, tomando $s = t - T_y$, se obtiene $r^x(t - T_x) \geq r^y(t - T_y)$. Luego,

$$\begin{aligned}
&\{T_y < D_x < \infty\} \\
&= \bigcup_{(y,i,r+l)\in\mathcal{B}_x} \{\exists\, t > T_y : Z_{y,i,r+l}(t) = r^x(t - T_x) + 1, (y,i,r+l) \in \mathcal{B}^x(t)\} \\
&= \bigcup_{(y,i,r+l)\in\mathcal{B}_x} \{\exists\, t > T_y : Z_{y,i,r+l}(t) \geq r^y(t - T_y) + 1, \\
&\qquad\qquad Z_{y,i,r+l}(t) = r^x(t - T_x) + 1, (y,i,r+l) \in \mathcal{B}^x(t)\}.
\end{aligned}$$

Como se trata de saltos a los primeros vecinos, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\{T_y < D_x < \infty\} \\
&\subset \bigcup_{(y,i,r+l)\in\mathcal{B}_x} \{\exists t \geq s > T_y : Z_{y,i,r+l}(s) = r^y(s - T_y) + 1, \\
&\qquad\qquad Z_{y,i,r+l}(t) = r^x(t - T_x) + 1, (y,i,r+l) \in \mathcal{B}^x(t) \cap \mathcal{B}^x(s)\}.
\end{aligned}$$

Observemos que $\mathcal{B}_y(t)$ se obtiene de $\mathcal{B}_x(t)$ agregando partículas de menor índice. Luego, $\mathcal{B}_x(t) \subset \mathcal{B}_y(t)$. Similarmente, $\mathcal{B}_x(s) \subset \mathcal{B}_y(s)$. Luego, cada evento de la unión anterior implica $\{D_y \leq D_x < \infty\}$, con lo cual se concluye el Lema.

□

Corolario 1. *Si $x < y < D_x$, luego $D_y \leq D_x$.*

DEMOSTRACIÓN. Esto es, en realidad, el resultado esencial de la prueba del lema anterior. □

Sea $\mathcal{K}$ la tribu formada por los subconjuntos borelianos de $\mathcal{D}([0,+\infty);\mathcal{E})$ invariantes por permutación de las partículas de prioridad 0 y -1 (las partículas *de atrás*, en el estado inicial). Podemos ahora enunciar y probar la proposición central de esta sección.

Proposición 2. *Sea $A \in \mathcal{K}$. Para toda configuración inicial w con $a-1$ partículas en r,*

$$\mathbb{P}_\omega[\tau_{-r_\kappa} w(\kappa+\cdot) \in A|\mathcal{G}] = \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[w. \in A|D=\infty]$$

donde $w(\kappa+\cdot) := w \circ \theta_\kappa(\cdot)$, $(a-1)\delta_0$ es la configuración con $a-1$ partículas en 0 y el shift τ_{-x} denota, a la vez, un shift espacial y un shift en la prioridad de las partículas dado por

$$\tau_{-x}(y) = \begin{cases} y+x, & y<-x \\ 0, & -x \le y \le x \\ y-x, & y > x. \end{cases}$$

Demostración. Tenemos que probar

$$\mathbb{P}_\omega[\tau_{-r_\kappa} w(\kappa+\cdot) \in A, B] = \mathbb{P}_\omega[B]\,\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[w. \in A|D=\infty] \tag{11}$$

para todo $B \in \mathcal{G}$. Basta considerar conjuntos de la forma $B = C \cap \{\kappa \le t\} \cap \{r_\kappa = x\}$ con $C \in \mathcal{F}_x$. Así, desarrollando el lado izquierdo de (11) para conjuntos de esta forma, se tiene

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\omega[\kappa \le t, r_\kappa = x, C, \tau_{-r_\kappa} w(\kappa+\cdot) \in A] \\ = {} & \mathbb{P}_\omega[T_x \le t,\ r_\kappa = x,\ C, \tau_{-x} w(T_x+\cdot) \in A] \\ = {} & \mathbb{E}_\omega[\mathbb{P}_\omega[T_x \le t, C, r_\kappa = x,\ \tau_{-x} w(T_x+\cdot) \in A|\mathcal{F}_x]] \end{aligned} \tag{12}$$

donde $\mathcal{F}_x$ es la tribu asociada al tiempo de parada T_x.
Ahora, de acuerdo al Corolario 1, observamos que

$$\{r_\kappa = x\} = E_x \cap \{D_x = \infty\} = \tilde{E}_x \cap \{D_x = \infty\},$$

donde $E_x = \{\kappa \ge T_x\}$ y $\tilde{E}_x = \{D_y \le T_x, \forall y < x\} \in \mathcal{F}_x$.
Luego, (12) es igual a

$$\mathbb{E}_\omega[\mathbf{1}_{\{T_x \le t, C, \tilde{E}_x\}} \mathbb{P}_\omega[D_x = \infty,\ \tau_{-x} w(T_x+\cdot) \in A|\mathcal{F}_x]]. \tag{13}$$

Recordando que $A \in \mathcal{K}$ y aplicando el análogo de la propiedad fuerte de Markov probado en el Apéndice II, podemos desarrollar (13) como sigue:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\omega[\mathbf{1}_{\{T_x \le t, C, \tilde{E}_x\}} \mathbb{P}_\omega[D_x = \infty,\ \tau_{-x} w(T_x+\cdot) \in A|\mathcal{F}_x]] \\ = {} & \mathbb{E}_\omega[\mathbf{1}_{\{T_x \le t, C, \tilde{E}_x\}} \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[D=\infty,\ w. \in A]] \\ = {} & \mathbb{P}_\omega[T_x \le t, C, \tilde{E}_x]\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[D=\infty,\ w. \in A]. \end{aligned} \tag{14}$$

Considerando A como todo el espacio en (14), se obtiene

$$\mathbb{P}_\omega[\kappa \le t, r_\kappa = x, C] = \mathbb{P}_\omega[T_x \le t, C, \tilde{E}_x]\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[D=\infty]$$

Finalmente, sustituyendo esta última igualdad en (14), se obtiene (11). □

Introducimos el resto de la estructura de regeneración. Definimos $\kappa_1 := \kappa$ y, para $n > 1$, $\kappa_{n+1} := \kappa_n + \kappa(\tau_{-r_{\kappa_n}} w(\kappa_n + \cdot))$, donde $\kappa(\tau_{-r_{\kappa_n}} w(\kappa_n + \cdot))$ es el tiempo de regeneración partiendo de $w_{\kappa_n+\cdot}$, con la convención $\kappa_{n+1} = \infty$ si $\kappa_n = \infty$. Observe que la definición de κ_{n+1} a partir de κ_n involucra sólo eventos de $\mathcal{K}$ y difiere levemente de la definición adoptada en [9].

Definimos, para cada $n \geq 1$, la tribu $\mathcal{G}_n$ como la completación con respecto a $\mathbb{P}_w$ de la tribu más pequeña que contiene a todos los eventos de la forma $\{\kappa_1 \leq t_1\} \cap ... \cap \{\kappa_n \leq t_n\} \cap A$, con $A \in \mathcal{F}_{t_n}$. Análogamente a la Proposición anterior, se prueba

Proposición 3. *Sea $A \in \mathcal{K}$. Luego,*

$$\mathbb{P}_w[\tau_{-r_{\kappa_n}} w(\kappa_n + \cdot) \in A | \mathcal{G}_n] = \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[w(\cdot) \in A | D = \infty].$$

DEMOSTRACIÓN. Esta vez, tenemos que probar

$$\mathbb{P}_\omega[\tau_{r_{-\kappa_n}} w(\kappa_n + \cdot) \in A, B] = \mathbb{P}_\omega[B]\, \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[w. \in A | D = \infty] \tag{15}$$

para todo $B \in \mathcal{G}_n$. Basta considerar eventos de la forma

$$B = C \cap \{\kappa_i \leq t_i,\, i = 1, ..., n\} \cap \{r_{\kappa_i} = x_i,\, i = 1, ..., n\},$$

con $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ y $C \in \mathcal{F}_{x_n}$.

Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso $n = 1$, observamos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{r_{\kappa_i} = x_i\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{D_{x_i} = \infty,\, \tilde{E}_{x_i}\},$$

donde $\tilde{E}_{x_1} = \{D_y \leq T_{x_1},\, \forall\, y < x_1\}$, $\tilde{E}_{x_i} = \{D_y \leq T_{x_i},\, \forall\, x_{i-1} < y < x_i\} \in \mathcal{F}_{x_i}$ para $2 \leq i \leq n$. Además, observamos que, para cada $i = 1, ..., n-1$, se tiene

$$\{D_{x_i} = \infty,\, D_{x_n} = \infty\} = \{D_{x_i} \geq T_{x_n},\, D_{x_n} = \infty\}.$$

Claramente, se tiene $\{D_{x_i} \geq T_{x_n}\} \in \mathcal{F}_{x_n}$.

