PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

UN TEOREMA SOBRE INVERTIBILIDAD DE OPERADORES EN TYPE SEPARATING SPACES

por

Héctor Moreno Barrera

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de
Magister en Ciencias Exactas mención Matemáticas.

Profesor Guía: María Herminia Ochsenius Alarcón.

Comisión Informante: Claudio Fernández Jaña.
Hans Keller Zullig.
María Herminia Ochsenius Alarcón.

Agosto, 2006
Santiago, Chile

Agradecimientos

A mis queridos viejos, por el amor infinito que me han entregado y los sacrificios que han hecho por mí en estos 25 años. Además, por su apoyo y comprensión que han sido fundamentales en toda mi vida estudiantil.

A mi profesora guía Herminia Ochsenius, por sus enseñanzas, consejos, apoyo, su confianza en mí y dedicación.

A los profesores Claudio Fernández y Hans Keller, por aceptar leer cuidadosamente mi tesis e integrar la comisión informante.

A mis camaradas de Matemáticas: Adrián, Gregorio, Juanito, Martha y Wolfgang, por la amistad incondicional que me han brindado en estos años.

A la Facultad de Matemáticas, por haberme dado la oportunidad de proseguir mis estudios y el apoyo económico que he recibido para el financiamiento de estos.

Y como dice Silvio Rodriguez en su canción Resumen de Noticias: agradezco la participación de todos los que colaboraron con esta melodía.

Índice general

Introducción

En [2] se comienza a desarrollar, en el marco del Análisis Funcional, una teoría general de espacios normados sobre cuerpos con una valuación de Krull

$$| \ | : K \to G \cup \{0\}$$

donde el grupo de valores G es un grupo linealmente ordenado de rango infinito al cual se le adjunta un menor elemento 0.

En [2] y [3] se han estudiado ampliamente una clase de espacios normados, en los cuales todo subespacio cerrado tiene un complemento ortogonal, estos espacios se denominan Norm-Hilbert Spaces (N.H.S.).

Dentro de la clase de los N.H.S. se ha definido recientemente la subclase de los Type Separating Spaces, en los cuales se pide principalmente que los tipos topológicos de las normas de los vectores de una base ortogonal dada sean distintos entre sí. Un ejemplo de un Norm-Hilbert space que satisface esta última condición es el espacio ortomodular construido por Hans Keller en 1980.

En esta tesis generalizamos a la clase de los Type Separating Spaces algunos resultados obtenidos en [1], referentes a operadores Lipschitz (o acotados, como se conocen usualmente) sobre el espacio ortomodular que mencionamos anteriormente. En el Capítulo 1 daremos las definiciones y resultados previos al desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 2 enunciaremos los resultados obtenidos en esta tesis, en los cuales se estudia la invertibilidad de operadores lineales Lipschitz sobre esta subclase de los Type Separating Spaces.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1. El grupo de valores.

Sea G un grupo abeliano multiplicativo con identidad 1. Si G es un conjunto linealmente ordenado tal que para todo $x, y, z \in G$, $x \leq y$ implica $xz \leq yz$, diremos que $G = (G, \leq)$ es un grupo linealmente ordenado. Es fácil ver que si $G \neq \{1\}$ entonces G es libre de torsión y no contiene un menor o mayor elemento.

Un subgrupo H de un grupo linealmente ordenado G se dice **convexo** si

$$\forall g \in G \, \forall h \in H \, (h^{-1} \leq g \leq h \Rightarrow g \in H).$$

Cada subgrupo convexo está acotado superior e inferiormente en G, y el conjunto de todos los subgrupos convexos está linealmente ordenado por la inclusión.

DEFINICIÓN 1.1. Sea G un grupo linealmente ordenado y K un cuerpo. Una **valuación de Krull** de K es una aplicación epiyectiva $|\ | : K \to G \cup \{0\}$ que cumple:

1. $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
2. $|xy| = |x||y|$.
3. $|x + y| \leq \text{máx}\{|x|, |y|\}$.

para todo $x, y \in K$, donde 0 es un elemento adjuntado a G que verifica $0 \leq g$, $0 \cdot g = g \cdot 0$ para todo $g \in G$. G se llama *el grupo de valores* de la valuación $|\,|$.

Sea

$$\mathcal{H} := \{H : \ H \text{ es subgrupo convexo de } G \text{ y } H \neq \{1\}\},$$

diremos que G **es de rango** n si y sólo si $\mathcal{H}$ tiene n elementos, en caso contrario diremos que G es de rango infinito. En el mismo sentido, definimos el **rango de la valuación** como el rango del grupo de valores de la valuación.

2. G-módulos, tipos algebraicos y topológicos.

DEFINICIÓN 1.2. Sea G un grupo linealmente ordenado. Un conjunto linealmente ordenado X se dice que es un G-**módulo** si existe una acción $(g, x) \mapsto gx$ de G sobre X, tal que para todo $g, g_1, g_2 \in G$ y todo $x, x_1, x_2 \in X$:

1. $g_1 \leq g_2 \Rightarrow g_1 x \leq g_2 x$.
2. $x_1 \leq x_2 \Rightarrow g x_1 \leq g x_2$.
3. La órbita de x es coinicial en X.
4. X no tiene un menor elemento.

Podemos concluir que si X es un G-módulo entonces para todo $x_1, x_2 \in X$, $g \in G$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow gx_1 < gx_2.$$

Además, las condiciones 3 y 4 (en conjunto) equivalen a decir que para cada $\epsilon \in X$ existe $g \in G$ tal que $gx < \epsilon$, lo que implica que no existen G-módulos sobre el grupo $\{1\}$.