Luego,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_\omega[\{\kappa_i \leq t_i,\, r_{\kappa_i} = x_i,\, i = 1, ..., n\},\, C, \tau_{-r_{\kappa_n}} w(\kappa_n + \cdot) \in A] \\
= \;& \mathbb{P}_\omega[\{T_{x_i} \leq t_i,\, r_{\kappa_i} = x_i,\, i = 1, ..., n\},\, C, \tau_{-x_n} w(T_{x_n} + \cdot) \in A] \\
= \;& \mathbb{P}_\omega[\{T_{x_i} \leq t_i,\, \tilde{E}_i,\, D_{x_i} \geq T_{x_n},\, i = 1, ..., n-1\},\, D_{x_n} = \infty,\, C,\, \tau_{-x_n} w(T_{x_n} + \cdot) \in A]
\end{aligned}$$

Podemos ahora condicionar con respecto a $\mathcal{F}_{x_n}$ dentro de la última expresión:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_\omega[\{\kappa_i \leq t_i,\, r_{\kappa_i} = x_i,\, i = 1, ..., n\},\, C, \tau_{-r_{\kappa_n}} \tau_{-x_n} w(\kappa_n + \cdot) \in A] \\
= \;& \mathbb{E}_\omega[\mathbf{1}_{\{C, \tilde{E}_i, T_{x_i} \leq t_i, i=1,\dots,n, D_{x_i} \geq T_{x_n}, i=1,\dots,n-1\}} \mathbb{P}_\omega[D_{x_n} = \infty,\, \tau_{-x_n} w(T_{x_n} + \cdot) \in A | \mathcal{F}_{x_n}]].
\end{aligned}$$

Pero usando la propiedad fuerte de Markov con respecto a los tiempos T_x y el hecho de que $A \in \mathcal{K}$,

$$\mathbb{P}_\omega[D_{x_n} = \infty,\, \tau_{-x_n} w(T_{x_n} + \cdot) \in A | \mathcal{F}_{x_n}] = \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[D = \infty,\, w(\cdot) \in A].$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\omega[\{\kappa_i \le t_i,\, r_{\kappa_i} = x_i,\, i = 1, ..., n\},\, C, \tau_{-r_{\kappa_n}} w(\kappa_n + \cdot) \in A] \\
=\ &\mathbb{P}_\omega[C,\, \tilde{E}_i,\, T_{x_i} \le t_i,\, i = 1, ..., n,\, D_{x_i} \ge T_{x_n},\, i = 1, ..., n-1]\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[D = \infty,\, w(\cdot) \in A].
\end{aligned} \tag{16}$$

Considerando A como todo el espacio en (16), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\omega[\{\kappa_i \le t_i,\, r_{\kappa_i} = x_i,\, i = 1, ..., n\},\, C] \\
=\ &\mathbb{P}_\omega[C,\, \tilde{E}_i,\, T_{x_i} \le t_i,\, i = 1, ..., n,\, D_{x_i} \ge T_{x_n},\, i = 1, ..., n-1]\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[D = \infty].
\end{aligned}$$

Sustituyendo esta última igualdad en (16), se concluye (15).

□

Proposición 4. *Sea $w \in \mathbb{S}$.*

(i) Bajo $\mathbb{P}_w$, $\kappa_1, \kappa_2 - \kappa_1, \kappa_3 - \kappa_2, ...$ son independientes y $\kappa_2 - \kappa_1, \kappa_3 - \kappa_2, ..$ tienen la misma ley que κ_1 bajo $\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\cdot|D = \infty]$.

(ii) Bajo $\mathbb{P}_w$, $r_{\cdot\wedge\kappa_1}$, $r_{(\kappa_1+\cdot)\wedge\kappa_2} - r_{\kappa_1}$, $r_{(\kappa_2+\cdot)\wedge\kappa_3} - r_{\kappa_2}, ...$ son independientes, y $r_{(\kappa_1+\cdot)\wedge\kappa_2} - r_{\kappa_1}$, $r_{(\kappa_2+\cdot)\wedge\kappa_3} - r_{\kappa_2}, ...$ son idénticamente distribuídos, con la misma ley que $r_{\cdot\wedge\kappa_1}$, bajo $\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\cdot|D = \infty]$.

Demostración. Esto es un corolario de la proposición anterior. Sin embargo, por su sencillez, incluimos pruebas directas para el caso $n = 2$. Las dificultades técnicas para obtener el caso más general son análogas a aquellas que se presentan al pasar de la Proposición 2 a la Proposición 3.

(i) Recuerde que $P[\kappa_1 < \infty] = 1$. Sean A, $B \subset \mathbb{R}_+$, borelianos. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\omega[\kappa_2 - \kappa_1 \in A, \kappa_1 \in B] &= \sum_x \mathbb{P}_\omega[\kappa_2 - T_x \in A, r_{\kappa_1} = x, T_x \in B] \\
&= \sum_x \mathbb{P}_\omega[\kappa_2 - T_x \in A,\, D_x = \infty,\, \tilde{E}_x,\, T_x \in B] \\
&= \sum_x \mathbb{E}_\omega[\mathbf{1}_{\{\tilde{E}_x, T_x \in B\}} \mathbb{P}_\omega[\kappa_2 - T_x \in A,\, D_x = \infty|\mathcal{F}_x]]
\end{aligned} \tag{17}$$

Ahora, por definición de κ_2, sobre el evento $r_\kappa = x$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\omega[\kappa_2 - T_x \in A, D_x = \infty|\mathcal{F}_x] \\
=\ &P_\omega[\kappa(w(T_x + \cdot)) \in A, D_x = \infty|\mathcal{F}_x] \\
=\ &P_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1 \in A,\, D = \infty]
\end{aligned} \tag{18}$$

donde en (18) se utilizó la propiedad fuerte de Markov y la invariancia por traslaciones.

Luego,

$$\mathbb{P}_\omega[\kappa_2 - \kappa_1 \in A,\, \kappa_1 \in B] = \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1 \in A,\, D = \infty] \sum_x P_\omega[\tilde{E}_x,\, T_x \in B]. \tag{19}$$

Tomando $A = \mathbb{R}_+$ en (19), obtenemos

$$P[\kappa_1 \in B] = \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[D = \infty] \sum_x P_\omega[\tilde{E}_x,\, T_x \in B].$$

Finalmente, remplazando esta identidad en (19), se concluye

$$\mathbb{P}_\omega[\kappa_2 - \kappa_1 \in A|\, \kappa_1 \in B] = \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1 \in A|D = \infty].$$

Esto prueba la independencia, pues el lado derecho de esta expresión no depende de B. Tomando $B = \mathbb{R}_+$, obtenemos la igualdad de las leyes.

(ii) Consideremos nuevamente A, $B \subset \mathbb{R}_+$, borelianos.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\omega[r_{(\kappa_1+\cdot)\wedge\kappa_2} - r_{\kappa_1} \in A,\, r_{\kappa_1\wedge\cdot} \in B]\\
=\;& \sum_x \mathbb{P}_\omega[r_{(T_x+\cdot)\wedge\kappa_2} - x \in A,\, r_{\kappa_1\wedge\cdot} \in B,\, r_{\kappa_1} = x]\\
=\;& \sum_x \mathbb{P}_\omega[r_{(T_x+\cdot)\wedge\kappa_2} - x \in A,\, r_{T_x\wedge\cdot} \in B,\, D_x = \infty,\, \tilde{E}_x]\\
=\;& \sum_x \mathbb{E}_\omega[\mathbf{1}_{\{\tilde{E}_x, r_{T_x\wedge\cdot}\in B\}}\mathbb{P}_\omega[r_{(T_x+\cdot)\wedge\kappa_2} - x \in A,\, D_x = \infty|\mathcal{F}_x]]
\end{aligned}$$

Ahora, sobre el evento $\{r_{\kappa_1} = x\}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_w[r_{(T_x+\cdot)\wedge\kappa_2} - x \in A,\, D_x = \infty|\mathcal{F}_x]\\
=\;& \mathbb{P}_w[r((T_x+\cdot)\wedge\kappa(w(T_x+\cdot))) - x \in A, D_x = \infty|\mathcal{F}_x]\\
=\;& P_{(a-1)\delta_x}[r(\kappa_1\wedge\cdot) - x \in A, D = \infty]\\
=\;& P_{(a-1)\delta_0}[r(\kappa_1\wedge\cdot) \in A, D = \infty].
\end{aligned}$$

Prosiguiendo análogamente a la parte (i), concluimos

$$\mathbb{P}_w[r_{(\kappa_1+\cdot)\wedge\kappa_2} - r_{\kappa_1} \in A|\, r_{\kappa_1\wedge\cdot} \in B] = \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[r_{\kappa_1\wedge\cdot} \in A|D = \infty].$$

□

3.3. Proceso auxiliar y Tiempos auxiliares. Sea $r \in \mathbb{Z}$ y sea E_z el conjunto de los a índices $(x, i, r-1)$ inmediatamente anteriores a $(z, a-1, r-1)$. Definimos también $F_{r,z}$ como el subconjunto de índices de E_z con $x \geq r$.
Sea $\nu_0 := 0$ y sea ν_1 el primer instante en que una de las marchas $\{Y_{z,i,r-1} : (z,i,r-1) \in F_{r,r}\}$ toca el sitio $r+1$. Enseguida, definimos ν_2 como el primer instante en que una de las marchas $\{Y_{z,i,r-1} : (z,i,r-1) \in F_{r,r+1}\}$ toca el sitio $r+2$.
En general, para $k \geq 3$, definimos ν_k como el primer instante en que una de las marchas $\{Y_{z,i,r-1} : (z,i,r-1) \in F_{r,r+k-1}\}$ toca el sitio $r+k$. Finalmente, definimos el *frente auxiliar* como

$$\tilde{r}_t^r := r + n, \quad si \quad \sum_{k=0}^{n} \nu_k \leq t < \sum_{k=0}^{n+1} \nu_k. \tag{20}$$

Lema 6. *Existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{r}_t^r / t = \alpha, \quad c.s. \tag{21}$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que las variables aleatorias $\{\nu_{kl+j} : k \geq 1\}$ son independientes para $\forall j \geq 0,\ l \geq 2$ y aplicar la ley de los números grandes. $\square$

Hemos introducimos este frente auxiliar para minorar el frente del proceso de combustión r_t. Si bien es intuitivamente claro que $\tilde{r}_t \leq r_t$, necesitamos probar una desigualdad del tipo $\nu_k \leq \rho_k$. Observe que es más fácil obtener estimaciones para ν_k que para ρ_k.

Lema 7. *Suponga que $(r,1,r-1),...,(r,a-1,r-1) \in \mathcal{I}(0)$ y las partículas correspondientes se encuentran inicialmente en r. Luego, $\rho_1 \leq \nu_1$.*

DEMOSTRACIÓN. En ambos procesos, la dinámica de las partículas con índices $(r,1,r-1),...,(r,a-1,r-1)$ está dada por las marchas $Y_{r,i,r-1}(t)$. Estas son las únicas partículas que se consideran en el proceso auxiliar antes de ν_1, mientras que, en el proceso indexado, pueden haber más partículas que alcanzan eventualmente el sitio $r+1$ antes que las primeras, con lo cual $\rho_1 \leq \nu_1$. $\square$

Lema 8. *Suponga que $(r,1,r-1),...,(r,a-1,r-1) \in \mathcal{I}(0)$ y las partículas correspondientes se encuentran inicialmente en r. Luego, $\rho_k \leq \nu_k$.*

DEMOSTRACIÓN. En tiempo $\rho_1 + ... + \rho_{k-1}$, hay $a-1$ partículas en el sitio $r+k-1$ con índices $(r+k-1,1,r-1),...,(r+k-1,a-1,r-1)$ y una partícula adicional con índice desconocido, la cual despertó a las anteriores. Además, hay un número indefinido de otras partículas, entre las cuales se encuentra aquella de índice $(r+k-2,a-1,r-1)$.

La definición de ν_k involucra sólo las partículas con los a mayores índices, o sea, aquellas que nacieron en el sitio $r+k-1$ y aquella de índice $(r+k-2,a-1,r-1)$.

Observamos que, en el proceso indexado, en el intervalo de tiempo $[\rho_{k-1},\rho_k]$ ninguna de estas partículas puede haber sido anhiquilada, pues son aquellas de mayores índices.

Se define τ_{-1} como el primer instante en que una de las partículas que nace en $r+k-1$ toca el sitio $r+k$ en el proceso indexado, y τ_{-2} como el primer instante en que la partícula de índice $(r+k-2,a-1,r-1)$ toca el sitio $r+k$ en el proceso indexado. O sea,

$$\tau_{-1} = \text{ínf}\{t \geq \rho_1 + ... + \rho_{k-1} : Z_{r+k-1,i,r-1}(t) = r+k,\ i = 1,...,a-1\},$$

$$\tau_{-2} = \text{ínf}\{t \geq \rho_1 + ... + \rho_{k-1} : Z_{r+k-2,a-1,r-1}(t) = r+k\}.$$

También se define τ_0 como el primer instante en que alguna otra partícula toca el sitio $r+k$ en el proceso indexado. Así, $\rho_k = \text{mín}\{\tau_0,\tau_{-1},\tau_{-2}\} - \rho_1 - ... - \rho_{k-1}$.

Análogamente, se define

$$\sigma_{-1} = \text{ínf}\{t \geq 0 : Y_{r+k-1,i,r-1}(t) = r+k,\ i = 1,...,a-1\},$$

$$\sigma_{-2} = \text{ínf}\{t \geq 0 : Y_{r+k-2,a-1,r-1}(t) = r+k\},$$

de modo que $\nu_k = \text{mín}\{\sigma_{-1},\sigma_{-2}\}$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\tau_{-1} &= \text{ínf}\{t \geq \sum_{j=1}^{k-1} \rho_j : Y_{r+k-1,i,r-1}(t - \rho_1 - ... - \rho_{k-1}) = r+k, i = 1,...,a-1\} \\
&= \text{ínf}\{t \geq 0 : Y_{r+k-1,i,r-1}(t) = r+k, i = 1,...,a-1\} + \rho_1 + ... + \rho_{k-1} \\
&= \sigma_{-1} + \rho_1 + ... + \rho_{k-1}.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\tau_{-2} &= \text{ínf}\{t \geq \sum_{j=1}^{k-1} \rho_j : Y_{r+k-2,a-1,r-1}(t-\rho_1-\ldots-\rho_{k-2}) = r+k\} \\ &\leq \text{ínf}\{t \geq 0 : Y_{r+k-2,a-1,r-1}(t) = r+k\} + \rho_1 + \ldots + \rho_{k-1} \\ &= \sigma_{-2} + \rho_1 + \ldots + \rho_{k-1}.\end{aligned}$$

con lo cual se prueba el lema.

□

Siguiendo [2], introducimos los tiempos auxiliares

$$U := \text{ínf}\{t \geq 0 : \tilde{r}_t - r < [\alpha' t + 1/2]\}.$$

$$V := \text{ínf}\{t \geq 0 : \sup_{x > [\alpha' t] + r} \overline{\phi}_w(x,t) > 0\}.$$

$$L := \text{mín}\{U, V\}.$$

$$U_x := U \circ \theta_{T_x},\ V_x := V \circ \theta_{T_x},\ L_x := L \circ \theta_{T_x}.$$

Introducimos un nuevo tiempo de regeneración a partir de estos tiempos aleatorios, tal como en [2]. Sin embargo, esta nueva definición no será utilizada antes de la Proposición 19, por lo que no es esencial a la hora de probar un resultado como la Proposición 2.

Definimos dos sucesiones de tiempos de parada $\{S_k : k \geq 0\}$ y $\{L_k : k \geq 0\}$ de la siguiente manera: sea $S_0 = 0$, $R_0 = r$. Enseguida se define

$$S_1 := T_{R_0+1} \quad L_1 := L \circ \theta_{S_1} + S1 \quad R_1 := r_{L_1}. \tag{22}$$

Habiendo definido S_k, L_k y R_k, definimos

$$S_{k+1} := T_{R_k+1} \quad L_{k+1} := L \circ \theta_{S_{k+1}} + S_{k+1} \quad R_{k+1} := r_{L_{k+1}}. \tag{23}$$

Observe que el $+1$ que aparece en la definición de S_k tiene por fin asegurar que, en estos instantes, haya al menos una partícula en el frente (de hecho, habrá $a-1$ partículas).

Finalmente, se define $K := \text{ínf}\{k \geq 0 : S_k < \infty,\ D_k = \infty\}$ y $\kappa' := S_K$. Como $L \geq D$, es fácil observar que $\kappa \leq \kappa'$.

4. Esperanza y varianza de los tiempos de regeneración.

4.1. Estimaciones para el Proceso Auxiliar.

Velocidad del proceso auxiliar

Sean ν, $\mu > 0$ con $\nu > \mu$ y $\nu + \mu = 2$. Denotamos por $\Delta = \nu - \mu$ la velocidad de una marcha aleatoria a tiempo continuo con parámetro 2, que salta a la derecha con probabilidad $\nu/2$ y a la izquierda con probabilidad $\mu/2$. Denotamos por $v_\Delta := \alpha$ la velocidad del proceso $\tilde{r}_t$ correspondiente, donde α se define en (21).

Necesitamos la siguiente estimación:

Lema 9. Definimos τ_1 como el primer instante en que una marcha inicialmente en 0 alcanza el sitio $x = 1$. Luego,

$$E[\tau_1] = \frac{1}{\Delta}.$$

DEMOSTRACIÓN. Será útil la siguiente representación de una marcha aleatoria asimétrica:
Sean ξ_i v.a. i.i.d. que toman el valor 1 (respect. -1) con probabilidad $\frac{\nu}{2}$ (respect. $\frac{\mu}{2}$).
Sean T_i v.a. i.i.d. con distribución exponencial de parámetro 2.
Definimos $N_t = n$ si $\sum_{k=1}^{n} T_k \leq t < \sum_{k=1}^{n+1} T_k$.
Finalmente,

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$$

representa una marcha aleatoria a tiempo continuo de parámetro 2 con las probabilidades de transición deseadas.
Luego, por la propiedad de Markov,

$$\tau_1 = \chi_{\{\xi_1=1\}} T_1 + \chi_{\{\xi_1=-1\}} (T_1 + \tau_1' + \tau_1''),$$

donde τ_1' y τ_1'' son respectivamente el primer instante en que una marcha inicialmente en $x = -1$ toca el sitio $x = 0$ y el primer instante en que una marcha independiente de τ_1, inicialmente en 0, toca el sitio $x = 1$.
Ahora, por invariancia bajo traslación, τ_1, τ_1' y τ_1'' tienen la misma distribución.
Luego,

$$\begin{aligned} E[\tau_1] &= E[\chi_{\{\xi_1=1\}} T_1] + E[\chi_{\{\xi_1=-1\}} T_1] + 2E[\chi_{\{\xi_1=-1\}} \tau_1] \\ &= E[T_1] + 2P[\xi_1 = -1] E[\tau_1]. \end{aligned}$$

Usando $E[T_1] = \frac{1}{2}$, se obtiene $E[\tau_1] = \frac{1}{\Delta}$. □

Lema 10. $v_\Delta > \Delta$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer $r = 0$. Para $a = 1$, observamos que el proceso auxiliar es una marcha aleatoria simple. Definimos τ_k como el primer instante en que una marcha inicialmente en $k-1$ alcanza el sitio $x = k$.
Acotamos inferiormente $\tilde{r}_t$ por el proceso $\tilde{m}_t$ definido como sigue:
Inicialmente, sólo hay $a-1$ partículas en 0. En el primer instante τ_1^a en que una de estas partículas toca el sitio $x = 1$, se crean $a-1$ nuevas partículas (en $x = 1$) y se destruyen todas las otras. Ponemos $T_1^a = \tau_1^a$. Inductivamente, si en el instante $\tau_1 + ... + \tau_k^a$, sólo hay $a-1$ partículas en el sitio $x = k$, T_{k+1}^a se define como el primer instante en que una de estas marchas alcanza el sitio $x = k+1$. Cuando ocurre T_{k+1}^a, se crean $a-1$ nuevas partículas en este sitio y se destruyen todas las otras. τ_{k+1}^a se define como $T_{k+1}^a - \tau_k^a - ... - \tau_1^a$. De este modo, los tiempos τ_k son idénticamente distribuidos.
Definimos

$$\tilde{m}_t = n, \qquad \text{si} \quad \sum_{k=1}^{n} \tau_k \leq t < \sum_{k=1}^{n+1} \tau_k.$$

De las definiciones anteriores, se puede probar que $\tilde{m}_t \leq \tilde{r}_t$ de una manera similar a aquella empleada la sección anterior para compara rho_k y ν_k.
En el lema anterior se probó que $E[\tau_1] = \frac{1}{\Delta}$. Además, $P[\tau_1^a > t] = P[\tau_1 > t]^a$.

Luego, se tiene

$$E[\tau_1^a] = \int_0^\infty P[\tau_1^a > t]dt = \int_0^\infty P[\tau_1 > t]^a dt < \int_0^\infty P[\tau_1^a > t]dt = E[\tau_1].$$

Observando que

$$\frac{n+1}{\sum_{k=1}^{n+1} \tau_k^a} \cdot \frac{n}{n+1} < \frac{\tilde{m}_t}{t} \leq \frac{n}{\sum_{k=0}^{n} \tau_k^a},$$

y aplicando la ley de los números grandes a $\{\tau_k\}$ se concluye que

$$t \to \infty \Rightarrow \frac{\tilde{m}_t}{t} \to \frac{1}{E[\tau_1^a]} > \Delta.$$

□

Momentos de ciertos tiempos de impacto.