Para un conjunto linealmente ordenado A, consideramos $A^{\#}$ la completación de A por cortaduras de Dedekind. Si $Z \subseteq A$, definimos la cápsula A-convexa de Z como el conjunto

$$conv_A(Z) = \{x \in A : \text{ existen } z_1, z_2 \in Z \text{ con } z_1 \leq x \leq z_2\}.$$

Sea X un G-módulo. Definimos el **tipo algebraico** de un elemento $s \in X$ (que lo denotamos por Gs) como la órbita de s bajo la acción de G sobre X.

Sea $t \in X$. Para cada $s \in X$ el conjunto Gs es cofinal y coinicial en X, esto es, existen $g_1, g_2 \in G$ tal que $g_1 s \leq t$ y $g_2 s \geq t$ respectivamente. Lo que implica que los conjuntos

$$\{x \in Gs : x \leq t\} \quad y \quad \{x \in Gs : x \geq t\}$$

son no vacíos, y por tanto las siguientes definiciones

$$\tau_l(s;t) := \sup_{X^{\#}} \{x \in Gs : x \leq t\} \quad y \quad \tau_u(s;t) := \inf_{X^{\#}} \{x \in Gs : x \geq t\}$$

tienen sentido.

DEFINICIÓN 1.3. Sean $s, t \in X$. El **tipo topológico** de s con respecto a t es el conjunto

$$\tau(s;t) := \{h \in G : \tau_l(s;t) \leq ht \leq \tau_u(s;t)\}.$$

Una caracterización útil del tipo topológico de un elemento está dada por el siguiente teorema:

TEOREMA 1.4. *El tipo topológico $\tau(s;t)$ de un elemento s de un G-módulo X es un subgrupo convexo de G. Si $t \in Gs$ entonces $\tau(s;t) = \{h \in G : ht = t\}$, si $t \notin Gs$ entonces $\tau(s;t)$ es el subgrupo convexo H más grande para el cual*

$$conv_X(Ht) \cap Gs = \emptyset.$$

Alternativamente, el tipo topológico $\tau(s;t)$ es el conjunto de todos los $h \in G$ que satisfacen

1. *Si $g \in G$, $t \leq gs$ entonces $ht \leq gs$.*
2. *Si $g \in G$, $t \geq gs$ entonces $ht \geq gs$.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo probaremos la segunda parte de este teorema, para el resto de las afirmaciones ver [**2**] 1.6.2.

Sean $s, t \in X$ y consideramos $\tau(s;t)$. Supongamos que $h \in G$ satisface las condiciones (1) y (2) de las hipótesis, observamos que $t \leq \tau_u(s;t)$. Si $ht > \tau_u(s;t)$, entonces existe $h_1 \in G$ tal que $\tau_u(s;t) \leq h_1 s < ht$ y $t \leq h_1 s$, lo que contradice la primera condición que satisface h. Luego, $ht \leq \tau_u(s;t)$. Con argumentos similares se prueba la desigualdad $\tau_l(s;t) \leq ht$, y la definición del tipo topológico nos dice que $h \in \tau(s;t)$.

Por otro lado, supongamos que $h \in \tau(s;t)$. Si $g \in G$ es tal que $t \leq gs$, entonces $\tau_u(s;t) \leq gs$ y por tanto

$$ht \leq \tau_u(s;t) \leq gs,$$

obteniendo (1). Ahora si suponemos que $t \geq gs$ para $g \in G$, procediendo de similar forma se prueba (2).

□

OBSERVACIÓN 1.5. Sean $s, t \in X$. Para $y \in \{x \in Gs : x \leq t\}$ existe $\tilde{g} \in G$ tal que

$$\tilde{g}s < y \leq \tau_l(s;t).$$

Luego, $\tilde{g} \notin \tau(s;t)$ y por tanto $G \neq \tau(s;t)$.

DEFINICIÓN 1.6. Sea G un grupo linealmente ordenado, X un G-módulo y $s_1, s_2, s_3, \ldots$ una sucesión en X.

1. Diremos que $s_1, s_2, \ldots$ satisface la **condición de tipos** si para cada sucesión $g_1, g_2, \ldots$ en G tal que $\{g_1s_1, g_2s_2, \ldots\}$ es acotado superiormente en X se cumple que $\lim_n g_ns_n = 0$.
2. Sea $t \in X$ y $\tau(s_n;t)$. Diremos que $\lim_n \tau(s_n;t) = \infty$ si para cada subgrupo convexo propio H de G existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H \subsetneq \tau(s_n;t)$ para $n \geq n_0$.

TEOREMA 1.7. *Sea G un grupo linealmente ordenado, X un G-módulo y $t \in X$. Entonces, para una sucesión $s_1, s_2, s_3, \ldots$ en X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La sucesión $s_1, s_2, \ldots$ satisface la condición de tipos.*
2. $\lim_n \tau(s_n;t) = \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Ver **[2]** 1.6.6.