Sea $X_t := N_t - M_t$ donde N_t y M_t son procesos de Poisson de parámetro ν y μ respectivamente. Sea $\tau_N := \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t = N\}$. Queremos estimar $P[\tau_N > t]$.

$$\begin{aligned} P[\tau_N > t] &= P[\sup_{0\leq s\leq t} X_t < N] \\ &\leq P[X_t < N] \\ &= P[e^{\lambda X_t} < e^{\lambda N}],\ \lambda > 0, \\ &= P[e^{-\lambda N} < e^{-\lambda X_t}]. \end{aligned} \tag{24}$$

Aplicando la desigualdad de Kolmogorov en (24) , se obtiene,

$$\begin{aligned} P[\tau_N > t] &\leq e^{\lambda N} E[e^{-\lambda X_t}] \\ &\leq e^{\lambda N} E[e^{-\lambda(N_t - M_t)}] \\ &\leq e^{\lambda N} E[e^{-\lambda N_t}] E[e^{\lambda M_t}] && (25) \\ &= e^{\lambda N} e^{t(\mu+\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^k}{k!} e^{-\lambda k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{\lambda k} && (26) \\ &= e^{\lambda N} \exp t\{-(\mu+\nu) + \nu e^{-\lambda} + \mu e^{\lambda}\}. \end{aligned}$$

donde en (25) se utilizó la independencia de N_t y M_t, y, en (26), se escribió explícitamente las esperanzas.
Buscamos $\lambda > 0$ tal que $-(\mu+\nu) + \nu e^{-\lambda} + \mu e^{\lambda} < 0$. Pero esto es equivalente a $\frac{\nu}{\mu} > e^{\lambda}$, lo cual es posible solamente si $\nu > \mu$.

Luego, en el caso de una marcha aleatoria asimétrica, existe $C = C(N)$ y $\beta > 0$ tal que:

$$P[\tau_N > t] \leq Ce^{-\beta t}.$$

Con esto, llegamos a la siguiente estimación:

Lema 11. *Para $j \geq a$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $0 \leq \lambda < \lambda_0$,*

$$E[e^{\lambda \nu_j}] < \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Para $j \geq a$ el proceso auxiliar cuenta con exactamente a partículas en movimiento. Luego, ν_j es el mínimo de a tiempos de espera distribuidos como τ_1.

Por la discusión anterior, se tiene entonces

$$P[\nu_j > t] \leq C^M e^{-\beta M t}.$$

Luego

$$E[\exp\{\lambda \nu_j\}] = \lambda \int_0^\infty e^{\lambda x} P[|\nu_j| > x] dx < \infty,$$

para λ suficientemente pequeño.

□

Lema 12. *Para $\frac{1}{\Delta} > \frac{1}{\alpha'} > \frac{1}{v_\Delta}$ existen constantes $0 < C_1, C_2 < \infty$ tales que para cualquier condición inicial ω y $t > 0$*

$$P[t < U < \infty] \leq C_1 \exp\{-C_2 t\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $r = 0$. Sea t_1 tal que $[\alpha' t_1 + 1/2] = M$. Luego, para $t \geq t_1$, se tiene que

$$P[t < U < \infty] \leq P[\tilde{r}_{t_1} > M, \cup_{s>t}\{\tilde{r}_s \leq [\alpha' s + 1/2]\}].$$

Pero $\tilde{r}_s \leq [\alpha' s + 1/2]$ para algún $s > t$ implica $\sum_{j=1}^{[\alpha' s+1/2]} \nu_j \geq s$, lo cual, a su vez, implica $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \nu_j \geq \frac{1}{\alpha'}(1 - \frac{1}{2n})$ para algún $n \geq [\alpha' t + 1/2]$.
Similarmente, $\tilde{r}_{t_1} \geq M$ implica que $\sum_{j=1}^{M} \nu_j \leq (M+1)/\alpha'$. Luego, para $[\alpha' t + 1/2] \geq M + 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
P[t < U < \infty] &\leq P\left[\sum_{j=1}^{M} \nu_j \leq \frac{(M+1)}{\alpha'}, \bigcup_{n=[\alpha' t+1/2]}^{\infty} \{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \nu_j \geq \frac{1}{\alpha'}(1 - \frac{1}{2n})\}\right] \\
&\leq P\left[\bigcup_{n=[\alpha' t+1/2]}^{\infty} \{\frac{1}{n}\sum_{j=M+1}^{n} \nu_j \geq \frac{1}{\alpha'}(1 - \frac{M+1/2}{n})\}\right] \\
&\leq \sum_{n=[\alpha' t+1/2]}^{\infty} P\left[\sum_{j=M+1}^{n} \nu_j \geq \frac{n}{\alpha'} - (M + 1/2)\right] \\
&\leq \sum_{n=[\alpha' t+1/2]}^{\infty} P\left[\exp\{\lambda \sum_{j=M+1}^{n} \nu_j\} \geq e^{\lambda \frac{n}{\alpha'}} e^{-\lambda(M+1/2)}\right] \\
&\leq \sum_{n=[\alpha' t+1/2]}^{\infty} e^{\lambda \frac{n}{\alpha'}} e^{-\lambda(M+1/2)} E[\exp\{\lambda \sum_{j=1}^{n} \nu_j\}].
\end{aligned}$$

Ahora, sabemos que ν_i y ν_j son independientes si $|i - j| \geq 2$, luego, aplicando la desigualdad de Jensen,

$$E[\exp\{\lambda \sum_{j=1}^{N} \nu_j\}] = E\left[\exp\{1/2 \left(2\lambda \sum_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ impar}} \nu_j + 2\lambda \sum_{\substack{1 \leq j \leq n, \\ par}} \nu_j\right)\}\right]$$

$$\leq 1/2\, E\left[\exp\{2\lambda \sum_{\substack{1\leq j\leq n,\\ impar}} \nu_j\} + \exp\{2\lambda \sum_{\substack{1\leq j\leq n,\\ par}} \nu_j\}\right]. \tag{27}$$

Sabemos por la discusión precedente al lema anterior que ν_1 tiene momentos exponenciales $E[e^{\lambda\nu_1}]$ para λ suficientemente pequeño. Luego,

$$E[e^{2\lambda\nu_1}] = E[1 + 2\lambda\nu_1 + 0(\lambda)] \leq C\,(1 + \frac{2\lambda}{v_\Delta}) \leq Ce^{\frac{2\lambda}{v_\Delta}}.$$

Así, se tiene

$$E\left[\exp\{2\lambda \sum_{\substack{1\leq j\leq n,\\ impar}} \nu_{Mj+k}\}\right] = E\left[\exp\{2\lambda\nu_1\}\right]^{[n/2]}$$

$$\leq C\left(e^{\frac{2\lambda}{v_\Delta}}\right)^{[n/2]} \leq Ce^{\frac{\lambda n}{v_\Delta}}.$$

La estimación para la otra parte de la suma es análoga. Luego,

$$P[t < U < \infty] \leq C \sum_{n=[\alpha' t+1/2]}^{\infty} e^{\lambda(M+1/2)}e^{-\lambda\frac{n}{\alpha'}}e^{\lambda\frac{n}{v_\Delta}}$$

$$\leq C \sum_{n=[\alpha' t+1/2]}^{\infty} e^{\lambda n\left(\frac{1}{v_\Delta} - \frac{1}{\alpha'}\right)} \leq C_1\, e^{-C_2 t}.$$

□

4.2. Estimaciones para el Proceso aumentado.

Lema 13. *Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ una marcha aleatoria asimétrica a tiempo continuo con tasa de salto igual a 2, posición inicial $x \leq -1$, $c > 0$ y $E^0[X_t] = (\nu - \mu)t$ con $\nu > \mu$. Sea*

$$\tau = \text{ínf}\{t \geq 0 : X_t \geq [ct]\}.$$

Si $c > \nu - \mu$, entonces:

$$P[\tau = \infty] \geq 1 - exp\{(1+x)\theta_c\}, \qquad x < -1,$$

$$P[\tau = \infty] \geq \exp\{-2/c\}(1 - \exp\{-\theta\}), \qquad x = -1,$$

donde $\theta_c > 0$ es la solución no nula de $c\theta - (\nu e^{\theta} + \mu e^{-\theta} - 2) = 0$.
Además, existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$P[t < \tau < \infty] < C_1 \exp\{-C_2 t\}\left(\exp\{-\theta_c|x|/2\} + \exp\{-tI(|x|/(2t))\}\right),$$

donde I es la función de tasa de la marcha dada por

$$I(x) = 2 + \lambda x - (\nu e^{\lambda} + \mu e^{-\lambda}),$$

y $\lambda = \lambda(x)$ es tal que $x - \nu e^{\lambda} - \mu e^{-\lambda} = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Representamos $X_t = N_t - M_t$, donde N_t y M_t son procesos de Poisson con tasas de salto ν y μ respectivamente, $\nu > \mu$ y $\nu + \mu = 2$.
Observamos que, para $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_t^\theta := exp\{\theta X_t - (\nu e^\theta + \mu e^{-\theta} - 2)t\}$ es una martingala. Luego,

$$E^x[\mathcal{M}_{\tau\wedge n}^\theta] = exp\{\theta x\}.$$

Ahora $X_{\tau\wedge n} \leq [c\tau \wedge n]$. Luego, $\theta X_{\tau\wedge n} - (\nu e^\theta + \mu e^{-\theta} - 2)\tau \wedge n \leq (c\theta - (\nu e^\theta + \mu e^{-\theta} - 2))\tau \wedge n$. Luego, para $\theta \geq \theta_c$, por el teorema de convergencia acotada:

$$E[\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\theta X_\tau - (\nu e^\theta + \mu e^{-\theta} - 2)\tau] = exp\{\theta x\}.$$

Ahora, para $\tau < \infty$, se tiene $X_\tau = [c\tau]$ y, luego, $\theta X_\tau - (\nu e^\theta + \mu e^{-\theta} - 2)\tau \geq (c\theta - (\nu e^\theta + \mu e^{-\theta} - 2)\tau - \theta$. Así,

$$E[\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} exp\{(c\theta - (\nu e^\theta + \mu e^{-\theta} - 2))\tau - \theta] \leq exp\{\theta x\}.$$

Si $\theta \downarrow \theta_c$, se tiene:

$$E[\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} exp\{-\theta_c\}] \leq exp\{\theta_c x\},$$

y luego,

$$P[\tau < \infty] \leq exp\{(1+x)\theta_c\}.$$

Para el caso $x = -1$, notamos que la probabilidad de que la marcha no salte antes de $t = 1/c$ es $\exp\{-2/c\}$. Luego, basta usar la propiedad de Markov y el resultado para $x = -2$.
Para probar la última afirmación, usamos:

$$P[t < \tau < \infty] \leq P[X_t > B] + P[t < \tau < \infty,\, X_t \leq B].$$

Ahora, usando la función de tasa I, se obtiene

$$P[X_t > B] \leq \exp\{-tI((B + |x|)/t)\}.$$

Por otro lado, utilizando la propiedad fuerte de Markov y la invarianza bajo traslaciones,

$$P[t < \tau < \infty,\, X_t \leq B] \leq P_{-([ct]-B)}[\tau < \infty] \leq \exp\{-([ct] - B - 1)\theta_c\}.$$

Finalmente, basta elegir $B = ([ct] + x)/2$ para obtener el resultado. □

Lema 14. *Para cada $\alpha' > \Delta$ existe $0 < C < \infty$ tal que para $t \geq 0$ y $\omega \in S$*

$$\mathbb{P}_\omega[t < V < \infty] \leq Ce^{-Ct}.$$

DEMOSTRACIÓN. Tomamos $r = 0$. Considere los eventos

$$A_{x,i,r+l} := \{Z_{x,i,r+l}(s) \geq [\alpha' s], \text{ para algún } s > t,\ Z_{x,i,r+l}(u) < [\alpha' u],\ \forall u \leq t, \tau_{x,i,r+l} > t\}.$$

Luego, $\{t < V < \infty\} = \bigcup_{(x,i,r+l)\in\mathcal{B}_0} A_{x,i,r+l}$. Pero,

$$P[A_{x,i,r+l}] \leq P[Z_{x,i,r+l}(s) > [\alpha' s], \text{ para algún } s > t] = P_z[t < \tau < \infty],$$

donde z es la posición inicial de la marcha $Z_{x,i,r+l}$; de modo que, usando el Lema anterior y recordando que hay a lo más M partículas por sitio, se tiene

$$\mathbb{P}_\omega[t < V < \infty] \leq M \sum_{x=-\infty}^{-1} P_x[t < \tau < \infty].$$

Basta usar $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-I(k/(n+1))} \leq (n+1)\sum_{k=0}^{\infty} e^{-I(k)}$ y la segunda parte del Lema anterior. □

Con las estimaciones anteriores para U y V, se obtiene:

Corolario 2. *Existe una constante* $0 < C < \infty$ *tal que*

$$\mathbb{P}_\omega[t < L < \infty] \leq Ce^{-Ct}.$$

Lema 15. *Existe una constante estrictamente positiva* δ_1 *tal que*

$$\mathbb{P}_\omega[V < \infty] < 1 - \delta_1.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $r = 0$. Si definimos $\overline{V}$ como el primer instante en que una partícula del proceso aumentado toca la línea $[\alpha' t]$, sin tomar en cuenta la anhiquilación entre partículas, se observa que $\overline{V} \leq V$. Luego, usando el primer resultado del Lema 13,

$$\mathbb{P}_\omega[V = \infty] \geq \mathbb{P}_\omega[\overline{V} = \infty] \geq e^{-2M/\alpha'}(1 - e^{-\theta_c})^M \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{-n\theta_c})^M =: \delta_1.$$

□

Lema 16. *Existe una constante* $\delta_2 > 0$ *tal que para cualquier condición inicial* ω *con al menos* $a - 1$ *partículas en el frente*

$$\mathbb{P}_\omega[U < \infty] < 1 - \delta_2.$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer $r = 0$.
Recordando que $\tilde{r}_s \leq [\alpha' s]$ es equivalente a $\sum_{j=1}^{[\alpha' s]} \nu_j \geq s$, observamos que

$$\{U = \infty\} \supset \bigcap_{k=1}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{k} \nu_j < \frac{2k-1}{2\alpha'}\}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, $0 < \epsilon < \inf(\frac{1}{2\alpha'}, \frac{1}{v_\Delta})$. Definimos G como el evento de que cada marcha $Y_{(x,i,-1)}$ con $0 \leq x \leq n$ avanza $M+1$ pasos hacia la derecha antes del tiempo $t = \epsilon$.
Observamos que cuando G ocurre, $\nu_j < 1/(2\alpha')$ para cada $0 \leq j \leq k$ y se tiene $\sum_{j=1}^{k} \nu_j \leq k/(2\alpha')$, para todo $k \leq n + [M/a] := n'$.
Ahora, observamos que $G \cap \bigcap_{k=1}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{k} \nu_j < \frac{k}{\alpha'}\} \supset G \cap H$, donde

$$H = \bigcap_{k=n'+1}^{\infty} \{ \sum_{j=n'+1}^{k} \nu_j < \frac{2k-1}{2\alpha'} - n'\epsilon\}.$$

Como G y H son independientes, se tiene que $\mathbb{P}[U = \infty] \geq P[G]P[H]$. Estimamos $P[H^C]$, procediendo análogamente al Lema 12,

$$
\begin{aligned}
P[H^C] &\leq \sum_{k=n'+1}^{\infty} P[\sum_{j=n'+1}^{k} \nu_j \geq \frac{2k-1}{2\alpha'} - n'\epsilon] \\
&= \sum_{k=n'+1}^{\infty} P[\lambda \exp\{\sum_{j=n'+1}^{k} \nu_j\} \geq e^{\lambda \frac{2k-1}{2\alpha'}} e^{-\lambda n' \epsilon}] \\
&\leq C \sum_{k=n'+1}^{\infty} e^{-\lambda \frac{2k-1}{2\alpha'}} e^{\lambda n' \epsilon} e^{\lambda \frac{k-n'-1}{v_\Delta}} \\
&= C e^{\lambda n' \epsilon} e^{-\frac{\lambda}{v_\Delta}(n'+1)} \sum_{k=n'+1}^{\infty} e^{-\lambda k (\frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{v_\Delta})} \\
&\leq C e^{\lambda n' (\epsilon - \frac{1}{v_\Delta})}.
\end{aligned}
$$

Como la última exponencial tiende a 0 con n', se obtiene la estimación.

□

Lema 17. *Existe una constante $\delta > 0$ tal que para cualquier condición inicial ω con al menos $a-1$ partículas en el frente*

$$\mathbb{P}_\omega[D < \infty] < 1 - \delta.$$

DEMOSTRACIÓN. Usamos la independencia de U y V y las cotas anteriores en

$$\mathbb{P}_\omega[L = \infty] = \mathbb{P}_\omega[U = \infty]\mathbb{P}_\omega[V = \infty] \geq \delta.$$

Luego,

$$\mathbb{P}_\omega[L = \infty] \geq \delta.$$

Como $D \geq L$, se obtiene $\mathbb{P}_\omega[D = \infty] \geq \delta$, y, luego, $\mathbb{P}_\omega[D < \infty] < 1 - \delta$.

□

Corolario 3. *Para cualquier condición inicial ω con al menos $a-1$ partículas en el frente*

$$\mathbb{P}_\omega[L < \infty] < 1 - \delta,$$

donde δ es la constante del Lema anterior.

Lema 18. *Existe una constante $C < \infty$ tal que, para toda condición inicial con $r = 0$ y $M' > M$, se tiene*

$$\mathbb{P}_\omega[r_t \geq M't] \leq C \exp\{-Ct\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como en cada instante hay a lo más M partículas en el frente, la máxima tasa de salto posible es $2M$. El resultado es, entonces, una estimación estándar de procesos de Poisson. □

Lema 19. *Para todo $p \geq 1$, existe una constante $C = C(p) < \infty$ tal que*

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1 > t | D = \infty] \leq Ct^{-p}.$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizamos la estructura de renovación definida en (22) y (23).

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1 > t|D = \infty] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[S_k > t, K = k|D = \infty].$$

Observamos que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[S_k > t, K = k|D = \infty] \\ \leq & \frac{\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[K = k]}{\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[D = \infty]} \\ \leq & \frac{1}{\delta}\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L_1 < \infty, ..., L_{k-1} < \infty, L_k = \infty]. \end{aligned}$$

Al condicionar con respecto a $\mathcal{F}_{S_k}$, la última expresión se convierte en

$$\frac{1}{\delta}\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\mathbf{1}_{\{L_1<\infty,...,L_{k-1}<\infty\}}\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L_k = \infty|\mathcal{F}_{S_k}]].$$

Analicemos el término $\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L_k = \infty|\mathcal{F}_{S_k}]$; queremos probar

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L_k = \infty,\ B] = \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L = \infty]\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[B],$$

para eventos de la forma $B = \{S_k \leq t,\ S_k = T_x\} \cap B_x$ con $B_x \in \mathcal{F}_x$. Utilizando la propiedad de Markov con respecto a los instantes T_x, tenemos

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L_k = \infty,\ S_k \leq t, S_k = T_x, B_x] \\ = & \mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\mathbf{1}_{S_k=T_x\leq t,\ B_x}\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L_k = \infty|\mathcal{F}_x]] \\ = & \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L = \infty]\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[S_k = T_x \leq t,\ B_x] \\ = & \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L = \infty]\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[B], \end{aligned}$$

de modo que

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L_k = \infty|\mathcal{F}_{S_k}] = \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L = \infty].$$

Ahora, en virtud del Corolario 3, se concluye

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[S_k > t, K = k|D = \infty] \\ \leq & \frac{(1-\delta)}{\delta}\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[L_1 < \infty, ..., L_{k-2} < \infty]. \end{aligned}$$

Aplicando el mismo tipo de razonamiento a los eventos $\{L_i < \infty\}$, $1 \leq i \leq k-1$, se obtiene, inductivamente,

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[S_k > t, K = k|D = \infty] \leq \frac{(1-\delta)^{k-1}}{\delta},$$

con $\delta > 0$ dado por la estimación del Lema 17. Luego, para $l > 0$ se tiene

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1 > t | D = \infty] \leq \sum_{k=1}^{l} \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[t < S_k < \infty | D = \infty] + \delta^{-2}(1-\delta)^l.$$