□

Por el Teorema 1.7 vemos que la definición de condición de tipos que dimos anteriormente tiene sentido si y sólo si G es un grupo linealmente ordenado de rango infinito. Además, supongamos que G es un grupo de rango infinito que contiene un subgrupo convexo maximal H, entonces G/H es un grupo linealmente ordenado de rango 1 con el orden

$$aH \leq^* bH \Leftrightarrow (ab^{-1} \in H \vee a \leq b).$$

Si X es un G-módulo entonces X es un G/H-módulo con la acción $\pi(g)s := gs$ donde

$$\pi : G \to G/H$$

es la proyección canónica. Aplicando el Teorema 1.7 a X como G/H-módulo y observando que G y G/H inducen las mismas órbitas en X, concluimos que X no puede contener una sucesión que satisfaga la condición de tipos como G-módulo.

3. Espacios de Banach.

Sea X un G-módulo al cual adjuntamos un elemento 0_X con la siguiente convención

- $0_X \leq x$
- $0_G\, x = 0_G\, 0_X = 0_X$

para todo $x \in X$. Consideramos E un K-espacio vectorial tal que K es un cuerpo valuado cuyo grupo de valores es G. Una **X-norma** en E es una función $\| \; \| : E \to X \cup \{0\}$ que satisface las propiedades:

1. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

para todo $x, y \in E$, $\lambda \in K$. Un espacio X-normado es un par $(E, \| \; \|)$ donde E es un espacio K-vectorial y $\| \; \|$ es una X-norma para algún G-módulo X. De forma canónica, esta X-norma induce una topología con la cual E es un espacio topológico Haussdorf, además la suma y la multiplicación por escalar son funciones continuas en esta topología, lo que hace que E sea un espacio vectorial topológico.

Supongamos que E es un espacio X-normado sobre un cuerpo completo K con respecto a una valuación, E se dice **completo o espacio de Banach** si cada red de Cauchy en E converge en E. Además, E se dice que es de **tipo contable** si E contiene un conjunto numerable de vectores D cuya cápsula lineal es densa en E, es decir, $\overline{span\ D} = E$.

4. Ortogonalidad.

DEFINICIÓN 1.8. Sea E un espacio X-normado sobre un cuerpo K. Dos subespacios D_1 y D_2 de E son ortogonales ($D_1 \perp D_2$) si para cada $d_1 \in D_1$, $d_2 \in D_2$

$$\|d_1 + d_2\| = \max\{\|d_1\|, \|d_2\|\}.$$

Un subespacio D se dice que tiene un complemento ortogonal en E si existe un subespacio $S \perp D$ tal que $E = D + S$. Un conjunto de vectores $\{e_i : i \in I\}$ en E se dice ortogonal si para conjunto finito $J \subseteq I$ y $\lambda_j \in K$

$$\|\sum_{j \in J} \lambda_j e_j\| = \max_{j \in J} \|\lambda_j e_j\|.$$

Si $x_1, x_2 \in E$ son tales que $\|x_1\| \notin G\|x_2\|$, entonces de manera directa se puede probar que $x_1 \perp x_2$.

Una sucesión de vectores $e_1, e_2, \ldots$ en un espacio X-normado E se dice una **base de Schauder** de E si para cada $x \in E$ existen únicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \in K$ tal que $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_i e_i$. Una base de Schauder ortogonal la llamaremos simplemente **base**

ortogonal, y en ese caso

$$\|x\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_i e_i\| = \max_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda_n e_n\|.$$

Al igual que en el caso de los espacios de Hilbert clásicos, tenemos que si E un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces para una sucesión ortogonal $e_1, e_2, ...$ en E las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $e_1, e_2, ...$ es una base ortogonal.
2. $e_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y *span* $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ es denso en E.

(Ver [**2**] 2.4.17).

TEOREMA 1.9. *Sea E un espacio de Banach de tipo numerable. Luego E tiene una base ortogonal si y sólo si cada subespacio cerrado tiene una base ortogonal.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**2**] 3.4.1. □

DEFINICIÓN 1.10. Sea Σ la colección de todos los tipos algebraicos en el G-módulo

$$\|E\| \setminus \{0\} := \{\|x\| : x \in E, x \neq 0\},$$

donde E es una espacio de Banach de tipo contable. Una **descomposición canónica (ortogonal) de** E es una suma directa ortogonal

$$E = \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} E_\sigma$$

donde cada E_σ es un subespacio cerrado de E y $\|E_\sigma\| \setminus \{0\} = \sigma$.

En [**2**] 3.4.5, se demuestra el siguiente teorema:

TEOREMA 1.11. *Cada espacio de Banach E con base ortogonal tiene una descomposición canónica. Esta es única en el siguiente sentido: Si $E = \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} E_\sigma = \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} F_\sigma$ son dos descomposiciones canónicas entonces, para cada $\sigma \in \Sigma$, E_σ y F_σ son isomorfos isométricamente.*

5. Norm-Hilbert spaces y Type separating spaces.

Un espacio de Banach E de tipo contable se dice un **norm-Hilbert space (N.H.S.)** si para cada subespacio cerrado D de E existe una proyección lineal epiyectiva $P : E \to D$ para el cual $\|P(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$, que es equivalente a decir que todo subespacio cerrado de E tiene un complemento ortogonal.

PROPOSICIÓN 1.12. *Sea E un espacio de Banach X-normado de tipo contable. Luego son equivalentes:*

1. *E es un Norm-Hilbert space.*
2. *Cada conjunto ortogonal en E puede extenderse a una base ortogonal de E.*

3. *Para cada base ortogonal* $e_1, e_2, e_3, \ldots$ *la sucesión* $n \mapsto \|e_n\|$ *satisface la condición de tipos.*

DEMOSTRACIÓN. Ver **[3]** 3.2.1, 3.2.3. □

Dentro de la clase de los N.H.S. se ha definido recientemente una subclase donde se pide esencialmente que los tipos topológicos de las normas de los vectores de la base sean distintos entre sí.