Sea $0 < \gamma < 1$, definimos el evento

$$A_k := \{r_{L_1} - r_{S_1} < t^\gamma, r_{L_2} - r_{S_2} < t^\gamma, ..., r_{L_{k-1}} - r_{S_{k-1}} < t^\gamma\}$$

Observamos que, sobre A_k, se tiene $r_{S_k} \leq k(1+t^\gamma)$. Podemos escribir

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[t < S_k < \infty | D = \infty] \\ \leq \; & \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[A_k^C, S_k < \infty | D = \infty] + \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[A_k, t < S_k < \infty | D = \infty]. \end{aligned} \tag{28}$$

Usando el hecho de que $\mathbb{P}_{a\delta_0}[D = \infty] \geq \delta > 0$, se tiene que

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[A_k^C, S_k < \infty | D = \infty] \leq C \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[r_{L_i} - r_{S_i} \geq t^\gamma, S_k < \infty].$$

Ahora, sea $M' > M$; luego, recordando que $S_k < \infty$ implica $L_i - S_i < \infty$ para $i \leq k$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[r_{L_i} - r_{S_i} \geq t^\gamma, S_k < \infty] &= \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[r_{L_i} - r_{S_i} \geq t^\gamma, S_k < \infty, L_i - S_i \leq t^\gamma/M'] \\ &+ \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[r_{L_i} - r_{S_i} \geq t^\gamma, S_k < \infty, L_i - S_i > t^\gamma/M'] \\ &\leq \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[r_{S_i + t^\gamma/M'} - r_{S_i} \geq t^\gamma] + \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[t^\gamma/M' < L_i - S_i < \infty]. \end{aligned}$$

Por la propiedad fuerte de Markov y el Lema 18,

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[r_{S_i + t^\gamma/M'} - r_{S_i} \geq t^\gamma] \leq C \exp\{-Ct^\gamma\}.$$

Aplicando nuevamente la propiedad fuerte de Markov y el Corolario 2, se tiene

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[t^\gamma/M' < L_i - S_i < \infty] \leq C \exp\{-Ct\}.$$

Tomando $l = -p/\log(1-\delta)\log(t)$, se logra controlar el primer sumando de (28). Falta estimar $\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[A_k, t < S_k < \infty, U < \infty | D = \infty]$. Ya habíamos observado que sobre el evento $\{t < S_k, A_k, U < \infty\}$ se tiene $r_{S_k} \leq k(1+t^\gamma)$, y por lo tanto, $\tilde{r}_t \leq k(1+t^\gamma)$. Así, tenemos $\tilde{r}_t \leq C\log(t)(1+t^\gamma)$. Aplicando la desigualdad de Kolmogorov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\tilde{r}_t \leq C\log(t)(1+t^\gamma)] &= \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\exp\{\tilde{r}_t\} \leq t^{C\lambda(1+t^\gamma)}] \\ &\leq t^{C\lambda(1+t^\gamma)} \mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\exp\{-\lambda \tilde{r}_t\}]. \end{aligned}$$

Estimemos esta última esperanza.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\exp\{-\lambda\tilde{r}_t\}]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k}\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\tilde{r}_t = k]\\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k}\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\sum_{j=0}^{k}\nu_j \leq t < \sum_{j=0}^{k+1}\nu_j]\\
&\leq e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k}\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\exp\{\lambda\sum_{j=0}^{k+1}\nu_j\}]\\
&= e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k}\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[e^{2\lambda\nu_1}]^{k+1} \qquad (29)\\
&\leq Ce^{-\lambda t},
\end{aligned}$$

para λ suficientemente pequeño. En (29), se utilizó la desigualdad de Jensen tal como en (27). Esto finaliza la prueba del Lema.

□

Lema 20. *(i) Se tiene* $\mathbb{E}_{a\delta_0}[\kappa_1|D = \infty] < \infty$, $\mathbb{E}_{a\delta_0}[\kappa_1^2|D = \infty] < \infty$,
(ii) $\mathbb{E}_{a\delta_0}[r_{\kappa_1}|D = \infty] < \infty$, $\mathbb{E}_{a\delta_0}[r_{\kappa_1}^2|D = \infty] < \infty$.

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación sigue del lema anterior. Las otras dos, requieren, además, del resultado del Lema 18. □

5. LEY DE LOS NÚMEROS GRANDES Y TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

5.1. Ley de los números grandes. Considere el proceso de combustión con $r = 0$ y $\eta(0,0) = a - 1$. Probaremos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r_t}{t} = v := \frac{\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[r_{\kappa_1}|D = \infty]}{\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1|D = \infty]}. \qquad (30)$$

La prueba se basa en [9].

Observamos que la Proposicion 4 y el Lema 20 implican

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\kappa_n}{n} = \mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1|D = \infty], \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{r_{\kappa_n}}{n} = \mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[r_{\kappa_1}|D = \infty]. \qquad (31)$$

Para $t \geq 0$, definimos $n_t := \sup\{n \geq 0 : \kappa_n \leq t\}$, con la convención $\kappa_0 = 0$. Gracias a (31) podemos concluir que $n_t < \infty$, c.s., y $\lim_{t\to\infty}\kappa_{n_t} = \infty$, c.s. y $\kappa_{n_t} \leq t < \kappa_{n_t+1}$. Utilizando esta inecuación y los límites en (31), tenemos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{n_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1|D = \infty]},$$

y,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r_{\kappa_{n_t}}}{t} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{r_{\kappa_{n_t}}}{\kappa_{n_t}}\right)\left(\frac{\kappa_{n_t}}{t}\right) = v. \qquad (32)$$

Ahora, nos gustaría tener una estimación similar, remplazando $r_{\kappa_{n_t}}$ por r_t. Pero, utilizando la definición de n_t y (32), se tiene

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|r_t - r_{\kappa_{n_t}}|}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{r_{\kappa_{n_t+1}} - r_{\kappa_{n_t}}}{t} = 0,$$

lo cual prueba (30). Del Lema (10), es inmediato concluir que $v > p - q$.

5.2. Teorema del límite central. Considere nuevamente el proceso de combustión con $r = 0$ y $\eta(0,0) = a - 1$. Sea

$$B_t^\epsilon := \epsilon^{1/2}(r_{\epsilon^{-1}t} - \epsilon^{-1}t),\ t \geq 0,$$

$$R_j := r_{\kappa_{j+1}} - r_{\kappa_j} - (\kappa_{j+1} - \kappa_j)v,\ j \geq 0,$$

$$\Sigma_m := \sum_{j=1}^{m} R_j.$$

Para $0 \leq t \leq T < \infty$,

$$|B_t^\epsilon - \epsilon^{1/2}\Sigma_{n_{t/\epsilon}}| \leq 2\epsilon^{1/2} \sup_{0\leq n\leq n_{\epsilon^{-1}T}} (r_{\kappa_{n+1}} - r_{\kappa_n}) + 2v\epsilon^{1/2} \sup_{0\leq n\leq n_{\epsilon^{-1}T}} (\kappa_{n+1} - \kappa_n).$$

Usando la Proposición 4, tenemos que, para $u > 0$ y $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\epsilon^{1/2}(\kappa_{n+1} - \kappa_n) > u] \\
=\ &\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\epsilon^{1/2}(\kappa_{n+1} - \kappa_n) > u|\mathcal{G}_n] \\
=\ &\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\epsilon^{1/2}\kappa_1 > u|D = \infty] \\
\leq\ &\epsilon u^{-2}\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1^2 \mathbf{1}_{\{\kappa_1 > \epsilon^{-1/2}u\}}|D = \infty].
\end{aligned}$$

En virtud del Corolario 20, esta última expresión tiende a 0 si $\epsilon \to 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\sup_{0\leq n\leq n_{\epsilon^{-1}T}} (\kappa_{n+1} - \kappa_n) > u] \\
\leq\ &\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1 > \epsilon^{-1}u] + \epsilon u^{-2}(T\epsilon^{-1} + 1)\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1^2 \mathbf{1}_{\{\kappa_1 > \epsilon^{-1/2}u\}}|D = \infty],
\end{aligned}$$

tiende a 0 con ϵ. De este modo,

$$\sup_{0\leq n\leq n_{\epsilon^{-1}T}} (\kappa_{n+1} - \kappa_n) \to 0, \tag{33}$$

en probabilidad. Repitiendo el mismo argumento para los incrementos $r_{\kappa_{n+1}} - r_{\kappa_n}$, se concluye que

$$\sup_{0\leq n\leq n_{\epsilon^{-1}T}} (r_{\kappa_{n+1}} - r_{\kappa_n}) \to 0, \tag{34}$$

en probabilidad. Luego, $B_t^\epsilon - \epsilon^{1/2}\Sigma_{n_{\epsilon^{-1}t}}$ converge a 0 en probabilidad, uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$. Por el principio de invarianza de Donsker, sabemos que $\epsilon^{1/2}\Sigma_{\cdot/\epsilon}$ converge en ley a un movimiento Browniano con varianza $\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[(r_{\kappa_1} - \kappa_1 v)^2|D = \infty]$, donde Σ_s denota la interpolación lineal de Σ_m. De la prueba anterior, sabemos que $\lim_{t\to\infty} n_t/t = 1/\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1|D = \infty]$.

Como $\epsilon n_{t\epsilon^{-1}}$ es creciente en t, $\epsilon n_{t\epsilon^{-1}} \to t/\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1|D=\infty]$, uniformemente en compactos de t.

Probaremos finalmente que $\epsilon^{1/2}\Sigma_{n_{\epsilon^{-1}t}} - \epsilon^{1/2}\Sigma_{l(\epsilon)t}$ converge a 0 en probabilidad cuando $\epsilon \to 0$, donde $l(\epsilon) := (\epsilon\mathbb{E}[\kappa_1|D=\infty])^{-1}$. Sea $\alpha > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[|\epsilon^{1/2}\Sigma_{n_{\epsilon^{-1}t}} - \epsilon^{1/2}\Sigma_{l(\epsilon)t}|| \geq \alpha] \\ = \ & \mathbb{P}[|\epsilon^{1/2}\Sigma_{n_{\epsilon^{-1}t}} - \Sigma_{l(\epsilon)t} \geq \alpha,\ |n_{\epsilon^{-1}t} - l(\epsilon)t| < 1] \\ & +\mathbb{P}[|\epsilon^{1/2}\Sigma_{n_{\epsilon^{-1}t}} - \Sigma_{l(\epsilon)t} \geq \alpha,\ |n_{\epsilon^{-1}t} - l(\epsilon)t| \geq 1]. \end{aligned} \tag{35}$$

Ya habíamos observado que el segundo sumando de (35) converge a 0 uniformemente en compacto de t. Para el primer sumando, basta observar que, sobre el evento $\{|n_{\epsilon^{-1}t} - l(\epsilon)t| < 1\}$, se tiene

$$|\Sigma_{n_{\epsilon^{-1}t}} - \Sigma_{l(\epsilon)t}| \leq 2 \sup_{0\leq j\leq n_{\epsilon^{-1}t}} (r_{\kappa_{j+1}} - r_{\kappa_j}) + v \sup_{0\leq j\leq n_{\epsilon^{-1}t}} (\kappa_{j+1} - \kappa_j),$$

lo cual converge a 0 en probabilidad, uniformemente en compactos de t, tal como se estableció en (33) y (34).

Luego, $\epsilon^{1/2}\Sigma_{n_{\epsilon^{-1}t}}$ es tensa en la topología de Skorohod y sus distribuciones finito dimensionales convergen a las distribuciones finito dimensionales de un movimiento Browniano con varianza

$$\sigma^2 := \frac{\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[(r_{\kappa_1} - \kappa_1 v)^2|D=\infty]}{\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\kappa_1|D=\infty]}.$$

5.3. La varianza es no degenerada.

Probaremos que

$$\mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[(r_{\kappa_1} - \kappa_1 v)^2|\, D=\infty] > 0.$$

Para esto, basta probar que, para algún $\alpha' < \beta < v$, se tiene

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[r_{\kappa_1} = x,\ x\beta^{-1} \leq \kappa_1,\ D=\infty] > 0.$$

Pero, con las notaciones de la sección 3, y recordando que, por el Lema 5, para $x > 0$, se tiene $\{D=\infty,\ D_x=\infty\} = \{D_x=\infty,\ D > T_x\}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[r_{\kappa_1} = x,\ x\beta^{-1} \leq \kappa_1,\ D=\infty] \\ = \ & \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\tilde{E}_x,\ D_x=\infty,\ x\beta^{-1} \leq T_x,\ D=\infty] \\ = \ & \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\tilde{E}_x,\ D_x=\infty,\ x\beta^{-1} \leq T_x,\ D > T_x]. \end{aligned}$$

Condicionando con respecto a $\mathcal{F}_x$ y utilizando la invariancia por translaciones, esta última expresión se reescribe como

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{(a-1)\delta_0}[\mathbf{1}_{\{\tilde{E}_x, x\beta^{-1}<T_x\leq D\}}\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[D_x=\infty|\, \mathcal{F}_x]] \\ = \ & \mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\tilde{E}_x,\ x\beta^{-1} \leq T_x < D]\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[D=\infty]. \end{aligned}$$

Ahora, por el Lema 17, sabemos que

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[D=\infty] > 0.$$

Sólo falta probar que

$$\mathbb{P}_{(a-1)\delta_0}[\tilde{E}_x,\, x\beta^{-1} \leq T_x < D] > 0.$$

Pero podemos minorar esta cantidad por la probabilidad del siguiente evento: una de las partículas originalmente en 0 salta hasta el sitio x en un tiempo t tal que $x\beta^{-1} < t < L(\alpha')^{-1}$, y se queda en ese sitio hasta el tiempo $L(\alpha')^{-1}$, mientras que todas las otras partículas (negras y rojas) entre los sitios 0 y x no se mueven durante el intervalo de tiempo $[0, L(\alpha')^{-1}]$.

Observe que, sobre este evento, se tiene $D_y \leq T_x$, $\forall\, 0 < y < x$, pues se cumple que $D_y = T_{y+1}$, para $0 < y < x$.

6. Apéndice I: Proceso de combustión con exclusión

Constuiremos ahora un proceso de combustión en el que las partículas activas describen un proceso de exclusión simple. Advertimos que la construcción y las pruebas que se dan a continuación pueden ser fácilmente generalizada, permitiendo saltos de rango acotado. Evitaremos, en lo posible, algunos detalles técnicos que ya han sido tratados en el caso del proceso de combustión asimétrico.

Construcción

Para construir este proceso, empleamos la representación gráfica. A cada par de sitios conectados $\{x, y\}$, le asociamos un reloj de Poisson de tasa 1, $N_{x,y}$, independientemente en cada par de sitios.

Inicialmente, tenemos un sitio $r \in \mathbb{Z}$, que denota el sitio visitado más a la derecha, y una nube de partículas a la izquierda de r, con a lo más una partícula por sitio y una partícula sobre el sitio r. A cada una de estas partículas le asociamos un índice r, salvo la partícula en r, que recibe el índice $r+1$. Sobre cada sitio $x > r$, x par, hay una partícula dormida de índice $x+1$.

Denotamos r_t el sitio más a la derecha visitado por una partícula de índice no negativo en el instante t. En cada instante $s \geq t$ en que suena el reloj entre los sitios $x, y \geq r_t$, se intercambian los estados de ambos sitios. El primer instante s en que suena el reloj entre los sitios r_t y r_t+1, con $\eta(r_t, t) = 1$ y r_t impar (o sea, hay una partícula dormida sobre r_t+1), no se realiza el salto y se despierta la partícula dormida sobre r_t+1, la cual empieza a seguir la dinámica de rango cero. Si r_t es impar, simplemente, se realiza el salto.

Esto define un proceso η_t si escribimos $\eta(x,t) = 1$ cada vez que hay una partícula activa sobre el sitio x en el instante t, y $\eta(x,t) = 0$, en caso contrario.

Para $x \geq r$, definimos T_x como el primer instante en que una partícula de índice no negativo toca el sitio x. Inductivamente, en cada instante T_{r+k}, rellenamos cada sitio desocupado a la derecha de $r+k$ con una partícula de índice $r-k$. Esto define un proceso aumentado $\overline{\eta}_t$, donde $\eta(x,l,t) = 1$ si hay una partícula de índice l sobre el sitio x en el instante t, y $\eta(x,l,t) = 0$ en caso contrario.

Tiempos de renovación

Para $x \geq r$, definimos s_t^x como el sitio más a la derecha vistado por una partícula de índice menor o igual a x. Definimos

$$D_x := \text{ínf}\{t \geq T_x : s^x_{T_x+t} = r_{T_x+t} + 1\}.$$

Observe que los tiempos $D'_x := D_x - T_x$ son idénticamente distribuidos. Como siempre, definimos el tiempo de regeneración

$$\kappa := \text{ínf}\{t \geq 0 : r_t = r_{t-} + 1,\ D_{r_t} = \infty\}.$$

Podemos definir una suerte de proceso auxiliar como sigue: definimos $\tilde{\eta}_t^x$, como el proceso que se obtiene a partir de la condición inicial δ_x que consiste en poner una partícula en el sitio x y ninguna otra partícula, utilizando la familia de relojes $\{N_e(T_x + \cdot)\}$. Denotamos por $\tilde{r}_t^x$ el frente de este proceso. Observe que para $t < D'_x$, se tiene $\tilde{r}_t = r_{T_x+t}$, pues antes de este instante, el frente es generado exclusivamente por partículas de índice mayor que x. Una prueba rigurosa de este hecho se obtiene adaptando los Lemas 3 y 4.

El siguiente Lema es el análogo del Lema 5.

Lema 21. *Sea $x < y$. Sobre el evento $\{\kappa = T_y\}$, se tiene $\{D_x \leq D_y\}$.*

Demostración. Supongamos $T_y < D_x < \infty$. Podemos comparar $s^x(T_y - T_x + \cdot)$ con $s^y(\cdot)$. Note que ambos procesos utilizan los mismo relojes, o sea, $\{N_e(T_y + \cdot\}$. Ahora, todas las partículas que se consideran en el primer proceso también se consideran en el segundo, y, por la observación anterior, siguen la misma trayectoria en ambos procesos. Luego,

$$s^x(T_y - T_x + t) \leq s^y(t),\ \forall t \geq 0. \tag{36}$$

También, gracias a la condición $D_y = \infty$, tenemos

$$\tilde{r}^x(T_y - T_x + t) = \tilde{r}^y(t) = r(T_y + t),\ \forall t \leq D'_x - T_y. \tag{37}$$

Combinando (36) y (37), se concluye que $D_y \leq D_x$, lo cual sería una contradicción.

□

Con estos resultados, podemos enunciar el análogo de la propiedad de Markov para el proceso de exclusión. Definimos $\mathcal{K}$ como la familia de aquellos conjuntos borelianos del espacio de trayectorias, invariantes por permutación de los índices negativos.

Proposición 5. *Para todo $A \in \mathcal{K}$,*

$$\mathbb{P}_\eta[\tau_{-r_\kappa}\overline{\eta}(\kappa + \cdot) \in A|\mathcal{G}] = \mathbb{P}_{\delta_0}[\overline{\eta}_\cdot \in A|D = \infty].$$

La prueba es idéntica a la demostración de la Proposición 2.

7. Apéndice 2: el proceso aumentado es un proceso fuertemente markoviano.

El proceso aumentado nace al acoplar una cantidad cada vez mayor de procesos. En efecto, se tiene un proceso, formado por partículas de prioridad mayor o igual a 0 que es fuertemente markoviano, al menos hasta T_x, para cada $x \geq r$ (recordemos que T_x es el primer instante en que una partícula negra toda el sitio x, para $x \geq t$). Además, en cada tiempo de parada T_x, se agregan partículas nuevas (las partículas *rojas*) que no afectan la dinámica de las partículas *negras*.

Denotamos por $\tilde{w}_t(x)$ el número de partículas con prioridad no negativa en el sitio x en el instante t. Para $k \in \mathbb{Z}$, denotamos por $w_t^{(k)}(x)$ el número de partículas con prioridad k en el sitio x en el instante t. Vemos que $w_t^{(k)}(x) = 0$, $\forall t < T_{k-1}$. Observamos que el proceso $w^{(0)}(\cdot)$ es un proceso fuertmente markoviano. Para ver esto, basta observar que se trata de un sistema de partículas con espacio de estados compacto, de rango débil, y, luego, seguir la construcción de Ligget en [6].