Se generalizará así una propiedad importante en la construcción del primer espacio ortomodular conocido (H. Keller, 1980). En forma precisa,

DEFINICIÓN 1.13. Sea E un N.H.S. con base ortogonal $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$. Diremos que E es un **type separating space** si existe $t_0 \in X$ tal que para $i \neq j$

$$\tau(\|e_i\|; t_0) \neq \tau(\|e_j\|; t_0).$$

Es en este marco que se desarrolla la presente Tesis.

CAPÍTULO 2

Resultados Principales

En lo que sigue, K es un cuerpo completo con respecto a una valuación de rango infinito con grupo de valores G. Asumimos también que la topología intervalo en $G^{\#}$ satisface el primer axioma de enumerabilidad (ver [**2**] *1.4.4 para formulaciones equivalentes). Además G no contiene un subgrupo convexo maximal, es decir, G es unión de una sucesión estrictamente creciente de subgrupos convexos propios (*[**2**] *4.3.1). Por otra parte, E es un K-espacio vectorial X-normado donde X es un G-módulo.*

DEFINICIÓN 2.1. Sean E,F espacios X-normados. Un operador lineal $A : E \to F$ se dice **Lipschitz (o acotado)** si existe $g \in G$ tal que $\|Ax\| \leq g\|x\|$ para todo $x \in E$.

El lema siguiente es un hecho básico en la teoría de operadores Lipschitz. En [**1**] 3.1 se prueba para el caso del espacio ortomodular canónico de H. Keller, y en [**4**] 3.3.1 se indica que tiene demostración directa. Damos aquí una demostración explícita de ese hecho.

LEMA 2.2. *Sea E un espacio de Banach X-normado y $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ una base ortogonal de E. Una aplicación $B_0 : \{e_i : i \in \mathbb{N}\} \to E$ se extiende a un operador B acotado en E si y sólo si existe $g \in G$ tal que*

$$\|B_0(e_i)\| \leq g\|e_i\|$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $g \in G$ tal que

$$\|B_0(e_i)\| \leq g\|e_i\| \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

Consideramos B_0^*, la extensión lineal de $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ a $E_0 := span\,\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$. Sea $x \in E_0$ de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \qquad (\alpha_i \in K)$$

para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $k \in \{1, 2, ..., n\}$ de modo que

$$\|B_0^*(\alpha_k e_k)\| = \text{máx}\,\{\|B_0(\alpha_i e_i)\| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Puesto que

$$\|x\| = \text{máx}\,\{\|\alpha_i e_i\| : 1 \leq i \leq n\}$$

vemos que $\|x\| \geq \|\alpha_k e_k\|$, y por ser X un G-módulo

$$\|B_0^*(x)\| \leq \|B_0(\alpha_k e_k)\| \leq g\|\alpha_k e_k\| \leq g\|x\|,$$

lo que implica que B_0^* es un operador acotado en E_0.

Por otra parte si $(x_i)_i$ es una sucesión de Cauchy en E_0, entonces $(B_0^*(x_i))_i$ también es una sucesión de Cauchy en E_0. Esto viene del hecho de que B_0^* es un operador acotado en E_0, pues

$$\|B_0^*(x_m - x_n)\| \leq g\|x_m - x_n\|$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$. E es un espacio X-normado completo entonces $(B_0^*(x_i))_i$ converge en E, y definimos para $x \in E$

$$B(x) := \lim_{n\to\infty} B_0^*(x_n)$$

donde $(x_m)_m$ es una sucesión de Cauchy en E_0 que converge a x.

Probaremos que B está bien definida en E. Sean $(x_i)_i$ y $(y_j)_j$ sucesiones de Cauchy que convergen a x. Si a y b los respectivos limites de $(B_0^*(x_i))_i$ y $(B_0^*(y_j))_i$,

$$\begin{aligned}\|a-b\| &= \|(a - B_0^*(x_i)) + (B_0^*(x_i) - B_0^*(y_j)) + (B_0^*(y_j) - b)\| \\ &\leq \text{máx}\left\{\|a - B_0^*(x_i)\|, \|B_0^*(x_i) - B_0^*(y_j)\|, \|B_0^*(y_j) - b\|\right\}.\end{aligned}$$

Puesto que $(B_0^*(x_i))_i$ y $(B_0^*(x_j))_j$ convergen a a y b respectivamente, tomando $\epsilon \in X$ arbitrario podemos encontrar $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\|a - B_0^*(x_i)\|, \|B_0^*(y_j) - b\| < \epsilon$ para $i \geq i_0$, $j \geq j_0$.
Por otra parte,

$$\begin{aligned}\|B_0^*(x_i) - B_0^*(y_j)\| &\leq g\|x_i - y_j\| \\ &= g\|x_i - x + x - y_j\| \\ &\leq g\,\text{máx}\left\{\|x_i - x\|, \|x - y_j\|\right\}\end{aligned}$$

y como $x_i, y_j \to x$ cuando $i, j \to \infty$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\|B_0^*(x_i) - B_0^*(y_j)\| < \epsilon$.
Por lo tanto, tomando $I_0 = \text{máx}\{i_0, j_0, k_0\}$ tenemos que

$$\|a-b\| \leq \text{máx}\left\{\|a - B_0^*(x_i)\|, \|B_0^*(x_i) - B_0^*(y_j)\|, \|B_0^*(y_j) - b\|\right\} < \epsilon \qquad (i, j, k \geq I_0).$$

Puesto que $\epsilon \in X$ es arbitrario, concluimos que $a = b$ y por tanto B está bien definida en E.

Sea

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \in E,$$

entonces

$$\begin{aligned}B(x) &= \lim_{n\to\infty} B_0^*\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} B_0^*(\alpha_i e_i).\end{aligned}$$

Como $B(x)$ existe como limite, la serie anterior es convergente y podemos concluir que $B_0^*(\alpha_i e_i) \to 0$ cuando $i \to \infty$, es decir,

$$\lim_{i\to\infty} \|B_0^*(\alpha_i e_i)\| = 0.$$

Esto último implica que

$$\max\{\|B_0^*(\alpha_i e_i)\| : i \in \mathbb{N}_0\}$$

existe y es igual a $\|B_0^*(\alpha_t e_t)\|$ para algún $t \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\|B(x)\| \leq \max\{\|B_0^*(\alpha_i e_i)\| : i \in \mathbb{N}\} = \|B_0^*(\alpha_t e_t)\|.$$

Por otra parte $\|x\| \geq \|\alpha_t e_t\|$, y concluimos que

$$\|B(x)\| \leq \|B_0^*(\alpha_t e_t)\| \leq g\|\alpha_t e_t)\| \leq g\|x\|.$$

Luego, B es un operador lineal acotado en E.

□

LEMA 2.3. *Sean E un espacio X-normado, U un subespacio de E y $B : U \to E$ un operador lineal. Supongamos que V es un subespacio cerrado de U con $\dim U/V < \infty$ tal que la restricción de B a V es acotada. Entonces B es acotada en U.*

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre $\dim U/V = n$.

Supongamos que $n = 1$, entonces $U = V \oplus K(w)$ para algún $w \in U \setminus V$. Como B es acotado en V, existe $\tilde{h} \in G$ tal que $\|B(v)\| \leq \tilde{h}\|v\|$ para todo $v \in V$.

Supongamos que B no es acotado en $U \setminus V$, entonces consideramos el conjunto de todos los vectores en U de la forma $x = w + v_x$ para algún $v_x \in V$, para los cuales existe $g \in G$ con $g \geq \tilde{h}$ y $\|Bx\| > g\|x\|$. Este conjunto lo denotaremos por G_B.

Puesto que B no es acotado en $U \setminus V$, afirmamos que para todo $g \in G$ con $g \geq \tilde{h}$ existe $x_g \in G_B$ tal que $\|Bx_g\| > g\|x_g\|$ (en particular, $G_B \neq \emptyset$). En efecto, si B no es acotado en $U \setminus V$ tenemos que para todo $g \in G$ con $g \geq \tilde{h}$ existe $y_g \in U \setminus V$ tal que $\|B(y_g)\| > g\|y_g\|$. Pero y_g es de la forma $y_g = v_{y_g} + \alpha w$ con $\alpha \neq 0$ y $v_{y_g} \in V$, luego tomando $x_g := \alpha^{-1} y_g = \alpha^{-1} v_{y_g} + w$, se cumple que $\|Bx_g\| > g\|x_g\|$.

Construiremos un subconjunto $\mathcal{C} \neq \emptyset$ de G_B en el cual todo elemento $c \in \mathcal{C}$ se tiene que $\|Bc\| \leq \tilde{h}\|c\|$, lo que contradice la definición de G_B y por tanto B es acotado en este caso.

Por ser V un subespacio cerrado, tenemos que existe $\epsilon \in X$ de modo que $\|x\| > \epsilon$ para todo $x \in G_B$, de lo contrario G_B contendría una red de puntos en V que converge a $-w \in Kw$.

Sea $\delta \in X$ y observamos que existe $\tilde{g} \in G$ tal que $\tilde{g}\epsilon > \delta$. Puesto que B no es acotado en $U \setminus V$, para este elemento $\tilde{g} \in G$ existe $x_{\tilde{g}} \in G_B$ con $\|B(x_{\tilde{g}})\| > \tilde{g}\|x_{\tilde{g}}\|$. Pero $\|x\| > \epsilon$ para todo $x \in G_B$, por lo tanto $\|B(x_{\tilde{g}})\| > \tilde{g}\epsilon > \delta$. De este modo, podemos construir una red $(x_i)_{i\in I} = (w+v_i)_{i\in I}$ en G_B tal que $\|B(x_i)\| \to \infty$ cuando $i \to \infty$, es decir, el conjunto $\{\|B(x_i)\| : i \in I\}$ es cofinal en X.

Ahora probaremos que el conjunto $\{x_i = w + v_i : i \in I\}$ que acabamos de construir, es el subconjunto C de G_B que mencionamos anteriormente.