También es posible ver que $\tilde{w}_\cdot$ es un proceso fuertemente markoviano.

Podemos recobrar el proceso aumentado mediante

$$w_t = \tilde{w}_t + \sum_{k<0} w_t^{(k)},$$

donde la suma se realiza libremente, coordenada por coordenada.

Sea $\mathcal{M}$ la familia de aquellas conjuntos $A \in \mathcal{K}$ para los cuales existe $(A_x)_{x\in\mathbb{Z}}$, borelianos de $\mathcal{D}([0,+\infty);\{0,...,M\})$ de modo que

$$\{w. \in A\} = \{w.^{(-1)} + w.^{(0)} \in A_0\} \cap \bigcap_{x\neq 0,-1} \{w.^{(x)} \in A_x\}.$$

Observe que $\mathcal{M}$ es estable para intersecciones numerables. Observe además que, si $A \in \mathcal{M}$, para todo $x \geq 0$, existen $A_{x,1}$, $A_{x,2} \in \mathcal{K}$, tal que

$$\{w_{T_x+\cdot} \in A\} = \{\tilde{w}_{T_x+\cdot} + \sum_{k=-x-1}^{-1} w_{T_x+\cdot}^{(k)} \in A_{x,1}\} \cap \{\sum_{\substack{|k|\geq x \\ k\neq -x-1}} w_{T_x+\cdot}^{(k)} \in A_{x,2}\}.$$

Denotamos por τ la topología de $\mathcal{E}$.

Lema 22. *$\mathcal{M}$ genera $\mathcal{K}$.*

Demostración. Es claro que $\sigma(\mathcal{M}) \subset \mathcal{K}$. Falta probar la otra inclusión. Observamos que, como $w.$ es cadlai, los cilindros $\{\pi_t^{-1}(B),\ t\geq 0,\ B\in\tau\}$ generan $\mathcal{K}$, donde $\pi_t : \mathcal{E}^{[0,+\infty)} \to \mathcal{E}$ es la proyección canónica sobre la coordenada t. Es claro que podemos limitarnos a considerar conjuntos $B \in \mathcal{E}$ invariantes por permutación de las partículas de prioridad 0 y -1. Para concluir la demostración, basta observar que es suficiente considerar cilindros de la forma $A = \{w_t^{(-1)} + w_t^{(0)} \in B_0\} \cap \bigcap_{\substack{|k|\geq 1 \\ k\neq -1}} \{w_t^{(k)} \in B_k\}$. En efecto, consideremos $\{0,...,M\}$ con la topología discreta y $\mathcal{H} := \{0,...,M\}^{\mathbb{Z}}$, premunido de la tribu boreliana $\mathcal{B}$, que se obtiene al dotar $\mathcal{H}$ de la topología producto. Podemos representar $\mathcal{E}$ como un subespacio de $\mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$, al considerar la k-ésima copia de $\mathcal{H}$ como el estado de $w_t^{(k)}$. Luego, la tribu producto sobre $\mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$ es generada por los conjuntos de la forma $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}}\{w_t^{(k)} \in A_k\}$, donde $A_k \subset \mathcal{H}$ es un boreliano de $\mathcal{H}$, distinto de $\mathcal{H}$ sólo para una cantidad finita de coordenadas. Por el teorema $V.2.3$ de [8], esta tribu coincide con la tribu boreliana de $\mathcal{H}^{\mathbb{Z}}$, con lo cual se concluye la prueba. □

Lema 23. *Para todo $A \in \mathcal{K}$, $x \geq 0$, se tiene*

$$\mathbb{P}_w[\tau_{-x}w(T_x+\cdot) \in A|\mathcal{F}_x] = \mathbb{P}_{(a-1)\delta_x}[w(\cdot) \in A].$$

Demostración. Nuevamente, es suficiente considerar conjuntos de la forma $A = \{w_t^{(-1)} + w_t^{(0)} \in B_0\} \cap \bigcap_{k\geq 1}\{w_t^{(k)} \in B_k\}$. Ahora, al aplicar el shift τ_{-x} y evaluando en $T_x + t$, obtenemos el evento

$$\begin{aligned} (38)\qquad \{\tau_{-x}w(T_x+t) \in A\} &= \{\tau_{-x}w^{(-x-1)}(T_x+t) + ... + \tau_{-x}w^{(x)}(T_x+t) \in B_0\} \\ &\cap \bigcap_{\substack{|k|>x \\ k\neq -x-1}} \{\tau_{-x}w^{(k)}(T_x+t) \in B_k\}. \end{aligned}$$

Llamemos $\tilde{u}_t$ a la suma en el primer conjunto del lado derecho de la igualdad anterior. Aplicando la propiedad fuerte de Markov para T_x, vemos que, $\tilde{u}_t$, condicionado con respecto a $\mathcal{F}_x$, tiene la misma ley que $w_t^{(-1)} + w_t^{(0)}$, con la condición inicial $(a-1)\delta_0$.

Ahora, por construcción, sabemos que, para $|k| > x$, $k \neq -x-1$, condicionar $\tau_{-x}w^{(k)}(T_x+t)$, con respecto a $\mathcal{F}_x$ es equivalente a condicionarlo con respecto a $w(T_x)$, pues cada uno de los procesos $w^{(k)}$ se define solamente a partir de la condición inicial $w(T_k)$.

Esto nos dice que

$$\mathbf{1}_{\bigcap_{\substack{|k|>x \\ k\neq -x-1}} \{\tau_{-x}w^{(k)}(T_x+t)\in B_k\}}$$

es función de X_{T_x} (digamos $f_t(X_{T_x})$) donde $X_s := \tau_{-x}w_s^{(-x-1)} + \ldots + \tau_{-x}w_s^{(x)}$. Si ponemos

$$g_t(X_{T_x}) := \mathbf{1}_{\{X_{T_x+t}\in B_0\}} f_t(X_{T_x}),$$

las observaciones anteriores nos permiten concluir que

$$\mathbb{E}_w[g_t(X_{T_x})|\mathcal{F}_x] = E_{(a-1)\delta_0}[g_t(X_0)],$$

con lo cual se acaba la prueba del Lema. □

REFERENCIAS

[1] Bandyopadhyay, A., Zeitouni, O. (2005). *Random Walk in Dynamic Markovian Random Environment*, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, **1**, 205-224.

[2] Comets, F., Quastel, J. and Ramírez A.F. *Fluctuations of the front in a stochastic combustion model*. Por publicar en Annales de l'Institut Henri Poincaré.

[3] Comets, F., Quastel, J. and Ramírez A.F. *Fluctuations of the front in a one dimensional model of $X+Y \to 2Y$*. Preprint.

[4] Kalikow, S.A. (1981). *Generalized random walk in a random environment*, The Annals of Probability, **9**, 753-768.

[5] Kesten, H (1977). *A renewal theorem for random walks in a random environment*, Proceeding of Symposia in Pure Mathematicas, **31**.

[6] Liggett, T., *Interacting particles systems*, Springer, New York, 1985.

[7] Mai, J.; Sokolov, I.M.; Kuzovkov, V.N.; Blumen, A. (1997). *Front for and velocity in a one-dimensional auto-catalytic $A+B \to 2A$ reaction*, Phys. Rev. E **56**, 4130-4134.

[8] Parthasarathy, K. R., *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, New York and London, 1967.

[9] Sznitman, A.S. and Zerner, M. (1999). *A law of large numbers for random walks in random environment*, The Annals of Probability, **27**, 4, 1851-1869.

[10] Sznitman, A.S. (2000). *Slowdown estimates and central limit theorem for random walks in random environment*, J. Eur. Math. Soc. **2**, 93-143.

[11] Varadhan, S.R.S., *Probability Theory*, Courant Institute of Mathematical Sciences , New York, 2001.

TIEMPOS DE REGENERACIÓN PARA ALGUNOS SISTEMAS DE PARTÍCULAS UNIDIMENSIONALES

GREGORIO ROLANDO MORENO FLORES

RESUMEN. En el estudio asintótico de algunas marchas aleatorias en tiempo aleatorio, ha sido útil introducir una estructura de renovación. Estas técnicas han permitido, por ejemplo, probar la ley de los números grandes para marchas aleatorias en medio aleatorio bajo cierta condición de transciencia, en dimensiones arbitrarias. El punto de partida es la definición adecuada de un tiempo de regeneración, que, en general, no es un tiempo de parada, con respecto al cual se prueba una suerte de propiedad de Markov. En [9], se define previamente una sucesión de tiempos de parada $(S_k)_{k\geq 0}$, de modo que el tiempo de regeneración coincide trayectorialmente con el primer instante S_k de modo que $S_{k+1} = \infty$. Estas técnicas han sido aplicadas a ciertos sistemas de partículas en interacción que corresponden a modelos de crecimiento en una dimensión ([2]).

En este trabajo, volvemos a unas ideas presentes en trabajos anteriores de marchas aleatorias en medio aleatorio (ver [5]), en los cuales se define directamente un tiempo de regeneración. Este enfoque permite probar el análogo de la propiedad de Markov mediante una definición directa del tiempo de regeneración, logrando una prueba más sencilla e intuitiva, dependiendo del modelo estudiado.

El ejemplo central al cual se aplicarán estas técnicas es el proceso de combustión asimétrico: estudiamos un sistema de partículas en interacción sobre $\mathbb{Z}$, dependiente de dos parámetros $1 \leq a \leq M$, en el que las partículas recorren marchas aleatorias simples, independiente y asimétricas con tendencia a saltar a la derecha. Cuando una partícula decide saltar a un sitio ocupado por M partículas, muere. Cuando una partícula salta a un sitio que no ha sido visitado con anterioridad, se crean $a-1$ nuevas partículas en ese sitio, las cuales empiezan a moverse similarmente a las partículas antiguas. Consideramos condiciones iniciales para las cuales existe un sitio r tal que todos los sitios a su izquierda ya han sido visitados previamente. Suponemos que, inicialmente, ningún sitio a la derecha de r ha sido visitado. Llamamos r_t al sitio visitado más a la derecha en el instante t. Se prueba la ley de los números grandes y un teorema del límite central funcional para r_t. Las técnicas de estructuras de renovación ya habían sido utilizadas en [2] en el estudio del caso simétrico.