Tenemos que

$$\|B(x_i)\| = \|B(w) + B(v_i)\| \leq \text{máx}\{\|B(w)\|, \|B(v_i)\|\} \qquad \text{y}$$

$$\|x_i\| = \|w + v_i\| \leq \text{máx}\{\|w\|, \|v_i\|\}$$

para todo $i \in I$. Pero $\|B(x_i)\| \to \infty$ cuando $i \to \infty$, lo que implica que existe $i_0 \in I$ tal que

$$\|B(x_i)\| = \|B(w) + B(v_i)\| = \|B(v_i)\| \leq \tilde{h}\|v_i\| \quad (i \geq i_0),$$

y vemos que $\|v_i\| \to \infty$ cuando $i \to \infty$. Por lo tanto existe $j_0 \in I$ tal que

$$\|x_i\| = \|v_i\| \qquad (i \geq j_0).$$

Puesto que $v_i \in V (i \in I)$ y B es acotado en V, con $N_0 = \text{máx}\{i_0, j_0\}$ concluimos que

$$\|B(x_i)\| = \|B(v_i)\| \leq \tilde{h}\|v_i\| = \tilde{h}\|x_i\| \qquad (i \geq N_0).$$

lo que contradice que $x_i \in G_B$ para todo $i \in I$.

Ahora supongamos que V es un subespacio de codimensión $n+1$ para $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\dim U/V = n + 1$. Luego,

$$U = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle \oplus \langle v_{n+1} \rangle \oplus V.$$

Por hipótesis de inducción, B es acotado en $\bigoplus_{i=2}^{n+1} \langle v_i \rangle \oplus V$ y éste último es un subespacio cerrado de U. Haciendo el mismo procedimiento que en el caso $n = 1$ se obtiene que B es acotado en U.

□

LEMA 2.4. *Sea E un espacio de Banach y $B : U \to U'$ un operador lineal biyectivo entre U y U' subespacios de E. Supongamos que existe un subespacio cerrado $V \subseteq U$ con $\dim U/V < \infty$ tal que para todo $v \in V$ existen $g_1, g_2 \in G$ con*

$$g_1\|v\| \leq \|B(v)\| \leq g_2\|v\|.$$

Luego existen g_1', g_2' tal que para todo $u \in U$

$$g_1'\|u\| \leq \|B(u)\| \leq g_2'\|u\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $V' := B(V)$. Puesto que V es cerrado también es completo. Por hipótesis, la restricción de B a V es un isomorfismo topológico. Por lo tanto V' también es completo y por tanto cerrado. Como B es biyectiva observamos que $\dim U/V < \infty$. Luego, aplicando el lema 2.3 a B y B^{-1} se obtiene la afirmación.

□

TEOREMA 2.5. *Sean E un type separating space y $B : E \to E$ un operador lineal, acotado e inyectivo. Si existen $g_1, g_2 \in G$ tal que*

$$g_1\|e_i\| \leq \|B(e_i)\| \leq g_2\|e_i\|$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces B es epiyectivo y B^{-1}, la inversa algebraica de B, también es acotada.

DEMOSTRACIÓN. La afirmación crucial que debe probarse es la epiyectividad de B. Para ello, probaremos que E contiene un subespacio D de codimensión finita tal que

$$\dim E/B(D) = \dim B(E)/B(D).$$

Sea $t_0 \in X$ con $\tau(\|e_i\|; t_0) \neq \tau(\|e_i\|; t_0)$ para $i \neq j$. Sea H el menor subgrupo convexo que contiene a g_1 y g_2. Por el Teorema 1.12, la sucesión $(\|e_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de tipos, y el Teorema 1.7 nos dice que existe $m \in \mathbb{N}$ para el cual $H \subsetneq \tau(\|e_i\|; t_0)$ si $i > m$. Claramente vemos que $g_1, g_2 \in \tau(\|e_i\|; t_0)$ si $i > m$.

Primero probaremos que $\tau(\|e_i\|; t_0) = \tau(\|B(e_i)\|; t_0)$ para todo $i > m$.

Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $i > m$. Supongamos que $g \in G$ con $t_0 \leq g\|B(e_i)\|$. De las desigualdades de las hipótesis, se tiene que $t_0 \leq gg_2\|e_i\|$.

Supongamos que $h \in \tau(\|e_i\|; t_0)$. Puesto que g_1 también pertenece a $\tau(\|e_i\|; t_0)$, del teorema 1.4 observamos que

$$g_1^{-1}hg_2t_0 \leq gg_2\|e_i\|.$$

Pero $\|e_i\| \leq g_1^{-1}\|B(e_i)\|$, luego

$$g_1^{-1}ht_0 \leq g\|e_i\| \leq gg_1^{-1}\|B(e_i)\|$$

y de este modo concluimos que $ht_0 \leq g\|B(e_i)\|$.

Por otro lado, supongamos que $\tilde{g} \in G$ verifica $\tilde{g}\|B(e_i)\| \leq t_0$. Observamos que $g_1\tilde{g}\|e_i\| \leq t_0$, y como $g_1, g_2, h \in \tau(\|e_i\|; t_0)$, el teorema 1.4 nos permite establecer la desigualdad

$$g_1\tilde{g}\|e_i\| \leq g_2^{-1}g_1h.$$

Además $\|e_i\| \geq g_2^{-1}\|B(e_i)\|$, lo que implica que $g_2^{-1}\tilde{g}\|B(e_i)\| \leq g_2^{-1}ht_0$ y de este modo obtenemos que $\tilde{g}\|B(e_i)\| \leq ht_0$.

Por lo tanto, todo elemento $h \in \tau(\|e_i\|; t_0)$ verifica las condiciones de la segunda parte del teorema 1.4 con $s = \|B(e_i)\|$ y $t = t_0$. Luego, $\tau(\|e_i\|; t_0) \subseteq \tau(\|B(e_i)\|; t_0)$. Usando argumentos similares se prueba la otra inclusión.

De lo anterior, tenemos lo siguiente

$$(*) \qquad \tau(\|B(e_i)\|; t_0) \neq \tau(\|B(e_j)\|; t_0) \quad \text{y} \quad G\|e_i\| = G\|B(e_i)\|$$

si $i \neq j$ con $i, j > m$.

Sea $W := span\{e_i : 1 \leq i \leq m\}$ el cual es un subespacio cerrado de E. Afirmamos que $E = W \oplus D$ donde $D := span\{e_i : i > m\}$, pues si $x \in E$ es de la forma $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ con $\alpha_i \in K$ vemos que

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i}_{\in W} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i e_i}_{\in D}$$

y por tanto $E = D + W$. Por otro lado si $x \in D \cap W$ y $x \neq 0$, entonces $\|x\|$ tendría 2 tipos algebraicos, pues los vectores que pertenecen al conjunto $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ tienen tipos algebraicos distintos. Pero la norma de un vector no nulo pertenece solamente a un tipo algebraico ya que las órbitas forman una partición de X, y concluimos que $x = 0$. Luego, $E = D \oplus W$.

Sea $x \in D$ con

$$x = \sum_{i=m+1}^{\infty} \beta_i e_i$$

y

$$\|x\| = \text{máx}\{\|\beta_i e_i\| : i > m\} = \|\beta_t e_t\|$$

para algún $t \in \mathbb{N}$. Por $(*)$, los elementos de $\{B(e_i) : i > m\}$ tienen tipos algebraicos distintos, entonces

$$\begin{aligned} \|B(x)\| &= \|\sum_{i=m+1}^{\infty} B(\beta_i e_i)\| \\ &= \text{máx}\{\|B(\beta_i e_i)\| : i > m\} \\ &= \|B(\beta_k e_k)\| \end{aligned}$$

para algún $k \in \mathbb{N}$. Pero

$$g_1\|x\| = g_1\|\beta_t e_t\| \leq \|B(\beta_t e_t)\| \leq \|B(\beta_k e_k)\| \leq g_2\|\beta_k e_k\| \leq g_2\|\beta_t e_t\| = g_2\|x\|,$$

y concluimos que $g_1\|x\| \leq \|B(x)\| \leq g_2\|x\|$ para todo $x \in D$. Puesto que D es cerrado, entonces la completitud de E implica la completitud de D y utilizando la desigualdad que obtuvimos anteriormente tenemos que $D' := B(D)$ también es completo, y por tanto D' es cerrado.

Sea W' un complemento ortogonal cerrado de D' en E (el cual existe pues D' es cerrado). Ahora D' sólo contiene vectores cuyo tipo algebraico es $G\|e_i\|$ con $i \geq m+1$. En efecto, si $y = \sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i e_i$ entonces

$$\begin{aligned} \|B(y)\| &= \text{máx}\{\|B(\alpha_i e_i)\| : i > m\} \\ &= \|B(\alpha_t e_t)\| \\ &= |\alpha_t|\,\|B(e_t)\| \in G\|B(e_t)\| \end{aligned}$$

para algún $t > m$, y por $(*)$ vemos que $\|B(y)\| \in G\|e_t\|$.

Por otro lado, W' sólo contiene vectores cuyo tipo algebraico es $G\|e_i\|$ con $1 \leq i \leq m$. De lo contrario, si $x \in W'$ y $\|x\| \in G\|e_{i_0}\|$ con $i_0 > m$ tendríamos que

$$\{B(e_i) : i > m\} \cup \{x\} \cup \{e_i : 1 \leq i \leq m\}$$

es un conjunto ortogonal en E. Por la Proposición 1.12 podemos extender este conjunto a una base ortogonal de E, de modo que tendríamos una descomposición canónica $E = \bigoplus_{\sigma\in\Sigma} E_\sigma$ en la cual $x, B(e_{i_0}) \in E_\sigma$ con $\sigma = G\|e_{i_0}\|$, y puesto que estos vectores son ortogonales vemos que $\dim E_\sigma \geq 2$. Pero $E = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\langle e_i\rangle$ también es una descomposición canónica de E y

$$\dim E_\sigma \geq 2 > 1 = \dim\langle e_{i_0}\rangle,$$

lo que contradice el Teorema 1.11. Además W' es cerrado, entonces por el Teorema 1.9 tiene una base ortogonal y por tanto $\dim W' \leq m$. Luego, por ser B un operador inyectivo

$$m \geq \dim E/B(D) \geq \dim B(E)/B(D) = \dim E/D = m.$$

Por lo tanto $E = B(E)$, y el resto de la afirmación está dada por el Lema 2.4.

□

En casos importantes en la teoría de operadores Lipschitz, es inmediato que ciertos operadores son inyectivos, por ejemplo los operadores indescomponibles construidos en [**5**] y [**6**].

La condición importante para el Teorema 2.5 pasa a ser la referente a la acotación inferior. El teorema siguiente da una criterio para ello. Para enunciarlo daremos algunas definiciones previas.

Sean E, F espacios X-normados. Diremos que un operador $B : E \to F$ es **estrictamente Lipschitz** si existe $g \in G$ tal que $\|Bx\| < g\|x\|$ para todo $x \in E$.

Para un operador estrictamente Lipschitz $B : E \to F$ ponemos

$$\Gamma_B^\sim := \{g \in G : \|Bx\| < g\|x\| \text{ para todo } x \in E \text{ con } x \neq 0\}$$

y

$$\|B\|^\sim := \inf_{G^\# \cup\{0\}} \Gamma_B^\sim.$$

Llamaremos a $\|\ \|^\sim$ **la norma estrictamente Lipschitz.**

En [**4**] 2.2.4, se prueba que $\|\ \|^\sim$ es efectivamente una norma para el espacio K-vectorial de los operadores estrictamente Lipschitz.

Definición 2.6. Sea E un espacio X-normado y $e_1, e_2, \ldots$ una base ortogonal de E. Para $m, n \in \mathbb{N}$ definimos el operador $P_{mn} : E \to E$ por

$$P_{mn}(e_k) = \delta_{kn} e_m \ \ (k \in \mathbb{N}).$$

LEMA 2.7. *Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$\|P_{mn}\|^{\sim} = \inf_{G^{\#}\cup\{0\}} \{g \in G : \|e_m\| < g\|e_n\|\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [4] 3.3.1.

□

Para concluir este trabajo, enunciamos un criterio sobre la acotación inferior que se menciona en el Teorema 2.5.

TEOREMA 2.8. *Sea E un espacio X-normado con base ortogonal $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $A : E \to E$ un operador lineal cuya matriz con respecto a esa base es*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Entonces existe $g \in G$ tal que

$$g\|e_i\| \leq \|Ae_i\|$$

para todo $i \in \mathbb{N}$ si y solo si el conjunto $\{\|a_{mn}P_{mn}\|^{\sim} : m, n \in \mathbb{N}\}$ contiene una sucesión $(\|a_{k(n)n}P_{k(n)n}\|^{\sim})_{n\in\mathbb{N}}$ acotada inferiormente en G.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $h \in G$ tal que

$$g\|e_i\| \leq \|Ae_i\|$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, luego $Ae_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jn}e_j$ y por tanto

$$\|Ae_n\| = \|\sum_{j=1}^{\infty} a_{jn}e_j\| = \|a_{k(n)n}e_{k(n)}\|$$

para algún $k(n) \in \mathbb{N}$. Observamos que $g|a_{k(n)n}|^{-1}\|e_n\| \leq \|e_{k(n)}\|$, lo que implica que

$$g|a_{k(n)n}|^{-1} \notin \daleth_{k(n)n} := \left\{h \in G : \|e_{k(n)}\| < h\|e_n\|\right\}.$$

Por lo tanto si $h \in \daleth_{k(n)n}$, por lo menos debe tenerse que $g|a_{k(n)n}|^{-1} < h$, de lo contrario $\|e_{k(n)}\| < h\|e_n\| \leq g|a_{k(n)n}|^{-1}\|e_n\|$.

Luego, por el Lema 2.7

$$g|a_{k(n)n}|^{-1} \leq \|P_{k(n)n}\|^{\sim}.$$

Haciendo este mismo procedimiento para todo $n \in \mathbb{N}$, se construye una sucesión $(\|a_{k(n)n}P_{k(n)n}\|^{\sim})_{n\in\mathbb{N}}$ que está acotada inferiormente por g.

Por otro lado, supongamos que el conjunto $\{\|a_{mn}P_{mn}\|^{\sim} : m, n \in \mathbb{N}\}$ contiene una sucesión $(\|a_{k(n)n}P_{k(n)n}\|^{\sim})_{n\in\mathbb{N}}$ acotada inferiormente en G, digamos por $g \in G$. Por lo tanto, sin perder generalidad suponemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|a_{k(n)n}P_{k(n)n}\|^{\sim} > g.$$

Sea $i \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.7 vemos que $g|a_{k(i)i}|^{-1} < h$ para todo $h \in \daleth_{k(i)i}$ y por tanto $g|a_{k(i)i}|^{-1} \notin \daleth_{k(i)i}$. Luego, tenemos que

$$g\|e_i\| \leq \|a_{k(i)i}e_{k(i)}\| \leq \|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ji}e_j\| = \|Ae_i\|.$$

Puesto que la elección de i es arbitraria, se obtiene la otra parte de la afirmación.

□

Bibliografía

[1] H. Keller and H. Ochsenius, *Bounded operators on a non-archimedean orthomodular spaces*, Math. Slovaca **45** (1995), 4, 413-434.

[2] H. Ochsenius and W. Schikhof, *Banach spaces over fields with an infinite rank valuation*, In p-Adic Functional Analysis, Lecture Notes in pure and applied mathematics 207, edited by J. Kakol, N. De Grande-De Kimpe and C. Perez-Garcia. Marcel Dekker (1999), 233-293.

[3] H. Ochsenius and W. Schikhof, *Norm Hilbert Spaces over Krull values fields.*, Indag. Math., N.S. **17** (2006), 1, 65-84.

[4] H. Ochsenius and W. Schikhof, *Lipschitz operators on Banach spaces over Krull valued fields.* In Ultrametric Functional Analysis, Contemporary Mathematics 384, edited by B. Diarra, A. Escassut, A.K. Katsaras, L. Narici. A.M.S. (2005), 203-233.

[5] C. Barrios, *Dos familias de operadores autoadjuntos e indescomponibles en un espacio ortomodular.* Tesis de Magister en Ciencias Exactas (Matemáticas). Pontificia Universidad Católica de Chile (2004).

[6] T. Costa, *Operadores indescomponibles sobre cuerpos de series de potencias.* Tesis de Magister en Ciencias Exactas (Matemáticas). Universidad de Chile (2005).